

# CONTROL Y PROGRAMACIÓN DE ROBOTS

## *Proyecto de robots manipuladores*

Grado en Ingeniería Electrónica, Mecatrónica y Robótica

---



---

**Autores:** Montes Grova, Marco Antonio  
Lozano Romero, Daniel  
Mérida Floriano, Javier

# Índice

<b>1. Introducción al proyecto</b>	<b>3</b>
<b>2. Análisis Cinemático del brazo</b>	<b>4</b>
2.1. Modelo Cinemático Directo . . . . .	4
2.1.1. Parámetros y estudio del MCD según Denavit-Hartenberg . . . . .	4
2.1.2. Matrices de transformación homogéneas del robot . . . . .	4
2.1.3. Ecuaciones simbólicas del MCD . . . . .	4
2.2. Modelo Cinemático Inverso . . . . .	5
2.3. Jacobiano del robot y análisis de puntos singulares . . . . .	6
<b>3. Análisis Dinámico del brazo</b>	<b>7</b>
<b>4. Obtencion de los parametros dinamicos del robot</b>	<b>8</b>
4.1. Estimacion de parametros dinamicos . . . . .	8
4.2. Cálculos estadísticos . . . . .	8
4.3. Análisis de resultados . . . . .	8
4.3.1. Robot Ideal con reductoras . . . . .	11
4.3.2. Robot Ideal sin reductoras . . . . .	12
4.3.3. Robot Real con reductoras . . . . .	13
4.3.4. Robot Real sin reductoras . . . . .	14
4.4. Verificación de los modelos obtenidos . . . . .	15
<b>5. Control Cinematico del robot</b>	<b>16</b>
5.1. Generador de trayectorias punto a punto . . . . .	16
5.2. Generador de trayectorias lineal . . . . .	16
5.3. Generador de trayectorias circulares . . . . .	16
5.4. Pruebas y conclusiones . . . . .	18
<b>6. Control Dinámico del brazo</b>	<b>19</b>
6.1. Obtención del modelo lineal de las articulaciones del brazo . . . . .	19
6.2. Diseño de controladores . . . . .	20
6.2.1. Controlador PD/PID . . . . .	20
6.2.2. Controlador PD/PID con compensación de gravedad . . . . .	20
6.2.3. Controlador PD/PID con compensación de dinámica (Feedforward) . . . . .	20
6.2.4. Controlador PD/PID con par calculado . . . . .	20
6.3. Analisis de controladores . . . . .	20
<b>7. Anexos</b>	<b>21</b>
7.1. Conclusiones (A LO MEJON SI A LO MEJON NO) . . . . .	21
7.2. Codigos de programacion . . . . .	21
7.3. Montajes en Simulink . . . . .	21

## 1. Introducción al proyecto

Como objetivo de este trabajo se encuentra el análisis cinemático y dinámico, así como la estimación de ciertos parámetros dinámicos del robot, como pueden ser inercias o fricciones viscosas. Además de ello, se diseñará un control cinemático y dinámico del brazo robótico.

El brazo sujeto a análisis será del tipo RRR, es decir, de tres articulaciones rotacionales.

El robot que se va a estudiar, representado por la estructura de la portada de este trabajo, posee los siguientes parámetros estructurales:

$$L_0 = 0,60m \quad L_1 = 0,60m \quad L_2 = 1,00m \quad L_3 = 0,80m$$

Además, también vienen dados los valores de factores de reducción de velocidad y constantes de par de los motores:

$$R_1 = 50; R_2 = 30; R_3 = 15$$

$$K_{t1} = 0,5 \frac{Nm}{A}; K_{t2} = 0,4 \frac{Nm}{A}; K_{t3} = 0,35 \frac{Nm}{A}$$

En primer lugar, se desarrollará un análisis cinemático del brazo robótico, tanto directo como inverso, es decir, se hallará la posición cartesiana del efector final en función de las variables articulares del brazo y viceversa.

Tras ello, será necesario estimar los parámetros dinámicos del brazo, ya que únicamente se conocen las longitudes del mismo. Se obtendrán diferentes parámetros en función de las condiciones supuestas para el brazo, principalmente las condiciones que se emplearan serán:

- Robot con medidas ideales con reductoras.
- Robot con medidas ideales de accionamiento directo.
- Robot con medidas reales con reductoras.
- Robot con medidas reales de accionamiento directo.

Para el robot con medidas reales, se evaluará qué condición es mas favorable. Por ejemplo, si se obtiene un mejor modelo matemático del robot empleando únicamente encoders que conozcan las posiciones de las variables articulares y derivando numéricamente para conocer las velocidades y las aceleraciones de las mismas, o el caso en el que se empleen encoders que conozcan la posición y tacómetros que conozcan las velocidades pero derivando numéricamente para obtener las aceleraciones.

Una vez se hayan obtenido los modelos matemáticos de las articulaciones de los robots, se diseñará un control cinemático del mismo, el cual será un generador de trayectorias que, a partir de una posición inicial, una posición real, un número de puntos y el tiempo en que se desea que vaya de un punto a otro, generará una trayectoria de las variables articulares del robot.

Por último, se diseñarán una serie de controladores dinámicos para el robot, en los cuales se observe la mejoría o empeoramiento de los mismos en función del tipo de robot empleado frente a otros.

## 2. Análisis Cinemático del brazo

### 2.1. Modelo Cinemático Directo

#### 2.1.1. Parámetros y estudio del MCD según Denavit-Hartenberg

Uno de los modos de estudio del problema cinemático directo de un robot es el procedimiento de Denavit-Hartenberg, el cual se basa en la realización de cambios de sistema de referencia empleando las matrices de transformación homogéneas. Siguiendo una serie de pasos, se llegará a obtener los siguientes parámetros que definen la cinemática directa del robot.

Articulación	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$\theta_1$	$L0+L1$	0	$\frac{\pi}{2}$
2	$\theta_2$	0	$L2$	0
3	$\theta_3$	$L3$	$L2$	0

#### 2.1.2. Matrices de transformación homogéneas del robot

A continuación, se mostrarán las matrices de transformación homogéneas que definen los cambios de sistema de referencia que han hecho posible relacionar el sistema de referencia base con el del efector final. La matriz de transformación homogénea que relaciona un sistema de referencia con el siguiente se define como:

$${}^{i-1}A_i = Rot_z(\theta_i) * T(0, 0, d_i) * T(d_i, 0, 0) * Rot_x(\alpha_i) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\alpha_i)\cos(\theta_i) & \sin(\alpha_i)\sin(\theta_i) & a_i\cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \sin(\alpha_i)\cos(\theta_i) & -\sin(\alpha_i)\sin(\theta_i) & a_i\sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Ahora que se ha definido la matriz general, se definirán las matrices de transformación homogéneas de cada cambio de sistema de referencia del robot:

$${}^0A_1 = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & 0 & \sin(\theta_1) & 0 \\ \sin(\theta_1) & 0 & -\cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L0 + L1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^1A_2 = \begin{pmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 & L2\cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 & L2\sin(\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^2A_3 = \begin{pmatrix} \cos(\theta_3) & -\sin(\theta_3) & 0 & L3\cos(\theta_3) \\ \sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) & 0 & L3\sin(\theta_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

#### 2.1.3. Ecuaciones simbólicas del MCD

A partir de estos parámetros será posible obtener las matrices de transformación homogéneas asociadas a cada traslación y giro de sistema de referencia. Si se premultiplican las matrices desde la base hasta el punto final del brazo (efector final), la matriz de transformación obtenida será:

$${}^3T_0 = \begin{pmatrix} \cos(\theta_2 + \theta_3)\cos(\theta_1) & -\sin(\theta_2 + \theta_3)\cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & \cos(\theta_1)[L3\cos(\theta_2 + \theta_3) + L2\cos(\theta_2)] \\ \cos(\theta_2 + \theta_3)\sin(\theta_1) & -\sin(\theta_2 + \theta_3)\sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1)[L3\cos(\theta_2 + \theta_3) + L2\cos(\theta_2)] \\ \sin(\theta_2 + \theta_3) & \cos(\theta_2 + \theta_3) & 0 & L0 + L1 + L3\sin(\theta_2 + \theta_3) + L2\sin(\theta_2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Donde se puede extraer que la matriz de orientación del efector final y la posición del mismo respecto al sistema de referencia de la base son:

$$noa = \begin{pmatrix} \cos(\theta_2 + \theta_3)\cos(\theta_1) & -\sin(\theta_2 + \theta_3)\cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) \\ \cos(\theta_2 + \theta_3)\sin(\theta_1) & -\sin(\theta_2 + \theta_3)\sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_2 + \theta_3) & \cos(\theta_2 + \theta_3) & 0 \end{pmatrix}$$

$$p = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1)[L3\cos(\theta_2 + \theta_3) + L2\cos(\theta_2)] \\ \sin(\theta_1)[L3\cos(\theta_2 + \theta_3) + L2\cos(\theta_2)] \\ L0 + L1 + L3\sin(\theta_2 + \theta_3) + L2\sin(\theta_2) \end{pmatrix}$$

## 2.2. Modelo Cinemático Inverso

En lo que a la resolución del modelo cinemático inverso del robot respecta, se basará en obtener los valores de las variables articulares a partir de la posición del efector final. Por tanto, se partirá de las ecuaciones del vector  $p$ :

$$\begin{aligned} px &= \cos(\theta_1)[L3\cos(\theta_2 + \theta_3) + L2\cos(\theta_2)] \\ py &= \sin(\theta_1)[L3\cos(\theta_2 + \theta_3) + L2\cos(\theta_2)] \\ pz &= L0 + L1 + L3\sin(\theta_2 + \theta_3) + L2\sin(\theta_2) \end{aligned}$$

Para obtener las ecuaciones que definen el valor de  $\theta_1, \theta_2$  y  $\theta_3$ , se trabajará con las funciones que definen  $px, py$  y  $pz$ . Será necesario definir los ángulos empleando la función  $\text{atan2}$  de *Matlab*, ya que de ese modo se distinguirá en qué cuadrante se encuentra la tangente.

Por tanto el objetivo es obtener el valor del seno y el coseno de cada ángulo.

Se comenzará obteniendo el valor de  $\theta_1$ . Para ello se define:

$$A = \sqrt{px^2 + py^2} = L3\cos(\theta_2 + \theta_3) + L2\cos(\theta_2)$$

de ese modo, se obtiene  $\theta_1$  como:

$$\theta_1 = \text{atan2}(\sin(\theta_1), \cos(\theta_1)) = \text{atan2}\left(\frac{py}{A}, \frac{px}{A}\right) \quad (3)$$

Para obtener el valor de  $\theta_3$ , se comenzará a partir de  $pz$  y, se definirá la siguiente variable auxiliar:

$$B = pz - L1 - L0 = L3\sin(\theta_2 + \theta_3) + L2\sin(\theta_2)$$

Si se trabaja con las dos variables auxiliares creadas, A y B, y se crea la nueva variable C, se conseguirá obtener el valor del ángulo deseado:

$$C = A^2 + B^2 = L2^2 + 2L2L3\cos(\theta_3) + L3^2$$

Cómo último paso para obtener el valor de  $\theta_3$ , se despejará el valor del coseno del mismo:

$$(\cos(\theta_3)) = \frac{C - L2^2 - L3^2}{2L2L3}$$

Por tanto,  $\theta_3$  se define como:

$$\theta_3 = \beta - \text{atan2}(\sin(\theta_3), \cos(\theta_3)) = \beta - \text{atan2}\left(\pm \sqrt{1 - \left(\frac{C - L2^2 - L3^2}{2L2L3}\right)^2}, \frac{C - L2^2 - L3^2}{2L2L3}\right) \quad (4)$$

Por último, se hallará el valor de la variable articular  $\theta_2$ . Para ello, se partirá de la ecuación A y se desarrollará empleando la fórmula del coseno del ángulo doble. La ecuación quedará de la forma:

$$A = L3\cos(\theta_2 + \theta_3) + L2\cos(\theta_2) = L3[\cos(\theta_2)\cos(\theta_3) - \sin(\theta_2)\sin(\theta_3)] + L2\cos(\theta_2) = \\ L3\cos(\theta_2)\cos(\theta_3) - L3\sin(\theta_2)\sin(\theta_3) + L2\cos(\theta_2)$$

donde será de ayuda despejar la función A en una suma de un término por el seno de  $\theta_2$  y otro término por el coseno del mismo ángulo. De ese modo será posible intentar obtener dicho ángulo empleando un cambio a coordenadas polares:

$$A = \cos(\theta_2)[L3\cos(\theta_3) + L2] - \sin(\theta_2)[L3\sin(\theta_3)]$$

$\rho\cos(\alpha) = L3\cos(\theta_3) + L2$ $\rho\sin(\alpha) = L3\sin(\theta_3)$	$\rho = \sqrt{(L3\sin(\theta_3))^2 + (L3\cos(\theta_3) + L2)^2}$ $\alpha = \text{atan2}(L3\sin(\theta_3), L3\cos(\theta_3) + L2)$
---	--

Sustituyendo en la ecuación A y empleando la fórmula del coseno del ángulo suma, se podría definir:

$$A = \rho\cos(\theta_2)\cos(\alpha) - \rho\sin(\theta_2)\sin(\alpha) \rightarrow A = \rho\cos(\theta_2 + \alpha)$$

Despejando el valor del coseno  $\theta_3$  se obtendrá:

$$\theta_2 = \text{atan2}\left(\pm\sqrt{1 - \left(\frac{A}{\rho}\right)^2}, \frac{A}{\rho}\right) - \alpha \quad (5)$$

De ese modo, la solución del problema cinemático inverso está formada por siguientes ecuaciones:

$$\theta_1 = \text{atan2}(\sin(\theta_1), \cos(\theta_1)) = \text{atan2}\left(\frac{py}{A}, \frac{px}{A}\right) \\ \theta_2 = \text{atan2}\left(\pm\sqrt{1 - \left(\frac{A}{\rho}\right)^2}, \frac{A}{\rho}\right) - \alpha \\ \theta_3 = \beta - \text{atan2}(\sin(\theta_3), \cos(\theta_3)) = \beta - \text{atan2}\left(\pm\sqrt{1 - \left(\frac{C-L2^2-L3^2}{2L2L3}\right)^2}, \frac{C-L2^2-L3^2}{2L2L3}\right)$$

### 2.3. Jacobiano del robot y análisis de puntos singulares

### 3. Análisis Dinámico del brazo

Una vez analizada la cinemática del brazo, se debe pasar a realizar un análisis dinámico del mismo. Este análisis nos muestra la relación que existe entre las intensidades aplicadas a los motores de las articulaciones del robot y las posiciones, velocidades y aceleraciones de dichas articulaciones.

La ecuación que permite obtener dicha relación es la siguiente:

$$K_t R I_m = (M(q) + J_m R^2) qdd + (C(q, qd) + B_m R^2) qd + G(q) + F(qd) \quad (6)$$

En la ecuación anterior, se tiene, en el término de la izquierda, las matrices de constantes de par de cada motor ( $K_t$ ) y de reductoras ( $R$ ) e intensidades ( $I_m$ ) aplicadas a cada motor.

Por otro lado, en el término de la derecha encontramos las matrices de inercia de los eslabones ( $M(q)$ ) y de los motores ( $J_m$ ), la matriz de términos de Coriolis ( $C(q, qd)$ ) y la de términos viscosos de los motores ( $B_m$ ), y las matrices de términos gravitatorios ( $G(q)$ ) y de fricciones ( $F(qd)$ ), donde esta última no se tendrá en cuenta para la estimación del modelo.

Aparecen también los vectores columna  $q$ ,  $qd$  y  $qdd$  que corresponden, respectivamente, a los valores de posición, velocidad y aceleración de las articulaciones.

Para tratar de hallar la ecuación anterior, se va a realizar un método recursivo que se basa en la segunda ley de Newton denominado algoritmo de Newton-Euler, el cual obtiene los esfuerzos/pares aplicados en cada articulación. Dicho algoritmo ha sido proporcionado en clase por lo que no se explicará aquí. Sí decir que como del robot sólo se conocen las longitudes de los eslabones y algunos parámetros dinámicos (reductoras y constantes de par) se realizará el cálculo con variables simbólicas que serán estimadas y sustituidas más adelante.

El resultado que se desea obtener con dicho algoritmo es el siguiente:

$$T = M(q)qdd + V(q, qd) + G(q), \quad (7)$$

donde el término  $V(q, qd)$  hace referencia al conjunto  $C(q, qd)qd$ .

Como el algoritmo anterior obtiene el resultado total, se debe derivar el mismo para poder hallar las matrices aisladas. Por ello, el resultado  $T$  se deriva respecto a  $qdd$  para obtener la matriz  $M(q)$ . Acto seguido restar la matriz obtenida multiplicada por  $qdd$  al valor de  $T$  para eliminarlo y obtener las otras dos matrices.

El siguiente paso consiste en derivar la nueva  $T$  respecto a la constante de gravedad  $g$ , puesto que aparece únicamente en los términos gravitatorios. Así, y multiplicando por  $g$  a posteriori, se obtiene la matriz  $G(q)$ . Para hallar la matriz  $V(q, qd)$  basta con restar a la  $T$  resultante de extraer la matriz de inercia la  $G(q)$  anterior.

Una de las características que hay que tener en cuenta del algoritmo de Newton-Euler es que no tiene en cuenta las viscosidades e inercias de los motores, por lo que hay que añadirlas a posteriori obteniendo las matrices  $Ma(q) = M(q) + J_m R^2$  y  $Va(q, qd) = V(q, qd) + B_m R^2 qd$ .

Una vez realizado todo esto se ha obtenido el modelo dinámico simbólico del robot, que se va a suponer correcto pues únicamente consiste en seguir unos pasos descritos en clase, pero que, si se deseara, se podría comparar con un robot diseñado en Robotics Toolbox de Matlab asignando valores a los parámetros y realizando un mismo experimento para ambos modelos, tomando como referencia correcta el último de ellos.

## 4. Obtencion de los parametros dinamicos del robot

Debido a que no se conocen los parametros dinamicos del robot, sera posible estimarlos mediante una serie de experimentos y aproximaciones. Se ha optado por aplicar el algoritmo de Newton-Euler, el cual es un procedimiento recursivo que se basa en la segunda ley de Newton. Este algoritmo nos dara los esfuerzos en las articulaciones.

Por tanto, trabajando con Matlab, si se definen todas esas variables del robot de manera simbolica y se corre el algoritmo, se obtendran los pares que sufren las articulaciones.

Las variables que se busca estimar del robot seran las siguientes:

$$I_{11} = \begin{bmatrix} I_{11xx} & I_{11xy} & I_{11xz} \\ I_{11yx} & I_{11yy} & I_{11yz} \\ I_{11zx} & I_{11zy} & I_{11zz} \end{bmatrix}$$
$$I_{22} = \begin{bmatrix} I_{22xx} & I_{22xy} & I_{22xz} \\ I_{22yx} & I_{22yy} & I_{22yz} \\ I_{22zx} & I_{22zy} & I_{22zz} \end{bmatrix} \quad \text{TERMINAR DE METER MATRICES LOCO}$$

- HABLAR UN POCO DE LA NECESIDAD DE ESTIMAR LOS PARAMETROS DE NEWTON EULER
- HABLAR DE COMO SE OBTUVO GAMMA SIM Y TETHA SIM
- HABLAR DE LA SIMPLIFICACION A PARAMETROS LI
- HABLAR DE LOS EXPERIMENTOS DE LOS SENOS
- HABLAR DE LA OPTIMIZACION Y ESTIMACION DE LOS PARAMETROS
- CONTRUCCION DEL MODELO A PARTIR DE LOS PARAMETROS
- COMPARATIVA ROBOT REAL Y MODELOS. CONCLUSIONES

### 4.1. Estimacion de parametros dinamicos

### 4.2. Cálculos estadísticos

### 4.3. Análisis de resultados

A continuación, se mostrarán los parámetros obtenidos para cada configuración del robot, así cómo la covarianza con la que se han obtenido los mismos.

Para evitar repetir siempre los parámetros, se irán definiendo componente a componente, es decir, a continuación se definirá tetha con todos los parámetros y se dirá en cada caso concreto la posición del parámetro obtenido en el vector, el valor de dicho parámetro y la covarianza del mismo.

Además de ello, se obtendrán las ecuaciones dinámicas que definen el comportamiento dinámico de las articulaciones del robot. Para obtener éstas ecuaciones, será necesario multiplicar la matriz  $\gamma$  que posteriormente se definirá por la matriz  $\theta$  con valores numericos.

Una vez se tengan las ecuaciones dinámicas del robot, al igual que se hizo cuando se aplicó el algoritmo de *Newton-Euler*, se irán derivando las expresiones respecto las posiciones, velocidades y aceleraciones articulares para obtener las matrices de inercias, matriz de terminos de Coirolis y la matriz formada por



los términos gravitarios.

$$\theta = \begin{pmatrix} m_1 s_{11z}^2 + m_2 s_{22x}^2 + m_3 s_{33x}^2 + I_{11yy} + I_{22yy} + I_{33yy} + R_1^2 J m_1 - m_2 - 1,64 m_3 \\ B m_1 \\ -m_2 s_{22x}^2 + I_{22xx} - I_{22yy} + m_2 + m_3 \\ m_2 s_{22x}^2 + I_{22zz} + R_2^2 J m_2 - m_2 - m_3 \\ B m_2 \\ -m_3 s_{33x}^2 + I_{33xx} - I_{33yy} + 0,64 m_3 \\ m_3 s_{33x}^2 + I_{33zz} - 0,64 m_3 \\ J m_3 \\ B m_3 \\ -m_2 - m_3 + m_2 s_{22x} \\ m_3 s_{33x} - 0,8 m_3 \end{pmatrix} \quad (8)$$

La matriz  $\gamma$  obtenida que, multiplicada por los valores numéricos de  $\theta$ , resultarán las ecuaciones dinámicas del robot estudiado, se muestra a continuación:

[illegible]

## 4.3.1. Robot Ideal con reductoras

Los parametros estimados, es decir, la matriz tetha linealmente independiente de 11 parámetros, obtenida para desarrollar el modelo del robot con medidas ideales con reductoras en los motores será:

Parametro estimado	Valor obtenido	Covarianza obtenida
$\theta(1)$	15.6322	0.0338
$\theta(2)$	0.0012	0.0218
$\theta(3)$	7.389	0.0481
$\theta(4)$	55.1139	0.00081
$\theta(5)$	0.00085	0.02744
$\theta(6)$	2.0841	0.047868
$\theta(7)$	-2.0414	0.00623
$\theta(8)$	0.051	0.00113
$\theta(9)$	0.0015	0.033
$\theta(10)$	-6.665	0.00054
$\theta(11)$	-2.222	0.00113

Por lo tanto, tras multiplicar  $\gamma$  y  $\theta$  y derivar respecto a las variables articulares, se definirán las ecuaciones dinámicas del robot ideal con reductoras cómo:

$$\begin{pmatrix} K_{11}R_{11}^T f_{m1} \\ K_{12}R_{12}^T f_{m2} \\ K_{13}R_{13}^T f_{m3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0889\cos(2p_1 + q_1) + 0.119 + \cos(2p_1) + 0.0888\cos(q_1) + 0.0294\cos(2p_1 + 2q_1) + 1.15 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3703\cos(q_1) + 5.83 & 0 \\ 0 & 0.4232\cos(q_1) + 0.298 & 2.403 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.176\dot{q}_1\sin(2p_1 + q_1) + 0.0887\dot{q}_1\sin(2p_1 + q_1) + 0.235\dot{q}_1\sin(2q_1) + 0.0887\dot{q}_1\sin(q_1) + 0.059\dot{q}_1\sin(2p_1 + 2q_1) + 0.059\dot{q}_1\sin(2p_1 + 2q_1) - 0.126 \\ 0.0628\dot{q}_2 - 0.185\dot{q}_2^2\sin(q_1) + 0.0613\dot{q}_2^2\sin(2p_1 + 2q_1) + 0.185\dot{q}_2^2\sin(2p_1 + q_1) + 0.248\dot{q}_2^2\sin(2p_1) - 0.37\dot{q}_2\sin(q_1) \\ 0.0643\dot{q}_3 + 0.272\dot{q}_3^2\sin(q_1) + 0.423\dot{q}_3^2\sin(q_1) + 0.14\dot{q}_3^2\sin(2p_1 + 2q_1) + 0.212\dot{q}_3^2\sin(2p_1 + q_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1.81\cos(q_1 + q_1) + 5.44\cos(q_1) \\ 4.15\cos(q_1 + q_1) \end{pmatrix}$$

### 4.3.2. Robot Ideal sin reductoras

Los parametros estimados, es decir, la matriz tetha linealmente independiente de 11 parámetros, obtenida para desarrollar el modelo del robot con medidas ideales sin reductoras en los motores será:

Parametro estimado	Valor obtenido	Covarianza obtenida
$\theta(1)$	-9.31476	0.00364
$\theta(2)$	0.001193	2.868
$\theta(3)$	7.3803	0.00036
$\theta(4)$	-7.2341	0.00369
$\theta(5)$	0.00121	5.890
$\theta(6)$	2.078	0.00358
$\theta(7)$	-2.0335	0.00359
$\theta(8)$	0.051	0.0148
$\theta(9)$	0.00146	2.19
$\theta(10)$	-6.6585	0.003621
$\theta(11)$	-2.222	0.00356

Por lo tanto, tras multiplicar  $\gamma$  y  $\theta$  y derivar respecto a las variables articulares, se definirán las ecuaciones dinámicas del robot ideal con reductoras cómo:

$$\begin{pmatrix} K_{11}R_1^T f_{m1} \\ K_{12}R_2^T f_{m2} \\ K_{13}R_3^T f_{m3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.434\cos(2q_2 + q_3) + 5.937\cos(2q_2) + 4.434\cos(q_1) + 1.809\cos(2q_2 + 2q_3) + 7.693 & 0 & 0 \\ 0 & 11.08\cos(q_1) + 18.59 & 5.542\cos(q_1) + 3.784 \\ 0 & 6.338\cos(q_1) + 4.325 & 4.47 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8.84\dot{q}_1\dot{q}_2\sin(2q_2 + q_3) - 4.429\dot{q}_1\dot{q}_2\sin(2q_2 + q_3) - 11.85\dot{q}_1\dot{q}_2\sin(2q_2) - 4.429\dot{q}_1\dot{q}_2\sin(q_1) - 2.924\dot{q}_1\dot{q}_2\sin(2q_2 + 2q_3) - 2.924\dot{q}_1\dot{q}_2\sin(2q_2 + 2q_3)0.002357\dot{q}_1 \\ 0.00394\dot{q}_2 - 5.54\dot{q}_2^2\sin(q_1) + 1.84\dot{q}_2^2\sin(2q_2 + 2q_3) + 5.54\dot{q}_2^2\sin(2q_2 + q_3) + 7.42\dot{q}_2^2\sin(2q_2) - 11.14\dot{q}_2\dot{q}_3\sin(q_1) \\ 0.00418\dot{q}_3 + 3.17\dot{q}_3^2\sin(q_1) + 6.33\dot{q}_3^2\sin(2q_2 + 2q_3) + 2.1\dot{q}_3^2\sin(2q_2 + q_3) + 3.17\dot{q}_3^2\sin(2q_2 + q_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 54.3\cos(q_1 + q_3) + 163\cos(q_1) \\ 62.3\cos(q_2 + q_3) \end{pmatrix}$$

### 4.3.3. Robot Real con reductoras

Los parametros estimados, es decir, la matriz tetha linealmente independiente de 11 parámetros, obtenida para desarrollar el modelo del robot con medidas reales con reductoras en los motores será:

Parametro estimado	Valor obtenido	Covarianza obtenida
$\theta(1)$	16.995	4.0573
$\theta(2)$	0.00122	0.2538
$\theta(3)$	12.393	1.291
$\theta(4)$	38.28	1.9472
$\theta(5)$	0.00129	0.941
$\theta(6)$	1.434	0.917
$\theta(7)$	4.0372	4.545
$\theta(8)$	0.0491	1.234
$\theta(9)$	0.00151	1.468
$\theta(10)$	-6.6722	0.003858
$\theta(11)$	-2.199	0.008916

Por lo tanto, tras multiplicar  $\gamma$  y  $\theta$  y derivar respecto a las variables articulares, se definirán las ecuaciones dinámicas del robot ideal con reductoras cómo:

$$\begin{pmatrix} K_{11}R_{11}^T\ddot{\theta}_1 \\ K_{12}R_{11}^T\ddot{\theta}_2 \\ K_{13}R_{11}^T\ddot{\theta}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.088\cos(2q_1 + q_1) + 0.019\cos(2q_1) + 0.088\cos(q_1) + 0.0417\cos(2q_1 + 2q_1) + 1.29 & 0 & 0 \\ 0 & 0.366\cos(q_1) + 4.6 & 0.183\cos(q_1) + 0.293 \\ 0 & 0.113\cos(q_1) + 0.07 & 2.78 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.1756q_1\dot{q}_1\sin(2q_1 + q_1) - 0.0879q_1\dot{q}_1\sin(2q_1) - 0.037796q_1\dot{q}_1\sin(q_1) - 0.0879q_1\dot{q}_1\sin(q_1) - 0.08327q_1\dot{q}_1\sin(2q_1 + 2q_1) - 0.08327q_1\dot{q}_1\sin(2q_1 + 2q_1) + 0.1223 + q_1^2 \\ 0.0909q_1 - 0.183q_1^2\sin(q_1) + 0.0909q_1^2\sin(2q_1 + 2q_1) + 0.183q_1^2\sin(2q_1 + q_1) + 0.037796q_1^2\sin(2q_1) - 0.366q_1\dot{q}_1\sin(q_1) \\ 0.064q_1 + 0.209q_1^2\sin(q_1) + 0.413q_1^2\sin(q_1) + 0.139q_1^2\sin(2q_1 + 2q_1) + 0.209q_1^2\sin(2q_1 + q_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1.796\cos(q_1 + q_1) + 5.448\cos(q_1) \\ 4.055\cos(q_1 + q_1) \end{pmatrix}$$

#### 4.3.4. Robot Real sin reductoras

Los parametros estimados, es decir, la matriz tetha linealmente independiente de 11 parámetros, obtenida para desarrollar el modelo del robot con medidas reales sin reductoras en los motores será:

Parametro estimado	Valor obtenido	Covarianza obtenida
$\theta(1)$	-	-
$\theta(2)$	-	-
$\theta(3)$	-	-
$\theta(4)$	-	-
$\theta(5)$	-	-
$\theta(6)$	-	-
$\theta(7)$	-	-
$\theta(8)$	-	-
$\theta(9)$	-	-
$\theta(10)$	-	-
$\theta(11)$	-	-

Por lo tanto, tras multiplicar  $\gamma$  y  $\theta$  y derivar respecto a las variables articulares, se definirán las ecuaciones dinámicas del robot ideal con reductoras cómo:

$$\begin{pmatrix} Kt_1 R_1^2 I m_1 \\ Kt_2 R_2^2 I m_2 \\ Kt_3 R_3^2 I m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tra & tra & malamente \\ tra & tra & malamente \\ tra & tra & malamente \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} tra \\ tra \\ tra \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} tra \\ tra \\ tra \end{pmatrix}$$

#### 4.4. Verificación de los modelos obtenidos

## 5. Control Cinematico del robot

### ■ HABLAR SOBRE QUE ES EL CONTROL CINEMATICO Y LAS MOVIDAS DE LOS GENERADORES DE TRAYECTORIAS

Una vez estudiado el análisis cinemático del modelo de brazo manipulador, y obtenidas las ecuaciones cinemáticas inversa y directa de este, se terminará de abordar el problema cinemático, al ser capaces de desarrollar el control sobre esta; para ello, se requiere poder generar trayectorias dentro del espacio articular, con tal de que el brazo manipulador pueda cumplir una ordenes de movimiento conocidas, en este caso dadas en un espacio cartesiano.

### ■ TIPOS DE TRAYECTORIAS. COMO LA GENERAMOS

Visto esto, tenemos que conocer las consignas de movimiento, mejor vistas como condiciones de contorno o exigencias, que se le piden al robot; ejemplificado en este proyecto, el movimiento del efector final entre dos puntos del espacio cartesiano del robot, dado un tiempo limite para su realización.

### ■ INTERPOLADORES DE TRAYECTORIAS

### ■ IMPLEMENTACION, GRAFICAS Y CONCLUSIONES

#### 5.1. Generador de trayectorias punto a punto

#### 5.2. Generador de trayectorias lineal

#### 5.3. Generador de trayectorias circulares

El generador de trayectorias circulares es similar al generador de trayectorias lineal, excepto por el cálculo de la trayectoria en sí, es decir, una vez obtenidos los puntos que definen la trayectoria, se realizan los mismos cálculos para la obtención de las posiciones, velocidades y aceleraciones articulares.

Para empezar, se deben introducir 3 puntos, a diferencia de los generadores lineales, que definirán la curva como punto inicial, punto intermedio y punto final. Lo próximo que se calcula es el centro de la circunferencia definida de tal forma:

Primero se calcula el vector unitario perpendicular al plano definido por la circunferencia:

$$v_1 = (P_2 - P_1) \wedge (P_3 - P_1)$$

$$v_1 = v_1 / ||v_1||$$

Una vez obtenido dicho vector, se puede pasar al cálculo del centro de la circunferencia, lo cual se realiza con un sistema de 3 ecuaciones que se resuelve de forma matricial y que se haya buscando relaciones entre vectores (puede haber más de un sistema de ecuaciones que lleve a la resolución del problema):

- 1.-El producto escalar entre el vector  $v_1$  y el vector definido por  $P_0 - P_1$  ha de ser nulo
- 2.-El producto escalar entre el vector  $P_0 - (P_2 + P_1)/2$  y el vector  $P_2 - P_1$  ha de ser nulo
- 3.-El producto escalar entre el vector  $P_0 - (P_3 + P_1)/2$  y el vector  $P_3 - P_1$  ha de ser nulo

Una vez obtenidas las ecuaciones se ha de obtener el sistema de ecuaciones tal que:

$$P_0 = A|B$$

Realizando las operaciones pertinentes y despejando se pueden obtener las matrices A y B como:

$$A = \begin{bmatrix} v_1(1) & v_1(2) & v_1(3) \\ P_2(1) - P_1(1) & P_2(2) - P_1(2) & P_2(3) - P_1(3) \\ P_3(1) - P_1(1) & P_3(2) - P_1(2) & P_3(3) - P_1(3) \end{bmatrix}$$



$$B = \begin{bmatrix} P_1(1) * v_1(1) + P_1(2) * v_1(2) + P_1(3) * v_1(3) \\ ((P_2(1) + P_1(1)) * (P_2(1) - P_1(1)))/2 + ((P_2(2) + P_1(2)) * (P_2(2) - P_1(2)))/2 + ((P_2(3) + P_1(3)) * (P_2(3) - P_1(3)))/2 \\ ((P_3(1) + P_1(1)) * (P_3(1) - P_1(1)))/2 + ((P_3(2) + P_1(2)) * (P_3(2) - P_1(2)))/2 + ((P_3(3) + P_1(3)) * (P_3(3) - P_1(3)))/2 \end{bmatrix}$$

Una vez hallado el centro de la circunferencia,  $P_0$ , se debe proceder a calcular los puntos solicitados al principio del algoritmo. Para ello se necesitarán dos vectores:

$$v_2 = (P_1 - P_0)/\|(P_1 - P_0)\| \text{ y } v_3 = -(v_2 \wedge v_1)/\|(v_2 \wedge v_1)\|,$$

que serán, respectivamente, el vector unitario que va desde el centro de la circunferencia al punto  $P_1$  y el vector unitario perpendicular al plano definido por  $v_1$  y  $v_2$  con origen en  $P_1$  y sentido de la trayectoria. Con estos dos vectores se pueden calcular los puntos que compondrán la trayectoria de tal forma:

$$\begin{aligned} g &= (P_3 - P_0)/\|(P_3 - P_0)\| \\ \cos_g &= (v_2 \cdot g) \\ \sin_g &= \|v_2 \wedge g\| \\ \text{rhofin} &= 2 * \pi - \text{atan2}(\sin_g, \cos_g) \\ \text{rho} &= \text{linspace}(0, \text{rhofin}, \text{npuntos}) \\ P &= \text{repmat}(P_0, 1, \text{numel}(\text{rho})) + R * (v_2 * \cos(\text{rho}) + v_3 * \sin(\text{rho})) \end{aligned}$$

Siendo  $\text{rhofin}$  el ángulo de la posición final de la trayectoria con respecto a la posición inicial,  $\text{rho}$  el vector de N puntos de valores de ángulos desde 0 hasta el ángulo de la posición final,  $R$  el radio del arco de circunferencia calculado como  $\|P_1 - P_0\|$ , y  $P$  la matriz de posiciones correspondientes a los puntos equidistantes a lo largo de la trayectoria.

Una vez realizados estos pasos ya se puede pasar al cálculo de los valores de las variables articulares para las posiciones calculadas como se ha llevado a cabo en los generadores anteriores.

Los resultados obtenidos para una trayectoria específica y un valor de 100 puntos a calcular han sido los siguientes:

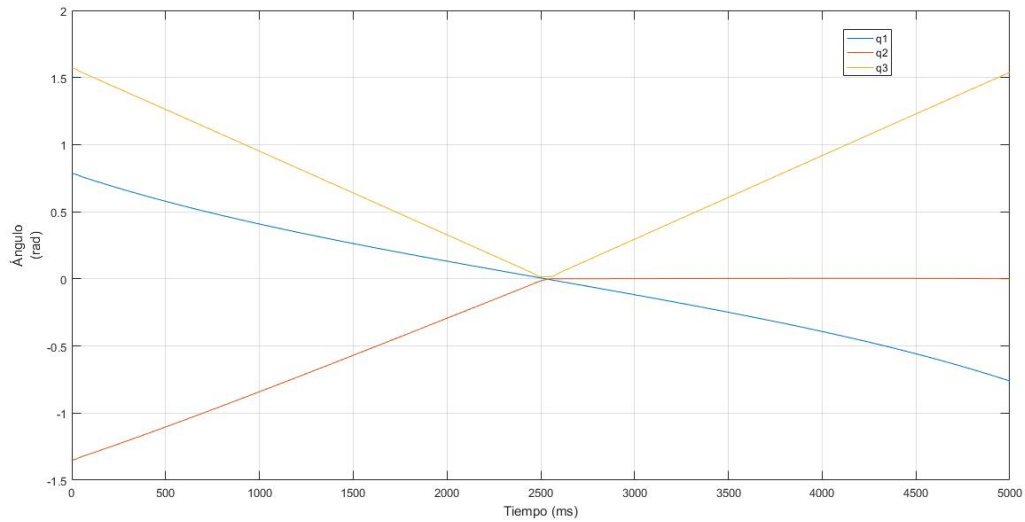


Figura 1: Valores de las variables articulares

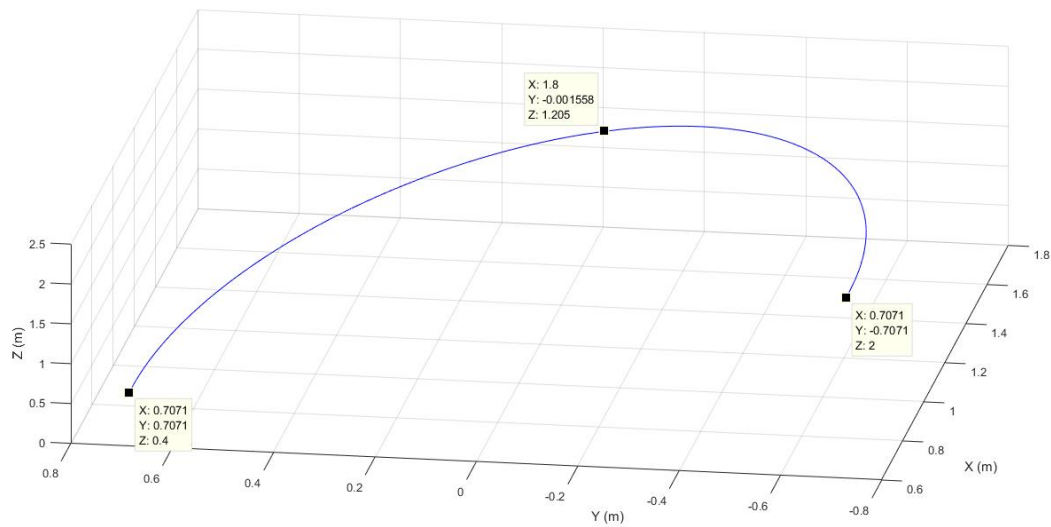


Figura 2: Posición del efector final

#### 5.4. Pruebas y conclusiones

Necesidad para el trabajo—>Ser capaces de que nuestro modelo de brazo manipulador ejecute ordenes de movimientos basados en trayectorias.

Como lo conseguimos—>Generar trayectorias de referencia en el espacio articular de nuestro modelo brazo manipulador, para conseguir

## 6. Control Dinámico del brazo

En esta última parte del proyecto, una vez se conoce el modelo del robot en las diferentes configuraciones, se pasará a buscar implementar un control dinámico sobre el mismo. Para poder implementar controladores sobre nuestro robot, será necesario obtener una función de transferencia matemática a modo de modelo que se asemeje al robot real.

Una vez se tenga un modelo lineal de cada articulación del robot, junto con el generador de trayectorias creado anteriormente, se buscará que el robot siga una trayectoria predefinida.

### 6.1. Obtención del modelo lineal de las articulaciones del brazo

Para obtener la función de transferencia de cada articulación del robot, se linealizará la ecuación dinámica que define cada motor en un punto de equilibrio en torno a velocidades nulas. Por lo tanto, las consideraciones que se tendrán en cuenta para linealizar la ecuación dinámica que define el comportamiento de cada articulación del robot son:

- Velocidades de equilibrio

$$\begin{aligned} \dot{q}_{eq} &= 0 \text{ rad/s} \\ \dot{q} &= \dot{q}_{eq} + \Delta \dot{q} \end{aligned}$$

- Aceleraciones de equilibrio

$$\begin{aligned} \ddot{q}_{eq} &= 0 \text{ rad/s}^2 \\ \ddot{q} &= \ddot{q}_{eq} + \Delta \ddot{q} \end{aligned}$$

Además de ello, se aplicarán una serie de simplificaciones a la ecuación dinámica. A continuación, se mostrarán las ecuaciones dinámicas de los motores:

$$\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Kt_1 R_1 I m_1 \\ Kt_2 R_2 I m_2 \\ Kt_3 R_3 I m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ma_{11} & Ma_{12} & Ma_{13} \\ Ma_{21} & Ma_{22} & Ma_{23} \\ Ma_{31} & Ma_{32} & Ma_{33} \end{pmatrix} \ddot{q} + \begin{pmatrix} Va_1 \\ Va_2 \\ Va_3 \end{pmatrix} \dot{q} + \begin{pmatrix} Ga_1 \\ Ga_2 \\ Ga_3 \end{pmatrix}$$

donde se asume que dentro de los términos de inercia y de Coirolis se han tenido en cuenta las inercias y fricciones viscosas de los motores.

La primera simplificación del modelo que se hará para poder linealizar el modelo en torno a un punto de operación, será suponer la matriz de inercias diagonal y, además de ello, se cogerá el valor medio de todos los senos y cosenos de tal modo que únicamente se tomen los valores de inercias medios. De éste modo, se desacoplará el sistema.

En cuando a la matriz de términos de Coirolis, únicamente aportarán a la linealización la fricción viscosa de los motores. Por último, la gravedad se despreciará para obtener un modelo, de tal modo que, se emplearán las siguientes ecuaciones para obtener los modelos de las articulaciones del robot:

$$\begin{pmatrix} Kt_1 R_1 I m_1 \\ Kt_2 R_2 I m_2 \\ Kt_3 R_3 I m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & Ma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Ma_{33} \end{pmatrix} \ddot{q} + \begin{pmatrix} Va_1 \\ Va_2 \\ Va_3 \end{pmatrix} \dot{q} \quad (9)$$

A continuación, se obtendrá el modelo de la primera articulación y, el procedimiento será análogo para las restantes:

$$Kt_1 R_1 I m_1(t) = Ma_{11} \ddot{q}_1(t) + Va_1 \dot{q}_1(t)$$

Se realizará una transformación al dominio de Laplace y, posteriormente, se expresará en forma de función de transferencia:

$$Kt_1 R_1 I m_1(s) = s^2 M a_{11} q_1(s) + s V a_1 q_1(s) \rightarrow \frac{q_1(s)}{I m_1(s)} = \frac{K t_1 R_1}{s(M a_{11} s + V a_1)}$$

Por lo tanto, se definirá el modelo de cada articulación cómo:

$$G_1(s) = \frac{K t_1 R_1}{s(M a_{11} s + V a_1)} \quad G_2(s) = \frac{K t_2 R_2}{s(M a_{22} s + V a_2)} \quad G_3(s) = \frac{K t_3 R_3}{s(M a_{33} s + V a_3)} \quad (10)$$

## 6.2. Diseño de controladores

En éste apartado, se analizará cómo se harán los controladores que, posteriormente se implementarán sobre el robot para hacer que se traslade a lo largo de una trayectoria que se generará mediante el control cinemático.

A continuación se hará un análisis teórico de cada controlador y del calculo de los mismos.

### 6.2.1. Controlador PD/PID

### 6.2.2. Controlador PD/PID con compensación de gravedad

Para implementar éste controlador, se parte de la base de que, aunque la gravedad es una perturbación mantenida, se puede modelar, ya que se conoce de la obtención del modelo dinámico los efectos de la gravedad en el modelo del robot.

Por tanto, para implementar un controlador con compensación de gravedad se le sumará a la señal de control generada por el controlador los efectos de la gravedad en el robot.

Este bloque que añade los efectos de la gravedad tendrá como entrada la posición actual del robot y la salida será la compensación de la señal de control. El esquema de montaje de éste tipo de control se muestra a continuación:

### 6.2.3. Controlador PD/PID con compensación de dinámica (Feedforward)

Para implementar éste controlador, también conocido como *Feedforward*, se modificará el modelo del robot de tal modo que se le añada a la ecuación dinámica un nuevo parámetro:

$$I_i m = M_A(q) q_{ref}'' + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G_A(q) + u \quad (11)$$

si con el control anterior se compensaban los terminos gravitatorios del modelo del robot, en éste caso, también se compensarán los términos de Coirolis del modelo, los cuales fueron despreciados al obtener el modelo a partir del cuál se diseño el controlador.

### 6.2.4. Controlador PD/PID con par calculado

## 6.3. Analisis de controladores

## **7. Anexos**

**7.1. Conclusiones (A LO MEJON SI A LO MEJON NO)**

**7.2. Codigos de programacion**

**7.3. Montajes en Simulink**