Resolución ejercicio 2 del Primer Parcial 1C2021

Algoritmos y Estructura de Datos 1

Comisión 3

11 octubre 2021

Enunciado

La relación de *orden lexicográfico* se escribe "$\sqsubset$" y corresponde al orden en el que aparecen las palabras en el diccionario. Por ejemplo, sabemos que $\text{ALA} \sqsubset \text{ALADO} \sqsubset \text{ARCO} \sqsubset \text{BALA}$. En este ejercicio trabajaremos con el orden lexicográfico sobre secuencias de enteros. Más precisamente, se pide:

a) Especificar el predicado auxiliar pred menorLex(s : seq($\mathbb{Z}$), t : seq($\mathbb{Z}$)), que es verdadero si y sólo si s es lexicográficamente menor que t, es decir $s \sqsubset t$. Más precisamente, $s \sqsubset t$ si y sólo si, para algún entero k, las secuencias s y t coinciden en un prefijo de longitud k y se da una de las dos opciones siguientes:

- o bien la secuencia s tiene exactamente k elementos (con índices $0, \ldots, k-1$) y t es estrictamente más larga,
- o bien el valor de s en la posición k es estrictamente menor que el valor de t en esa posición.

Por ejemplo, $\langle\rangle \sqsubset \langle 1\rangle \sqsubset \langle 1,2,3\rangle \sqsubset \langle 1,4,3\rangle \sqsubset \langle 1,4,5\rangle \sqsubset \langle 1,5\rangle \sqsubset \langle 2\rangle$.

Enunciado (cont.)

b) Especificar el problema que recibe como entrada dos secuencias de enteros s y t, donde t debe ser no vacía, y modifica la secuencia s de tal modo que la secuencia modificada s' es de igual longitud que s y lexicográficamente menor que t. Además, s' debe estar "lo más cerca posible" de s, es decir, se debe minimizar la *distancia de Manhattan* entre s y s'. Por último, se debe devolver el entero d que representa la distancia entre s y s'.

Por ejemplo:

- Si $s = \langle 1, 2, 3 \rangle$ y $t = \langle 1, 2, 3, 4 \rangle$, cabe notar que $s \sqsubset t$ y por lo tanto la única respuesta posible es $s' = s$ y $d = 0$.
- Si $s = \langle 1, 2, 5 \rangle$ y $t = \langle 1, 2, 3, 4 \rangle$ una respuesta posible es $s' = \langle 0, 2, 5 \rangle$ con $d = 1$. Otra respuesta posible es $s' = \langle 1, 1, 5 \rangle$, también con $d = 1$ (como no podría ser de otra manera, ya que la respuesta debe minimizar la distancia).
- Si tuviéramos $s = \langle 1, 2, 3 \rangle$ y $t = \langle \rangle$, **no habría manera** de modificar s para que sea lexicográficamente menor que t.

Enunciado (cont.)

Nota (1): Si t es vacía el problema no tiene solución. Puede asumir sin demostrarlo que, si t es no vacía, siempre se puede encontrar una secuencia s' de igual longitud que s y lexicográficamente menor que t.

Nota (2): Puede asumir ya definida una función auxiliar aux distancia(s : seq($\mathbb{Z}$), t : seq($\mathbb{Z}$)) : $\mathbb{Z}$, que devuelve la distancia de Manhattan entre dos secuencias de enteros, que se asumen de la misma longitud.

Nota (3): La distancia de Manhattan es la suma de las diferencias (en valor absoluto) de los elementos de s y t, por ejemplo distancia$(\langle 4, 2, 9\rangle, \langle 8, 5, 7\rangle) = |4 - 8| + |2 - 5| + |9 - 7| = 4 + 3 + 2 = 9$.

Resolución

$s \sqsubset t$ si y sólo si, para algún entero k, las secuencias s y t coinciden en un prefijo de longitud k y se da una de las dos opciones siguientes:

- o bien la secuencia s tiene exactamente k elementos (con índices $0, \ldots, k-1$) y t es estrictamente más larga,
- o bien el valor de s en la posición k es estrictamente menor que el valor de t en esa posición.

Escribamos las condiciones en lenguaje natural:
i) Existe un entero k menor las dimensiones de ambas secuencias.
ii) Hasta la posición $k-1$ ambas secuencias coinciden.
iii) La longitud de $|s| = k$ con $k < |t|$, o $s[k] < t[k]$.

a) `pred menorLex` (s : $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$, t : $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$) {
  $(\exists k : \mathbb{Z})(0 \leq k \leq \text{mín}(|s|, |t|)) \wedge$
  $(\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < k \rightarrow_L s[i] = t[i]) \wedge$
  $((k = |s| \wedge |s| < |t|) \vee (k < |s| \wedge k < |t| \wedge_L s[k] < t[k]))$
}

Nota: Ver que si no se pone la condición $k < |t|$ el último término se puede indeterminar por ejemplo en $\langle 1, 2, 3\rangle$ y $\langle 1\rangle$.

}

Ahora resolvamos el punto b)

proc generaLex (inout s: $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$, in t: $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$, out d: $\mathbb{Z}$) {
  Pre $\{0 < |t| \ \wedge_L \ s = S_0\}$
  Post $\{|s| = |S_0| \wedge$ menorLex$(s, t) \wedge d =$
    distancia$(s, S_0) \wedge$minDistLex$(s, S_0, t)\}$

}

pred minDistLex (s: $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$, S_0 :$seq\langle\mathbb{Z}\rangle$, t :$seq\langle\mathbb{Z}\rangle$){
$(\forall r : seq\langle\mathbb{Z}\rangle)(|r| = |s| \wedge$menorLex$(r, t) \rightarrow_L$
distancia$(s, S_0) \leq$distancia$)(r, S_0))$