1 Ряд Лорана

Утверждение 1.1. *Существуют $r, R \in [0, +\infty)$ такие, что $\forall z : r < |z| < R$ некоторый ряд Лорана абсолютно сходится, а также $\forall z : |z| > R$ или $|z| < r$ этот ряд расходится.*

Доказательство. Нужно воспользоваться теоремой для радиуса сходимости степенных рядов. ■

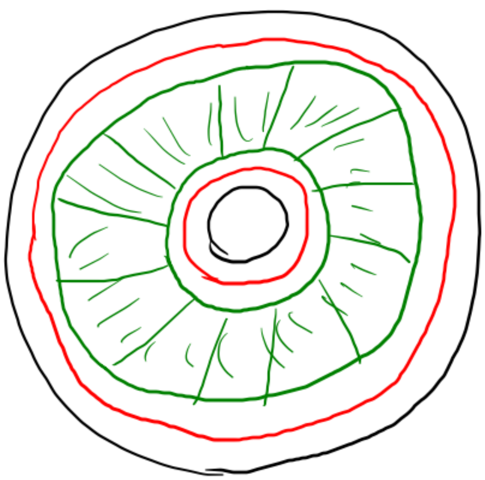
Утверждение 1.2. *В кольце, лежащем строго внутри кольца сходимости, сходимость равномерная и можно дифференцировать почленно.*

Доказательство. Отсылка к свойствам степенных рядов ■

Утверждение 1.3. *Если голоморфная f раскладывается в кольце $r < |z| < R$ в ряд Лорана, то его коэффициенты определяются однозначно и $a_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\rho\mathbb{T}} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi$, где $r < \rho < R$.*

Доказательство. Честно проинтегрируйте то, что написано в условии и получите нужную формулу. Не забудьте, что если ряд сходится в некоторой области равномерно, то в ней можно интегрировать почленно. ■

Теорема 1.1 (Теорема Лорана)**.** *$f \in H(r < |z| < R)$. Тогда f раскладывается в этом кольце в ряд Лорана.*



Доказательство.
Возьмите $r < r_1 < r_2 < R_2 < R_1 < R$. Раскладывать в ряд Лорана будем для $r_2 \le |z| \le R_2$. Для этого напишем для них интегральную формулу Коши по компакту. Далее стандартным образом раскидаем всё на ряды с помощью геометрической прогрессии. Не забываем про то, почему можно менять сумму с интегралом: тут работает признак Вейрштрасса: ряды будут равномерно сходиться. ■

Утверждение 1.4. *Неравенство Коши: $|a_n| \le \dfrac{M_r}{r^n}$.*

Доказательство. Оцените интеграл самым простым образом. ■

Утверждение 1.5. *$f \in H(r < |z| < R)$. Тогда существует $g \in H(R\mathbb{D})$ и $h \in H(\mathbb{C} \setminus r\mathbb{D})$, такие что $f = g + h$. Если добавить условие $\lim\limits_{z\to\infty} h(z) = 0$, то такое разложение единственно.*

Доказательство. В качестве g надо взять правильную часть ряда Лорана, в качестве h – главную часть.
Единственность. Пусть $f = g_1 + h_1 = g_2 + h_2$.
$F(z) = g(z) - g_1(z)$ при $|z| < R$ и $h_1(z) - h(z)$ при $|z| > r$. Если $r < |z| < R$, то неважно какую мы используем функцию, то есть F – целая функция. При этом $\lim\limits_{z\to\infty} F = 0$, значит, F – ограничена, по теореме Лиувилля $F = const$. Но тогда $F = 0$ (из-за предела). ■

Теорема 1.2 (характеристика устранимой особой точки). *$f \in H(0 < |z - z_0| < R)$, следующие условия равносильны:*

1. *z_0 – устранимая особая точка.*
2. *$f(z)$ ограничена в окрестности z_0.*
3. *Существует $g \in H(|z - z_0| < R)$ такая, что $f(z) = g(z)$ при $0 < |z - z_0| < R$*
4. *В главной части ряда Лорана все коэффициенты нулевые.*

Доказательство. $4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1 \Rightarrow 2$ очевидно
$2 \Rightarrow 4$: напишите разложение и покажите, что коэффициенты главной части равны 0 за счет неравенства Коши. ■

Теорема 1.3 (характеристика полюса). *$f \in H(0 < |z - z_0| < R)$, следующие условия равносильны:*

1. *z_0 – полюс.*
2. *существует $m \in \mathbb{N}$ и $g \in H(|z - z_0| < R)$ такая что $g(z_0) \neq 0$ и $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z - z_0)^m}$ при $0 < |z - z_0| < R$.*
3. *В главной части ряда Лорана конечное число нунелвых коэффициентов, но они есть.*

Доказательство. $2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$ очевидно.
$2 \Rightarrow 1$: $|f(z)| > 1$ в некоторой окрестности $|z - z_0| < r$. Тогда $h = 1/f \in H(0 < |z - z_0| < r)$ и $lim_{z \to 0} h(z) = 0$. Тогда z_0 – устранимая особая точка для h. Тогда можно считать, что h голоморфна в $|z - z_0| < r$. В таком случае в z_0 у нее есть кратность нуля, то есть $h(z) = (z - z_0)^m k(z)$, где $k(z_0) \neq 0$. Тогда $f(z) = (1/k(z))/(z - z_0)^m$, получили нужное представление. ■

Теорема 1.4. *Если f и g мероморфны в Ω, то $f \pm g$, fg, f/g ($g \neq 0$ всюду, конечно), f' мероморфны в Ω.*

Доказательство. Если вырезать небольшие кружочки с центрами в особых точках f, g, то $f + g, fg, f'$ будут голоморфны в оставшейся области. Значит надо проверить только для старых особых точек наличие нужных представлений. В случае $\pm$ надо сложить два ряда Лорана, в случае с $\cdot,'$ надо использовать форму с $(z - z_0)^k h(z)$, где h – голоморфна. Если $g \neq 0$ всюду, то она не имеет последовательность сходящихся нулей, засчет этого рассуждение для f/g тоже сработает (правда может добавиться куча особых точек, где $g = 0$). ■

Утверждение 1.6. *Все мероморфные функции в $\mathbb{C}$ имеют вид f/g, где f, g – голоморфны.*

Теорема 1.5 (Сохоцкий). *Пусть a – существенная особая точка f.*
Тогда $\forall r > 0 : Cl\{f(z) : 0 < |z - a| < r\} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Доказательство. Надо показать, что для любого $A \in C \cup \{\infty\}$ есть $z_n \longrightarrow a$, такая что $f(z_n) \longrightarrow A$. Для $A = \infty$ это понятно, потому что f не может быть ограничена в окрестности своей существенной особой точки. Для всех остальных A задача сводится к ∞ с помощью $g = \dfrac{1}{f - A}$. ■

Теорема 1.6 (Большая теорема Пикара). *В любой проколотой окрестности особой точки мероморфная функция принимает все значения из $\overline{\mathbb{C}}$ кроме, возможно, одного.*

Утверждение 1.7. *$f(z) = e^{1/z}$ принимает в любой окрестности 0 все значения кроме 0.*

Утверждение 1.8. *Можно определить типы особых точек для ∞ аналогичным образом. Для эквивалентных определений через ряд Лорана меняется лишь тип части: теперь говорим про положительные степени.*

Доказательство. С помощью замены $w = 1/z$ сводим ∞ к 0. ∎

Теорема 1.7 (Лиувиль)**.** $f \in H(\overline{\mathbb{C}}) \Leftrightarrow f \equiv const$

Доказательство. Из голоморфности на бесконечности следует ограниченность вне некоторого круга. Внутри этого круга она ограничена по непрерывности. Применяем обычную теорему Лиувиля. ∎

Теорема 1.8. *При стереографической проекции точке $z = x + iy$ соответствует $u = \dfrac{x}{1+|z|^2}, v = \dfrac{y}{1+|z|^2}, w = \dfrac{|z|^2}{1+|z|^2}$. Обратное отображение такое: $x = \dfrac{u}{1-w}, y = \dfrac{v}{1-w}$.*

Доказательство. Найти обратное отображение можно с помощью параметризации прямой $(x, \dfrac{v}{u}x, \dfrac{w-1}{u} \cdot x + 1)$. Чтобы найти назад нужно решить квадратное уравнение. ∎

Утверждение 1.9.
1. *Расстояние между точками, соответствующими z и $\widetilde{z}$, на сфере Римана равно $\dfrac{|z-\widetilde{z}|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|\widetilde{z}|}}$, если $\widetilde{z} = \infty$, то расстояние равно $\dfrac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}$*
2. *Сходимость в $\overline{\mathbb{C}}$ равносильна сходимости на сфере Римана.*
3. *$\overline{\mathbb{C}}$ компактно.*

Доказательство.
1. надо честно посчитать, подставив образы из теоремы.
2. рассмотрите случаи и поймите, что сходится именно то, что должно сходиться, чтобы стрелочки работали.
3. тут надо помахать руками и сказать, что если мы берем последовательность в $\overline{\mathbb{C}}$, то ей можно сопоставить последовательность на сфере, выбрать из нее сходящуюсь последовательность (так как сфера компактна) и тогда прообразы образуют сходящуюсь последовательность в $\overline{\mathbb{C}}$.

∎

2 Вычеты

Утверждение 2.1. *Если f голомофорна в $0 < |z-a| < R$, а $0 < r < R$, то*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r} f(z)dz = res_{z=a} f$$

Доказательство. Честно проинтегрируйте ряд Лорана, поменяв местами сумму с интегралом. ∎

Утверждение 2.2. *Если a – полюс n-ого порядка функции f, то*

$$res_{z=a} f = \lim_{z\to a} \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}((z-a)^n f(z))$$

Доказательство. Если умножить все на $(z-a)^n$, то вычет будет $n-1$ коэффициентом получившейся голоморфной функции. Для того чтобы его найти надо использовать формулу Тейлора. Предел пишим, потому что полученная функция может иметь устранимую особую точку в a и производная там будет выдавать не тот результат, либо вообще не будет существовать (Если исправлять особенность, то никакой предел не нужен). ∎

Утверждение 2.3. *Если* $f = \dfrac{g}{h}, g(a) \neq 0, h(a) = 0, h'(a) \neq 0$ *и* g, h *– голоморфны в окрестности* a, *то вычет в точке* a *равен* $\dfrac{g(a)}{h'(a)}$.

Доказательство. Подставьте в предыдущую теорему. ■

Утверждение 2.4. *Если* $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = A$, *то*

$$res_{z=\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} z(A - f(z))$$

.

Утверждение 2.5. $res_{z=\infty} f = -res_{z=0} \dfrac{f(\frac{1}{z})}{z^2}$