

# 1 Билет 1

**Утверждение 1.1.** Пусть  $M$  – одноленточная МТ, которая распознает язык бинарных палиндромов. Тогда существует константа  $C : \exists n_0 : \forall n > n_0$  существует вход длины  $n$ , на котором  $M(x)$  делает  $\geq Cn^2$  шагов.

*Доказательство.* В начале очевиден принцип несжимаемости, нельзя инъективно перевести строки из  $\{0, 1\}^n$  в  $\{0, 1\}^*$  так, чтобы все образы по длине были меньше чем  $n$ .

Будем доказывать для входов, длина которых кратна 3. По  $x \in \{0, 1\}^n$  строим вход  $x0^n x^{rev}$  и скормливаем МТ все такие входы. Возьмем все перегородки после нулей, их всего  $n$ , существует перегородку, через которую МТ прошла  $\leq \frac{T(x)}{n}$  раз.

Теперь строим отображение  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^*$ , переводим строку  $x$  в протокол работы МТ на строке  $x0^n rev(x)$ . Для этого выпишем набор состояний, в которые переодила МТ, переходя через "хорошую" перегородку и номер этой перегородки.

Утверждается, что такая  $f$  – инъекция, чтобы доказать, предположите обратное и рассмотрите работу на строке  $x0^n y^{rev}$ .

Пусть  $|x| = n$ , тогда  $f(x) \leq \log n + \frac{T(x)}{n}C$ , но при этом существует  $|y| = n$ , такой что  $f(y) \geq n$ . Получаем, что

$$n \leq \log n + \frac{T(x)}{n}C$$

$T(x) = \omega(n^2)$  на таких входах.

Для некратных 3 входов делаем также, но по-середине пишем вместо  $n$  нулей, на один ноль больше или меньше – это не влияет на оценки. ■

# 2 Билет 2

**Определение 2.1.**  $k$  – ленточная машина Тьюринга. (Добавляется куча лент и функция перехода теперь действует по всем лентам).

**Утверждение 2.1.** Для любой  $k$  – ленточной МТ, которая на входе  $x$  работает время  $T(x)$ , существует 1 ленточная МТ, которая работает  $O(T(x)^2)$ .

*Доказательство.* Будем хранить в одном символе МТ символы всех лент (а также спец символы, помеченные головкой). На каждом шаге будем идти вправо и делать все изменения, которые нужны на лентах. ■

**Определение 2.2.** Универсальная МТ – эмулирует МТ по описанию.

**Утверждение 2.2.** Для любой  $k$ -ленточной МТ существует универсальная  $k$ -ленточная МТ с линейным замедлением.

*Доказательство.* Понятно как получить квадратичное замедление, нужно положить описание в начало, например, первой ленты. Далее постоянно возвращаться, чтобы узнать, какой шаг сделать. Если же хотим линейного – давайте возить описание с собой, это будет давать  $O(1)$  действий из-за его константного размера, при этом эмуляция будет работать за линейное время. ■

**Утверждение 2.3.**  $k$  ленточную МТ можно эмулировать на 2-ленточной с логарифмическим замедлением.

*Доказательство.* Эмулирование  $k$  машин Тьюринга эквивалентно эмулированию  $2k$  стэков. Поймем, что если мы сможем эмулировать один стэк за время  $T(x)$  так, чтобы после каждой операции он возвращал назад головку, то мы сможем эмулировать и  $k$  стэков за такое время. Будем в одном символе хранить символы всех стэков. Если научимся моделировать так один, то будем на каждом шаге делать по очереди операции со всеми стэками.

Теперь надо понять, как моделировать один стэк за такое время. Для этого рассмотрим вспомогательную задачу. Нужно хранить на МТ счетчик с операциями  $+1$  и  $-1$  так, чтобы  $N$  операций с ним работали за  $O(N)$ . Будем хранить счетчик в псевдодвоичной системе счисления, где есть цифры  $0, 1, 2$ . Представление в такой сс не единственно, но это не страшно.

1. Прибавление 1. Пусть сейчас написано некоторое число  $a_0, \dots$ . Найдем первую цифру  $a_k$  такую, что  $a_k < 2$ . Тогда после прибавления 1 у нас должно быть написано число  $1, \dots, 1, a_k + 1, \dots$
2. Отнимание 1. Найдем первую цифру  $a_k > 0$ , тогда после отнимания у нас будет написано  $2, \dots, 2, a_k - 1, \dots$

Заметим, что в таком случае у нас между двумя операциями с разрядом  $i$  будет выполнено хотя бы  $2^i$  операций. Если сделали  $T$  операций, то разряд  $k$  был затронут не более  $\lceil \frac{T}{2^k} \rceil$  раз. Всего сделаем не более  $4T$  операций, в среднем 4 операции на разряд.

Вернемся к изначальной задаче. Будем эмулировать стэки такой же идеей. У нас будет храниться стэк в виде зон. Зона  $k$  будет разделена на 2 подзоны размером  $2^{k-1}$ . Тогда при операции мы будем добегать до нужного разряда и распределять элементы так, чтобы заполнение подзон стэка было таким же, как цифры счетчика. Вторая лента будет использоваться для копирования элементов префикса до нужного разряда и дальнейшего раскидывания.

Оценим время работы. Если алгоритм работал  $T(n)$ , то нам не понадобится зоны дальше чем  $O(\log n)$ . Работу с зоной  $k$  реализуем за  $O(2^k)$ . Тогда общее время работы не превзойдет  $T(n) \log T(n)$ . ■

### 3 Билет 3

Основная модель вычислений – многоленточная МТ.

**Определение 3.1.**  $f : \mathbb{N} \rightarrow R_+$ , тогда  $L \in DTime[f(n)]$ , если существует многоленточная МТ, такая что

1.  $\forall x \in L \Rightarrow M(x) = 1$ .
2.  $\forall x \notin L \Rightarrow M(x) = 0$ .
3.  $\forall x$  МТ работает  $O(f(|x|))$  шагов.

**Определение 3.2.**  $P = \cup_{i>0} DTime[n^i]$ .

**Определение 3.3.** Про семейство схем, распознающих язык.

**Определение 3.4.**  $L \in Size[f(n)]$ , если есть последовательность схем, распознающих  $L$  и для достаточно больших  $n$  выполнено  $|C_n| \leq f(n)$ .

**Определение 3.5.**  $P/Poly = \cup_{i>0} Size[n^i]$ .

**Пример 3.1.** Неразрешимый язык может лежать в  $P/Poly$ . Например  $1^H = \{1^n | n \in H\}$ , для некоторого языка тоже является разрешимым и лежит в  $P/Poly$ , так как на каждую длину мы можем предоставить схему.

**Утверждение 3.1.** Существует такой алгоритм  $A$ , который получает на вход  $T, n, m$  и

1.  $A$  работает  $\text{poly}(n + T + |m|)$  шагов.
2. Если  $MT$   $m$  на всех входах из  $\{0, 1\}^*$  выдает ответ за  $\leq T$  шагов, то алгоритм  $A$  выдает схему  $C$ , которая имеет  $n$  входов и 1 выход и распознает на входах длины  $n$  также как  $m$ .

*Доказательство.* Будем возвращать схему размера  $T \times T \cdot O(1)$ .

На уровне  $i$  будет  $T$  ячеек, в каждой из которых будет вычисляться некоторая информация: символ, написанный в этой ячейке, есть ли тут головка в момент  $i$ , а также, если есть головка, то состояние, в которой  $MT$  сейчас находится. Понятно, что для пересчета этих параметров нужно обратиться к нескольким соседним ячейкам предыдущей строки. Для того, чтобы узнать ответ, посмотрим, принималось ли где-нибудь состояние  $q_{yes}$ . ■

**Утверждение 3.2.**  $P \subseteq P/Poly$ .

**Замечание 3.1.** Таким образом хотели доказывать, что  $P \neq NP$ , взять, к примеру,  $SAT$  и показать, что он не лежит в  $P/Poly$ , однако доказывать нижние оценки на схемы пока что не научились.

## 4 Билет 4

**Определение 4.1.**  $L \subseteq \Sigma^*$ , система доказательств для языка  $L$  – это такой алгоритм  $\Pi$ , который обладает следующими свойствами:

1. (Полнота)  $\forall x \in L \Rightarrow \exists w : \Pi(x, w) = 1$
2. (Корректность)  $\forall x \notin L \Rightarrow \forall w \Pi(x, w) \neq 1$  (Ну или равно 0).
3.  $\Pi$  всегда останавливается

**Определение 4.2.** Система доказательств  $\Pi$  называется эффективной, если  $\Pi(x, w)$  работает за  $\leq \text{poly}(|x| + |w|)$  шагов.

**Замечание 4.1.** Системы доказательств существуют для перечислимых языков, как мы знаем из предыдущей главы курса. Также можно доказать, что для всех перечислимых языков существует и эффективная система доказательств ( $TCS12$ ), искусственно увеличивая подсказку.

**Определение 4.3.** класс  $NP$  состоит языков, для которых существует эффективная система доказательств  $\Pi$ , а также полином  $q$ , такой что  $\forall x \in L \exists w, |w| \leq q(|x|), \Pi(x, w) = 1$ , то есть, существует полиномиальная подсказка.

**Пример 4.1.** Примеры языков из  $NP$ .

1.  $SAT$  – множество выполнимых пропозициональных формул.  
 $SAT \in NP$ , но не выяснено,  $UNSAT \notin / \in NP$ .
2.  $HamPath$  – язык графов, в которых есть гамильтонов путь, также лежит в  $NP$ .
3.  $CLIQUE$  – язык пар (граф, число) такой, что в графе есть клика на числе вершин. Лежит в  $NP$ .
4.  $Composite$  – язык составных натуральных чисел, лежит в  $NP$ , а также, известно, что  $Primes \in NP$  ( $TCS11$ ) и, более того, человечество умеет показывать  $Primes \in P$ .

**Определение 4.4.** *Недетерминированные МТ. Вместо одной функции перехода теперь две и машина сама выбирает, в какую идти. (:)).*

*Говорят, что недетерминированная М принимает слово, если существует последовательность корректных переходов, при которых она придет в состояние  $q_{yes}$  на входе этом слове.*

*Время работы НМ – максимум по всем возможным применениям функции перехода.*

**Определение 4.5.**  $NTime[f(n)]$  – множество языков, которые принимаются многоленточными НМТ за  $O(f(n))$  шагов, где  $n$  – длина входа.

**Определение 4.6** (Второе определение  $NP$ ).  $NP = \cup_{c>0} NTime[n^c]$ .

**Определение 4.7** (МТ с подсказкой). К обычной МТ добавляется лента подсказки, на которую записывается некоторая строка, к которой может обращаться МТ во время работы. Машина принимает слово, если существует подсказка, для которой она придет в состояние  $q_{yes}$ . Время работы такой машины – максимум по всем подсказкам.

**Теорема 4.1.** Следующие условия эквивалентны:

1.  $L \in NP$  (на языке систем доказательств)
2.  $L$  распознается машиной Тьюринга с подсказкой за полиномиальное время.
3.  $L \in \cup_{c>0} Ntime[n^c]$ .

*Доказательство.* (1)  $\Rightarrow$  (2): построим МТ с подсказкой. Пусть наша МТ при обращениях к подсказке будет теперь обращаться на ленту с подсказкой вместо ленты входа. Тогда понятно, что подсказки аналогичны друг другу.

(2)  $\Rightarrow$  (3) : пусть МТ порождает подсказку, а далее действует детерминированно. Подсказка более чем полиномиального размера не нужна, так как наш алгоритм не успеет ее обработать из-за своего времени работы.

(3)  $\Rightarrow$  (1) : подсказка – какую функцию перехода выбрать на каждом шагу. ■

## 5 Билет 5

**Определение 5.1.** Язык  $A$  сводится по Карпу к языку  $B$ , если существует полиномиально вычисляемая  $f: \forall x, x \in A \iff f(x) \in B$ . Обозначается  $A \leq_p B$ .

**Утверждение 5.1.** Свойства сведения

1.  $A \leq_p B, B \in P \Rightarrow A \in P$ .
2.  $A \leq_p B, B \leq_p C \Rightarrow A \leq_p C$ .

**Определение 5.2.** Язык  $A$  называется  $NP$ -трудным, если  $\forall L \in NP, L \leq_p A$ . Язык  $A$   $NP$ -полный, если  $A \in NP$  и  $A$  –  $NP$ -трудный.

**Определение 5.3.**  $BH = \{(M, x, 1^t) \mid \exists y, M(x, y) \text{ выдает } 1 \text{ за } \leq t \text{ шагов}\}$ .

**Теорема 5.1.**  $BH$  –  $NP$ -полный.

*Доказательство.* Проверим, что  $BH \in NP$ . Подсказка как раз и будет этот  $y$ . Запускаем на  $t$  шагов и проверяем, приняло или нет. Если тройка лежит в языке, то по определению найдется такая подсказка, что выдаст  $yes$ . Иначе – нет.

Возьмем  $L \in NP$ , хотим проверить  $L \leq_p BH$ . У  $L$  есть нмт эффективная система доказательств  $\Pi$ , работающая за  $q(|x| + |y|)$ , при этом также для лежащих в языке слов есть маленькая подсказка, длины  $\leq p(x)$ . Давайте сделаем следующее отображение  $f(x) = (M, x, 1^{q(|x|+p(|x|))})$ . Очевидно, что это корректное сведение. ■

**Определение 5.4.** *Circuit – SAT* – язык, в котором лежат схемы, у которых есть выполняющий набор.

**Теорема 5.2.** *Circuit – SAT – NP* полный.

*Доказательство.* *Circuit – SAT*  $\in NP$ , подсказка – выполняющий набор.

Возьмем  $L \in NP$ . Хотим полиномиально свести  $L$  к *Circuit – SAT*. Давайте по МТ, решающей  $L$  с помощью подсказки и  $x$  построим схему, в которой длина входа равна  $q(|x|)$ , где  $q$  – полином, ограничивающий подсказку. Тогда осталось понять, существует ли подсказка, при которой схема даст значение 1, а это инстанс задачи *Circuit – SAT*. ■

**Определение 5.5.** *3SAT* – язык из формул, записанных в КНФ так, что каждый дизъюнкт состоит из не более чем 3 литералов.

**Теорема 5.3.** *SAT* и *3SAT* – *NP* полные.

*Доказательство.* Будем сводить *Circuit – SAT* к этим задачам. Можно сводить только к *3SAT*, так как дальше сведение тривиально. Просто запишем кнф формулу для схемы, добавив новые переменные для каждого узла в ней и связав их нужными условиями. ■

## 6 Билет 6

**Определение 6.1.**  $Q$  – предикат. Он полиномиально ограниченный, если  $Q(x, y) = 1 \Rightarrow |y| \leq p(|x|)$  для некоторого полинома  $p$ .

Каждый язык  $L \in NP$  задается полиномиально ограниченным, полиномиально проверяемым предикатом, таким что  $x \in L \iff \exists y Q(x, y) = 1$ .

**Определение 6.2** (Задача поиска).  $Q$  – полиномиально ограниченный, полиномиально проверяемый предикат двуместный предикат. Задача поиска, заданная предикатом  $Q$  это задача: по  $x$  найти  $y$  такой, что  $Q(x, y) = 1$ . Множество задач поиска для таких предикатов обозначим  $\widetilde{NP}$ .

Будем говорить, что задача поиска решается алгоритмом  $A$ , если для любого  $x$ , для которого существует такой  $y$ , что  $Q(x, y) = 1$ , выполнено  $Q(x, A(x)) = 1$ . Множество задач поиска, для которых существуют полиномиальные по времени алгоритмы будем обозначать  $\tilde{P}$ . Очевидно, что задачи распознавания, соответствующие задачам из  $\tilde{P}$ , лежат в  $P$ .

**Определение 6.3.** МТ с оракулом, лента для вопросов к оракулу.

**Определение 6.4** ( $A \leq_{pT} B$ ). Вычислительная задача (задача распознавания или *NP* задача поиска  $Q$ ) сводится по Куку (= По Тьюрингу за полином) к языку  $A$ , если она может быть решена за полином с оракулом  $A$ .

**Утверждение 6.1** (Свойства сведений по Куку). .

1. если  $L_1 \leq_p L_2$ , то  $L_1 \leq_{pT} L_2$
2.  $\leq_{pT}$  транзитивно, даже если цепочка начинается на задаче поиска.
3. Если мы свелись по Куку к задаче из  $P$ , то мы сами лежим в  $P$ . Аналогично и для задач поиска.

*Доказательство.* .

1. В начале сведемся, потом сделаем один запрос к оракулу.

2. Пусть начиналось на задаче распознавания.  $L \leq_{pT} A \leq_{pT} B$ . Давайте всякий раз, когда МТ для  $L$  делает запрос к оракулу  $A$  будем запускать полиномиальный алгоритм проверки для языка  $A$ , который делает запросы к оракулу  $B$ . Таким образом обойдемся только оракулом для  $B$ . Аналогично и для задач поиска.
3. Будем эмулировать запрос к оракулу, запуская полиномиальный алгоритм.

■

**Теорема 6.1.** *Каждая задача поиска из  $\widetilde{NP}$  сводится по Куку к некоторому языку из  $NP$ .*

*Доказательство.* В начале введем нестрогий порядок на строках.  $x \preceq y$ . Сначала сортируем по длине, потом лексико. Пусть  $Q$  – полиномиально ограниченный предикат полиномом  $p$ . Рассмотрим язык  $L = \{(x, a) \mid |a| \leq p(|x|), \exists y \preceq a : Q(x, y) = 1\}$ . Тогда такой язык лежит в  $NP$ , так как подсказка это нужный  $y$ . Задача поиска сводится к этому языку по Куку с помощью бинпоиска по ответу. Делаем бп, в котором для определения, куда сдвигать границу, обращаемся к оракулу.

■

**Утверждение 6.2.** *Если  $P = NP$ , то  $\widetilde{P} = \widetilde{NP}$ .*

Это из-за того, что все задачи поиска из  $\widetilde{NP}$  в таком случае сводятся по Куку к задачам из  $P$ , а значит, сами лежат в  $\widetilde{P}$ .

**Утверждение 6.3.** *Если  $NP$ -полный язык  $L$  задается предикатом  $Q$ , то задача поиска  $Q$  сводится по Куку к  $L$ .*

Задача поиска  $Q$  сводится по Куку к какому-то языку из  $NP$ . Этот язык сводится по Карпу к  $L$ , а значит сводится к нему по Куку и мы получаем утверждение из транзитивности сведения по Куку.

## 7 Билет 7

**Определение 7.1.**  $DTime^A[f(n)]$  как и раньше, но машина с оракулом. Аналогично,  $NTime^A[f(n)]$ .  
 $P^A = \cup_{c>0} DTime^A[n^c]$ .  
 $NP^A = \cup_{c>0} NTime^A[n^c]$ .

**Определение 7.2.**  $EXP = \cup_{c>0} Dtime[2^{n^c}]$ .

**Утверждение 7.1.**  $EXPComp = \{(M, x, t), M(x) = 1 \text{ за не более } t \text{ шагов}\}$  – полный язык в классе  $EXP$ .

*Доказательство.* Понятно включение. Действительно, будем просто эмулировать  $M$ , это займет не более  $t$  шагов, что экспонента от длины входа. Возьмем  $L \in EXP$ . Покажем  $L \leq_p EXPComp$ . По  $x$  как всегда выдадим  $(M, x, 2^{|x|^c})$ , где  $c$  – константа из работы  $M$ . Очевидно, сведение корректно.

■

**Утверждение 7.2.**  $P^{EXPComp} = NP^{EXPComp} = EXP$ .

*Доказательство.*  $EXPComp$  –  $EXP$  полный, поэтому  $EXP \subseteq P^{EXPComp}$ . А также  $NP^{EXPComp} \subseteq EXP$ , так как можно перебрать подсказку, а дальше полином обращений к оракулу решить тоже за экспоненту.

■

**Теорема 7.1** (Бэйкер, Гилл, Солвэй). *Существует такой язык  $B$ , что  $P^B \neq NP^B$ .*

*Доказательство.*  $B$  – какой-то язык.  $U_B = \{1^n \mid \exists x \in \{0,1\}^n \cap B\}$ . Если  $B \in NP$ , то  $U_B \in NP$ . Подсказка – строка нужного размера и подсказка для нее.

Теперь будем строить  $B$  так, чтобы  $P^B \neq NP^B$ .

Рассмотрим нумерацию Машин Тьюринга с оракулом  $U_B - M_i$ . Будем параллельно достраивать язык  $B$ , идя по машинам. Возьмем машину  $M_k$ . Посмотрим, что она выдает на входе  $1^k$ . Причем дадим ей поработать максимум  $2^k/10$  шагов. Если она выдала 1, то не будем добавлять в языке  $B$  слов длины  $k$ . Иначе добавим какую-нибудь строку длины  $k$ . Это можно сделать, так как все предыдущие машины сделали меньше обращений к оракулу, чем  $2^k$ .

Почему мы обманули все полиномиальные машины? Давайте возьмем какую-нибудь полиномиальную МТ и покажем, что она ошибается. Пусть она работает за  $p(n)$ . Возьмем ее номер  $k$  в нумерации такой, что  $2^k/10 > p(k)$ . Тогда эта машина ошибается на строке  $1^k$  по построению. ■

## 8 Билет 8

**Теорема 8.1** (Ладнер). *Если  $P \neq NP$ , то существует  $L \in NP$ , такой, что,  $L \notin P$  и  $L$  – не полный в  $NP$ .*

*Доказательство.* Интуиция следующая: хотим немного ослабить язык  $SAT$ . Давайте рассматривать

$$SAT_H = \{\varphi 01^{n^{H(n)}} \mid \varphi \in SAT, |\varphi| = n\}$$

Поймем, как определить  $H$ . Возьмем нумерацию всех машин Тьюринга  $M_1, M_2, M_3, \dots$

$H(n) = i$ , если  $i$  – такое минимальное число, что  $i < \lfloor \log \log n \rfloor$ , что  $M_i$  решает  $SAT_H$  на всех входах  $|x| \leq \log n$  за время  $i|x|^i$ , или, если такого числа нет, то  $\lfloor \log \log n \rfloor$ .

Заметим, что  $H(n)$  определяется через  $SAT_H$  и наоборот.

Но заметим, что чтобы определить  $H(n)$  нам не потребуется значений  $H(x)$  при  $x > \log n$ , так как  $H(n)$  нужно для дописывания только к строкам длины  $n + 1$ .

**Утверждение 8.1.**  $H(n)$  вычисляется по значениям  $H(1), \dots, H(n-1)$  за  $poly(n)$  действий.

Будем вычислять по определению. Переберем

1.  $i \leq \log \log n$
2.  $x, |x| \leq \log n$ , это  $2^{\log n} = O(n)$  действий
3. запустим машину  $i$  на  $(\log \log i)(\log i)^{\log \log i} =$  действий.
4. Сравним результат с реальным: мы можем понять, лежит или нет, так как знаем предыдущие значения  $H$ ,  $SAT$  будем решать перебором за  $O(n)$ .

Таким образом вычислим  $H(n)$  за  $O(n^3)$  по предыдущим значениям. Тогда мы сможем вычислить  $H(n)$  за  $O(n^4)$ , вычисляя по очереди все значения.

**Утверждение 8.2.**  $H(n)$  не убывает.

Действительно, если  $H(n) = i$ , то такое  $i$  подошло и для всех предыдущих, либо  $i$  – верхняя граница для  $H(n)$ , но тогда оно точно больше предыдущих.

**Утверждение 8.3.**  $SAT_H \in P \iff H(n) \leq C$ .

$\Rightarrow$ : есть МТ, решающая  $SAT_H$  за  $p(|x|)$ . Но эта МТ встречается в нумерации бесконечное число раз. Она там также встречается как  $M_i$  при  $i|x|^i > p(|x|)$ . Но тогда  $H(n) \leq i$ , так как такая машина нам все решит и мы ее запустим на такое число шагов.

$\Leftarrow$ : Ограниченная неубывающая функция это такая функция, что с некоторого момента она равна  $j$ . Но заметим, что тогда  $M_j$  решит нам язык за  $j|x|^j$ , что есть полином. ■

#### Утверждение 8.4. $SAT_H \in NP$

Действительно, давайте просто давать как подсказку решение для внутренней  $SAT$ , при этом определить, верное ли кол-во единиц мы можем, вычислив  $H$ .

#### Утверждение 8.5. $SAT_H \notin P$ .

Пусть это не так. Тогда  $H(n)$  ограничена. Тогда  $SAT \leq_p SAT_H$  и  $P = NP$ .

#### Утверждение 8.6. $SAT$ не сводится к $SAT_H$ полиномиально.

Предположим обратное. Покажем тогда, что мы сможем решить  $SAT$  за полином. Пусть сведение работает за  $n^c$ . Тогда величина формулы, которую выдаст сведение  $\leq n^c$ , где  $n$  – длины формулы, поступившей нам на вход.

$H(n)$  не ограничена, возьмем  $n_0$  такое, что  $H(n) > 3c$  при  $n > n_0$ . Тогда пусть сведение выдало формулу, длина которой  $> n_0$  (иначе сделаем полный перебор, который займет  $O(1)$ ) и у которой правильное число единиц на конце (иначе мы это легко проверим за полином).

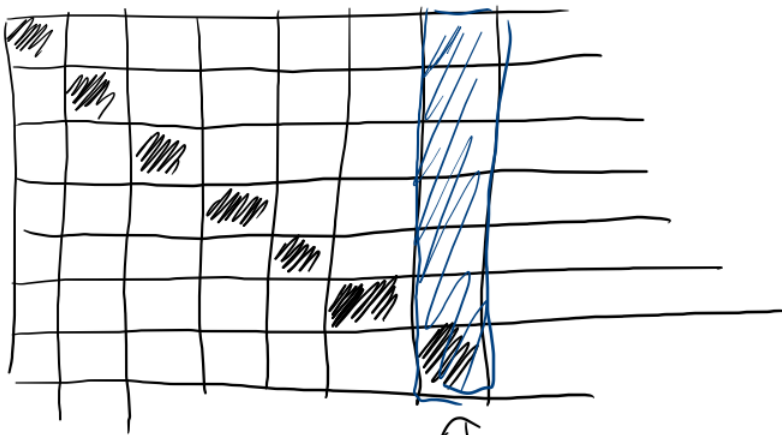
Тогда длина строки, к которой свелись,  $m \geq |\varphi| + 1 + |\varphi|^{3c}$ , отсюда  $|\varphi| \leq m^{1/3c}$ , при этом  $m \leq n^c$ . Получается,  $|\varphi| \leq n^{1/3}$ . При больших  $n$  такое значение хотя бы в 2 раза меньше  $n$ . Значит, мы свелись к формуле меньшего размера в 2 раза. Таким образом мы сделаем не более  $\log$  полиномиальных сведений и выдадим верный ответ. Отсюда  $P = NP$  и противоречие.

## 9 Билет 9

#### Пример 9.1. $DTime[n^2] \subsetneq DTime[n^3]$ .

Доказательство. Давайте диагонализировать.

$$L(n) = 1 - \langle n \rangle(n), \text{ если } \langle n \rangle(n) \text{ ос. за } n^{2.5} \text{ шагов}$$



наша  $M$ ,  
она будет отличаться  
от самой себя на  
своем входе, т.к.  
остаток выдает за  
 $n^{2.5} < n$



Рассмотрим язык  $L = \{M \mid M \text{ отвергает } M \text{ за не более } |M|^{2.5} \}$ . Пусть он решается квадратичной  $M$  за  $Cn^2$  шагов. Тогда давайте найдем эквивалентную ей  $M'$  такую, что  $|M'|^{2.5} > C|M'|^2$ . Тогда получится, что  $M'$  не равна себе же в строчке, соответствующей  $M'$ .

Как показать, что  $L \in DTime[n^3]$ ? Давайте эмулировать МТ, которая работает  $O(n^{2.5})$  с логарифмической задержкой.

Тогда получили нужный язык  $L$ . ■

**Определение 9.1.**  $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  – конструктивная по времени, если  $n \rightarrow h(n)$  можно вычислить за  $O(h(n))$  шагов на ДМТ.

**Теорема 9.1** (Об иерархии по времени для детерменированных вычислений).  $f, g, h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $h$  – конструктивная по времени.

$f(n) = o(h(n))$ ,  $h(n) \log h(n) = o(g(n))$ , тогда  $DTime[f(n)] \subsetneq Dtime[g(n)]$ .

*Доказательство.* Конструкция такая же, как и в предыдущем утверждении. Конструктивная функция нужна для будильника в МТ.  $\log$  – для эмуляции. ■

**Утверждение 9.1.**  $P \subsetneq EXP$ .

*Доказательство.*  $P \subseteq DTime[2^n] \subsetneq DTime[2^{n^2}] \subseteq EXP$ . ■

**Замечание 9.1.** Доказательство не работает для НМТ, потому что мы не можем реверснуть ответ за такое же время.

**Пример 9.2.**  $NTime[n^2] \subsetneq NTime[n^3]$ .

*Доказательство.* Определим для  $M_i$  из перечисления всех НМТ отрезок  $[n_i, n_i^*]$  так, что  $n_i^* = 2^{n_i^{2.5}}$ .  $n_{i+1} = n_i^* + 1$ .

$[n_1, n_1^*], [n_2, n_2^*], [n_3, n_3^*], \dots$

Определим язык  $L$  так:

1.  $L(n_i^*) = 1 - M_i(0^{n_i})$ , если  $M_i(0^{n_i})$  завершилось за менее чем  $n_i^{2.5}$  шагов и 0 иначе.

2.  $L(n) = M_i(0^{n+1})$  для  $n_i \leq n < n_i^*$

**Утверждение 9.2.**  $L \notin NTime[n^2]$ .

Пусть это не так, тогда есть  $M$ , решающая  $L$  за  $Cn^2$ . Возьмем такое ее вхождение, что  $\forall n \in [n_i, n_i^*], n^{2.5} > Cn^2$ . Тогда:

$$M(0^{n_i}) = L(0^{n_i}) = M(0^{n_i+1}) = L(0^{n_i+1}) = \dots = L(0^{n_i^*}) \neq M(0^{n_i})$$

так как все машины успеют отработать.

**Утверждение 9.3.**  $L \in NTime[n^3]$ . Разбираем случаи, если надо проэмулировать, то эмулируем, иначе нам нужно реверснуть выход недетерменированной машины. Мы можем сделать это за  $2^{n_i^{2.5}} \cdot n_i^{2.5} < ((n_i)^*)^3$ . ■

**Теорема 9.2** (Об иерархии по времени для недетерменированных вычислений).  $f, g, h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $h$  – конструктивная по времени.  $f(n) = o(h(n))$ ,  $h(n+1) = o(g(n))$ , тогда  $NTime[f(n)] \subsetneq NTime[g(n)]$ .

**Утверждение 9.4.**  $NP \notin NEXP$ .

*Доказательство.* аналогично детерменированному случаю. ■

## 10 Билет 10

**Определение 10.1** (Модель вычислений с ограничением по памяти.). *МТ с дополнительной лентой входа, она read-only, также по ней нельзя уйти правее первого пробела. Также есть лента выхода, по которой нельзя двигаться влево, а только выдавать очередной символ ответа. Затраченная память – максимальный уход вправо на какой-то из рабочих лент.*

**Определение 10.2.**  $DSPACE[f(n)]$  – класс языков, которые принимают ДМТ, использующие  $O(f(n))$  памяти.  $NSPACE[f(n)]$  – то же самое, но для НМТ.

**Определение 10.3.**  $PSPACE = \cup_{c>0} DTIME[n^c]$ ,  $NPSPACE = \cup_{c>0} NTIME[n^c]$ .

**Определение 10.4.**  $L = LOGSPACE = DSPACE[\log(n)]$ ,  $NL = NSPACE[\log n]$ .

**Утверждение 10.1.**  $\forall s(n) : DTIME[s(n)] \subseteq DSPACE[s(n)] \subseteq NSPACE[s(n)]$ . Причем первое включение работает лишь для некоторых моделей вычислений. В частности, для МТ.

**Определение 10.5.**  $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  – конструктивная по памяти, если  $1^{S(n)}$  можно вывести за  $O(S(n))$  памяти.

**Замечание 10.1.** Для хороших функций выполняется также иерархия по памяти. То есть, например, известно, что  $DSPACE[n^2] \subsetneq DSPACE[n^3]$ ,  $NSPACE[n^2] \subsetneq NSPACE[n^3]$ . (Смотри TCS30, TCS31).

**Теорема 10.1.**  $s(n)$  – конструктивная по памяти и  $s(n) \geq \log n$ . Тогда

$$NSPACE[s(n)] \subseteq DTIME[2^{O(s(n))}] = \cup_{c>0} DTIME[2^{cs(n)}]$$

*Доказательство.* Для доказательства используется идея с графом конфигураций. Конфигурация МТ это набор параметров:

1. Положение головок на всех лентах
2. Содержание рабочих лент
3. Состояние

Проблема выяснения того, принимает ли МТ вход  $x$  может быть рассмотрена как проблема выяснения существования пути в графе конфигураций. Поймем, сколько есть конфигураций:

$n \cdot (Cs(n))^k$  – положение головок,  $2^{c's(n)k}$  – содержимое рабочих лент. Если  $s(n) \geq \log n$ , то это число есть  $2^{O(s(n))}$ . В таком случае мы можем сгенерировать такой граф и проверять наличие пути полиномиальным алгоритмом. Получится время работы  $poly(2^{O(s(n))}) = 2^{O(s(n))}$ .

Зачем пользовались конструктивностью функции по времени? Для того чтобы сгенерировать конфигурацию нужно отмерить максимальную длину конфигурации и дальше уже перебирать все возможные строчки. Поэтому хочется уметь отмерить за нормальную память.

То есть итоговый алгоритм такой: по  $M, x$  строим граф конфигураций и ищем путь из  $K_0$  в  $K_{accept}$ . Можно сделать одно состояние  $K_{accept}$ , попросив МТ стирать все рабочие ленты перед тем как завершиться. Так мы унифицируем конечные состояния, но, очевидно, не изменим вычислительную мощь (:)). ■

**Утверждение 10.2.** .

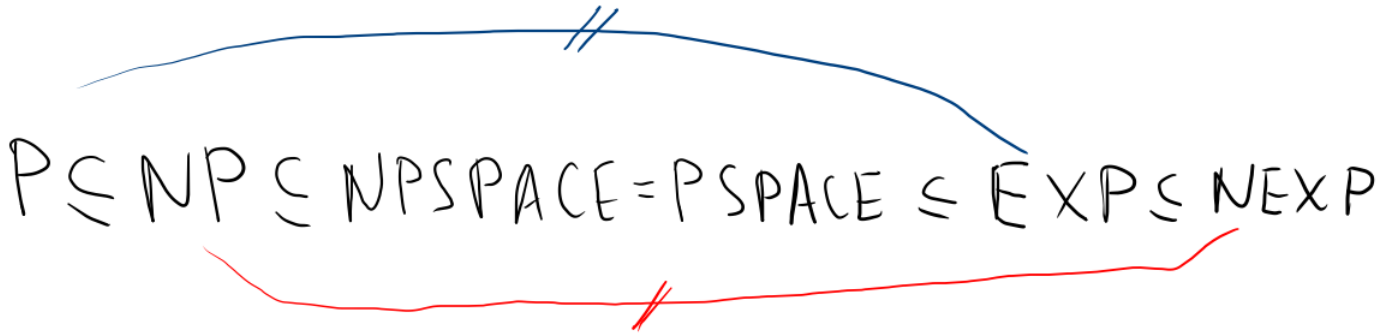
1.  $NSPACE \subseteq EXP$

## 2. $NP \subseteq EXP$

**Теорема 10.2** (Савич).  $s(n)$  – конструктивная по времени и  $s(n) \geq \log n$ , тогда  $NSpace[s(n)] \subset DSpace[s(n)^2]$ .

*Доказательство.* Все сводится к тому, чтобы по графу понять, есть ли в нем путь от вершины до другой за память  $s(n)^2$ , где  $s(n)$  – память рассматриваемой НМТ. Воспользуемся предикатом  $PATH(u, v, i)$  – есть ли путь от  $u$  до  $v$  длины не более  $2^i$  и рекурсивным перебором. ■

**Утверждение 10.3.**  $NPSPACE = PSPACE$



A handwritten diagram showing the hierarchy of complexity classes. The text  $P \subseteq NP \subseteq NPSPACE = PSPACE \subseteq EXP \subseteq NEXP$  is written in the center. Above the text, a blue line starts from the left, goes up and over the text, and then comes back down to the right, with a double blue slash mark in the middle. Below the text, a red line starts from the left, goes down and under the text, and then comes back up to the right, with a double red slash mark in the middle.

$$P \subseteq NP \subseteq NPSPACE = PSPACE \subseteq EXP \subseteq NEXP$$

## 11 Билет 11

Рассмотрим кванторные пропозициональные формулы:  $Q_1x_1, \dots, Q_nx_n\varphi(x_1, \dots, x_n)$ . Язык таких истинных формул это  $TQBF$ . Понятно, что  $SAT \leq_p TQBF$  просто дописываниям ко всем переменным квантора существования.

**Утверждение 11.1.**  $TQBF$  лежит в  $PSPACE$

Действительно, можно просто сделать перебор рекурсивно и проверить выполнимость.

**Утверждение 11.2.**  $TQBF$  – полный в классе  $PSPACE$ .

*Доказательство.* Берем граф конфигураций. Хотим записать формулу  $PATH(K_0, K_{accept}, cp(n))$ . (время работы не более  $2^{cp(n)}$ , так как иначе все заиклится).

Будем записывать при помощи следующего выражения:

$PATH(u, v, i) = \exists z \forall A, B ((A = u, B = z) \vee (A = z, B = v)) \rightarrow PATH(A, B, i - 1)$ , тогда мы сможем записать всё за полиномиальное количество бит. Остаются детали, как записать в виде формулы утверждения вида  $PATH(u, v, 0)$ . Мы можем с помощью полиномиального алгоритма проверить такой предикат.

Еще нужно подумать о том, как записать равенство конфигураций, это можно сделать просто побитово. ■

**Замечание 11.1.** Выяснение вопроса детерминированной победы в конечных играх – задача из  $PSPACE$ , так как ее можно записать в  $TQBF$  в виде  $\exists step_{1,1} \forall step_{2,1} \exists step_{1,2} \dots Q(..)$ , что означает, что есть ход первого игрока, что при любом ходе второго есть ход первого и тд, что первый игрок выиграл.

## 12 Билет 12

**Определение 12.1** (Логарифмическое сведение).  $A \leq_l B$ , если существует  $p$ , вычисляемая с использованием логарифмической памяти такая что  $x \in A \iff p(x) \in B$ .

**Утверждение 12.1** (Свойства лог сведений). 1.  $A \leq_l B \Rightarrow A \leq_p B$ .

2.  $A \leq_l B, B \leq_l C \Rightarrow A \leq_l C$ .

3.  $A \leq_l B, B \in L \Rightarrow A \in L$ .

Чтобы доказать эти утверждения нужна лемма.

**Утверждение 12.2.**  $f, g$  – вычисляемые с логарифмической памятью. Тогда  $f \circ g$  тоже вычислима с логарифмической памятью.

*Доказательство.* Будем вычислять  $f(g(x))$ , когда для вычисления  $f$  будет требоваться очередной бит входа, будем вычислять  $i$ -тый бит выхода  $g(x)$  заново и ждать пока выведется бит под номером  $i$ . ■

$L \in NL$ , а вот есть ли равенство – открытый вопрос.

**Определение 12.2** (Определение  $NL$  через систему доказательств). У нас появляется лента для подсказки, по которой можно двигаться только вправо (потому что НМТ не может записывать результат выбора на ленту). Это задает такой же класс языков, это можно видеть также как мы видели для разных определений  $NP$ .

**Определение 12.3.**  $DPATH = \{(G, u, v) \mid \text{в ор. графе } G \text{ есть путь } u \rightarrow v\}$ .

$DPATH \in NL$ , подсказкой является собственно путь. Нужно проверить, что первая вершина в нем есть  $u$ , последняя  $v$  и что есть ребро между соседними, это можно сделать за  $\log$  памяти.

**Теорема 12.1.**  $DPATH - NL$  полный (относительно  $\leq_l$ ).

*Доказательство.* пусть  $A \in NL$ ,  $M$  – нмт, решающая  $A$ . Сведение будет следующим. Оно будет генерировать конфигурации, которые составляют максимум  $\log$  памяти и выводить ребра между ними, то есть строить граф конфигураций. Далее выведем начальное и конечное состояние и это и будет искомым инстанс задачи  $DPATH$ . ■

**Замечание 12.1.** Неизвестно, лежит ли  $DPATH$  в  $L$ , или нет.

**Теорема 12.2.**  $\overline{DPATH} \in NL$

*Доказательство.* Нам нужно сертифицировать, что между  $s, t$  нет пути, причем сделать такое доказательство, которое можно читать слева направо и использовать логарифмическую память.  $U_i$  – множество вершин, до которых есть путь от  $s$  длины не более  $i$ .

1. для  $v$  можно сертифицировать, что  $v \in U_i$ , сертификат – просто путь, как в языке  $DPATH$ .
2. если известно  $|U_{i-1}| = k$ , то можно сертифицировать, что  $u \notin U_i$ . Для этого предоставим список вершин из  $U_{i-1}$  с сертификатами, что они действительно оттуда. Причем список будет у нас возрастающим, чтобы не было повторяющихся вершин. Проверим, что там правильное число вершин + нет вершины  $u$  и также нет ребра между вершинами из списка и  $u$ .

- если известно  $|U_{i-1}| = k$ , то можно сертифицировать, что  $|U_i| = t$ . Просто для каждой вершины напишем одно из двух, либо сертификат того, что она лежит в  $U_i$ , либо сертификат того, что не лежит, при условии  $|U_{i-1}| = k$ .
- Таким образом мы можем сертифицировать, что размер  $U_{n-1} = k$  и что  $t \notin U_n$ .

**Определение 12.4** (соЯзык).  $X$  – класс языков. Тогда  $coX = \{\Sigma^* \setminus L \mid L \in X\}$ .

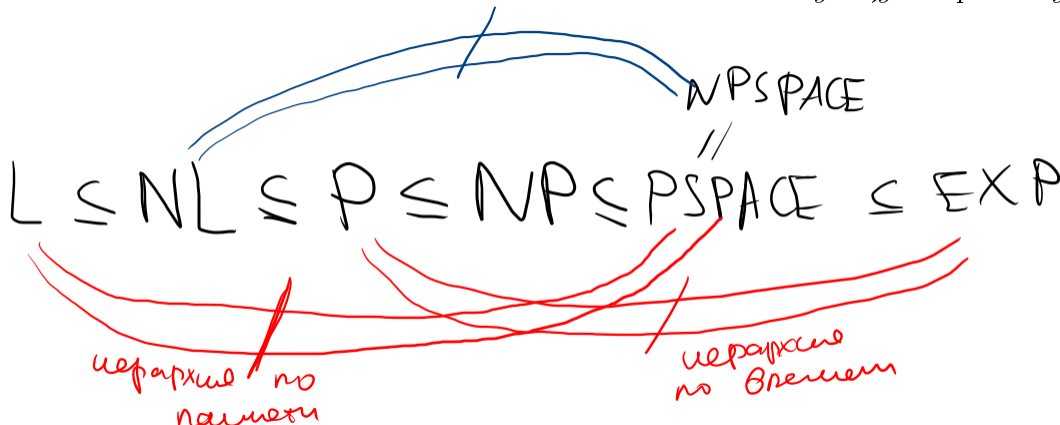
**Замечание 12.2.** Как мы уже видели,  $NP = coNP$  – неизвестно.

**Теорема 12.3.**  $s(n) \geq \log n$  – конструктивная по памяти. Тогда  $NSpace[s(n)] = coNSpace[s(n)]$ .

*Доказательство.*  $A \in NSPACE[s(n)]$ , хотим показать, что  $A \in coNSpace[s(n)] \iff \bar{A} \in NSpace[s(n)]$ . Причем, если покажем это, то автоматически последует равенство, так как для  $A \in coNSpace[s(n)]$  надо показать, что  $\bar{A} \in NSpace[s(n)]$ , тогда из той стрелочки, которая описана это последует. Рассмотрим  $M$  – НМТ, которая распознает  $A$  с памятью  $s(n)$ .  $x \in \bar{A} \iff x \notin A \iff$  в графе конфигураций  $G_x$  из  $K_0$  нет пути в  $K_{accept}$ .

Сертификатом будет тот же самый, сертификат, что и был в теореме выше. Размер графа конфигураций будет  $2^{O(s(n))}$ , тогда нам потребуется  $O(s(n))$  памяти, чтобы проверить сертификат. Причем граф строить полностью не надо, нужно всего лишь уметь проверять, есть ли некоторые ребра в нем.

**Замечание 12.3.** Выяснили на нынешний момент следующую картинку:



## 13 Билет 13

**Определение 13.1.** Определение классов  $\Sigma_0^P, \Sigma_1^P, \dots$ , а также  $\Pi_0^P, \Pi_1^P$ .

Интуиция про  $NP, coNP$  и  $\Sigma_1^P, \Pi_1^P$ .

Можно развернуть определение:  $\forall x, x \in L \iff \exists y_1 |y_1| \leq p(|x|) \forall y_2, \dots, y_i Q(x, y_1, \dots, y_i)$ .

**Определение 13.2.**  $PH = \cup_{i \geq 0} \Sigma_i^P$

**Утверждение 13.1** (Свойства полиномиальной иерархии). .

- $\Sigma_i^P \cup \Pi_i^P \subseteq \Sigma_{i+1}^P \cap \Pi_{i+1}^P$ .

*Доказательство.* Добавляем фиктивные переменные и кванторы.

- $PH = \cup_{i \geq 0} \Pi_i^P$ .

3.  $\Sigma_i^P = co\Pi_i^P$
4.  $\Sigma_i^P = \Pi_i^P \Rightarrow PH = \Sigma_i^P$ .

*Доказательство.* Доказательство индукцией по  $j \geq i$ , что  $\Sigma_j^P = \Pi_j^P$ . Используйте равенство предыдущего уровня для объединения кванторов в один. ■

5.  $\Sigma_i^P$  и  $\Pi_i^P$  замкнуты относительно  $\leq_p$ .

*Доказательство.* Легко видеть, что надо просто взять вычислимый  $Q$  из определения и попросить его использовать сведение чтобы охарактеризовать нужным образом язык. ■

6. Если в  $PH$  есть полный язык, то полиномиальная иерархия схлопывается.

*Доказательство.* Просто все языки, начиная с уровня, на котором лежит полный, будут лежать в этом же уровне. ■

7. Теперь введем полные языки на уровнях иерархии. Пусть  $\Sigma SAT$  это язык, в котором лежат истинные формулы вида  $\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3, \dots, x_i Q(x_1, \dots, x_i)$ , где  $x_i$  – возможно вектор значений. Аналогично, только с противоположными кванторами определяется  $\Pi_i$ .

**Утверждение 13.2.** при  $i \geq 1$  выполняется то, что  $\Sigma_i SAT$ ,  $\Pi_i SAT$  полны в соответствующих классах на  $i$ -том уровне полиномиальной иерархии.

*Доказательство.* Покажем про  $\Sigma_i SAT$ . В начале то, что он лежит в  $\Sigma_i^P$ . Характеристика его такова: так как мы не знаем точно сколько там переменных внутри векторчиков, то будем в каждый блок класть столько переменных, чтобы нам хватило. То есть, характеристика следующая:  $\exists x_1, |x_1| = |\varphi|, \forall x_2 |x_2| = |\varphi|, \dots, x_i : A(\varphi, x_1, \dots, x_i)$ .  $A$  – просто полиномиальный алгоритм, который берет и подставляет из наших блоков переменные в  $\varphi$  и проверяет то, что она истинна. Таким образом показали включение.

Теперь полнота. Возьмем некоторый язык  $L \in \Sigma_i^P$ . Его характеристика имеет вид:  $\exists y_1, |y_1| = p(|x|), \dots, y_i Q(x, y_1, \dots, y_i)$ . Можно в характеристике сделать все игришки фиксированной длины (в отличии от того что у нас раньше была оценка сверху на длину), так как можно допихать нулей в случае чего.

$Q(x, y_1, \dots, y_i)$  – какой-то полиномиально вычислимый предикат. Давайте переделаем его в схему. Это получится, так как  $y_1, \dots, y_i$  и  $x$  имеют фиксированную полиномиальную длину. Теперь переделаем схему в формулу при помощи введения дополнительных переменных для всех узлов схемы и обеспечения соответствующих равенств. Получится формула вида  $\exists t \varphi(x, y_1, \dots, y_n)$ . Если вдруг нам и нужен был квантор существования в конце ( $i$  – нечетно), то мы уже победили. Иначе воспользуемся трюком с существованием для отрицания и получим запись с квантором всеобщности. Тогда этот квантор можно совместить с последним квантором из характеристики  $L$ . ■

## 14 Билет 14

**Теорема 14.1.**  $\Sigma_{i+1}^P = NP^{\Pi_i SAT}$

*Доказательство.* .

$\subseteq$ :  $L \in \Sigma_{i+1}^P$  тогда есть следующая характеристика  $\exists L' \in \Pi_i^P, \forall x \in L \Leftrightarrow \exists y \in \{0, 1\}^{p(|x|)}, (x, y) \in L'$ . Тогда пусть наша НМТ генерирует этот  $x$ , потом делает запрос к оракулу при помощи сведения  $(x, y)$  к  $\Pi_i SAT$ .

$\supseteq$ : пусть  $L \in NP^{\Pi_i SAT}$  и его решает НМТ  $M$  за  $p(n)$  с использованием оракула  $\Pi_i$ .  
 $x \in L \iff \exists z \in \{0, 1\}^{p(n)}, T_1(x, z) \wedge T_2(x, z) \wedge T_3(x, z)$ , где

1.  $z$  отвечает за недетерминированные выборы НМТ и ответы оракулов.
2.  $T_1(x, z)$  проверяет, что мы действительно принимаем  $x$  действуя согласно строке  $z$
3.  $T_2(x, z)$  проверяет, правда ли, что оракул дал верные положительные ответы. Все вопросы к оракулу выглядят как формулы вида:  $\forall x_1, \dots, x_k \varphi(x_1, \dots, x_k)$ . Тогда давайте  $T_2$  будет выглядеть так:  $\forall r_1 \in \{0, 1\}^{p(n)^2}, \dots, r_k \in \{0, 1\}^{p(n)^2} R(x, z, r_1, \dots, r_k)$ , где  $R$  поблочно подставляет переменные во все формулы, про которые спрашивал наш алгоритм у оракула и проверяет истинность.
4.  $T_3$  проверяет отрицательные ответы оракула. Для того, чтобы проверить, что  $\varphi$  ложна – нужно проверить, что истинно отрицание  $\varphi$ , то есть, что  $\exists x_1, \dots, x_k \neg \varphi(x_1, \dots, x_k) = 1$ . Тогда давайте запишем характеристику следующим образом:  $\exists x_1 \in \{0, 1\}^{p(n)^2}, \dots, x_k \in \{0, 1\}^{p(n)^2} T'(x, z, x_1, \dots, x_k)$  и  $T'$  выдает 1 тогда и только тогда, когда все формулы обнулились.

Теперь вынесем кванторы независимо из  $T_1, T_2$ . Получится нужное чередование. ■

## 15 Билет 15

**Определение 15.1** (Вычисления с неравномерной подсказкой). *Языки, принимаемые МТ с неравномерной подсказкой длины  $K(n)$  ( $P/K(n)$ ) это такие языки, для которых существует  $M$  – МТ с лентой для подсказки и  $\alpha_n$  – последовательность подсказок длины  $\leq K(n)$  такие, что МТ понимает, лежит ли  $x$  в  $L$ , используя подсказку  $\alpha_{|x|}$ .*

**Замечание 15.1.**  $P/1$  содержит неразрешимые языки.

**Утверждение 15.1.**  $\cup_c P/n^c = P/poly$ .

*Доказательство.* .

$\subseteq$ : давайте переделаем МТ в схемы, потом встроив туда подсказку. Получим последовательность схем.

$\supseteq$ : в качестве подсказки возьмем схему. ■

**Теорема 15.1.** *Существует функция  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  такая, что она не вычислима схемой размера менее  $2^n/10n$ .*

*Доказательство.* Схему размера  $T$  можно задать за не более чем  $4T \log T$  битов. Тогда таких схем не более  $2^{4T \log T}$ . Пусть  $T < 2^n/10n$ . Тогда покажем, что  $2^{4T \log T} < 2^{2^n}$ . Нужно показать:  $4T \log T < 2^n$ , действительно:  $4T \log T < 42^n/(10n) \log(2^n/10n) < 4 * 2^n/10 < 2^n$ . ■

## 16 Билет 16

**Теорема 16.1** (Карп-Липтон). Если  $NP \in P/poly$ , то полиномиальная иерархия схлопывается на втором уровне.

*Доказательство.* За счет того, что мы умеем сводить задачи распознавания к задачам поиска, у нас существует и семейство схем, которое выдает выполняющие наборы для схем. Пусть это семейство  $C_n$ . Причем пусть размеры ограничены полиномом  $p(n)$

Хотим показать, что  $\Sigma_2^P = \Pi_2^P$ . Нам хватит показать, что  $\Pi_2 SAT$  лежит в  $\Sigma_2^P$ , так как это со языки друг друга.

Что у нас лежит в  $\Pi_2 SAT$ ? Истинные формулы вида  $\forall x \exists y Q(x, y)$ . Давайте попробуем написать для этого языка  $\Sigma_2^P$  характеристику.

Пусть  $T_z(y) = Q(z, y)$ .

$\varphi \in \Pi_2 SAT \iff \exists C_1, \dots, C_{|\varphi|} \forall z \in \{0, 1\}^{|\varphi|} T_z(C_{|T_z|}(T_z)) = 1$ . Мы легко можем проверить последний предикат за полиномиальное время. Причем из того, что  $NP \in P/poly$  будем существовать нужный набор схем в случае, если формула действительно лежит в языке. ■

## 17 Билет 17

**Теорема 17.1** (Первая теорема Каннана).  $PH$  не лежит в  $Size[n^k]$  ни для какого  $k$ .

*Доказательство.* Давайте построим язык, который будет содержаться в  $PH$ , но при этом не решаться схемами размера  $n^k$ .

Посмотрим на булевы функции от  $(k+1)\log n$  переменных. Тогда по теореме про существование сложной функции, среди таких функций найдется функция, схемная сложность которой более  $2^{(k+1)\log n}/10n = \frac{n^{k+1}}{10(k+1)\log n}$ , что больше  $n^k$  при больших  $n$ .

Будем с помощью кванторов задавать первую такую функцию. Скажем, что  $x \in L \rightarrow \forall f(\forall C|C| \leq n^k \iff \exists x C(x) \neq f(x)), \forall g(g \prec f, \exists C|C| \leq n^k \forall x C(x) = g(x)) \rightarrow f(x) = 1$ . Мы сможем проверить предикат лексикографической меньшести и равенства функции, так как функцию из  $(k+1)\log n$  битов можно задать таблицей истинности полиномиального размера. ■

**Теорема 17.2** (Вторая теорема Каннана). Уже в  $\Sigma_2^P \cap \Pi_2^P$  есть язык, который не распознается семейством полиномиальных схем.

*Доказательство.* Пусть это не так. Тогда  $NP \in \Sigma_2^P \cap \Pi_2^P \leq P/poly$ , но тогда из теоремы Карпа-Липтона получим, что полиномиальная иерархия схлопывается на 2 уровне и  $PH = \Sigma_2^P$ , но это противоречие с первой версией теоремы Каннана. ■

## 18 Билет 18

**Определение 18.1.** Семейство схем  $C_n$ , имеющих  $n$  входов, называется равномерным, если есть логарифмическая по памяти машина Тьюринга, генерирующая нам по входу  $1^n$  выход  $C_n$ .

**Теорема 18.1.** Класс языков, распознающихся семейством равномерных схем есть класс  $P$ .

*Доказательство.* Если распознается семейством равномерных схем, то давайте будем генерировать схему и проверять на наличие. Будет работать за полином, потому что алгоритм, генерирующий схему, лежит в  $L$ . Теперь заметим, что наш алгоритм, который переводит МТ в схему – тоже логарифмический. Потому что ему для построения нужно было выписывать какие-то ячейки на одном уровне и при этом добавлять ребра между некоторым константным количеством соседних ячеек, тут нет сильно затратных по памяти операций. ■



**Замечание 18.1.** Часто считают, что задача поддается эффективному распараллеливанию, если ее можно решить на  $\text{poly}(n)$  процессоров за  $\log n$ , где  $n$  – длина входа.

**Замечание 18.2.** Если смогли распараллелить на  $n$  процессорах, то можно поделить это число на какую-нибудь константу, степень распараллеливания тоже поделится примерно на константу.

Можно представлять себе распараллеленные вычисления как схему малой глубины.

**Определение 18.2.**  $NC = \cup_{i \geq 0} NC^i$ .

$L \in NC^i$  тогда и только тогда, когда существует последовательность равномерных схем  $C_n$ , распознающих  $L$  и глубина  $C_n \leq O(\log^i n)$ .

**Замечание 18.3.**  $NC \subseteq P$ , потому что это множество слабее, чем то, которое равно  $P$ : мы добавили ограничение на глубину схемы. При этом открытым вопросом является равенство  $NC$  и  $P$ .

В каких-то  $P$ -подобных классах интересно рассматривать  $\leq_I$  сведения, потому что по Карпу и так почти все сводится друг к другу тривиально.

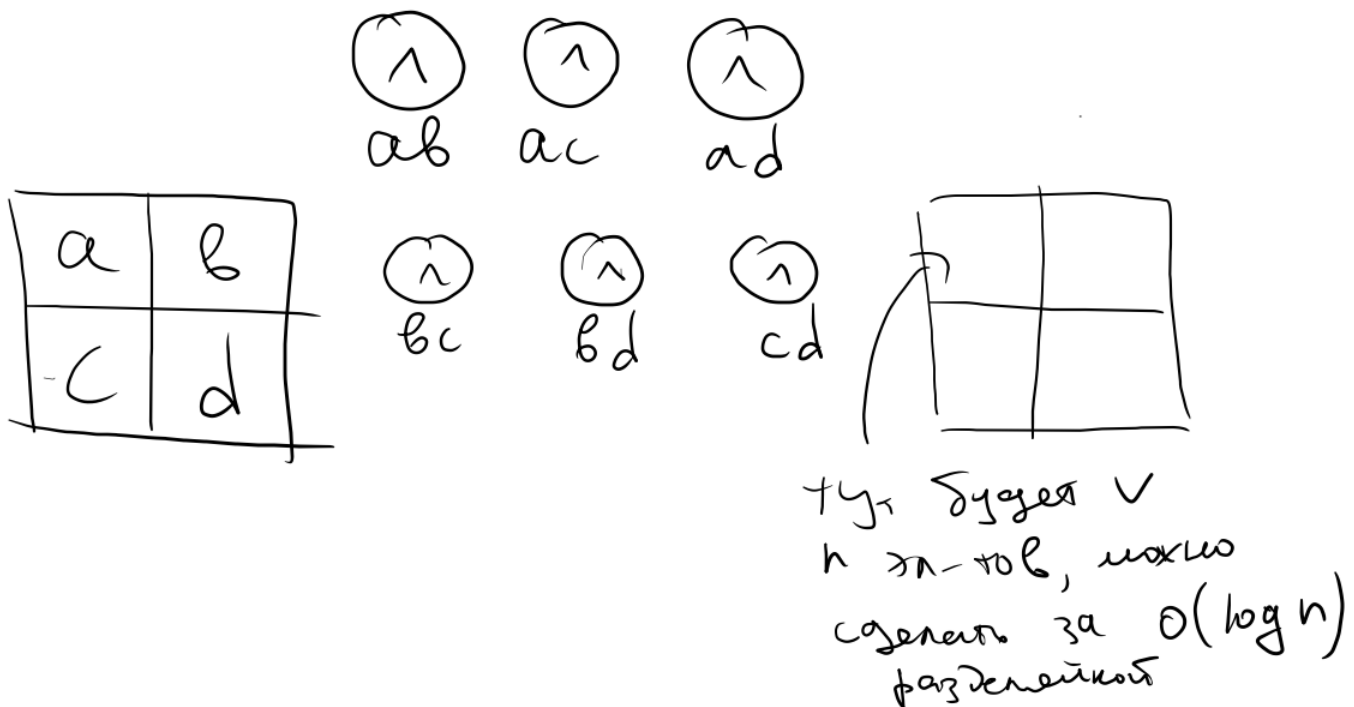
**Определение 18.3.**  $Circuit - Value = \{(C, x) \mid C - \text{булева схема}, C(x) = 1\}$  является  $P$ -полным относительно  $\leq_I$  сведений.

*Доказательство.* Понятно, что этот язык лежит в  $P$ . Как свести? Давайте построим по МТ схему как обычно логарфмическим алгоритмом. ■

**Замечание 18.4.** Попытка объяснения про задачу, почему она не распараллеливается могла бы быть такой: давайте сведем ее к  $Circuit - Value$ . Поскольку, неизвестно равны ли  $P$  и  $NC$ , то если бы это было не так, то попытка объяснения бы сработала.

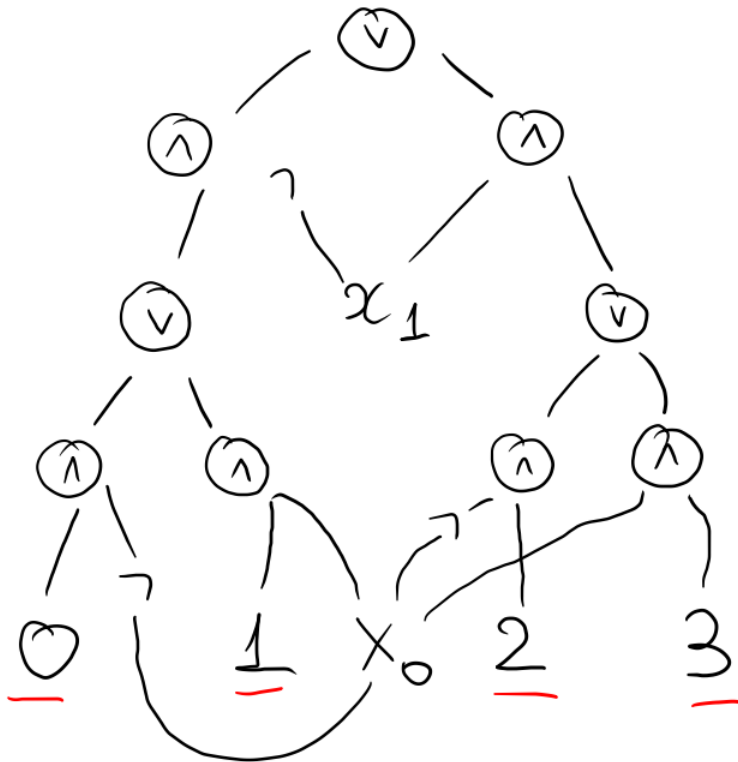
**Утверждение 18.1.**  $DPATH \in NC^2$ , если граф задан матрицей смежности.

*Доказательство.* Чтобы понять, есть ли путь из вершины в другую, надо  $k$  раз возвести в квадрат матрицу смежности, где  $k = \lceil \log n \rceil$ . Тогда давайте строить схему, делающую это. Там будет  $k$  возведений матрицы в квадрат. Причем каждое возведение добавляет в схему  $O(\log n)$  высоты, что нетрудно видеть, посмотрев на пример ниже.



Теперь надо взять элемент  $(s, t)$  у этой матрицы.

Покажем схему, которая поможет выбрать  $i$ -тый элемент массива, если  $i$  задано в двоичном виде. Основываемся на идее, что если старший бит  $i$  равен 1, то брать надо из правой половины, иначе – из левой. Построим для половинок схемы на  $n - 1$  бите и так далее. Получится глубина  $O(\log n)$ , пример на рисунке для  $n = 4$ :



Тогда выберем из каждой строчки элемент  $t$ , а дальше из всех выбранных выберем элемент  $s$ , получится схема глубины  $2 \log n$ . Таким образом, построили схему нужной глубины.

Важно, что все схемы, которые мы тут обсудили можно сгенерировать с использованием логарифмической памяти. Проверять это довольно нудно, но видно, что, например в последней схеме, нужно просто бежать по уровням и выводить ребра с элементами с фиксированными номерами, получающимися по какой-нибудь формуле типа  $2i$ , незачем хранить всё целиком. ■

**Утверждение 18.2.** *Классы  $NC^i$  при  $i \geq 2$  замкнуты относительно логарифмических сведений.*

*Доказательство.* Доказательство очень глиняное. Пусть есть  $B \in NC^i$ ,  $A \leq_l B$ ,  $f$  – сведение. Тогда хотим сделать следующее: в начале вычислять сведение при помощи схемы глубины  $\log^2$ , а дальше считать уже спокойно функцию схемой для языка  $B$ . Будем считать сведение так: посчитаем отдельно каждый его бит. Всего будет какой-то полином битов. Нам нужно проверить, что при нашем входе сведение выдаст на  $j$ -тый бит, бит 1. Давайте возьмем МТ, которая такая же как сведение, но, она еще принимает бит, который надо выдать и в конце приходит в состояние  $q_{yes}$  или  $q_{no}$  в зависимости от значения этого бита. Далее переделаем всё это в схему при помощи предыдущего утверждения и графа конфигураций. ■

**Замечание 18.5.** *Вспомним, что  $DPATH = NL$  полный. Отсюда получается, что  $NL \subseteq NC^2$ .*

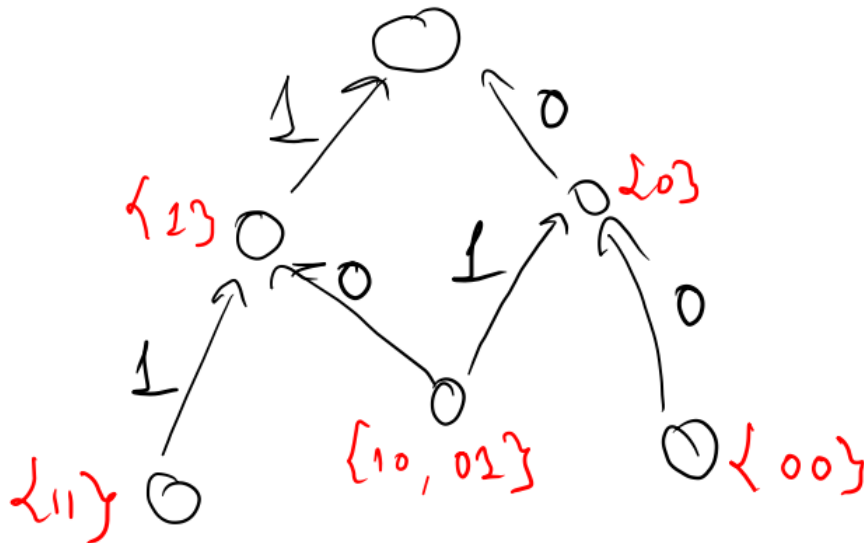
**Теорема 18.2.**  $NC^1 \subseteq L \subseteq NL \subseteq NC^2$

*Доказательство.* Из всего вышесказанного, остается показать лишь  $NC^1 \subseteq L$ . Возьмем какой-нибудь язык  $L \in NC^1$ . Хотим решить его за логарифмическую память, сделаем следующие действия по  $x$ :

1. Построим схему, решающую данный язык с помощью алгоритмы из  $NC^1$
2. Переделаем схему в формулу
3. Вычислим формулу с помощью рекурсии

Если покажем, что каждое действие можно сделать за  $O(\log n)$  памяти, то можно будет и всё сделать за такую память, так как композиция функций, вычисляемых за  $O(\log n)$  памяти тоже функция такого вида.

1. Работаем тут за  $O(\log)$  памяти, так как нужно просто применить алгоритм, который нам предоставляет схему за такую память из  $NC^1$ , подав ему на вход нужное число единиц.
2. Понятно, что из схемы высотой  $O(\log)$  получится формула тоже не более чем такой высоты. Будем копировать вершины, построив что-то вроде двоичного бора на нашей схеме и всякий раз доходя до какой-то вершины, копируя её и выдавая номер, соответствующий пути в боре. Нам понадобится  $O(\log)$  памяти, так как по сути нужно хранить нынешний путь в виде числа (можно изначально задать соответствие вершин и таких путей, чтобы понимать, в какой мы сейчас вершине). Подробнее на рисунке:



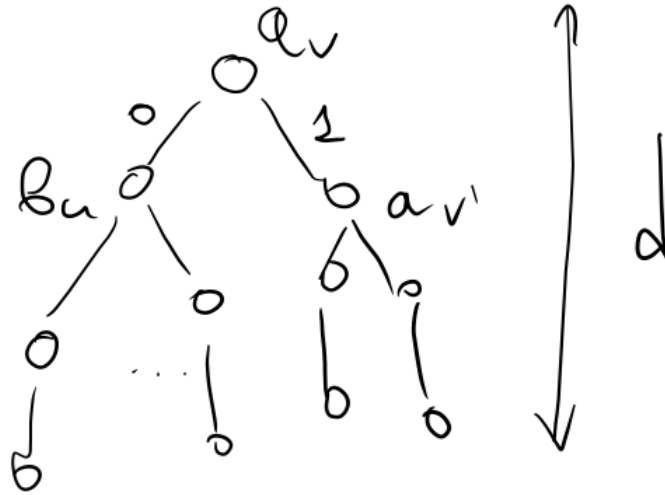
3. Вычисление формулы занимает  $O(\log n)$  памяти потому что нам не надо хранить стек рекурсии, предок в формуле определяется однозначно.

■

## 19 Билет 19

**Определение 19.1.** *Какая-то интуиция коммуникационной сложности + пример про делимость и определение  $EQ$ .*

**Определение 19.2** (Коммуникационный протокол). *Это дерево, в котором в каждой вершине либо что-то передает Алиса, либо Боб. То есть там написана функция Алисы из ее входа в  $\{0, 1\}$ , либо Боба. История взаимодействия учитывается, так как везде может быть своя функция.*



**Определение 19.3.** Коммуникационная сложность протокола – его высота. Обозначается как  $D(\Pi)$ . Коммуникационная сложность функции это минимальная коммуникационная сложность протокола, вычисляющего её. Обозначается аналогично.

$M_f$  – матрица для  $f : X \times Y \rightarrow Z$ , если  $M_{i,j} = f(i, j)$ . Комбинаторный прямоугольник – множество  $X' \times Y'$  для некоторых  $X' \subseteq X, Y' \subseteq Y$ . Комбинаторный прямоугольник назовем одноцветным тогда и только тогда, когда все элементы матрицы, соответствующие ему равны попарно.

Заметим, что каждый ход в протоколе разбивает какой-то прямоугольник на еще несколько в зависимости от значения функции, а листья протокола соответствуют как раз одноцветным прямоугольникам, так как в них значения определены корректно и однозначно.

Отсюда получается:

**Утверждение 19.1.** Если в протоколе для  $f$  есть  $k$  листьев, то  $f$  можно разбить на  $k$  одноцветных прямоугольников.

Другими словами, число листьев в протоколе  $\geq$  минимальное число одноцветных прямоугольников, на которое можно разбить  $M_f$ .

**Теорема 19.1.** Сложность протокола  $EQ$  есть  $n + 1$ .

*Доказательство.* Очевидно, как сделать за  $n + 1$ . Нужна оценка снизу. Будем доказывать при помощи подсчета одноцветных прямоугольников в матрице для  $EQ$ . Эта матрица это  $E_{2^n}$ . В ней никакие 2 единицы не могут принадлежать одному прямоугольнику. А значит, прямоугольников хотя бы  $2^n + 1$ , что свидетельствует о том, что высота протокола будет  $\geq n + 1$ . ■

## 20 Билет 20

Оказывается, что можно доказывать некоторые забавные вещи при помощи построенной конструкции.

**Теорема 20.1.** Для одноленточной МТ, решающей язык палиндромов, выполнено  $T \cdot S = \Omega(n^2)$ , где  $T$  – время работы,  $S$  – затраченная память.

*Доказательство.* Возьмем такую МТ  $M$ . По ней построим коммуникационный протокол для вычисления  $EQ$ . Будем рассматривать строки  $x0^n y^{rev}$ , которые являются палиндромами тогда и только тогда, когда  $x = y$ . Пока МТ не вышла за самую правую перегородку, стоящую после искусственно

добавленных нулей, Алиса будет эмулировать ее, а дальше отправит Бобу состояние ленты, а также состояние МТ. Далее также будет делать Боб, но наоборот, до момента, пока МТ не дойдет до самой левой перегородки после искусственно добавленных нулей.

Тогда сложность такого протокола равна  $(O(1) + O(S(x0^n y^{rev}))) \frac{T(x0^n y^{rev})}{n} \geq n + 1$ , откуда искомое неравенство.  $n$  в знаменателе, так как между передачами проходит хотя бы  $n$  действий МТ. ■

## 21 Билет 21

**Определение 21.1** (Про отношения). .

1. Отношением назовем множество троек  $R \subseteq X \times Y \times Z$ .
2. Отношение тотально, если  $\forall x, \forall y, \exists z, (x, y, z) \in R$ .
3. Функция  $f$  реализует тотальное отношение, если  $\forall x \in X, \forall y \in Y, (x, y, f(x, y)) \in R$ .
4. Коммуникационный протокол для тотального отношения  $R$  – это коммуникационный протокол для какой-нибудь функции его реализующей.
5. Коммуникационная сложность тотального отношения – глубина наименьшего коммуникационного протокола для него.

**Определение 21.2** (Отношение Карчмар-Вигдерсон). .  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ .  $f(x) = 0, f(y) = 1$ .  $KW_f = \{(x, y, z) \mid f(x) = 0, f(y) = 1, x_i \neq y_i\}$ .

**Утверждение 21.1** (Лемма Карчмар-Вигдерсон). Если у булевой функции  $f$  есть формула, вычисляющая ее с  $l$  листьями, то есть коммуникационный протокол, который ее вычисляет с не более чем  $l$  листьями.

*Доказательство.* В начале перенесем отрицания к листьям в формуле. Далее поддерживаем инвариант в каждой вершине, что у Алисы прообраз нуля функции, вычисляемой в этой вершине, у Боба – прообраз единицы. В узлах, где последняя операция ИЛИ – выбирать будет Боб – ему надо пойти в единичное поддереву, а там где И – Алиса. В конце в листьях как раз и будут отличающиеся биты, так как там вычисляются тривиальные функции. ■

Другими словами, кол-во листьев в формуле  $\geq$  минимальное количество листьев в протоколе для отношения Карчмар-Вигдерсон этой функции.

## 22 Билет 22

Теперь применим то, что было в предыдущих билетах. А именно, цепочку неравенств для булевой функции  $f$ :

$$\#min\_leafs\_in\_formula(f) \geq min\_height(KW_f) \geq min\_cnt\_monochrome(M_f)$$

**Утверждение 22.1.**  $X, Y$  – непересекающиеся подмножества  $\{0, 1\}^n$ ,  $C = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y, x, y \text{ различаются ровно в одном бите}\}$ .  $M$  – матрица на  $X \times Y$ .  $\forall x \in X, y \in Y$  выполнено  $M_{x,y} = \text{бит различия } x, y$ . Тогда

$$T \geq \frac{|C|^2}{|X||Y|}$$

где  $T$  – минимальное число одноцветных комбинаторных прямоугольников, на которое можно разбить  $M$ .

*Доказательство.* Пусть  $R_1 \sqcup R_2 \sqcup \dots \sqcup R_T$  – разбиение  $M$  на одноцветные прямоугольники.  $m_i = |R_i \cap C|$ .

Посмотрим на  $R_i$ , утверждается, что в нем нет двух элементов из  $C$  в одной строке. Действительно, все пары отличаются в одинаковом бите. Если ровно в одном, то не может быть такого, что такие пары две в строке, иначе у нас какой-то элемент написан дважды. Аналогично для столбцов. Отсюда выполняется  $|R_i| \geq m_i^2$ .

$$|C|^2 = \left( \sum_{i \in [T]} m_i \right)^2 \leq T \sum_{i \in [T]} m_i^2 \leq T |X| |Y|$$

. Отсюда искомое неравенство. Использовали КБШ в оценке (представили как  $1 \cdot m_i$ ). ■

**Утверждение 22.2.** Формула для  $Parity_n$  имеет размер  $\Omega(n^2)$ . Воспользуемся цепочкой неравенств выше. Для оценки самой правой величины в цепочке используем предыдущее утверждение. Возьмем  $X = Parity_n^{-1}(0)$ ,  $Y = Parity_n^{-1}(1)$ . Тогда сколько есть для элемента из  $X$  парных с ним таких, что они отличаются в одном бите из  $Y$ ? Понятно, что все такие лежат в  $Y$  и их  $n$  штук. Тогда неравенство говорит нам, что  $T \geq n^2$ , что и хочется.

## 23 Билет 23

**Определение 23.1.** Вероятностная МТ может быть определена двумя эквивалентными способами:

1. Это НМТ, у которой следующий переход выбирается равновероятно.
2. это ДМТ, у которой есть лента случайных битов, которую разрешается только читать и бежать по ней только вправо.

**Определение 23.2.**  $L \in BPP$ , если существует вероятностная МТ  $M$ , которая всегда останавливается и работает за полином  $p(|x|)$  времени и при этом  $Pr[M(x) \leq L(x)] < 1/3$ .

**Замечание 23.1.**  $P \subseteq BPP$ , а обратное включение пока не доказано.

**Определение 23.3** (Классы с односторонней ошибкой).  $L \subseteq RP$ , если существует вероятностная МТ  $M$ , которая всегда останавливается и работает за полином  $p(|x|)$  времени и при этом:

1.  $x \notin L \implies M(x) = 0$
2.  $x \in L \implies Pr[M(x) = 1] \geq 1/2$ .

Например,  $Primes \in coRP$ , так как мы знаем какие-то вероятностные тесты, которые могут составное число назвать простым, но не наоборот.

**Утверждение 23.1** (Лемма Шварца-Зипшеля).  $\mathbb{F}$  – поле,  $|\mathbb{F}| < +\infty$ ,  $p \in \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ ,  $p \not\equiv 0$ , тогда при случайном независимом выборе  $x_1, \dots, x_n$  из  $\mathbb{F}$  выполняется

$$Pr[p(x_1, \dots, x_n) = 0] \leq \frac{d}{|\mathbb{F}|}$$

где  $d = \deg p$ .

*Доказательство.* индукция по  $n$ . В случае  $n = 1$  утверждение следует из теоремы Безу.

переход:  $f = a_n^{i_1} f_{i_1} + \dots + a_n^{i_k} f_{i_k}$  для некоторых ненулевых  $f_{i_j}$  и  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ .

Обозначим  $S = |\mathbb{F}|$ ,  $\mathbb{F} = \{0, \xi_2, \dots, \xi_S\}$ .

1. Если  $i_1 \neq 0$ . Распишем по формуле полной вероятности, пробегаая все значения  $a_n$ .

$$Pr[f = 0] = Pr[f = 0|a_n = 0]Pr[a_n = 0] + \dots + Pr[f = 0|a_n = \xi_S]Pr[a_n = \xi_S]$$

Подстановка  $a_n = 0$  обнулит  $f$ , тогда  $Pr[f = 0|a_n = 0] = 1$ . Все остальные подстановки понизят степень хотя бы на 1. Тогда выполняется

$$Pr[f = 0] \leq \frac{1}{S} + \frac{1}{S} \cdot \frac{S(d-1)}{S} = \frac{d}{S}$$

2. доказательство аналогично кроме того, что  $a_n = 0$  не обнуляет  $f$ .

■

**Пример 23.1** (Polynomial identity testing). Хотим проверить  $P \equiv 0$  для некоторого полинома  $P$ .

1. Если  $P$  задан над некотором полем  $\mathbb{F}$ , таким что  $|\mathbb{F}| \gg \deg P$ , то нужно подставлять случайную точку поля, если  $P \neq 0$ , то мы с большой вероятностью получим не 0.
2. Если хотим проверить равенство 0, как многочлену от целых значений, то возьмем какое-нибудь поле остатков по простому модулю, такое что, например,  $|\mathbb{F}| > 1000 \deg P$  и будем подставлять точки в нем. Это не даст гарантии, что многочлен нулевой. Возможно, его значения совпадают по взятому модулю. Можно в таком случае оценить максимальную разность двух значений многочлена и взять побольше модулей так, чтобы если уж эта разность на всех них поделилась, то она точно нулевая.

В частности, язык нулевых многочленов, записанных в виде формулы или схемы, лежит в классе  $RP$ .

## 24 Билет 24

Вспомним про ветвящиеся программы.

**Определение 24.1** (1-BP, read-once branching problem). Ветвящаяся программа лежит в  $1-BP$ , если на любом пути от входа до выхода любая переменная встречается не более 1 раза.

Хотим сравнивать на эквивалентность две ветвящиеся программы с помощью сравнения многочленов на равенство.

**Определение 24.2.** Мультилинейный многочлен – каждая переменная в каждом мономе не более чем в 1 степени.

**Утверждение 24.1.**  $h, g$  – мультилинейные многочлены.  $h, g$  – совпадают на булевом кубе. Тогда  $h, g$  совпадут всюду.

*Доказательство.* Индукция по степени. Для нулевой степени понятно, это константы, совпадают и совпадают.

Переход.  $h = h|_{x_n=0}(1-x_n) + h|_{x_n=1}x_n$ , аналогично для  $g$ . Применяем для кусочков без  $x_n$  индукционное предположение. ■

**Пример 24.1** (Вероятностная проверка на эквивалентность  $1-BP$  программ). Построим по  $1-BP$  программе мультилинейный многочлен. Построим рекурсивно. В начале построим для левого сына  $f_l$  и для правого  $f_r$ . Тогда  $f = (1-x)f_l + xf_r$ . Тогда у нас степень этого многочлена  $\leq n$ , где  $n$  – размер программы. Берем поле  $|\mathbb{F}| > 1000n$  и делаем проверку с ошибкой  $1/1000$ .

## 25 Билет 25

**Теорема 25.1** (Оценка Чернова).  $X_1, \dots, X_n$  – независимые случайные величины, распределенные на  $\{0, 1\}$ , то есть  $E[x_1] = \dots = E[x_n]$ , тогда

$$Pr\left[\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right] \leq 2e^{-2\varepsilon^2 n}$$

**Теорема 25.2** (Понижение ошибки в BPP). Если  $L \in BPP$  и  $m(n)$  – некоторый полином, то существует полиномиальная вероятностная МТ  $M$ , которая распознает  $L$  и вероятность ее ошибки не превосходит  $2^{-m(n)}$ .

*Доказательство.* Берем машину из определения  $M_0$  с вероятностью ошибки  $< 1/3$ .

Теперь предположим, что мы повторили  $N$  раз ее вычисления и выдали самый частый результат. Оценим вероятность ошибки.

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{запуск } n \text{ отработал верно} \\ 0 & \text{запуск } n \text{ отработал неверно} \end{cases}$$

$$E[X_n] \geq 2/3.$$

$$\begin{aligned} Pr[\text{машина ошиблась}] &\leq Pr[X_1 + \dots + X_n \leq N/2] = Pr\left[\frac{X_1 + \dots + X_N}{N} \leq 1/2\right] \leq \\ &\leq Pr\left[\left|\frac{X_1 + \dots + X_N}{N} - E[X_n]\right| \geq 1/6\right] \leq e^{-NC} \end{aligned}$$

, для некоторого  $C > 0$ . Тогда возьмем  $N = O(m(n))$  с достаточно большой константой, чтобы перебить  $2^{-m(n)}$  и получим нужную полиномиальную машину. ■

**Теорема 25.3** (Адлеман).  $BPP \in P/Poly$ .

*Доказательство.* Покажем, что для всех входов длины  $n$  есть одинаковые случайные биты, с помощью которых МТ может верно решить наш язык.

Для этих целей давайте возьмем МТ с ошибкой  $\frac{1}{2^{n^2}}$ . Пусть эта МТ на входах длины  $n$  работает  $m(n)$  времени. Тогда рассмотрим множество "плохих" случайных битов, таких, которые приводят нас к неверному ответу.  $R_x$  – множество масок из  $\{0, 1\}^{m(n)}$ , таких что  $M_r(x)$  работает неправильно. Тогда, так как вероятность ошибки небольшая, то  $|R_x| \leq 2^{m(n)-n^2}$ .

Давайте все такие плохие биты объединим по всем входам.

$$\left| \bigcup_{x \in \{0,1\}^{m(n)}} R_x \right| \leq 2^n 2^{m(n)-n^2} = 2^{(n-n^2)m(n)} < 2^{m(n)}$$

при  $n > 1$ . Отсюда понимаем, что есть "универсальный" набор случайных битов. Давайте использовать его в качестве неравномерной подсказки. ■

**Утверждение 25.1.** Пусть  $n < m < 2^n$  и  $S \subseteq \{0, 1\}^m$ ,  $k = \lceil m/n \rceil + 1$ . Тогда:

1.  $|S| \leq 2^{m-n} \implies$  не существует  $r_1, \dots, r_k$  таких, что  $\bigcup_{i \in [k]} (S + r_i) = \{0, 1\}^m$ .
2.  $|S| \geq 2^m(1 - 2^{-n})$ , тогда такие  $r_1, \dots, r_k$  существуют.

*Доказательство.* 1.  $|\bigcup| \leq k2^{m-n} \leq 2^{m-n}(n/k + 2) \leq 2^m$ .



2. Давайте нагенерим масочки  $r_i$  независимо и равновероятно. Тогда оценим вероятность того, что какой-то элемент не покрыт:

$$Pr[x \text{ не покрыт}] = Pr[\forall i, x + r_i \notin S] \leq 2^{-nk}$$

$$Pr[\text{какой-то } x \text{ не покрыт}] \leq 2^{m-nk} < 1$$

значит, есть решение, в котором всё покрыто. ■

**Теорема 25.4** (Сипсер-Гач).  $BPP \in \Sigma_2^P \cap \Pi_2^P$ .

*Доказательство.* Возьмем  $L \in BPP$ . Достаточно показать,  $L \in \Sigma_2^P$ , так как нетрудно видеть,  $BPP = coBPP$ , отсюда следует  $coBPP = BPP \in \Pi_2^P$ , что и надо.

Пусть МТ  $M$  для  $L$  использует  $m(n)$  случайных битов на входе длины  $n$  и ошибка у нее не превосходит  $2^{-n}$ . Возьмем некоторый  $x \in L, |x| = n$ . Пусть  $R_x \subseteq \{0, 1\}^{m(n)}, r \in R \iff M_r(x) = 1$ .

$$1. x \in L, \text{ тогда } |R_x| \geq 2^{m(n)}(1 - 2^{-n})$$

$$2. x \notin L, \text{ тогда } |R_x| \leq 2^{m(n)-n}$$

Применим предыдущее утверждение.

$x \in L \iff \exists r_1, \dots, r_{\lceil m(n)/n \rceil + 1} \forall a \in \{0, 1\}^{m(n)} Q(r_1, \dots, r_k, x)$ , где  $Q$  – проверяет, что для какого-нибудь  $i$ :  $M_{a+r_i}(x) = 1$ . Таким образом получили нужную характеристику. ■

## 26 Билет 26

**Определение 26.1** (Интерактивный протокол). *Есть  $V$  и  $P$ , которые общаются и  $V$  вероятностно проверяет доказательство, которое ему предоставит  $P$ . Протокол состоит из передачи информации от  $V$  к  $P$  по очереди.  $V$  является вероятностным алгоритмом, работающим полиномиальное время от входа.*

$P(x, h)$ , где  $x$  – вход,  $h$  – история взаимодействия.

$V(x, h, r)$ , где  $r$  – случайные биты.

Результат взаимодействия  $V$  и  $P$  на входе  $x$  обозначается как  $\langle V, P \rangle(x)$ . Это некоторая случайная величина, потому что зависит от случайных битов.

**Определение 26.2.**  $L \in IP[K(n)] \iff \exists$  функция  $V$  и полиномиальный относительно первого аргумента алгоритм  $P$ :

$$1. \forall P' V \text{ заканчивает общение с } P' \text{ на входе } x \text{ за } K(|x|) \text{ шагов.}$$

$$2. \forall x \in L \text{ выполнено: } Pr[\langle V, P \rangle(x) = 1] > 2/3.$$

$$3. \forall x \notin L \text{ выполнено: } Pr[\langle V, P \rangle(x) = 1] < 1/3.$$

**Пример 26.1.**  $GNI$  – язык, в котором лежат пары неизоморфных графов на одном числе вершин.

**Утверждение 26.1.**  $GNI \in IP[2]$

*Доказательство.* Протокол будет устроен так:

$$1. \text{ Рассмотрим протокол для графов } G_0, G_1, |V| = n$$

$$2. \text{ Verifier генерирует число } i \in \{0, 1\}$$

$$3. \text{ Verifier генерирует } P \in S_n$$

4. *Verifiter* перемешивает граф  $G_i$  сгенерированной перестановкой и отправляет этот граф
5. *Prover* посылает ответ на вопрос: какого графа была выдана перестановка ему сейчас?
6. Если *Prover* прислал  $j = i$ , то выдаем, что графы неизоморфны, иначе – изоморфны.

Заметим, что если графы были неизоморфны, то найдется честный *Prover*, который это подтвердит, он просто пришлет нам верный ответ на наш вопрос и мы будем всегда верно говорить ответ. Если же графы были изоморфны, то на всех прouverах мы будем не более чем в половине случаев говорить неправду (Если прuver угадал наше число  $i$ ).

Чтобы соответствовать определению, повторим данный протокол 2 раза. Но заметим, что можно не делать 4 передачи, просто передадим сразу пару и запросим пару. ■

**Определение 26.3.**  $IP = \cup_{c>0} IP[n^c]$

**Замечание 26.1.** В нашем примере существенно использовалось то, что у двух сторон разные случайные биты. Потому что иначе *Prover* смог бы всегда нас обманывать. Также заметим, что в примере, честный прuver всегда убеждает нас в верных фактах. Чуть позже станет ясно, что первого из этих условий можно избежать, а второе можно добавить в определение и язык не изменится.

**Теорема 26.1** ( $IP \subseteq PSPACE$ ).

*Доказательство.* Наша цель – по протоколу найти прuver, максимизирующий вероятность того, что мы примем  $x$  и сравнить эту вероятность с  $2/3$ .

Построим полное дерево взаимодействия. Можно считать, что его высота  $t(n)$ , каждая переданная строка тоже оценивается полиномом  $q(n)$ . Теперь хотим посчитать некоторую динамику:

$$p_u = \max_{P-Prover} Pr[P \text{ доходит до } u, \text{ при взаимодействии с этим прuverом получим } 1]$$

Как считать такую штуку для листьев? Если в листе написан 0, то вероятность равна 0. Для единичных листов нам известно то, как должен вести себя прuver, переберем случайные биты проверяльщика и посчитаем, какая доля случайных битов приводит нас к этому листу. Всего понадобится полином случайных битов, каждая эмуляция проводится также за полином.

Как считать такую штуку для вершин, соответствующих ходам прuverа? Наш прuver, дошедший до этой вершины дальше сделает ход в какую-то из вершин – детей. Он хочет максимизировать вероятность дохождения до 1, значит нужно взять максимальный ответ для детей.

Как считать такую штуку для вершин, соответствующих ходам проверяльщика? Так как его алгоритм нам известен, то для него значение равно просто вероятности попасть в 1, начиная с этой вершины. Это равно сумме  $p_{v_k}$  по всем сыновьям.

Посчитав такую динамику, сравним значение в начальной вершине с  $2/3$  и выдадим ответ. ■

## 27 Билет 27

**Теорема 27.1** (Шамир).  $PSPACE \subseteq IP$

*Доказательство.* Можно показать  $TQBF \subseteq IP$ . Тогда вместо того чтобы доказывать протоколом  $x \in L$  будем показывать  $f(x) \in TQBF$  для  $f$  – сведения.

Будем переводить формулу  $\varphi$ ,  $|\varphi| = m$  из  $TQBF$  в формулу над полем. Такой процесс называется алгебраизация.

$$x \implies x$$

$$\neg\varphi \implies 1 - \tilde{\varphi}$$

$$a \wedge b \implies \tilde{a}\tilde{b}$$

$$a \vee b \implies 1 - (1 - \tilde{a})(1 - \tilde{b})$$

Также введем операторы над многочленами для кванторов.  $A_x$ ,  $E_x$ . Значение следующее:

$$A_x\tilde{\varphi} = \varphi_{|x=0} \cdot \varphi_{|x=1}$$

$$E_x\tilde{\varphi} = 1 - (1 - \varphi_{|x=0})(1 - \varphi_{|x=1})$$

Заметим сразу, что  $A_x$  и  $E_x$  убивают переменную, по которой они написаны.

На данном этапе получилась формула такого вида:  $Q_{1_{x_1}} \dots Q_{n_{x_n}} \tilde{\varphi}$ . Хотим сделать следующее: переделать ее, чтобы на каждом суффиксе получающийся многочлен имел маленькую степень. Введем оператор линеаризации по переменной:  $L_x\varphi = \varphi_{|x=0}(1 - x) + x\varphi_{|x=1}$ . Он введен так, чтобы степень  $x$  в формуле была максимум 1.

Тогда запишем формулу так:  $\tilde{Q}_1x_1Lx_1\tilde{Q}_2x_2Lx_2Lx_1\dots\tilde{\varphi}$ . Тогда по каждой переменной степень многочлена-суффикса данной строки не превосходит  $m$ , но сама строка увеличилась несильно, длина возвелась в квадрат.

Заметим, что мы так строили полином, чтобы значение его на булевом кубе совпадали со значением формулы из  $TQBF$ .

Теперь строим протокол. Протокол будет заниматься тем, что доказывать про значение формулы, что оно равно 1 при некоторых подставленных уже переменных. Будем снимать кванторы слева направо.

Пусть хотим доказывать, что у какого-то многочлена, соответствующего суффиксу строки, значение равно  $c$  на подстановке  $p$ .

1. В самом начале хотим доказывать про формулу, что она тождественно истина на пустой подстановке.
2. Если в формуле не осталось операторов, то *Verifier* может сам проверить на истинность свое утверждение, подставив в формулу значения и посчитав.
3. Пусть последний оператор  $Ax_i$ . Попросим у прувера многочлен  $h(x_i)$ , который получится, если снять последний оператор и сделать подстановку. Проверим, что выполнено  $h(0)(1) = c$ , если это не так – то нам точно прислали фейковый многочлен.
4. Пусть последний оператор  $Ex_i$ . Попросим аналогично у прувера многочлен  $h(x_i)$  и проверим,  $c = 1 - (1 - h(0))(1 - h(1))$ .
5. Последний оператор  $Lx_i$ . Это возможно, если  $x_i$  уже задано значение  $r_1$  подстановкой  $p$ . Попросим аналогично многочлен  $h$  и проверим:  $(1 - r_1)h(0) + r_1h(1) = 1$ .

Далее пополняем подстановку. Подставим вместо  $x_i$  случайное значение  $r$  из поля. Запустимся рекурсивно.

Если формула была истинной, то существует хороший *Prover*, так как он может просто давать нам правильные коэффициенты многочлена.

Теперь поймем, как нам добиться, чтобы нас не могли сильно обмануть.

Если формула была ложна, а потом стала в какой-то момент истинна, то в какой-то момент произошел переход. Если нам дали неверный  $h$ , то он совпадает с верным не более чем в  $m$  точках и вероятность, что мы попадем в истинное утверждение на следующем шаге не превосходит  $\frac{m}{|\mathbb{F}|} < \frac{1}{m^3}$ , если взять  $|\mathbb{F}| > m^4$ . Тогда вероятность перейти из лжи в истину хотя бы раз не превосходит  $\frac{m^2}{m} = \frac{1}{m}$ . ■

**Замечание 27.1.** Из доказательства следует, что можно сделать с определением  $IP$  следующее:

1. потребовать, чтобы на лежащих в языках элементах честный пруввер всегда убеждал про-  
веряльщика.
2. можно рассматривать только доказывающих, которые использует полиномиальную память. Действительно, прувверу надо уметь только интерполировать многочлены. Это можно для многочленов, заданных в нашем виде, делать рекурсивным алгоритмом с полиномиальной па-  
мятью.
3. проверяющий может не скрывать от доказывающего случайные биты. Заметим, что мы в нашем протоколе можем не скрывать выбранное значение, так как дальше оно по сути не используется.

## 28 Билет 28

**Определение 28.1.**  $H_{n,k}$  – множество функций из  $\{0,1\}^n$  в  $\{0,1\}^k$ . Это множество называется универсальным семейством попарно независимых хэш функций, если для любых  $x, x'$  – не совпадающих прообразов и  $y, y'$  – образов выполнено:

$$Pr_{h \leftarrow H_{n,k}}[h(x) = y, h(x') = y'] = \frac{1}{2^{2k}}$$

все функции равновероятны.

Подходит множество всех функций, но оно слишком большое и мы не можем компактно записать функции из него.

**Утверждение 28.1.** Для универсального семейства  $H_{n,k}$  выполняется для любого  $x \in \{0,1\}^n$  и любого  $y \in \{0,1\}^k$  выполняется  $Pr_{h \leftarrow H_{n,k}}[h(x) = y] = \frac{1}{2^k}$ .

*Доказательство.* Через формулу полной вероятности, пробежите все возможные значения  $x'$ . ■

**Пример 28.1** (Конструкция  $H_{n,k}$ ). .

1. Если  $n = k$ . Возьмем поле из  $2^n$  элементов. отождествим его элементы с  $\{0,1\}^n$ . При этом сложение побитовое. Определим функцию для всех пар  $a, b \in \mathbb{F}$ ,  $h_{a,b}(x) = ax + b$ . Утверждается, что множество всех таких функций образует универсальное семейство попарно независимых хэш функций. Это так, потому что из системы:

$$\begin{cases} ax + b = y \\ ax' + b = y' \end{cases}$$

Однозначно следуют значение  $a, b$ . Тогда вероятность попасть в такую пару  $(a, b)$  есть  $\frac{1}{2^{2n}}$

2. Если  $k < n$  делаем конструкцию, как в предыдущем случае, но у выхода оставляем только первые  $k$  битов. Тогда вероятность попасть в такую пару  $(a, b)$ , что последние  $k$  битов совпадают с нужными равна  $\frac{2^{n-k}2^{n-k}}{2^n2^n} = \frac{1}{2^k}$ .
3. Если  $k > n$  будем рассматривать конструкцию для  $H_{k,k}$ , но заменять на нули все биты входа, кроме первых  $n$ . Снова будет подходит только одна пара.

## 29 Билет 29

**Утверждение 29.1.** Пусть  $S \subset \{0, 1\}^n$ , причем  $2^{k-2} \leq |S| \leq 2^{k-1}$  и  $H_{n,k}$  – семейство попарно независимых хэш функций. Тогда

$$Pr[\exists! x \in S : h(x) = 0^k] \geq \frac{1}{8}$$

*Доказательство.* Пусть  $p = 2^{-k}$ , тогда  $\frac{1}{4} \leq p|S| \leq \frac{1}{2}$ . Пусть  $N$  – количество таких  $x \in S$  таких, что  $h(x) = 0^k$ . Оценим вероятности  $Pr[N \geq 1]$ ,  $Pr[N \geq 2]$ .

$$Pr[N \geq 1] \geq \sum_{x \in S} Pr[h(x) = 0^k] - \sum_{x \neq y \in S} Pr[h(x) = 0^k \wedge h(y) = 0^k] = p|S| - p^2 \binom{|S|}{2}$$

$$Pr[N \geq 2] \leq Pr[h(x) = 0^k \wedge h(y) = 0^k] = p^2 \binom{|S|}{2}.$$

Тогда искомая вероятность:

$$Pr[N = 1] = Pr[N \geq 1] - Pr[N \geq 2] \geq p|S| - 2p^2 C_{|S|}^2 \geq p|S| - p^2 |S|^2 \geq 1/8$$

■

**Утверждение 29.2** (Лемма Вэлианта-Вазирани). Существует такой вероятностный полиномиальный алгоритм  $A$ , что

1. Если  $\varphi \in UNSAT$ , то  $A(\varphi) \in UNSAT$
2. Если  $\varphi \in SAT$ , то  $A(\varphi) \in SAT$  с вероятностью  $\geq 1/8n$

*Доказательство.* Будем формулу  $\varphi$  переводить в  $\varphi \wedge r$ . Понятно, что она не может стать выполнимой, если была невыполнимой.

Пусть  $S$  из леммы это множество выполняющих наборов. Тогда  $2^0 \leq |S| \leq 2^n$ . То есть  $k \in \{2, n+1\}$ . Давайте угадаем  $k$  и возьмем функцию из  $H_{n,k}$ . Запишем с помощью формулы, то  $h(x) = 0^k$ , где  $x$  – выполняющий набор. Тогда с вероятностью  $1/8n$  мы получим формулу, в которой ровно один выполняющий набор. ■

## 30 Билет 30

**Пример 30.1** (MAX-3-SAT). Очередной раз вспомним про  $7/8$  приближение для MAX – 3 – SAT.

**Пример 30.2** (Приближение минимального вершинного покрытия). Возьмем максимальное по включению паросочетание. Понятно, что вершинное покрытие  $\geq$  его размер. Возьмем все его вершины в наш ответ. Получили 2-приближение.

Теперь про вероятностно-проверяемые доказательства.

**Определение 30.1.**  $L \in PCP(u(n), r(n))$ , если существует полиномиальный по времени, вероятностный алгоритм  $M$  такой, что выполняются условия:

1.  $M$  использует  $u(n)$  случайных битов на входах длины  $n$ .
2.  $M$  имеет оракульный доступ к строке  $y$ , называемой подсказкой и может сделать к ней не более  $r(n)$  неадаптивных запросов.
3.  $x \in L \implies \exists y, Pr[M(x, y) = 1] = 1$ .

4.  $x \notin L \implies \forall y, \Pr[M(x, y) = 1] \leq 1/2$ .

**Пример 30.3.**  $GNI \in PCP(poly(n), 1)$ .

Пусть подсказка это строка, где для всех графов на  $n$  вершинах написано, какому графу он изоморфен (либо что-то рандомное, если никакому). Тогда проверяющий действует также как и в интерактивном доказательстве:

1. Выбираем  $i \in \{0, 1\}$ .
2. Выбираем случайно  $\pi \in S_n$ .
3. Применяем перестановку и смотрим, какому графу, судя по подсказке, изоморфен  $\pi(G_i)$ . Пусть это граф  $j$ .
4. Если  $i = j$ , то говорим, что неизоморфны, иначе – изоморфны.

Как и раньше, понятно, что в случае, когда изоморфизма нет, существует правильная подсказка, которая все графы правильно классифицирует. Если же изоморфизм есть, то что бы нам не подсовывали мы не более чем с вероятностью  $1/2$  обманемся.

**Теорема 30.1** (PCP-теорема).  $PCP(\log n, 1) = NP$

*Доказательство включения  $PCP(\log n, 1) \subseteq NP$ .* Будем перебирать случайные биты, которые нам нужны. Их  $poly(n)$ . Также, если  $x \in L$ , то есть подсказка длины не больше  $poly(n)$ . Тогда просто посчитаем вероятность принять  $x$ , если  $x \in L$ , то есть подсказка на которой такая вероятность равна 1. ■

**Определение 30.2** (CSP).  $q$  – CSP – задача, где даны  $t$  булевых функций, зависящих от  $\leq q$  битов. И нужно найти набор, выполняющий все эти условия.

$$\begin{cases} f_1(x) = 1 \\ f_2(x) = 1 \\ \dots \\ f_n(x) = 1 \end{cases}$$

$MAX - q - CSP$  – задача, где хочется выполнить наибольшую долю от условий.  $val(\varphi)$  – максимальная доля выполненных условий, которую можно достичь.  $val(\varphi) \cdot t$  – максимальная доля ограничений, которую можно выполнить одновременно.

$\rho - GAP - q - PSP$  – задача с обещанием, где вам гарантируется, что либо можно выполнить все формулы, либо долю, не превышающую  $\rho$  из них, и надо отличить два случая.

**Теорема 30.2** (PCP2).  $\exists \rho, 0 < \rho < 1$  и  $q \in \mathbb{N}$  такие, что  $\rho - GAP - q - CSP$  NP – трудна.

**Утверждение 30.1.**  $PCP \iff PCP2$

*Доказательство.*  $\Leftarrow$

Возьмем NP-трудную задачу  $\rho - GAP - q - CSP$ . Хотим показать, что в таком случае можно для задачи из NP построить протокол из  $PCP(\log n, 1)$ . Вот взяли  $L \in NP$ . Потребуем как подсказку –  $y$  – решение системы уравнений, в которую переводится  $x$  с помощью полиномиального сведения  $f$ . Чтобы проверить подсказку, сгенерируем случайный номер уравнения, это  $O(\log n)$  случайных битов, далее подставим в него подсказку и проверим, выполняется или нет. Понятно, что, если  $x \in L$ , то существует честная подсказка. Если же это не так, то вероятность попасть в выполненное уравнение хотя бы  $\leq \rho$ . Тогда мы можем какое-то константное число раз повторить это, чтобы сделать эту вероятность уж точно  $\leq 1/2$  для неверных входов.

$\Rightarrow$

Берем язык  $L \in NP$ . Для него есть протокол, позволяющий проверять наличие  $x \in L$  с помощью  $r = O(1)$  запросов к подсказке и  $C \log n$  случайных битов. Пусть переменные для задачи  $\rho - GAP - q - CSP$  это будут биты подсказки, а  $q = r$ . Тогда у нас есть  $2^{C \log n}$  возможных генераций случайных битов, при каждом из которых есть свои условия на биты подсказки. Эти условия выглядят как то, что  $O(1)$  запрошенных битов должны быть равны чему-то, чтобы МТ приняла  $x$ . Тогда запишем эти условия в систему. Если можно выполнить все формулы, то существует хорошая подсказка, на которой вероятность равна 1 и обратно. Если же нет, то не получится выполнить больше половины условий. ■

## 31 Билет 31

**Утверждение 31.1.** Если  $P \neq NP$ , то  $\exists \rho, 0 < \rho < 1$  и  $q \in \mathbb{N}$  такие, что нет полиномиального  $\rho$ -приближенного алгоритма для задачи  $MAX - q - CSP$ .

*Доказательство.* Возьмем  $\rho, q$  из  $PCP2$  теоремы. Тогда если бы было полиномиальное приближение мы смогли бы отличать два случая друг от друга, тогда бы и  $SAT$  решили за полином с помощью сведения. ■

**Утверждение 31.2.**  $\exists \rho, 0 < \rho < 1$  и  $q \in \mathbb{N}$  такие, что нет полиномиального  $\rho$ -приближенного алгоритма для задачи  $MAX - q - SAT$ .

*Доказательство.* Возьмем такие  $\rho, q$ , что нет  $\rho$  приближенного алгоритма для  $MAX - q - CSP$ . Теперь будем сводить  $MAX - q - CSP$  к  $MAX - q - SAT$ . Например, можно каждое уравнение записать в виде  $q - SAT$ . За счет того, что  $q$  — константа, то у нас таблица истинности каждой функции размера  $2^q$ , можно записать в начале в  $q - SAT$  виде. Запишем так, чтобы было ровно  $2^q$  скобок для каждого старого условия.

Если  $val = 1$  у изначальной формулы, то у сведения тоже можно выполнить все условия. Если же  $val < \rho$ , то если мы выполним у новой формулы  $\geq m\rho 2^q + m(1 - \rho)(2^q - 1)$  условий, то мы выполним и какие-то  $m\rho$  строчек старой формулы полностью. Тогда максимальная доля, которую можно выполнить это  $\frac{m(\rho - 1 + 2^q)}{m2^q} = 1 - \frac{1 - \rho}{2^q}$ , то есть именно с такой константой нет полиномиального приближения для  $MAX - q - SAT$ . ■

**Утверждение 31.3.** Если  $P \neq NP$ , то  $\exists \rho, 0 < \rho < 1$  и  $q \in \mathbb{N}$  такие, что нет полиномиального  $\rho$  приближенного алгоритма для задачи  $MAX - 3 - SAT$ .

*Доказательство.* Возьмем задачу  $MAX - q - SAT$  и константу  $\rho$ , которой она в случае  $P \neq NP$  не приближается полиномиально.

Теперь давайте каждый клон запишем в  $3SAT$  при помощи известного сведения. Пусть каждая формула раздувается не более чем в  $T$  раз. Далее сделаем все то же самое, что в предыдущем доказательстве, чтобы найти новую верхнюю границу доли выполненных формул. ■

## 32 Билет 32

$$x \circ y = \sum_{i=1}^n x_i y_i \mod 2$$

**Определение 32.1.** Код Уолша-Адамара для  $x \in \{0, 1\}^n$  это упорядоченная последовательность  $x \circ r$  для всех  $r \in \{0, 1\}^n$ . Длина кода равна  $2^n$ .

**Утверждение 32.1** (Свойство кодов Уолша-Адамара). .

1.  $WH(x + y) = WH(x) + WH(y)$ . Просто из линейности скалярного произведения.
2. Если  $x \neq 0^n$ , то в  $WH(x)$  ровно половина единиц и нулей. Это понятно, так как значение очередного скалярного произведения зависит от того, сколько в маске  $r$  единиц на позициях, среди которых единицы в  $x$ , от четности этого числа. Так как масок с четным таким показателем столько же, сколько с нечетным, то в половине случаев получится 1, в другой половине – 0.
3. Если  $x \neq y$ , то расстояние Хемминга между  $WH(x)$  и  $WH(y)$  равно  $2^{n-1}$ .  $d(WH(x), WH(y)) = d(WH(x) + WH(y), 0) = 2^{n-1}$ , так как  $x \neq y$ .
4. Код Уолша Адамара – таблица истинности линейной функции, которая заключается в умножении на вектор, по которому строится функция.

**Утверждение 32.2.** Пусть  $\tilde{f}$  отличается от  $f$  на доле  $\rho < 1/4$  входов. Тогда можно со сколь угодно хорошей вероятностью восстановить  $f(x)$ , используя только значения  $\tilde{f}$ , делая  $O(1)$  запросов к значениям  $\tilde{f}$ .

*Доказательство.* Давайте возьмем случайный  $r \in \{0, 1\}^n$ . Посчитаем  $\tilde{f}(a + r) + \tilde{f}(r)$ .

$$Pr[f(a) \neq \tilde{f}(a + r) + \tilde{f}(r)] \leq Pr[\tilde{f}(a + r) \neq f(a + r)] + Pr[\tilde{f}(r) \neq f(r)] \leq 2\rho$$

Дальше повторяем этот тест  $O(1)$  раз чтобы приблизить вероятность ошибки к нулю. ■

**Определение 32.2.** Булевы  $f, g$  –  $\rho$  похожи, если  $Pr[f(x) = g(x)] \geq \rho$ .

**Утверждение 32.3.** Если  $Pr[f(a) + f(b) = f(a + b)] \geq 1/2 + \varepsilon$ , тогда  $f$  является  $1/2 + \varepsilon$  похожей на линейную функцию.

*Доказательство.* TODO ■

**Пример 32.1** (Тестирование функции на линейность). Хотим сделать алгоритм, который по  $f$  делает следующее:

1. Если  $f$  – линейная, то он с вероятностью 1 выдает 1
2. Если  $f$  меньше чем 0.99 похожа на линейную, то он выдает 0 с большой вероятностью

Сделаем следующее: 10000 раз повторим для случайных  $x, y$  проверку  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ . Если в какой-то момент это не выполнилось, то выдаем 0, иначе – 1.

Если функция линейная, то мы выдадим 1.

Если же она меньше чем 0.99 похожа на линейную, то вероятность не пройти проверку  $> 1/100$ .

Вероятность того, что мы в таком случае примем равна  $1 - (1 - \frac{1}{100})^{10000}$ , воспользуемся  $(1 - \frac{1}{100})^{100} \leq 1/e$ . Тогда вероятность дать неверный ответ  $\leq 1 - \frac{1}{e^{100}}$ .

## 33 Билет 33

**Теорема 33.1.**  $NP \subseteq PCP(poly, 1)$ .



*Доказательство.* Снова мы можем показать для полного языка в  $NP$ , что он лежит в  $PCP(poly, 1)$ . Рассмотрим язык  $QUADEQ$ , который состоит из не более чем квадратных уравнений  $n$  переменных над полем  $\mathbb{F}_2$ . Легко показать  $CIRCUT - SAT \leq_p QUADEQ$  стандартным добавлением переменных для всех вершин.

Потребуем, чтобы все мономы в уравнениях имели вторую степень. Это достигается с помощью того, что в нашем поле  $x^2 = x$  и, если что, можно возвести моном в квадрат.

Теперь хотим записать уравнение в матричном виде. Заметим, что это можно сделать с помощью тензорного произведения:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_1 \\ \dots \\ x_1x_n \\ x_2x_1 \\ \dots \\ x_nx_1 \\ \dots \\ x_nx_n \end{pmatrix}$$

Тогда система записывается в следующем виде:

$$M(x \otimes x) = b$$

где  $M$  – матрица  $m \times n^2$ ,  $b$  – матрица  $m$ .

Как можно сертифицировать ее верное решение? Давайте попросим не само решение, а следующие масочки:  $f = WH(x)$ ,  $g = WH(x \otimes x)$ , где  $x$  – решение системы.

Теперь для того чтобы сертифицировать это вероятностно, используя  $poly$  случайных битов и  $O(1)$  обращений к подсказке сделаем следующие действия:

1. тест на линейность для  $f, g$  и убедимся, что они 0.99999 близки к линейным функциям. Далее считаем, что  $f, g$  – линейны и без ошибки. Но при этом при каждом обращении к ним мы будем использовать вероятностное считывание бита из предыдущего билета. Так как обращений будет  $O(1)$ , а вероятность каждый ошибки можно сделать сколь угодно маленькой, то итоговая вероятность тоже будет маленькой.
2. проверим, что  $f, g$  – согласованы, то есть, что действительно, они от понятных векторов.
3. проверим, что  $g$  действительно задает решение системы.

Поймем как делать некоторые пункты.

(3): нам нужно проверить, что строка, чей код  $g$  нам пришел является решением  $My = b$ . Если это так, то выполняется  $rMy = rb$  для любого  $r$ . При этом:

$$Pr[rMy \neq rb] = 1/2$$

Чтобы получить значение  $rMy$  нужно посмотреть на  $g(rM)$  по ассоциативности матричного умножения. Тогда сделаем это  $O(1)$  для случайных  $r$ , чтобы вероятность ошибки стала мала.

(2): пусть  $g = WH(y)$ , хотим проверить, что  $y = x \otimes x$ .  $f(r) = r^T x$ ,  $f(r)f(r') = r^T x(r')^T x =$

$$\left( \sum_i r_i x_i \right) \left( \sum_j r'_j x_j \right) = \sum_{i,j} r_i x_i r'_j x_j = r^T \begin{pmatrix} x_1 x_1 & x_1 x_2 & \dots & x_1 x_n \\ x_2 x_1 & x_2 x_2 & \dots & x_2 x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n x_1 & x_n x_2 & \dots & x_n x_n \end{pmatrix} r'$$

$$g(r \otimes r') = (r \otimes r') y = r^T \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & y_{n^2} \end{pmatrix} r'$$

то есть при согласованных  $f, g$  должно быть выполнено равенство  $f(r)f(r') = g(r \otimes r')$ .

Мы будем несколько раз проверять это свойство. По сути мы проверяем  $r^T U r' = r^T V r'$  для некоторых  $U, V$ .

$$Pr[r^T U \neq r^T V] = 1/2$$

тогда

$$Pr[r^T U r' \neq r^T V r'] = 1/4$$

Таким образом, мы построили проверку доказательства. Если нам дали правильные коды, то доказательство сработает. Иначе мы можем сделать вероятность неправильного решения до сколь угодно маленькой, повторив все достаточно большое количество раз. ■

## 34 Билет 34

**Утверждение 34.1** (Лемма Фаркаша). Система линейных уравнений  $Ax \geq b$  не имеет решений  $\iff \exists y \geq 0, y^T A = 0, y^T b = 1$ .

*Доказательство.* Будем делать индукцию по числу переменных. Если  $n = 1$ , то у нас система вида:

$$\begin{cases} x \geq a_1 \\ \dots \\ x \geq a_k \\ x \leq b_1 \\ \dots \\ x \leq b_l \end{cases}$$

Если эта система неразрешима, то существует  $a_i > b_j$ .

$$\begin{cases} x \geq a_i \\ -x \geq -b_j \end{cases}$$

Сложим их тогда с таким коэффициентом, с которым справа получится 1.

Теперь переход:

$$\begin{cases} x_n \geq g_1 \\ \dots \\ x_n \geq g_k \\ \dots \\ x_n \leq h_1 \\ \dots \\ x_n \leq h_l \\ \text{что-то без } x_n \end{cases}$$

Тогда давайте добавим уберем все неравенства, которые содержат  $x_n$ . Вместо них добавим  $g_i \geq h_j$  по всем парам  $i, j \in [k] \times [l]$ . Понятно, что получилась система, не имеющая решений. Предположим, что она имеет решение, но тогда мы можем выбрать между максимальным значением  $g_i$  и минимальным  $h_j$  и назначить его  $x_n$ . Так как это все ограничения на  $x_n$ , то это будет решением.

Применим индукционное предположение. Получили нужный  $y$ . Теперь надо восстановить решение для изначальной системы. Но заметим, что мы добавляли в систему только неравенства, являющиеся линейной комбинацией уже имеющихся. Значит, что если в  $y$  неравенство  $g_i - h_j \geq 0$  берется с коэффициентом  $\alpha$ , то надо в исходной системе прибавить к коэффициентам неравенств  $x \geq g_i, x \leq h_j$  по  $\alpha$ . Если сделаем такую операцию, то итоговая линейная комбинация совпадет с той, которую мы получили индуктивно. ■

**Утверждение 34.2** (Матричная Лемма).  $A \in R^{m \times n}$ . Тогда либо существует нетривиальная неотрицательная линейная комбинация столбцов с неотрицательными коэффициентами, либо нетривиальная неположительная линейная комбинация строк с неотрицательными коэффициентами. Другими словами, либо  $\exists x \geq 0, x \neq 0$ , такой что  $Ax \geq 0$ , либо  $\exists z, z \geq 0, z \neq 0$ , такой что  $A^T z \leq 0$ .

*Доказательство.* Предположим, что не выполняется первое. Тогда система (1 – единичная строка):

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ \dots \\ x_n \geq 0 \\ \sum x_i \geq 1 \\ x_1 a_{1,1} + x_2 a_{1,2} + \dots + x_n a_{1,n} \geq 0 \\ \dots \\ x_1 a_{m,1} + x_2 a_{m,2} + \dots + x_n a_{m,n} \geq 0 \end{cases}$$

не имеет решения. Применим лемму Фаркаша. В столбике  $b$  из неё, у нас одна единица и все остальные нули, значит, коэффициент там точно равен 1. Коэффициенты при первых  $n$  уравнениях обозначим  $\gamma_i$ , при последних  $m$  уравнениях  $y_j$ . Так как при сложении с коэффициентами из Леммы Фаркаша слева у нас все сокращается, то коэффициенты при всех переменных равны 0, выпишем их:

$$\begin{cases} 1 + \gamma_1 + a_{1,1}y_1 + \dots + a_{m,1}y_m = 0 \\ 1 + \gamma_2 + a_{1,2}y_1 + \dots + a_{m,2}y_m = 0 \\ \dots \\ 1 + \gamma_n + a_{1,n}y_1 + \dots + a_{m,n}y_m = 0 \end{cases}$$

Так как  $\gamma_i \geq 0$ , то  $1 + \gamma_i \geq 1$ , тогда если перенести их вправо, то получится нужная комбинация строчек. ■

## 35 Билет 35

**Определение 35.1** (Матричные игры). Дана матрица чисел из  $R$ . Первый игрок выбирает столбец  $j$ , второй игрок выбирает строку  $i$ . Второй игрок платит второму  $a_{i,j}$ . Это повторяется много раз. Нам интересно мат ожидание выигрыша первого игрока.

Бывает чистые стратегии (выбрать строку или столбец), бывают смешанные стратегии (есть распределение на строках и столбцах, вообще чистая стратегия – частный случай это).

При фиксированных вероятностных стратегиях  $p, q$  можно посчитать мат ожидание выигрыша первого игрока как  $A(p, q) = q^T A p$ . Сразу заметим, что это непрерывная функция, так как это какое-то произведение матриц, где коэффициенты непрерывны.

**Теорема 35.1** (Теорема Фон-Неймана о матричных играх).  $A \in R^{m \times n}$  – платежная матрица игры. Тогда  $\exists p^*, q^*$  – стратегии и  $\exists C \in R$  (цена игры), такие что:

1.  $\forall q, A(p^*, q) \geq C$ .
2.  $\forall p, A(p, q^*) \leq C$ .

То есть, неформально говоря,  $p^*, q^*$  – оптимальные стратегии, гарантирующие наилучший средний выигрыш.

*Доказательство.* Пусть  $p$  – фиксированная.  $f(p) = \min_q q^T A p$ . Но если  $p$  фиксированно, то матрица  $A p$  – фиксирована и чтобы сделать  $f(p)$  как можно меньше надо взять распределением, полностью сосредоточенное в наименьшем элементе. Аналогично, если фиксировать  $q$  и брать максимум. Отсюда:

$$f(p) = \min A(p, q^1), A(p, q^2), \dots, A(p, q^m) \\ g(p) = \max A(p^1, q), A(p^2, q) \dots, A(p^n, q)$$

где буква со степенью  $i$  – как раз то распределение, которое сосредоточено в одном элементе  $i$ . Заметим, что выполнено:  $f(p) \leq A(p, q) \leq g(p)$ , то есть  $f(p) \leq g(q)$  для всех фиксированных  $p, q$ . Тогда утверждается, что  $\sup_p f(p) = \inf_q g(q) = C$ .

Функции непрерывны, тогда  $\sup$  и  $\inf$  где-то достигается. Обозначим  $p^*, q^*$  – точки, в которых достигается максимум и минимум  $f, g$ .

Предположим, что  $f(p^*) < g(q^*)$ , тогда найдется  $f(p^*) < \mu < g(q^*)$ . Пусть  $A'$  – матрица  $A$ , в которой из каждого элемента мы вычли число  $\mu$ . Тогда, по матричной лемме:

1. Есть неотрицательная нетривиальная линейная комбинация столбцов с положительными коэффициентами. Пусть вектор, с которым эта комбинация – равен  $p'$  (поделим его на сумму координат, чтобы он стал распределением). Получается, что в матрице  $A'$  первый игрок может себе обеспечить неотрицательный выигрыш, как бы не выбирал ходы второй игрок. Тогда в  $A$  он может себе обеспечить выигрыш хотя бы  $\mu$ .  $\mu > f(p^*) > f(p') \geq \mu$ .
2. Есть неположительная нетривиальная линейная комбинация столбцов с положительными коэффициентами. Сделаем аналогично первому пункту, но выведем противоречие с тем, что второй игрок гарантировать себе потерю  $\mu$ , которая меньше чем минимальная.

■

## 36 Билет 36

Принцип ЯО используется, чтобы доказывать нижнюю оценку на вероятностные штуки. Рассматривается следующая модель. Рассматривается игра: первый игрок выбирает вход  $x$ , а второй алгоритм  $A$  и второй игрок платит первому время работы  $A(x)$ . Тогда смешанная стратегия первого игрока – распределение на входах. Смешанная стратегия второго игрока – вероятностный алгоритм.  $A(p, q)$  равно среднему времени работы вероятностного алгоритма на входе, согласно распределению  $q$ . Пусть  $C$  – цена игры. Значит, есть такой вероятностный алгоритм, что при любом распределении на входах он будет работать не более  $C$  шагов. А также существует распределение, для которого любой вероятностный алгоритм будет работать в среднем  $\geq C$  шагов.

**Утверждение 36.1.** *Если для некоторого  $T$  существует такое распределение на входах, что любой детерминированный алгоритм работает на таком распределении не меньше  $T$  шагов в среднем, то для любого вероятностного алгоритма найдется вход на котором он работает в среднем  $\geq T$  шагов.*

*Доказательство.* Цену игры мы ищем через максимум по распределениям мат ожидания. В условии сказано, что такой максимум тут хотя бы  $T$ . То есть цена игры  $C \geq T$ . Тогда предположим, что есть вероятностный алгоритм, который на всех входах работает в среднем  $< T$ . Но тогда такой алгоритм задает стратегию, которая говорит, что цена игры  $< T$ , что не так. ■

**Утверждение 36.2.** *Если для любого распределения на входах существует детерминированный алгоритм, который работает на таком распределении в среднем меньше чем  $T$ , то есть недетерминированный, который работает на любом входе в среднем меньше  $T$ .*

*Доказательство.* Аналогично, цена игры  $< T$ . Тогда стратегия второго игрока – и есть искомым вероятностный алгоритм. ■

**Определение 36.1.** *Вероятностное дерево решений – распределение на детерминированных деревьях решений.*

**Определение 36.2.**  $T$  – дерево решений,  $x$  – вход длины  $n$ .  $cost(T, x)$  – число запросов, которое  $T$  делает на входе  $x$ .

Если  $\mathcal{R}$  – вероятностное дерево решений, то  $cost(\mathcal{R}, x)$  – мат ожидание числа запросов этого дерева на входе  $x$ .

Тогда  $cost(\mathcal{R})$  – наибольшее мат ожидание числа запросов по всем входам  $x$ .

**Пример 36.1** (Оценка сложности функции  $Majority$ ). Возьмем  $Majority$ . Возьмем дерево решений, которое просто спрашивает по очереди  $x_1, x_2, x_3$ . Сделаем его вероятностным, рассмотрев все перестановки спрашиваемых переменных. Тогда на входе 000, 111 – мат ожидание числа запросов равно 2. На входах, где не все биты одинаковые, мат ожидание будет  $2/6 \cdot 2 + 4/6 \cdot 3 = 8/3$ . Максимум равен  $8/3$ , а значит, что сложность равна  $8/3$ .

Теперь покажем, что нельзя добиться средней сложности менее  $8/3$ . Для этого нужно привести распределение на входах такое, что любое дерево решение сделает к нему в среднем хотя бы  $8/3$  запросов. Посмотрим на равномерное распределение на "плохих" входах:  $\{001, 010, 100, 101, 110\}$ . Существуют два принципиально отличающихся дерева решений в этом примере и они отличаются тем, одинаковую ли переменную они спрашивают после первого разветвления. Рассмотрите их и поймите, что там на  $2/6$  входах будет работать за 2 запроса и на  $4/6$  за 3. Таким образом мат ожидание будет хотя бы  $8/3$ .

## 37 Билет 37

Когда-то доказывали, что сложность детерминированного алгоритма сортировки, который делает запросы  $i < j$ ? равна  $O(\log(n!))$  сравнений. Теперь хотим показать для недетерминированных алгоритмов.

Воспользуемся принципом Яо. Давайте возьмем равномерное распределение на всех перестановках. Возьмем какой-нибудь алгоритм. Тогда он представляет из себя бинарное дерево с  $\log(n!)$  листьями. Покажем, что мат ожидание высоты будет  $> \log(n!)$ , отсюда будет следовать, что это выполнено для всех детерминированных алгоритмов, а значит для любого недетерминированного будет находиться плохой вход исходя из принципа Яо.

**Утверждение 37.1.** Если в бинарном дереве  $l$  листьев, то средняя глубина  $\geq \log_2 l$ .

*Доказательство.*  $h_i$  – глубина листа.

$$\sum_{i=1}^l h_i \frac{1}{l} = - \sum_{i=1}^l \frac{1}{l} \log 2^{-h_i} \geq - \log \left( \frac{\sum 2^{-h_i}}{l} \right) = \log l$$

■

## 38 Билет 38

**Определение 38.1.**  $R_\varepsilon(f)$  – минимальная глубина вероятностного коммуникационного протокола с ошибкой  $\varepsilon$ .

**Утверждение 38.1.**  $R_{1/n}(EQ) = O(\log n)$ .

*Доказательство.* Алиса берет простое число  $p \in [n^2, 2n^2]$  (например, первое такое), Боб тоже. Алиса считает хеш от числа по модулю  $p$  в случайной точке. Боб тоже считает хеш (точку ему пришлет Алиса) и сравнивает с тем, который ему прислала Алиса.

Если  $x = y$ , то протокол выдает 1. Если же не равны, то вероятность, что совпадут не более  $\frac{n}{p}$ , что не более  $\frac{n}{n^2} = 1/n$ , что и требовалось. При этом тратим  $O(\log n)$  битов на пересыл значение хеша, точки. ■

**Определение 38.2.** Можно рассмотреть такой же протокол, но с публичными случайными битами. Он обозначается  $R_\varepsilon^{pub}(f)$ . Например, в примере выше, если у них обоих есть возможность получить одинаковое случайное число и не пересылать его, то можно сгенерировать  $r$  и сравнить  $a \circ r$  и  $b \circ b$ . Тогда, если числа не равны, то с вероятностью  $1/2$  мы не ошибемся, если же равны – не ошибемся. То есть, например,  $R_{1/2}^{pub}(EQ) = O(1)$ . Но если хотим сделать поменьше вероятность ошибки, нужно просто протокол повторить много раз.

## 39 Билет 39

Пусть теперь у нас есть какое-то распределение на входах для протокола  $\mu$ .  $\varepsilon > 0$ . Тогда  $(\mu, \varepsilon)$  – распределенной коммуникационной сложностью функции  $f$  называется число  $D_\varepsilon^\mu(f)$ , которое равно минимальной сложности детерминированного протокола, который вычисляет  $f$  с вероятностью как минимум  $1 - \varepsilon$  на случайных входах по распределению  $\mu$ .

**Теорема 39.1.**  $R_\varepsilon^{pub}(f) = \max_{\mu} D_\varepsilon^\mu(f)$

*Доказательство.*  $\geq$ : Возьмем вероятностный протокол, на котором достигается минимум  $R_\varepsilon^{pub}(f)$ . Раз он на всех входах работает с ошибкой не более  $\varepsilon$ , то на входах, заданных распределением  $\mu$  он тоже работает с ошибкой не более  $\varepsilon$ .

$Pr[\text{ошибиться на случайном входе}] = Pr_{r-\text{случайные биты}, \mu-\text{распределение}}[\text{ошибиться}] \leq \varepsilon$ .

Если по всем случайным битам эта вероятность  $> \varepsilon$ , то тогда она будет  $> \varepsilon$ , если усреднять по всем случайным битам и входам. Тогда на каких-то случайных битах тоже достигается вероятность  $< \varepsilon$ .

Тогда зафиксируем их и построим таким образом нужный детерминированный протокол.

$\leq$ : пусть  $\max_{\mu} D_{\varepsilon}^{\mu}(f) = C$ . Рассмотрим игру, где первый игрок выбирает детерминированный коммуникационный протокол сложности не более  $c$ , а второй игрок выбирает вход  $(x, y) \in X \times Y$ . Второй игрок платит первому, если протокол первого правильно вычислил  $f(x, y)$ . Так как  $c$  максимум по  $\mu$ , то для любого  $\mu$  – смешанной стратегии второго игрока, у первого игрока найдется протокол, который гарантирует ему хотя бы  $1 - \varepsilon$  денег в среднем. То есть, цена игры  $\geq 1 - \varepsilon$ , а значит, у первого игрока есть стратегия (здесь стратегия это протокол из  $R^{pub}$ , так как это распределение на детерминированных протоколах, которое является недетерминированным протоколом), которая дает ему на любом входе заработать хотя бы  $1 - \varepsilon$ . Значит,  $R_{\varepsilon}^{pub} \leq c$ . ■