

CONTROL Y PROGRAMACIÓN DE ROBOTS

Proyecto de robótica móvil

Grado en Ingeniería Electrónica, Mecatrónica y Robótica



Autores: Montes Grova, Marco Antonio
Lozano Romero, Daniel
Mérida Floriano, Javier

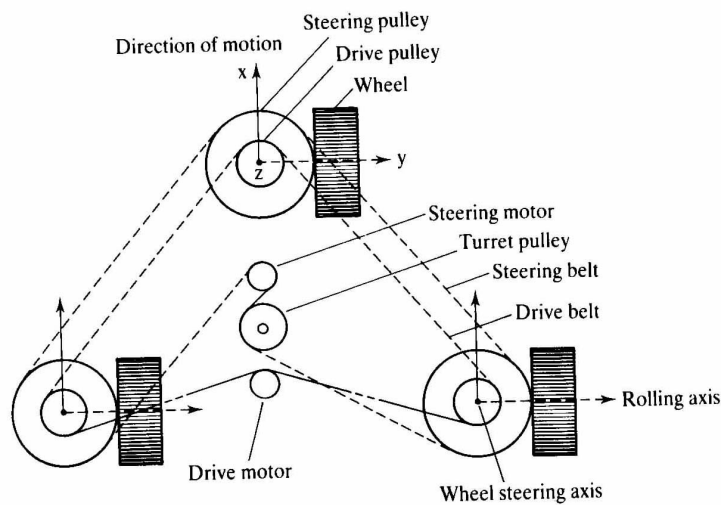
Índice

1. Introducción al proyecto	3
2. Análisis cinemático	4
2.1. Introducción teórica y simplificación del modelo	4
2.2. Obtención del modelo cinemático directo y su Jacobiano	5
2.2.1. Esquema de simulación del modelo directo obtenido	6
2.2.2. Experimentos realizados al modelo para su verificación	7
2.3. Obtención del modelo cinemático inverso	10
2.3.1. Esquema de simulación del modelo inverso obtenido	10
2.3.2. Experimentos realizados al modelo inverso para su verificación	12
3. Control dinámico	18
3.1. Implementación de diversos algoritmos de control	18
3.1.1. Control a un punto	18
3.1.2. Control a una línea	22
3.1.3. Control a una trayectoria	24
3.1.4. Control a una postura	27
3.2. Ley de control <i>Persecución pura</i>	30

1. Introducción al proyecto

En el proyecto que sigue a continuación se desarrollará el modelado y control de un robot móvil tipo síncrono. La principal característica destacable de este tipo de robots recae en el mecanismo mecánico interno que posee mediante el cual se podrán mover 3 ruedas empleando únicamente 2 motores. Con uno de los motores se desplazará en línea recta y con el otro se le dará el ángulo de giro deseado sobre sí mismo.

El modelo síncrono se basa en 3 ruedas idénticas que se desplazan y giran al unísono, haciendo posible que el robot pueda moverse en cualquier dirección y orientación en el plano del suelo. Estas ruedas están dispuestas de forma triangular en la base del robot, el cual se va a representar como un objeto cilíndrico, siendo la base uno de los lados circulares. Par un mayor entendimiento, se va a representar un esquema del mecanismo utilizado en este tipo de robot móvil:



Este modelo tiene como ventajas la separación de motores entre traslación y rotación que facilita el control, la garantía de control en trayectorias rectilíneas debido a la mecánica del mismo y la facilidad que incluyen las restricciones homólogas que posee. Como desventaja encontramos el complejo diseño mecánico que posee para poder transmitir la rotación y traslación a las tres ruedas simultáneamente y, por ende, su difícil implementación en la realidad.

2. Análisis cinemático

2.1. Introducción teórica y simplificación del modelo

Gracias a la mecánica del modelo síncrono, los cálculos para la obtención del modelo cinemático del mismo van a ser sencillos, ya que se trata de un modelo con restricciones holónomas, es decir, el comportamiento del vehículo se puede representar a través de sus variables generalizadas:

- Las variables cartesianas X y Y como coordenadas del centro del robot en el plano del suelo.
- La variable angular φ como la rotación producida frente al estado inicial, es decir, cuando éste vale cero.

las cuales son integrables en el tiempo de tal modo que resulta sencillo la obtención de un modelo cinemático de posiciones y velocidades.

La postura del robot, se podría obtener a partir de la aplicación de una matriz de rotación en torno al eje perpendicular al plano de suelo, es decir, respecto al eje Z :

$$R(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Además de ello, cabe destacar que, para simplificar el modelado del robot, se han asumido una serie de restricciones cinemáticas en las ruedas como son:

- Movimiento en un plano horizontal.
- Las ruedas poseen un único punto de contacto.
- Las ruedas no son deformables.
- v_c en el punto de contacto será nulo.
- La rueda no resbala, sino que produce un movimiento de arrastre o deslizamiento.
- No habrá fricción en el punto de contacto.
- Los ejes de dirección serán en todo momento ortogonales a la superficie.
- Las ruedas están conectadas al bastidor de giro.

2.2. Obtención del modelo cinemático directo y su Jacobiano

Para el modelo cinemático directo en cuestión, sólo se necesita como dato el valor del radio de las ruedas, R , para poder realizar la conversión entre velocidad angular y velocidad lineal. En este trabajo, siendo el grupo de trabajo número 11, se tiene como radio de las ruedas el valor de $R = 0,4m$. Con esto ya se puede hallar el modelo cinemático del robot:

Para comenzar se deben definir las variables generalizadas y de actuación del sistema, respectivamente:

$$q = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \varphi \end{bmatrix} \quad p = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \omega \end{bmatrix}$$

Como ya se vio en las clases de la asignatura, las variables generalizadas son las que dan información sobre el estado del robot, ya que se encuentran en ellas las coordenadas cartesianas X e Y del plano del centro del robot y el ángulo de giro φ con respecto al eje X , como se ha decidido definir en este proyecto. Así mismo, las variables de actuación son, como dice su nombre, las variables que reflejarán el valor de movimiento de los motores del robot, es decir, del motor encargado del desplazamiento (velocidad angular de desplazamiento, $\dot{\theta}$) y del encargado de la rotación (velocidad angular de rotación, ω).

Una vez detectadas las variables del sistema, se deberá definir la relación entre ellas y, de ese modo, obtener la expresión del Jacobiano, es decir, la relación entre la derivada de las variables articulares de salida y de entrada.

En primer lugar, se definirá v como la componente global de velocidad de desplazamiento, por tanto, se calculará como:

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \text{ o como } v = R\dot{\theta}$$

y, a su vez, la componentes cartesianas de la velocidad se definirán como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \cos(\varphi) \\ \dot{y} &= v \sin(\varphi) \end{aligned}$$

Sabiendo además que la velocidad de rotación $\dot{\varphi}$ concuerda con la variable de actuación ω , se puede montar la matriz Jacobiana del sistema del mismo que se dijo anteriormente, es decir:

$$J = \begin{bmatrix} R \cos(\varphi) & 0 \\ R \sin(\varphi) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz Jacobiana describirá la cinemática directa del sistema relacionando las variables de actuación con las derivadas de las variables generalizadas y, como se sabe que serán integrables debido a la existencia de restricciones holónomas, se podrán integrar para poder hallar los valores de posición y orientación.

Dicho esto, se puede expresar el modelo cinemático como función de entradas (variables de actuación) y salidas (variables generalizadas):

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \cos(\varphi) & 0 \\ R \sin(\varphi) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \omega \end{bmatrix} \quad (2)$$

e integrando respecto del tiempo estas matrices, se obtendrá:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \varphi_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_0^t R \dot{\theta} \cos(\varphi) dt \\ \int_0^t R \dot{\theta} \sin(\varphi) dt \\ \int_0^t \omega dt \end{bmatrix} \quad (3)$$

donde x_0 , y_0 y φ_0 serán las condiciones iniciales de posición y orientación.

2.2.1. Esquema de simulación del modelo directo obtenido

Una vez obtenido el modelo cinemático directo se implementará en una función en Matlab, la cuál servirá para modelar el comportamiento del movimiento del robot. Por tanto, el modelo cinemático directo se implementará del siguiente modo:

Listing 1: Implementación del modelo cinemático directo

```

1 %%MODELO CINEMATICO DIRECTO ROBOT MOVIL SINCRONO
2 function gener_out=MCD_movil(in)
3     R=0.4; %-> Radio de la rueda [m]
4
5     tetha_d=in(1); % Velocidad de desplazamiento
6     omega=in(2); % Velocidad de rotacion
7     phi=in(3); % Angulo del robot
8
9     % Jacobiano de velocidades
10    jac=[R*cos(phi) 0;
11         R*sin(phi) 0;
12         0 1];
13
14    % Vector de variables actuadoras de entrada
15    act=[tetha_d;
16         omega];
17
18    % Definicion de salidas
19    x_d=jac(1,:)*act;
20    y_d=jac(2,:)*act;
21    phi_d=jac(3,:)*act;
22
23    gener_out=[x_d;y_d;phi_d];
24 end

```

A continuación, se mostrará el montaje completo en Simulink que ha sido utilizado para obtener los resultados de la simulación.

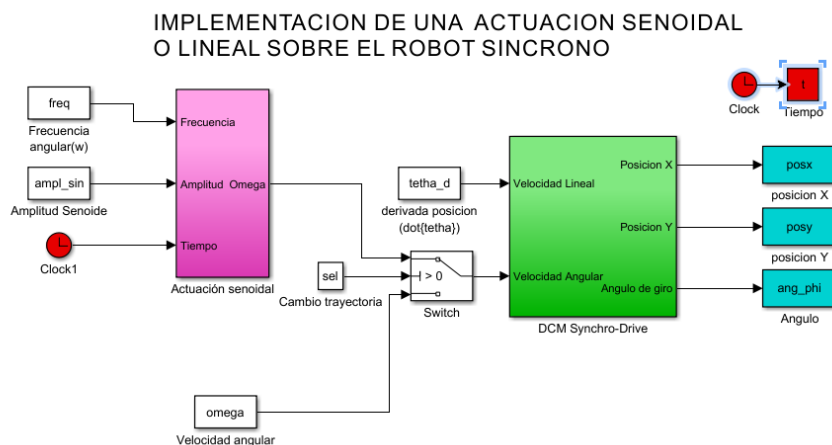
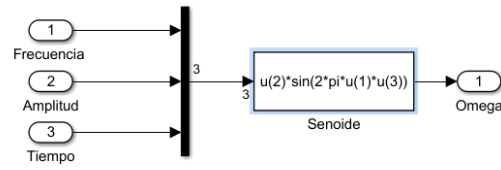
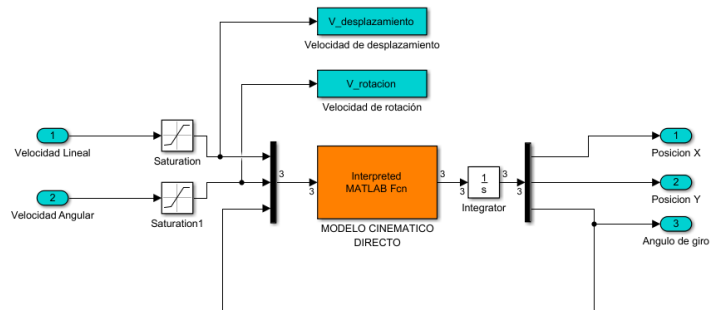


Figura 1: Esquema global

En este montaje existen dos subsistemas, los cuales se mostrarán a continuación. El primero de ellos, será el encargado de generar una actuación senoidal sobre el motor, de tal modo que siga una trayectoria de este tipo.

Figura 2: Esquema del bloque *Actuación Senoidal*

El segundo de ellos, será la implementación del modelo cinemático directo del robot en un bloque, en el cuál se realimentará la variable angular, la cual es una variable de entrada y de salida del modelo y, además de ello, se saturarán las actuaciones.

Figura 3: Esquema del bloque *DCM Synchro-Drive*

Cabe destacar cómo se saturarán las variables del modelo: la velocidad angular, se limitará a aproximadamente ± 15 grados por segundo, ya que es el ángulo máximo aproximado al que teóricamente se puede girar un volante. En cuando a la velocidad lineal, se limitará aproximadamente a 30 centímetros por segundo, que correspondería aproximadamente a 1 km/h, lo cuál se considera una velocidad suficiente para un robot móvil.

2.2.2. Experimentos realizados al modelo para su verificación

Con este código se pueden realizar varios experimentos. Para todos ellos las características comunes serán que partirán de las mismas condiciones iniciales para las variables generalizadas ($x = 0, y = 0, \varphi = 0$) y tendrán las mismas saturaciones, las cuales hemos supuesto como realistas para este tipo de robot.

■ Primer experimento

El primer experimento que se va a mostrar es el de una velocidad de desplazamiento máxima y velocidad de rotación nula. Como la simulación dura 30 segundos, el robot deberá recorrer una distancia de 9 metros:

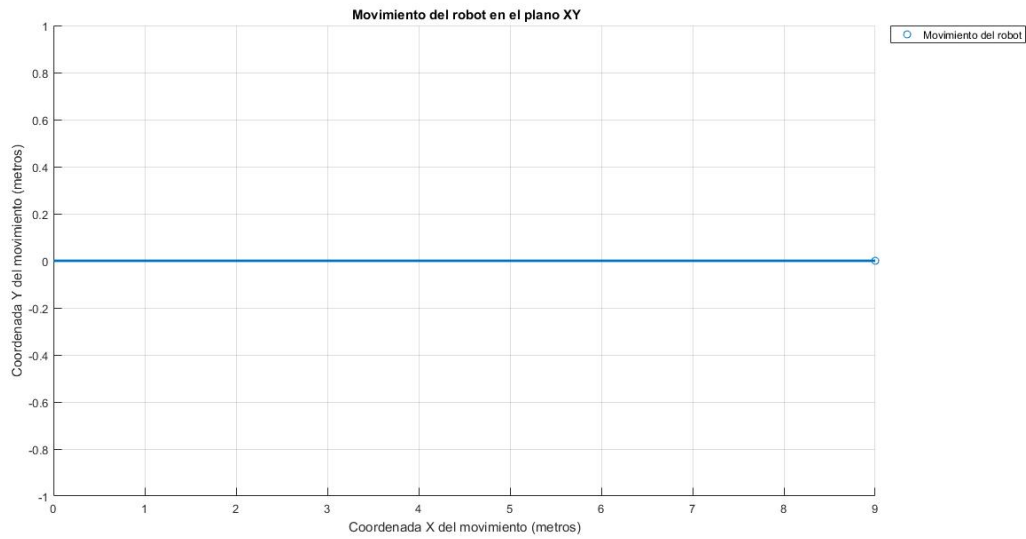


Figura 4: Movimiento en el plano con actuación de desplazamiento constante y rotativa nula

■ Segundo experimento

El siguiente experimento combinará ambas variables de actuación, estableciendo el valor máximo en ambas, por lo que el robot deberá dar vueltas en círculo. Como la velocidad de rotación máxima es de 15 grados/segundo y la simulación dura 30 segundos, el robot deberá dar 1 vuelta y 1/4 de vuelta más. En este y el siguiente experimento, al no constar únicamente de una trayectoria rectilínea, se ha aprovechado para representar, a través de flechas, el vector velocidad de desplazamiento:

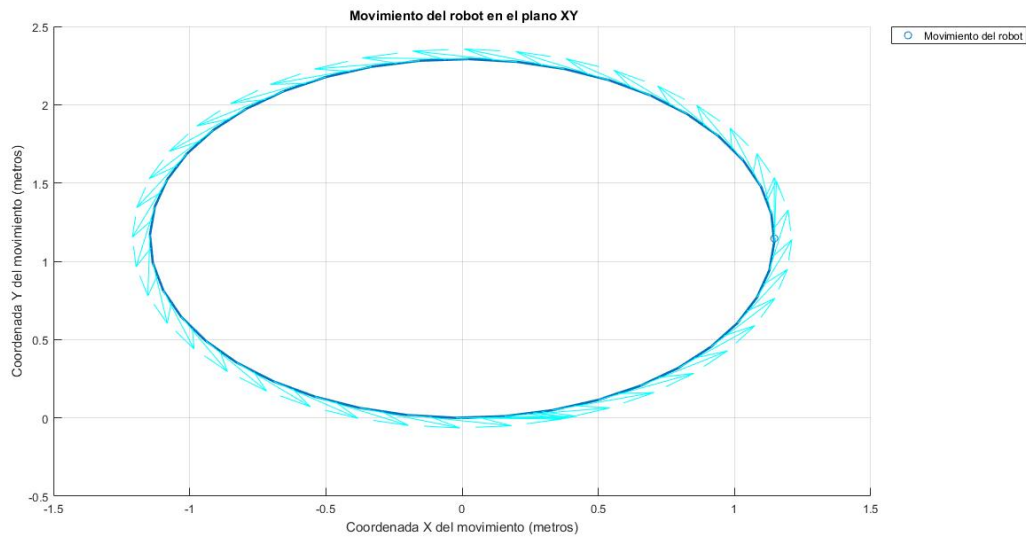


Figura 5: Movimiento en el plano con actuación de desplazamiento y rotativa constantes

■ Tercer experimento

Ahora se va a realizar el experimento correspondiente a la prueba solicitada para el trabajo donde se ha de suministrar una velocidad de desplazamiento constante y una velocidad de rotación con carácter senoidal. Para ello, se ha introducido una velocidad de desplazamiento de 0.5 radianes/segundo y una senoide de 0.05 Hz de frecuencia y 0.2 radianes/segundo de amplitud:

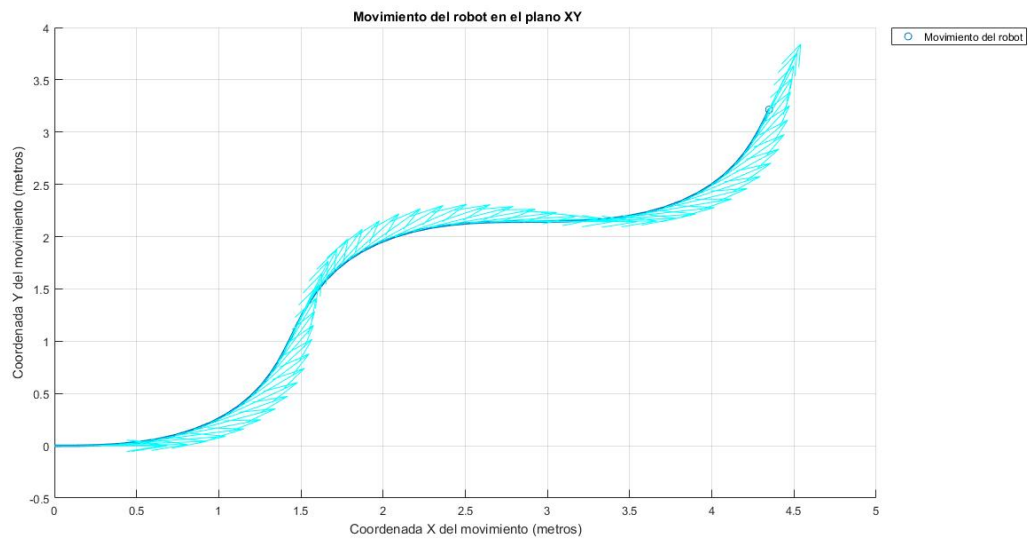


Figura 6: Movimiento en el plano con actuación rotativa senoidal

En este último experimento se puede observar que la variable de actuación ω resulta la senoide esperada y que, como resultado, se obtiene también una trayectoria senoidal, cómo se observa en la figura número 6.

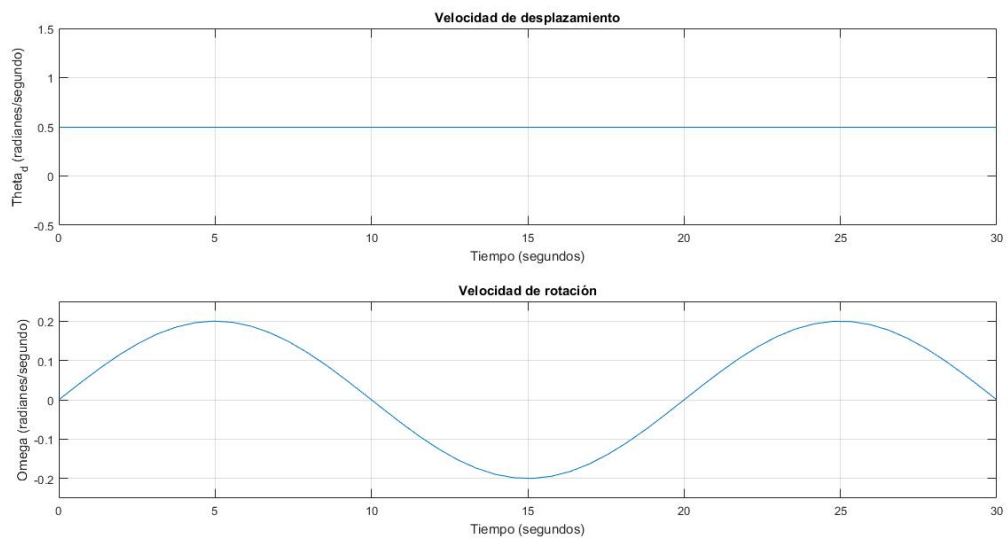


Figura 7: Variables de actuación tras saturación (arriba $\dot{\theta}$ y abajo ω)

2.3. Obtención del modelo cinemático inverso

Una vez comentado todo lo que concierne a la cinemática directa, se puede pasar a obtener el modelo cinemático inverso, el cual será de utilidad para la creación de trayectorias con las variables generalizadas y su posterior transformación a variables de actuación que harán que el robot siga dicha trayectoria.

Dicho esto, el modelo cinemático inverso se basa principalmente en la Jacobiana inversa, ya que ahora se desea relacionar las variables generalizadas como entradas con las variables de actuación como salida. Por ello únicamente hay que coger la ecuación del modelo cinemático directo y pasar el Jacobiano al otro lado, es decir, poner su inversa.

En este caso se da que el Jacobiano del modelo directo no es una matriz cuadrada, por lo que no puede tener inversa, así que habrá que realizar la pseudoinversa del mismo. Para ello, no es necesario realizar los cálculos paso por paso, ya que MATLAB posee una función que calcula la pseudoinversa por el método Moore-Penrose llamada *pinv*. Dicho esto, una vez utilizada la función y habiendo simplificado, el resultado es:

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\cos(\varphi)}{R} & \frac{\sin(\varphi)}{R} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Una vez obtenida la expresión del Jacobiano inverso, simplemente bastaría con introducirle los datos de entrada necesarios (\dot{x} , \dot{y} y $\dot{\varphi}$) para obtener las salidas esperadas ($\dot{\theta}$ y ω).

Para garantizar el funcionamiento del modelo inverso, se va a realizar el tercer apartado del proyecto, donde se pide obtener las señales de control necesarias para que el robot realice una trayectoria parabólica, la cual va a venir dada por la expresión:

$$y = -\frac{x(x-A)}{D}$$

donde, X e Y son las coordenadas cartesianas de la posición del centro del robot, A una constante que determinará el valor máximo en x que alcanzará la parábola y D otra constante que determinará el valor máximo en y que alcanzará la parábola.

2.3.1. Esquema de simulación del modelo inverso obtenido

Para explicar como se ha llevado a cabo el proceso de obtención de los resultados, se va a hacer uso del montaje en Simulink utilizado en esta parte:

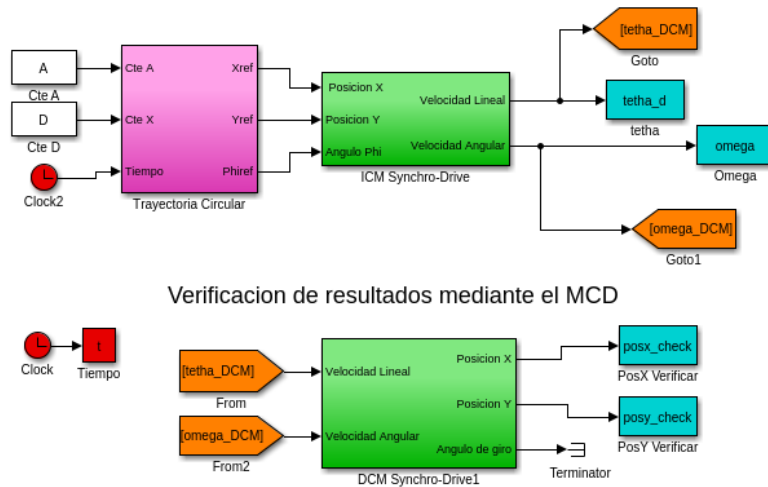


Figura 8: Esquema global

Como se pudo observar, las entradas a este bloque son las 2 constantes (A y D) de la parábola y el tiempo de simulación. Las dos primeras son utilizadas para la formulación de la parábola en sí y la tercera para la definición de X que crecerá linealmente pero a una escala 5 veces más pequeña que el tiempo de simulación.

Para trazar la trayectoria se ha implementado la siguiente función en matlab, la cuál se implementará en Simulink como de costumbre. La salidas de dicha función serán las que se ven en el esquema de Simulink mostrado anteriormente.

Listing 2: Implementación trayectoria parabolica

```

1 %%FUNCION PARA IMPLEMENTAR UNA PARABOLA
2 function [out]=tray_parab(in)
3     % Defincion de entradas
4     A=in(1);    %pto de corte final con la X
5     D=in(2);    % altura parabola
6     x=in(3);    %tiempo
7
8     %Se escala la variable X
9     x=x/5;
10    % Definicion de la variable y
11    y=-(1/D)*(x*(x-A));
12
13    % definicion de las variables de salida
14    phi_ref=atan2(y,x);
15
16    out=[x;y;phi_ref];
17 end

```

Una vez se han definido los puntos de la trayectoria que ha de seguir el robot y con qué orientación ha de hacerlo, simplemente hay que pasar dichos datos al bloque donde se encuentra el modelo cinemático inverso:

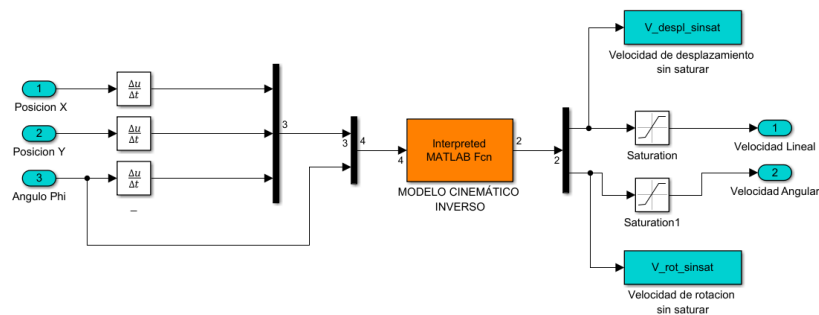


Figura 9: Bloque dónde se implementa la cinemática inversa del robot

Como se puede observar, lo primero que se debe hacer es derivar cada una de las entradas respecto al tiempo, puesto que el Jacobiano inverso, como antes lo hacía el directo, considera relaciones entre velocidades. Cabe destacar que, derivar computacionalmente no es una buena técnica, debido a que añade una componente elevada de error, sin embargo, en éste caso, dicha componente es asumible. Si en alguna otra ocasión fuese posible, sería mucho mas conveniente integrar una velocidad para conocer la posición que derivar una posición para conocer la velocidad.

Una vez hecho eso, se introducen los valores en el bloque que contiene a la función que ejecuta la cinemática inversa, cuyo código se muestra a continuación:

Listing 3: Modelo cinemático inverso del robot sincrónico

```

1  %%MODELO CINMEATICO INVERSO ROBOT MOVIL SINCRONO
2  function gener_out=MCI_movil(in)
3  R=0.4; %-> Radio de la rueda [m]
4
5  x_d=in(1);      % Velocidad cartesiana X
6  y_d=in(2);      % Velocidad cartesiana Y
7  phi_d=in(3);    % Velocidad angular phi
8  phi=in(4);      % Angulo phi
9
10 % Jacobiano inverso de velocidades
11 jac_inv=[cos(phi)/R, sin(phi)/R, 0;
12          0,          0, 1];
13
14 %Vector de parametros generalizados
15 gen=[x_d y_d phi_d]';
16
17 % Definicion de salidas
18 tetha_d=jac_inv(1,:)*gen;
19 omega=jac_inv(2,:)*gen;
20
21 gener_out=[tetha_d;omega];
22 end

```

Se observa que simplemente se realiza la multiplicación matricial para obtener las variables de actuación.

Por último, antes de volver al esquema global, se saturan los valores de estas salidas con las mismas saturaciones que se habían determinado realistas en la cinemática directa.

Para terminar, en el esquema global, se coloca de nuevo el bloque de la cinemática directa para comprobar, con las variables de actuación obtenidas con el modelo inverso, se obtiene la misma trayectoria que se ha diseñado.

2.3.2. Experimentos realizados al modelo inverso para su verificación

Con el montaje en Simulink ya creado, lo único que falta es lanzar un script que asigne valores a las incógnitas de la simulación (A y D) y represente los datos:

Se debe tener en cuenta siempre que en la posición inicial hay que determinar la orientación inicial que debe tener el robot, lo cual se podrá obtener fácilmente como $\text{atan}(\frac{A}{D})$. Esto debe ser así porque, en caso contrario, al estar el robot en reposo con φ nulo, al principio de la trayectoria el valor de velocidad de rotación saturará intentando conseguir dicha orientación y la trayectoria no será la misma porque el sistema, con dicha saturación, no será capaz de realizarla en un tiempo tan pequeño. Así, para unos valores de $A = 3$ y $D = 10$, obtenemos:

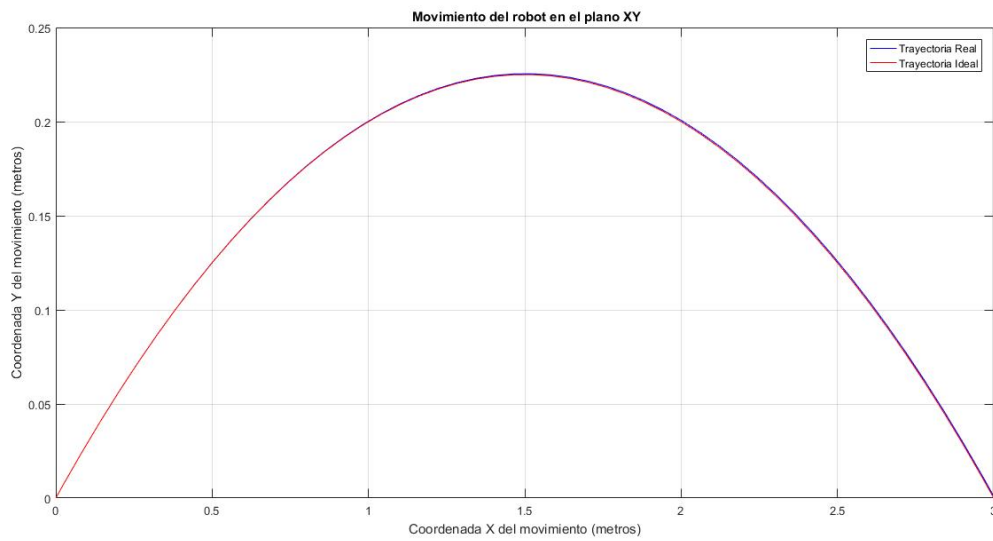


Figura 10: Comparativa entre la trayectoria pedida y la obtenida

Como se puede observar, en la gráfica comparativa anterior entre la trayectoria creada por funciones y la obtenida a partir de los valores de las variables de actuación sacadas del modelo cinemático inverso, los resultados son prácticamente iguales, por lo que se puede decir que el modelo inverso es aceptable.

Aparte, se van a mostrar las gráficas de los valores de las variables de actuación obtenidas con la cinemática inversa, así como el valor de la variable φ :

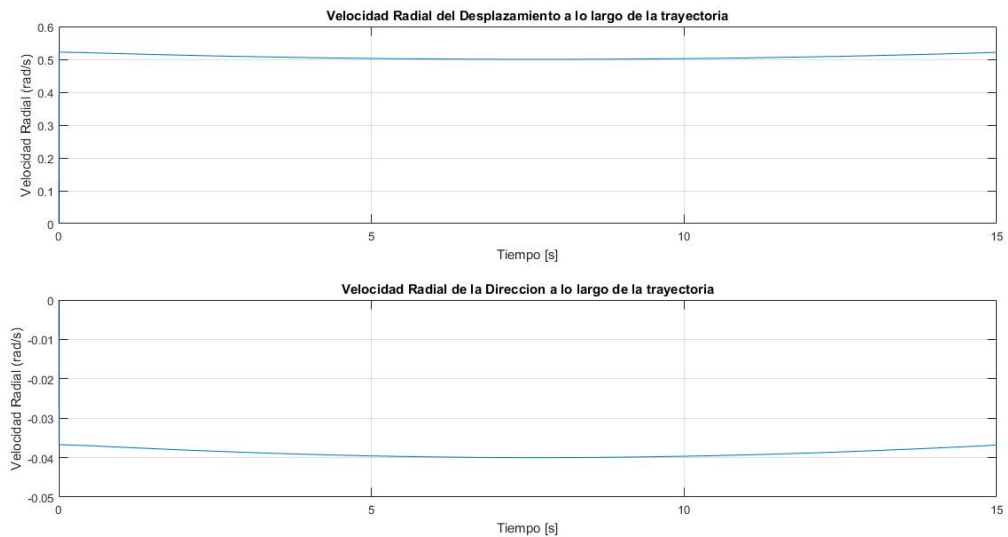


Figura 11: Valores de las variables de actuación

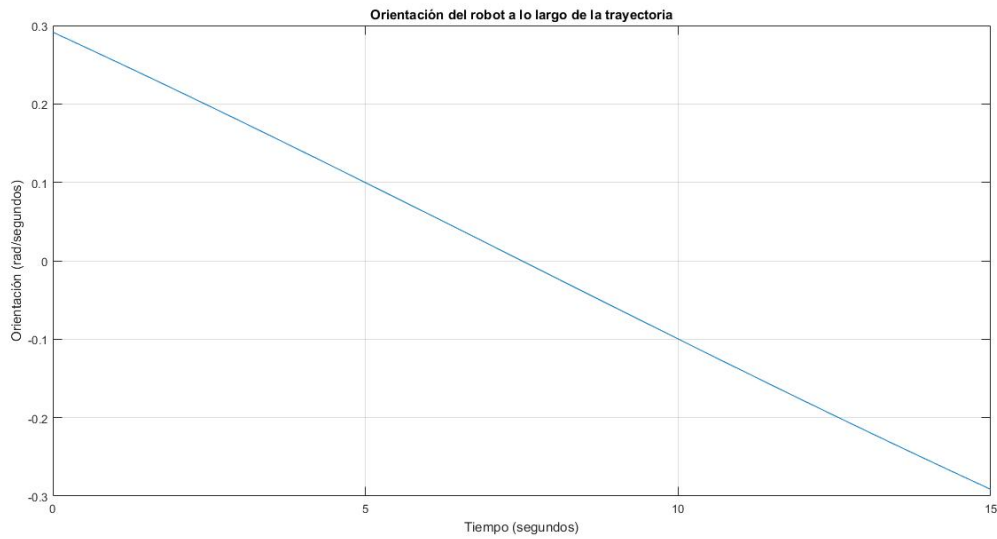


Figura 12: Valor de la orientación a lo largo de la trayectoria

Como se observa, en ambas velocidades no se produce saturación alguna, ya que están por debajo y por encima de sus respectivos valores de saturación. Además, con la gráfica de la orientación, se puede observar como justo a la mitad de la trayectoria, la misma es 0, ya que el robot se encuentra en paralelo al eje X en dicho momento.

Cabe añadir que es lo que pasaría si las variables de actuación saturasen, ya que no podrían realizar la misma trayectoria. Para ello se van a mostrar dos experimentos distintos. El primero de ellos se basa en bajar la saturación de $\dot{\theta}$ a la mitad, es decir, a ± 0.375 :

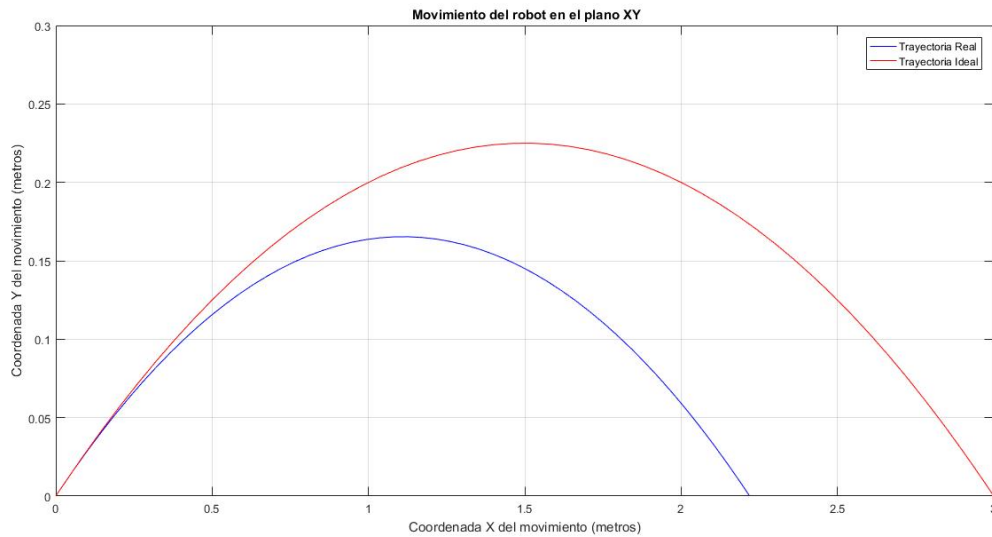


Figura 13: Comparativa de trayectorias con $\dot{\theta}$ saturada

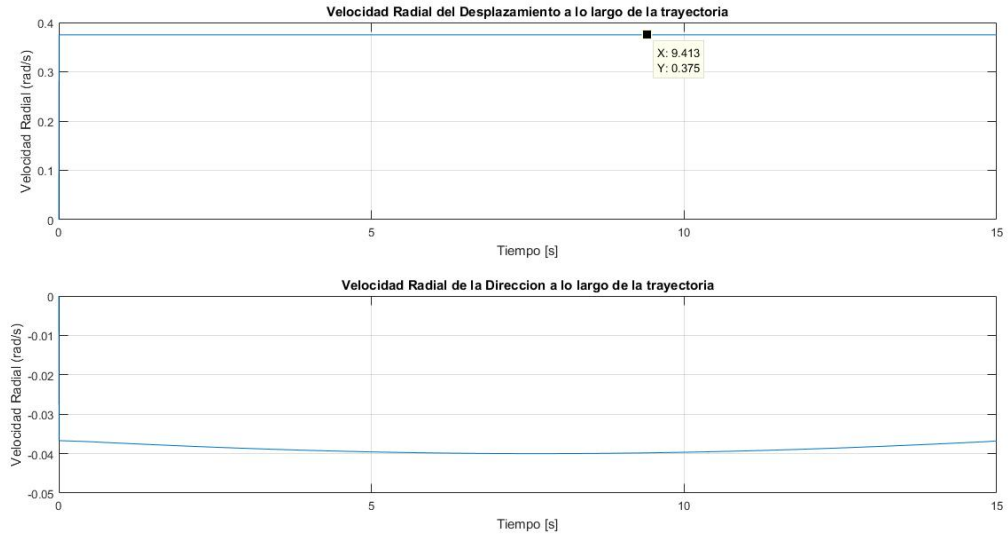


Figura 14: Valores de variables de actuación con saturación en $\dot{\theta}$

Como se puede observar, la trayectoria real que alcanza el robot se reduce tanto en X como en Y . Esto es lógico desde el punto de vista de la cinemática, puesto que al no poder alcanzar la velocidad necesaria, no llegará a ninguno de los valores objetivos en las coordenadas cartesianas. En la figura anterior se puede ver como $\dot{\theta}$ satura mientras que ω no.

Ahora se probará a saturar la velocidad de rotación, reduciendo el límite original a una décima parte, obteniendo una nueva saturación de ± 0.02618 rad/s:

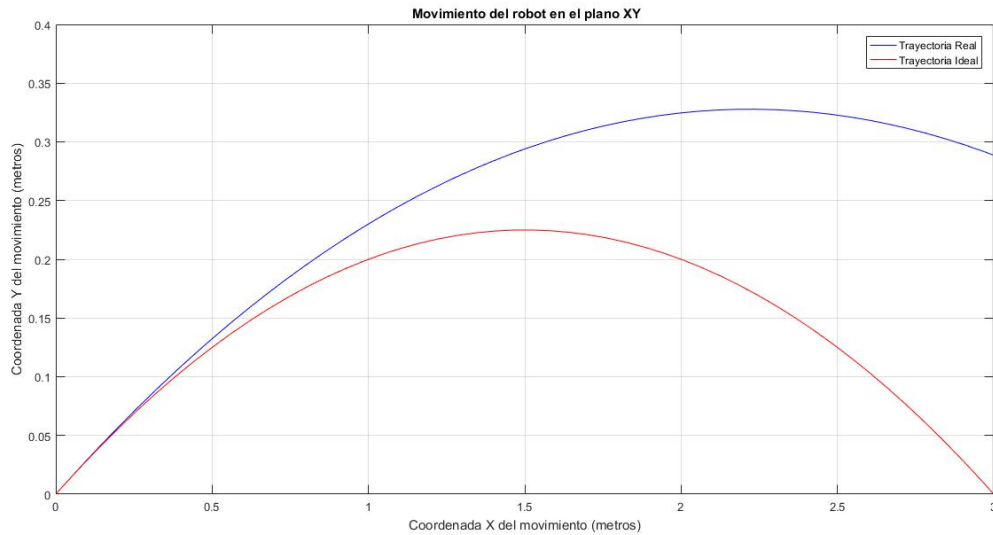


Figura 15: Comparativa de trayectorias con ω saturada

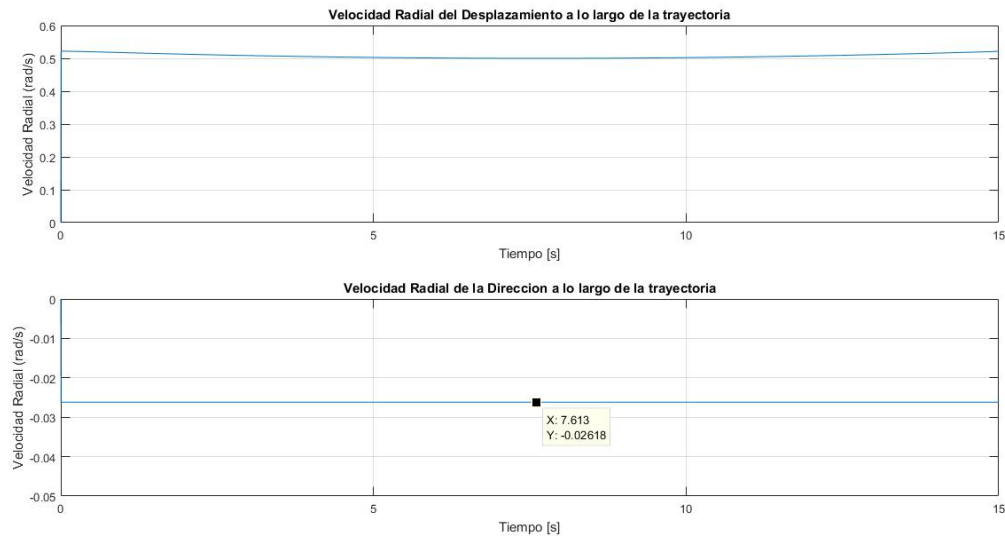


Figura 16: Valores de variables de actuación con saturación en ω

Aquí, como también era de esperar, el robot no puede seguir la trayectoria especificada, aunque esta vez lo hace de forma distinta. Esto se debe a que tiene la velocidad de desplazamiento necesaria para alcanzar los puntos objetivos pero no la capacidad de rotar lo suficientemente rápido como para seguirlos y por ello, se sobrepasa de sus objetivos. En la figura 17 se observa la saturación en ω .

El efecto que se produce al haber saturaciones en ambas actuaciones es una combinación de ambos resultados, es decir, el "no poder girar a tiempo" el "no avanzar lo suficientemente rápido":

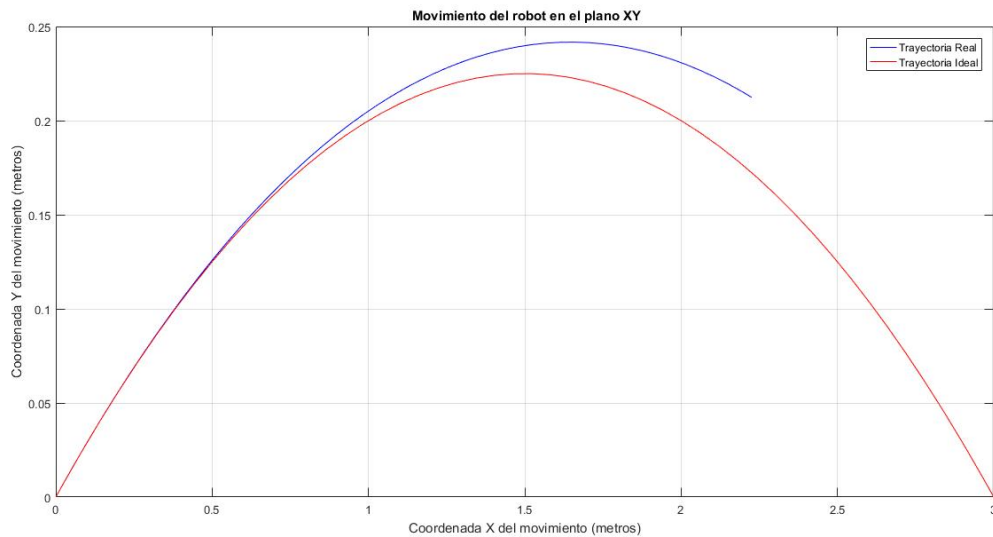


Figura 17: Comparativa de trayectorias con ω y $\dot{\theta}$ saturadas

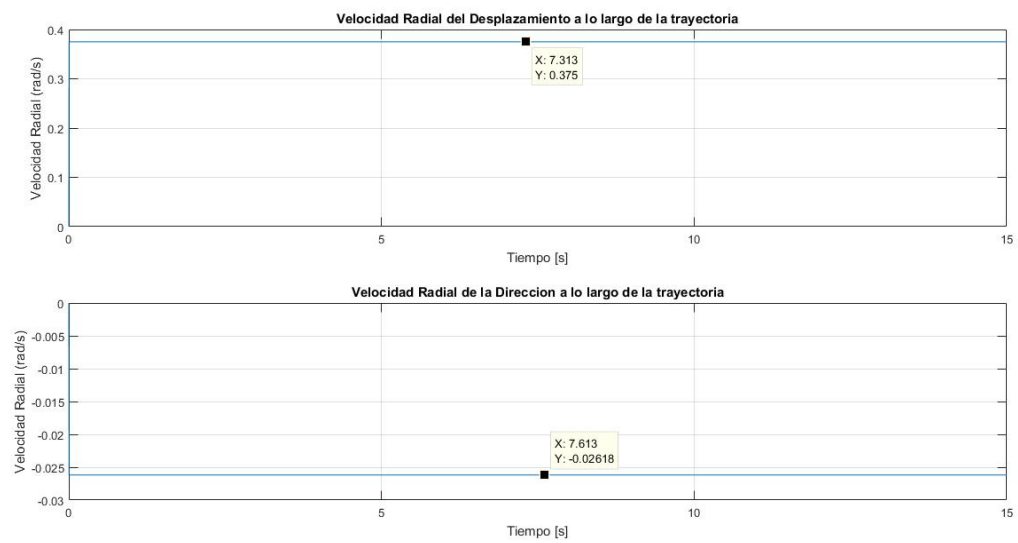


Figura 18: Valores de variables de actuación con saturación en ω y $\dot{\theta}$

3. Control dinámico

En lo que a la implementación de un algoritmo de control dinámico sobre el robot concierne, en primer lugar será necesario completar el modelo añadiendo la dinámica de los actuadores.

Los actuadores del robot serán 3 motores de corriente continua, cuya función de transferencia que relaciona la entrada de tensión del motor con la salida en velocidad del mismo se define del siguiente modo:

$$G(s) = \frac{v(s)}{u(s)} = \frac{K}{\tau s + 1} \quad (5)$$

Será necesario definir el valor de la ganancia de la función de transferencia y la constante de tiempo, los cuales se obtendrán experimentalmente y unificarán toda la dinámica del motor, es decir, momento de inercia del motor, coeficiente de fricción viscosa, constante de fuerza contra-electromotriz, etcétera.

Debido a la falta de tiempo no se ha llegado a implementar dicha dinámica en los motores, lo cual no hace que lo siguiente sea inválido, si no que habría que ajustar los controladores de otra forma.

3.1. Implementación de diversos algoritmos de control

3.1.1. Control a un punto

En este apartado se va a realizar el control de movimiento a un punto, interesando únicamente que el robot consiga alcanzar dicho objetivo, sin importar orientación y sin restricciones temporales.

Para comenzar se hablará de la estrategia de control, la cual se basa en la teoría dada en clase con el uso de la ley de control proporcional:

$$v^* = K_v \sqrt{((x^* - x)^2 + (y^* - y)^2)} \quad (6)$$

$$\omega = K_h(\varphi^* - \varphi) \quad (7)$$

donde v es la velocidad lineal de desplazamiento en control, K_v la constante de proporción que se deberá ajustar, (x^*, y^*) el punto objetivo, (x, y) el punto actual, ω el valor de velocidad angular de orientación en control, K_h la constante de proporción para la velocidad de rotación que deberá ser siempre mayor que 1, φ^* el ángulo objetivo en cada momento de la trayectoria para llegar al punto objetivo que se calcula como $\varphi^* = \text{atan}(\frac{y^* - y}{x^* - x})$ y φ el ángulo de rotación actual.

Dicha ley de control proporcional se ha implementado en una función de MATLAB a la que se le introducen las referencias de posición así como la realimentación de posiciones y orientación actuales, y se le saca las velocidades de desplazamiento y rotación que han de ser aplicadas al robot.

Para la comprobación de este controlador se ha realizado un script de pruebas donde se pueden introducir los valores de (x^*, y^*) y decidir si el robot, en la posición inicial que parte de $(0,0)$, va a estar orientado hacia el punto objetivo o no, en cuyo caso la variable φ valdrá también 0.

Se mostrarán entonces, a continuación, los resultados obtenidos con la introducción de distintos puntos objetivos:

■ Punto objetivo (0,5) sin preorientación

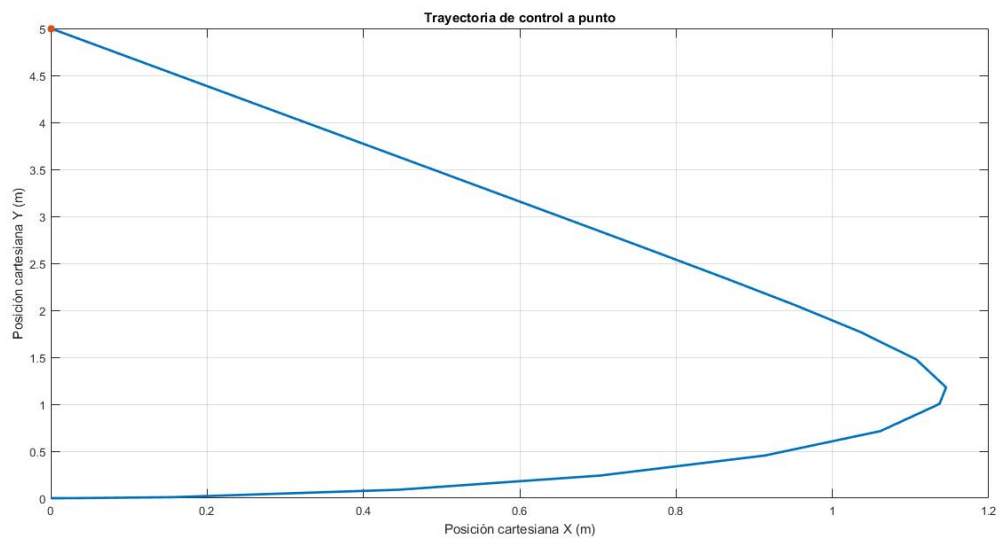


Figura 19: Trayectoria realizada en control de un punto

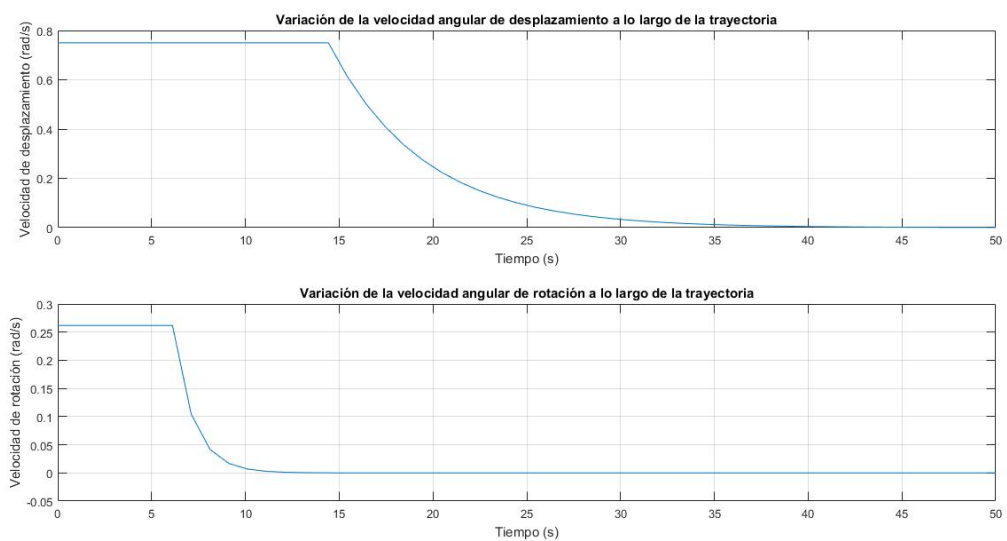


Figura 20: Velocidades a lo largo del tiempo de la trayectoria (arriba $\dot{\theta}$ y abajo ω)

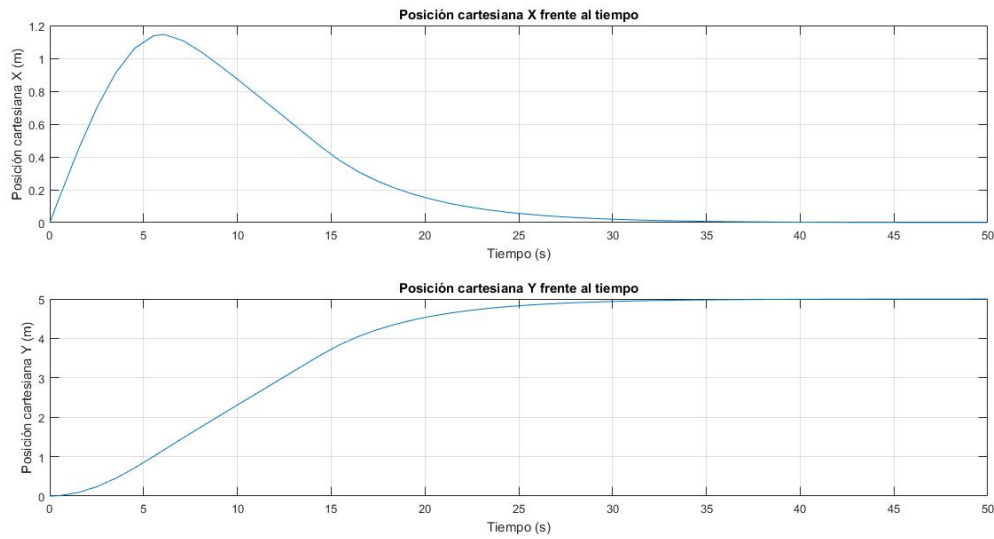


Figura 21: Posiciones del robot a lo largo de la trayectoria respecto al tiempo

Como se puede observar, al no encontrarse el robot orientado hacia el punto objetivo en la posición inicial, para llegar al destino deberá realizar un giro aproximadamente 180 grados.

Se puede observar también como al principio no es capaz de girar rápidamente hacia el objetivo, y esto se debe a la saturación que se ha establecido en la misma pues, como se muestra en la gráfica de velocidades, los primeros 6 segundos, se encuentra girando al máximo de velocidad. Esto se encuentra también en la gráfica de la posición X frente al tiempo, donde en el segundo 6 el robot empieza a volver al valor de x^* solicitado una vez el robot ya ha conseguido orientarse y no hace falta que le aplique la máxima velocidad de rotación.

También se puede concluir que el robot se queda en el punto objetivo una vez alcanzado puesto que en las gráficas se puede observar que llega a éste antes de que termine la simulación.

■ Punto objetivo (0,5) con preorientación

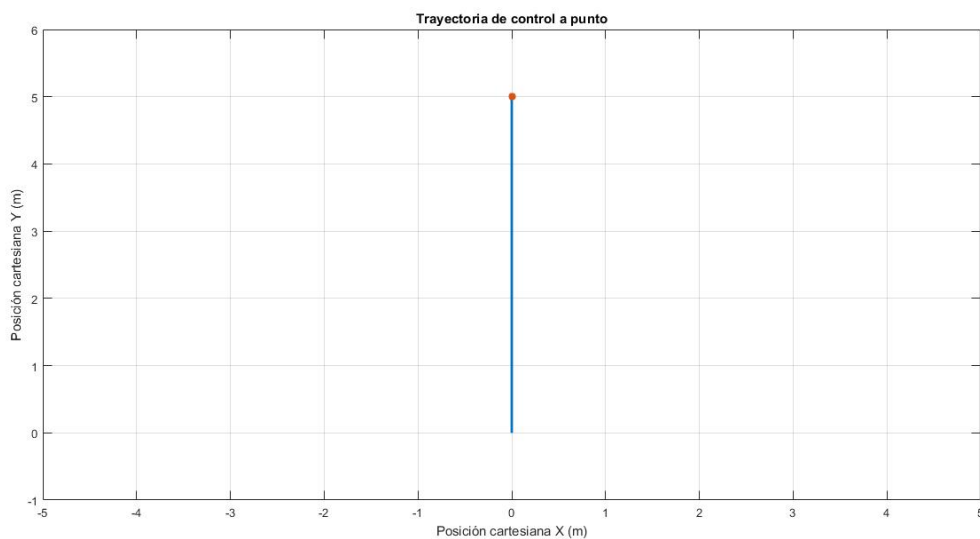


Figura 22: Trayectoria realizada en control de un punto

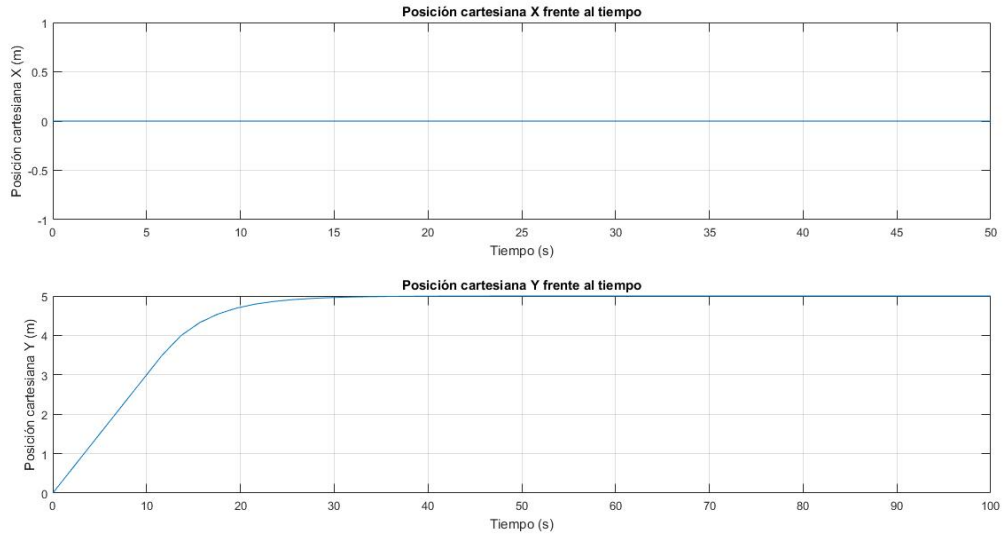


Figura 23: Posiciones del robot a lo largo de la trayectoria respecto al tiempo

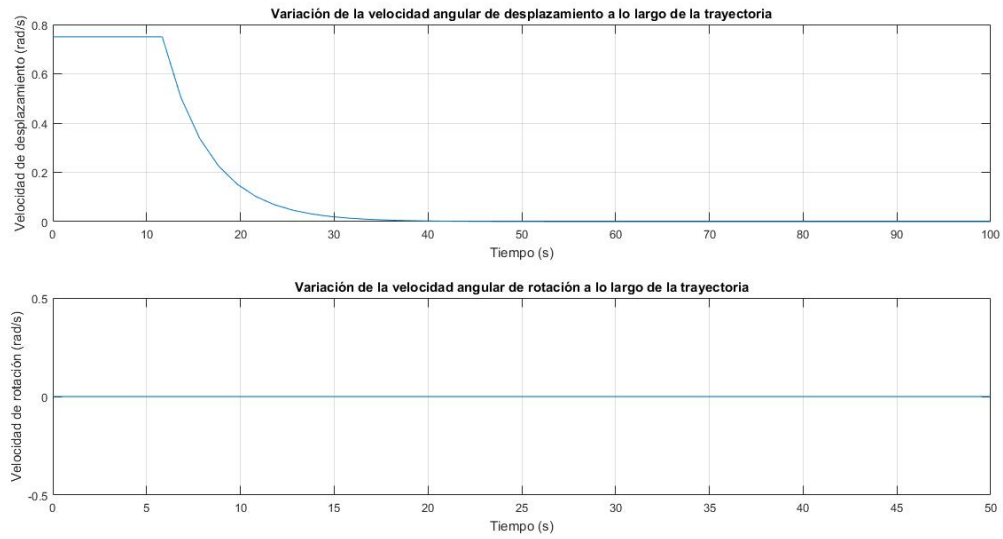


Figura 24: Velocidades a lo largo del tiempo de la trayectoria (arriba $\dot{\theta}$ y abajo ω)

Este caso es igual que el anterior pero habiendo realizado preorientación en la posición inicial hacia el punto objetivo. Es por esto que el robot únicamente deberá seguir una línea recta, puesto que ya se encuentra orientado y únicamente hará falta que actúe la variable de velocidad de desplazamiento $\dot{\theta}$.

Se pueden realizar más experimentos pero éstos no dan más información, puesto lo único que hay que tener en cuenta al darle dicho punto es que se ha dejado un tiempo de simulación suficiente para que el robot pueda llegar al objetivo y que con las velocidades máximas implementadas es capaz de hacerlo en dicho tiempo.

3.1.2. Control a una línea

En este apartado se va a estudiar el control de seguimiento de una línea por parte del robot. Para ello debemos conocer en primer lugar la recta que se desea seguir, la cual vendrá descrita como $ax + by + c = 0$. Utilizando entonces la ley de control proporcional para el ángulo de orientación, se deberá implementar el control descrito a continuación:

$$\omega = -K_d d + K_h(\varphi^* - \varphi) \quad (8)$$

donde K_d es la constante de proporción para el control de la distancia a la que se encuentra el robot de la línea a seguir, K_h la constante de proporción para el control de la orientación respecto a la línea, φ^* y φ los ángulos de orientación de referencia, calculada como $\varphi^* = \text{atan}(\frac{-a}{b})$, y actual, y d la distancia del robot a la línea definida como $d = \frac{(a,b,c) \cdot (x,y,1)}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Como se puede apreciar en este tipo de control no se controla la velocidad de desplazamiento pues no es necesario, por lo que se le asigna un valor constante de 0.5 rad/s.

Una vez descrito el funcionamiento del control, implementado en una función de MATLAB donde se han puesto las restricciones de que las líneas siempre avanzarán en X positivo y que no podrán ser verticales para facilitar la implementación del mismo.

Una vez tenidas en cuenta dichas restricciones, se puede pasar a realizar experimentos que determinen la fiabilidad del control:

- Recta a seguir con A=2, B=5 y C=3

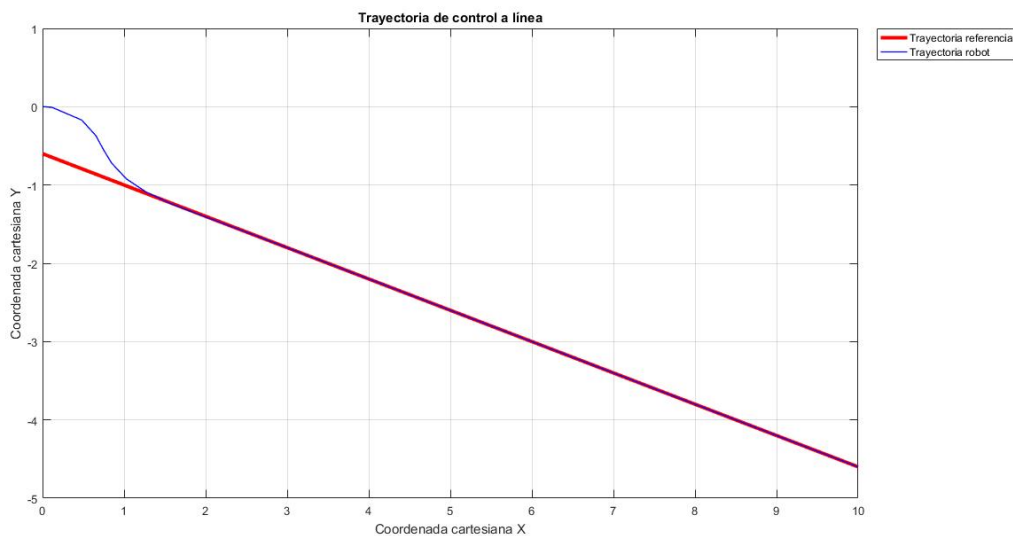


Figura 25: Trayectoria realizada en control de seguimiento de línea

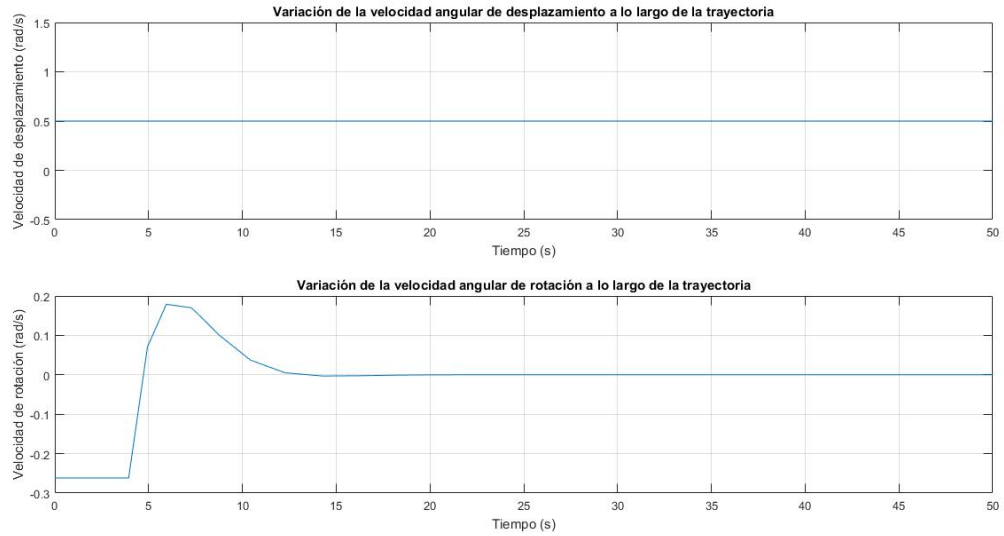


Figura 26: Velocidades de actuación a lo largo del tiempo de la trayectoria (arriba $\dot{\theta}$ y abajo ω)

Se puede observar como el robot se dirige hacia la recta de referencia de la forma más rápida que es capaz con las saturaciones pertinentes. Se puede comprobar esto también observando las gráficas de las velocidades de actuación, ya que la velocidad de rotación comienza saturada y a los 4 segundos cambia de signo para poder comenzar el seguimiento de la recta de forma suave. El robot no comienza a seguir la trayectoria por el principio de la misma debido a que el punto de ésta que ha de seguir va cambiando a lo largo de la simulación.

■ Recta a seguir con $A=0$, $B=1$ y $C=-2$

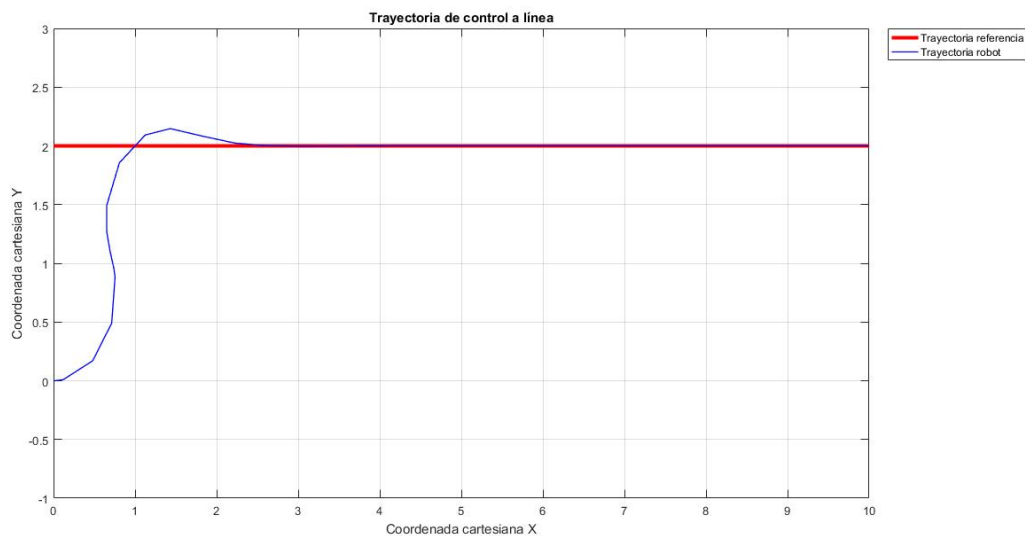


Figura 27: Trayectoria realizada en control de seguimiento de línea

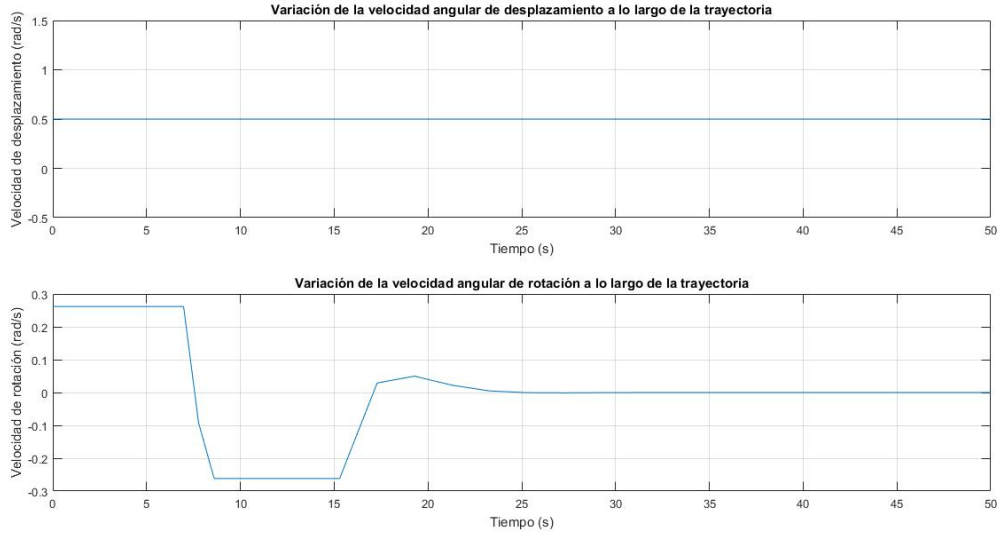


Figura 28: Velocidades de actuación a lo largo del tiempo de la trayectoria (arriba $\dot{\theta}$ y abajo ω)

En este caso se ha optado por hacer el experimento con una línea horizontal. Como se observa el resultado es muy parecido al del experimento anterior, aunque en este caso una vez alcanzada la recta el robot sobrepasa la misma y debe volver a ella. Esto se debe a que el robot llega a dicha recta de referencia con una orientación de casi 90 grados con respecto a la que tiene la trayectoria de 0 grados y, como las variables de actuación se encuentran saturadas, el robot intenta obtener esa orientación pero tarda más de lo debido.

3.1.3. Control a una trayectoria

En este apartado se va a realizar el control de una trayectoria, que, a grandes rasgos, es muy semejante al control de un punto, pues se puede interpretar como una sucesión de puntos en el tiempo.

En este caso se puede indicar también la distancia d^* a la que se desea que el robot realice el seguimiento de la trayectoria, es decir, que la realice igual pero de forma paralela. Para todo esto se necesita implementar la ley de control proporcional más integral para la velocidad y la ley proporcional para la orientación.

De esta forma, primero se calcula el error en posición como

$$e = \sqrt{(x^* - x)^2 + (y^* - y)^2} - d^*, \quad (9)$$

y, acto seguido, se realiza el control proporcional e integral para la velocidad de desplazamiento tal que

$$v^* = K_v e + K_i \int e dt \quad (10)$$

Realizado el control de la velocidad de desplazamiento, se puede controlar la orientación exactamente de la misma forma que en el control a un punto:

$$\omega = K_h(\varphi^* - \varphi), \quad (11)$$

con $\varphi^* = \text{atan}(\frac{y^* - y}{x^* - x})$.

Una vez vista la teoría que compone al control del seguimiento de una trayectoria se va a proceder a su implementación, para lo cual se ha optado por realizarla en tiempo discreto, necesitando variaciones en el esquema de simulación como el muestreo de señales y tiempo para el trabajo en la misma, así como cambios en el código de control como la implementación del efecto integral calculado como el área que abarca la gráfica del error en un período de muestreo. Tanto esquema como códigos pueden ser visualizados en el apartado de anexos.

Una vez implementado todo, se va a comprobar el funcionamiento del control con la realización de dos trayectorias distintas. La primera de ellas se basa en una función a trozos compuesta de 4 tramos correspondientes a rectas de diferente pendiente; y la segunda consiste en la creación de una trayectoria a través de un interpolador con spline dados 3 puntos a seguir. A continuación se mostrarán los resultados obtenidos para cada experimento:

■ Trayectoria lineal

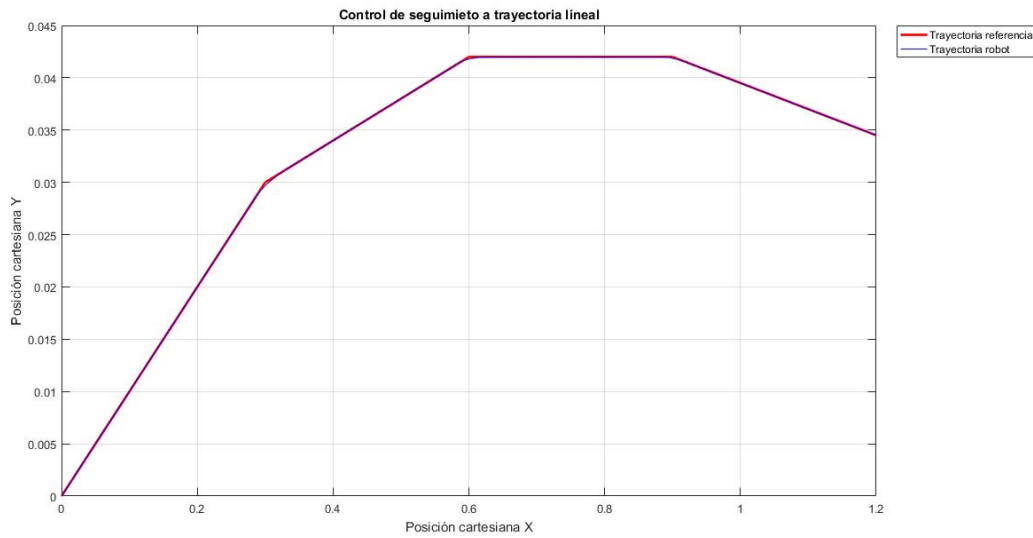


Figura 29: Trayectoria realizada en control de seguimiento de trayectoria lineal

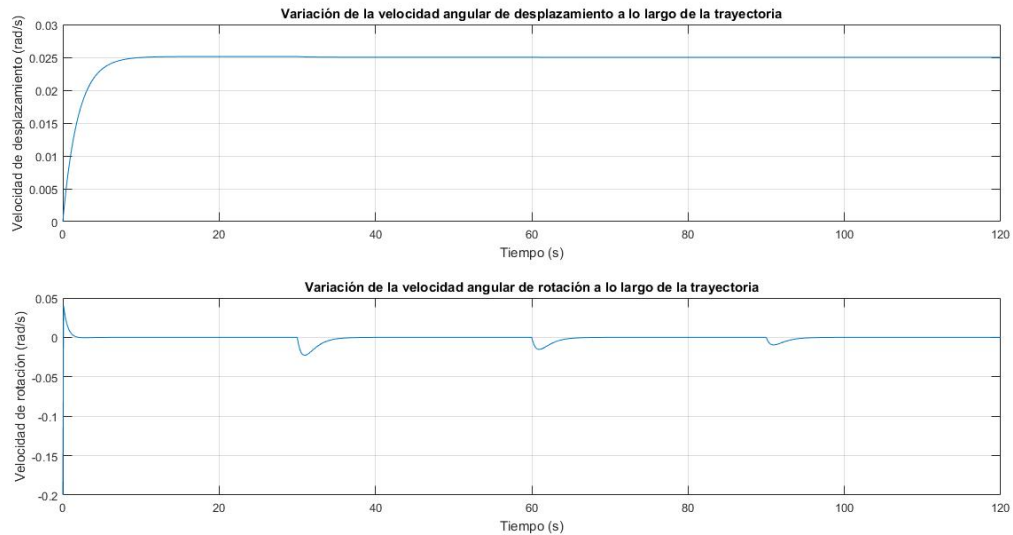


Figura 30: Velocidades de actuación a lo largo del tiempo de la trayectoria (arriba $\dot{\theta}$ y abajo ω)

Como se puede observar, en este caso se ha decidido que el robot siga la trayectoria sin separación alguna, al igual que se puede comprobar que se ha realizado el seguimiento de forma exacta, a excepción de los puntos de cambio de pendiente, donde el robot ha realizado un giro más suave y continuo.

Observando la gráfica de velocidades se puede concluir que el robot ha conseguido realizar dicho seguimiento a una velocidad de desplazamiento constante y, centrándose en la gráfica de ω se pueden observar los movimientos debidos al cambio de pendiente, cada cual más pequeño debido a que el cambio de pendiente es menor a cada cambio de recta.

■ Trayectoria interpolada

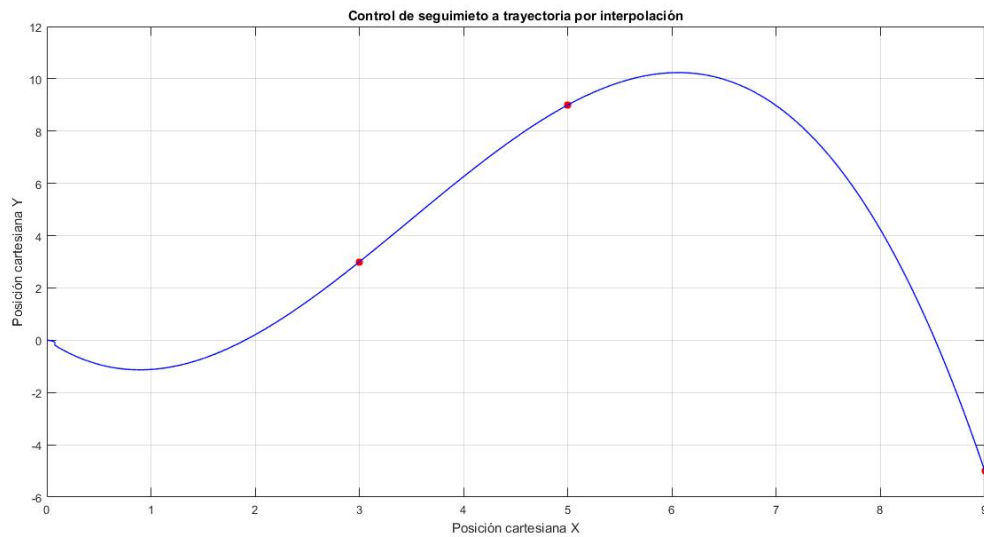


Figura 31: Trayectoria realizada en control de seguimiento de trayectoria interpolada

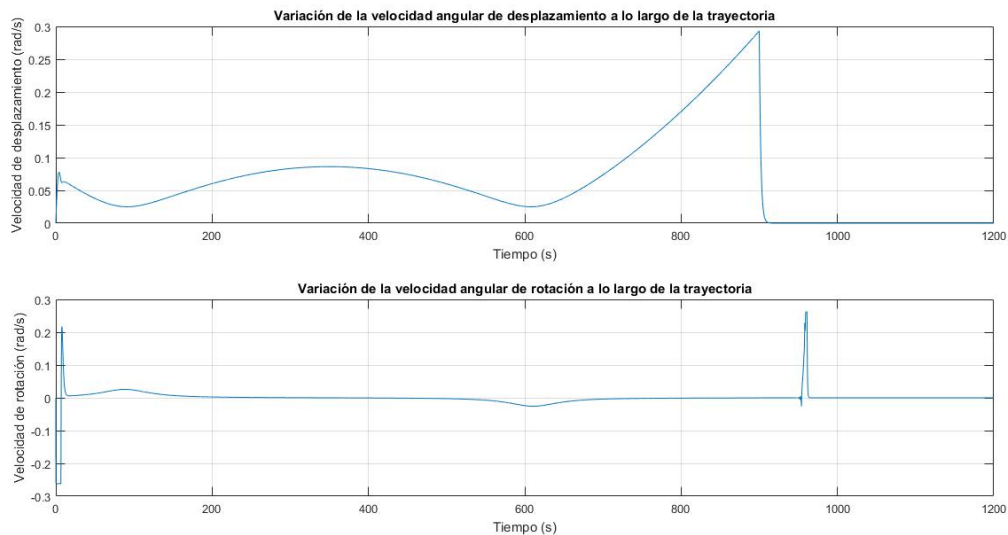


Figura 32: Velocidades de actuación a lo largo del tiempo de la trayectoria (arriba $\dot{\theta}$ y abajo ω)

En este experimento se puede observar como el robot es capaz de seguir la trayectoria generada a través de la interpolación con spline de 3 puntos.

Se debe mencionar que a la hora de realizar experimentos con esta herramienta se deben establecer los puntos con valores de X crecientes, ya que en el mismo script se ha definido dicha variable como

una fracción del tiempo de simulación, por lo que no podrá volver hacia atrás.

Si se observa la gráfica de velocidades se puede ver como, en el momento en el que el robot llega al último punto dado para la interpolación, se detiene completamente, tanto en desplazamiento como en rotación.

Se debe aclarar también que si se desea crear una trayectoria más larga puede suceder que en el tiempo de simulación estipulado no sea capaz de recorrerla, por lo que habría que aumentar el mismo. También se ha de tener en cuenta, junto al tiempo de simulación, que el robot podrá saturar y así no ser capaz de llegar a los puntos.

3.1.4. Control a una postura

En este apartado se va a realizar el control a una postura determinada, para el cual se va a necesitar tanto posición como orientación objetivos que se desean alcanzar.

Además, para este tipo de control se necesitará realizar un cambio de variables, de modo que $\rho = \sqrt{(x^* - x)^2 + (y^* - y)^2}$, que será el error en posición; $\alpha = \text{atan2}(\frac{y^* - y}{x^* - x}) - \varphi$, que será el error cometido desde la orientación actual hasta la orientación que debería poseer para realizar la trayectoria; y $\beta = -\varphi - \alpha + \varphi^*$, que será el error hasta la orientación objetivo.

Una vez realizados dichos cambios de variable se puede pasar al control, donde se aplicará un control proporcional para la velocidad de desplazamiento y de rotación, tal que, respectivamente:

$$\dot{\theta} = K_v \rho / R \quad (12)$$

$$\omega = K_\alpha \alpha + K_\beta \beta, \quad (13)$$

donde R es el radio de las ruedas del robot y K_α junto a K_β las constantes de proporción que deberán ser ajustadas para la orientación.

A la hora de dicho ajuste se debe tener en cuenta que para que el control sea estable se necesita que se cumplan las condiciones siguientes:

$$K_v > 0, K_\beta < 0, K_\alpha - K_v > 0 \quad (14)$$

Es por esto que los valores elegidos para dichas constantes han sido $K_v = 0,5$, $K_\beta = -1$ y $K_\alpha = 2$.

Una vez comentado el proceso de diseño de este control se puede comenzar a realizar experimentos. En este caso se han realizado dos experimentos cuyos objetivos son diferentes tanto en posición como en orientación:

- Control de postura con $x^* = 10$, $y^* = -10$ y $\varphi^* = -\pi$

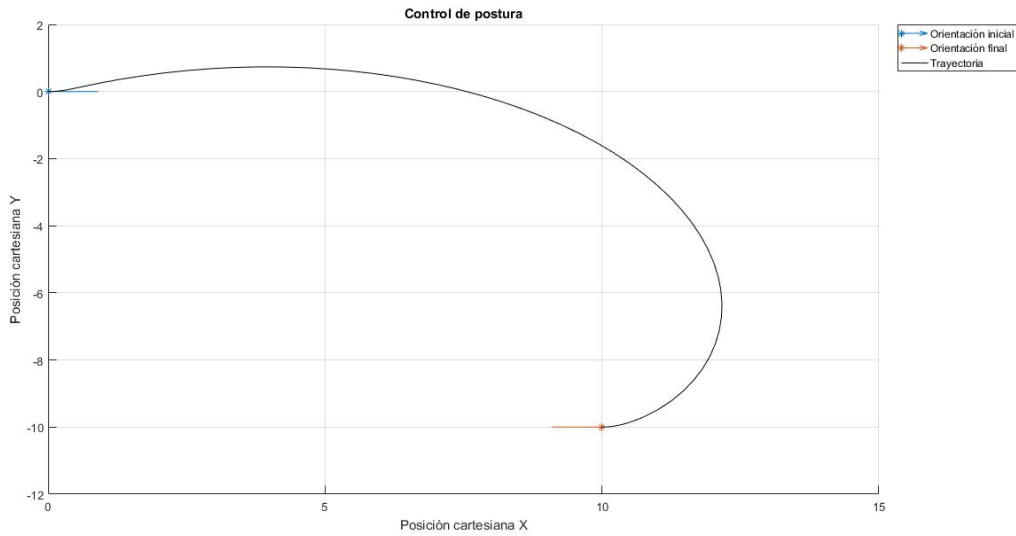


Figura 33: Trayectoria realizada en control de postura

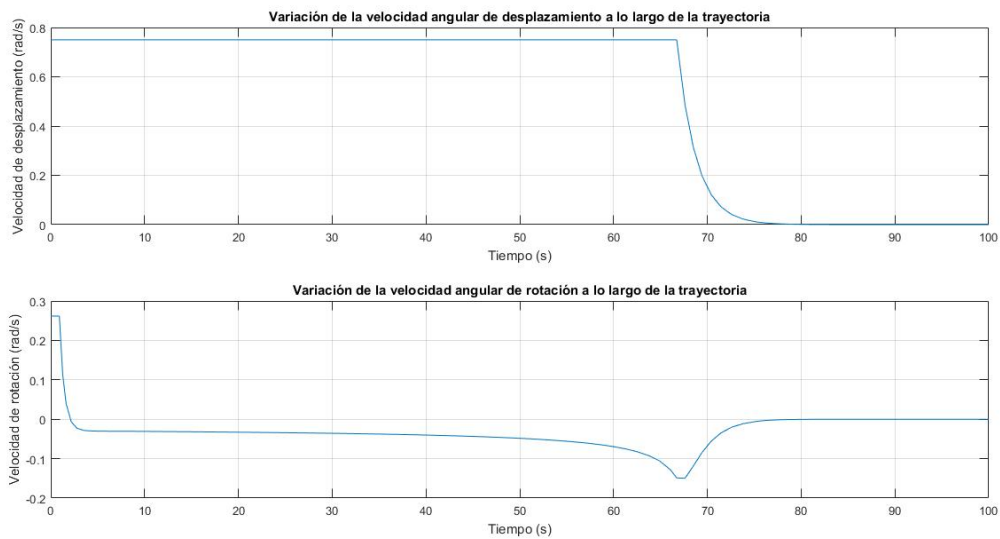


Figura 34: Velocidades de actuación a lo largo del tiempo de la trayectoria (arriba $\dot{\theta}$ y abajo ω)

Como se puede observar, el robot consigue llegar a la orientación pedida en la posición pedida. Para realizar esto, se observa que el robot realiza un giro extraño, lo cual se debe a que el control de velocidad de orientación se realiza en función a la distancia hasta el punto objetivo, mientras que el control de velocidad de desplazamiento se realiza sin tener en cuenta el control de orientación. Así pues se observa una saturación en la velocidad de desplazamiento durante la mayor parte del recorrido y a su vez un decremento antes de llegar al mismo, lo que corrobora dicho funcionamiento.

- Control de postura con $x^* = 5$, $y^* = 10$ y $\varphi^* = \pi/2$

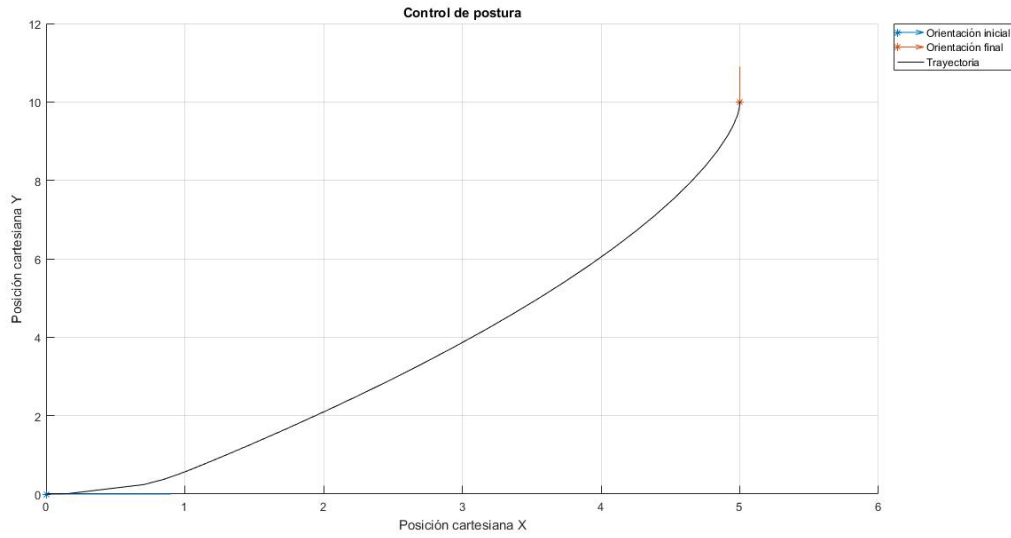


Figura 35: Trayectoria realizada en control de postura

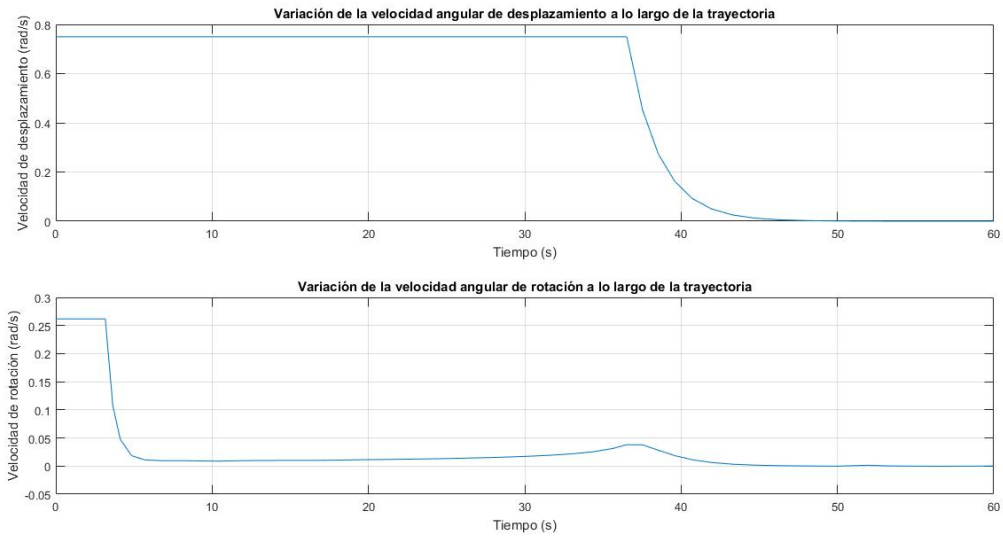


Figura 36: Velocidades de actuación a lo largo del tiempo de la trayectoria (arriba $\dot{\theta}$ y abajo ω)

Este experimento resulta más fácil para el robot puesto que la rotación que debe realizar no es tan grande. Se vuelve a observar como el robot consigue llegar a la orientación pedida, aunque durante el resto de la simulación pueda oscilar un poco, siempre buscará estar centrado en dicha orientación.

3.2. Ley de control *Persecución pura*

Por último, se implementará una ley de control común en robótica móvil, la cual se define como persecución pura o *Pure Pursuit*. Con esta técnica se busca el seguimiento de un camino explícito, el cual se encuentra determinado por un generador de trayectorias.

Esta ley de control se ha optado por implementarla, en lugar de buscando la mínima distancia entre la recta de la trayectoria y la posición del robot, realizando un control de postura mezclado con un seguimiento de trayectoria.

Este control de la postura del robot tendrá acentuada la ganancia que minimiza el ángulo que forma la recta que une la posición actual del robot con el punto que se obtiene del generador de trayectorias.

La figura que se muestra a continuación contiene la misma notación que el control a una postura, donde el ángulo minimizado será α :

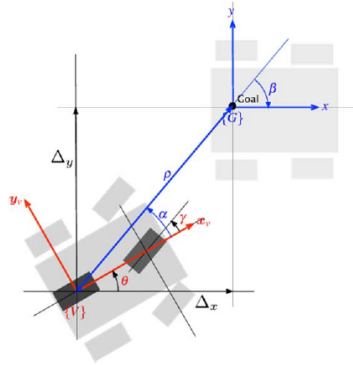


Figura 37: Representación del ángulo y la distancia calculados

Por tanto, matemáticamente se calculará como:

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{(y^* - y)^2 + (x^* - x)^2} \\ \alpha &= \text{atan}\left(\frac{y^* - y}{x^* - x}\right) - \varphi \\ \beta &= -\varphi - \alpha\end{aligned}$$

Las leyes de control que se implementarán a los motores del robot son:

$$\begin{aligned}v &= \frac{K_\rho \rho}{R} \\ \omega &= K_\alpha \alpha + K_\beta \beta\end{aligned}$$

Para definir los parámetros de los controladores, será necesario estipular un criterio de signos que asegure la estabilidad del sistema en bucle cerrado. Se debe cumplir que: $K_\rho > 0, K_\beta < 0$ y que $(K_\alpha - K_\rho) > 0$.

Por lo tanto, los parámetros que se implementarán en los controladores son:

$$\begin{aligned}K_\rho &= 2,2 \\ K_\beta &= -0,1 \\ K_\alpha &= K_\beta + 5,8\end{aligned}$$

Como se puede observar, se ha acentuado el valor de la ganancia asociada al ángulo α .

Para verificar el correcto funcionamiento de este controlador, se le pedirá que siga la siguiente senoide:

$$\begin{aligned}x &= At = 0,2t \\ y &= B \sin(\omega t) = 1,2 * \sin(0,2t)\end{aligned}$$

Con los valores asignados a los controladores y trayectoria propuesta se presentan los siguientes resultados de simulación.

■ Resultados Persecución de Trayectoria::

$$A = 0,2 \quad B = 1,2 \quad w = 0,2$$

En primer lugar, se muestra la superposición de la referencia dinámica y de la posición del robot, además de los errores asociados a cada posición cartesiana.

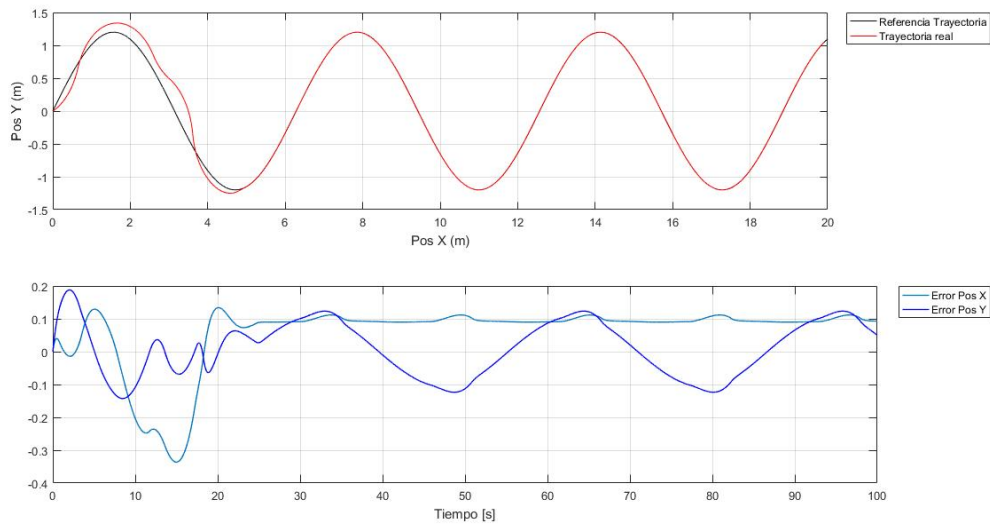


Figura 38: Referencia Vs Seguimiento

Como se observa, en el inicio de la trayectoria, se presenta una variación en mayor frecuencia en la postura del robot. Al estabilizar la velocidad del seguimiento de la trayectoria, el robot continúa la técnica de seguimiento de persecución pura de la trayectoria de forma estable.

Sobre el error, vemos que tenemos un error mantenido en la posición X , lo que nos indica un retraso inevitable, pero lo suficientemente pequeño; y por el lado del error en Y , se observa un error oscilante, que indica que no se están alcanzando los valores de la referencia con total exactitud. El valor de estos errores puede ser raro a vista de la gráfica superpuesta de trayectoria de referencia frente a real, pero hay que tener en cuenta que el que se ven superpuestas no indica que estén realizándolas al mismo tiempo, ya que sabiendo que existe un retardo temporal, es correcto un error en X cuasi-constante y un error en Y en forma cuasi-senoidal.

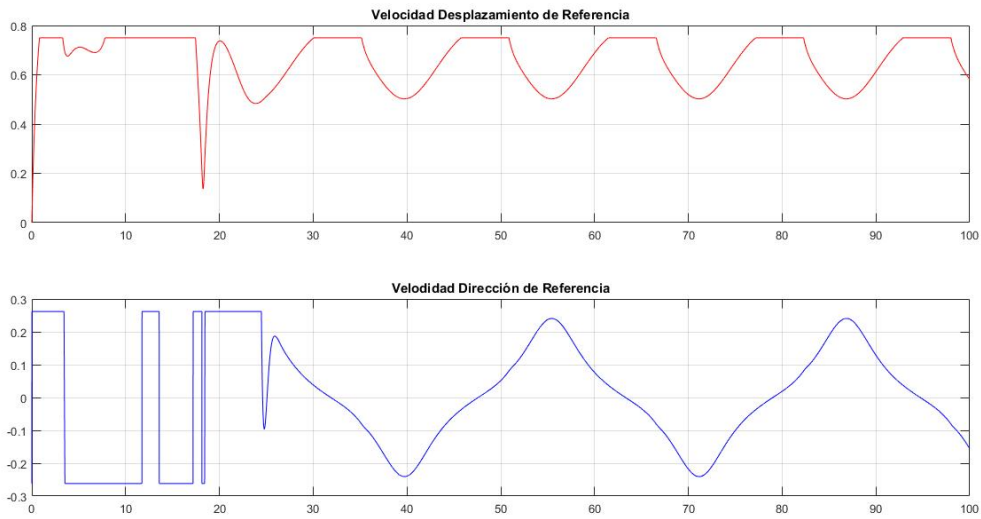


Figura 39: Señales de Control

Esta gráfica muestra las señales de control generadas para la trayectoria exigida a lo largo del tiempo de simulación, donde se puede observar que los tramos donde la velocidad de desplazamiento satura son aquellos en los que el robot se encuentra en la pendiente ascendente o descendente del seno y que los tramos donde se encuentra en su mínima actuación son aquellos en los que el robot se encuentra en un pico del seno, ya sea superior o inferior.

Se puede concluir entonces que, en esta situación experimental, el método de control necesita tiempo para adaptarse a la trayectoria pero que cuando lo consigue, lo realiza de muy buena forma.

■ Resultados Persecución de Trayectoria:

$$A = 0,2 \quad B = 1,2 \quad w = 0,13$$

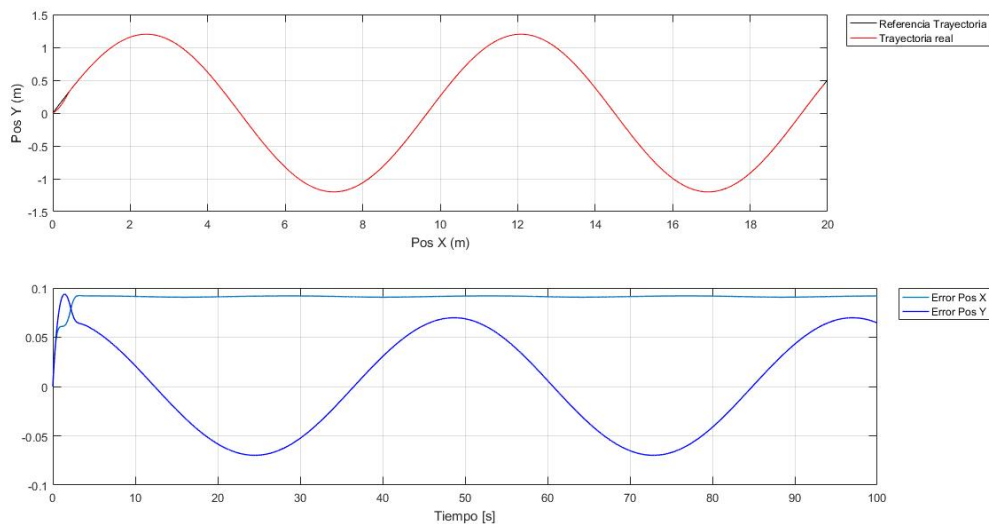


Figura 40: Referencia Vs Seguimiento

Como se puede observar, la reducción de la frecuencia de la senoide mejora notablemente el funcionamiento del control, puesto que ahora podrá adaptarse más fácilmente a la trayectoria. También ha mejorado el error de posición a lo largo del tiempo, como se puede observar, en magnitud. En este experimento y debido a que se realiza un mejor seguimiento, se detecta más el valor constante del error de X y la forma senoidal del error de Y, las razones de los cuales ya se han explicado en el experimento anterior.

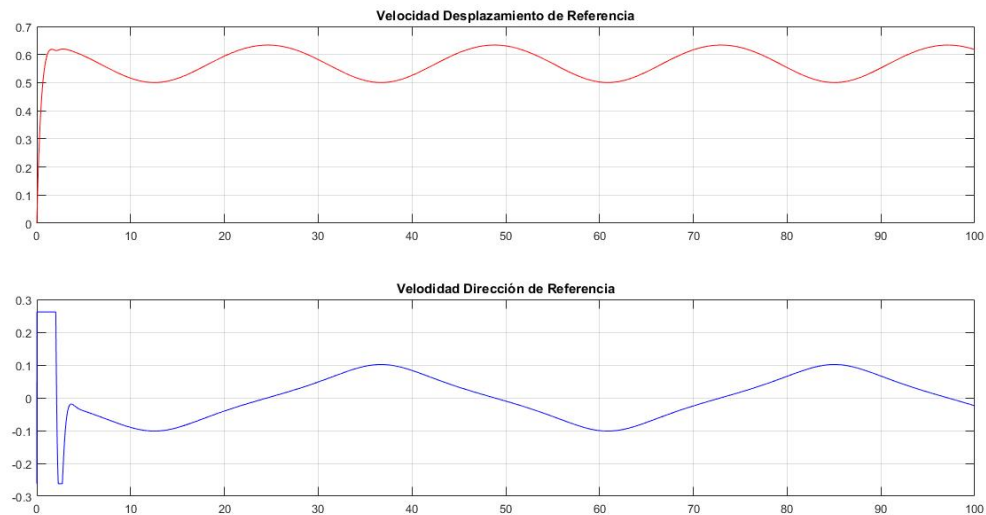


Figura 41: Señales de Control

Estas gráficas son parecidas a las del experimento anterior pero con mejor resultados, puesto que la saturación en las velocidades se realiza durante mucho menos tiempo que en el anterior y ya no existe saturación en la velocidad de desplazamiento en los tramos de pendiente ascendente y descendente de la senoide.

De acuerdo a la concordancia de haber reducido la frecuencia de la senoide de referencia, la velocidad de rotación del robot será menor al no necesitar realizar los giros a tanta velocidad.