Лемма

Пусть у нас есть $t = sqr(\lfloor x/4 \rfloor)$, тогда заметим, что в случае $(2t+1)^2 \leq x$ значение $sqr(x)$ равно $2t+1$, иначе оно равно $2t$.

Доказательство:

1) Пусть $(2t+1)^2 \leq x$. Предположим, что $sqr(x) \neq 2t+1$. Но тогда $sqr(x) > 2t+1$, так как это по определению это максимальное число, в квадрате не превосходящее аргумент. Пусть $sqr(x) = k \geq 2t+2$. Покажем, что $(2t+2)^2 > x$. Пусть это не так. То есть выполнено $(2t+2)^2 \leq x$. Но тогда $(t+1)^2 \leq t^2 + 4t + 1 \leq \lfloor x/4 \rfloor$, противоречие с правильностью значения $sqr(\lfloor x/4 \rfloor)$.

2) $(2t+1)^2 > x$. Покажем, что обязательно выполнено $(2t)^2 \leq x$. Пусть это не так, но тогда $4t^2 > x$. Тогда $t^2 > \lfloor x/4 \rfloor$, противоречие. Тогда в этом случае $sqr(x) = 2t$.