1 Theorie zum Faraday Effekt

In jedem nichtleitenden transparenten Medium existieren auf atomarer Ebene mikroskopische magnetische Momente $\vec{\mu}$. Klassisch motiviert man dies durch den Atomkern umkreisende Elektronen. Quantenmechanisch kann dies durch den Gesamtdrehimpuls $\vec{\mathbf{J}}$ ausgedrückt werden. In einem eingeschalteten Magnetfeld werden diese Momente $\vec{\mu}$ aufgrund der Kreiselgleichung

$$\dot{\vec{\mu}} = \gamma \cdot \vec{\mu} \times \vec{\mathbf{B}} \tag{1}$$

um $\vec{\mathbf{B}}$ präzedieren. Mit dem gyromagnetischen Verhältnis $\gamma = g\frac{q}{2m}$, wobei g der Lande-Faktor ist. Aus dieser Gleichung ergibt sich klassisch sowie quantenmechanisch sofort die Larmor-Frequenz $\omega_L = g\frac{qB}{2m}$, mit der der zum $\mathbf{B}$-Feld senkrechte Teil von $\vec{\mu}$ um $\vec{\mathbf{B}}$ präzediert. Man stellt fest, dass die Larmorfrequenz der aus dem Zeeman-Effekt bekannten Energieaufspaltung entspricht:

$$\omega_L = \Delta E_{m_J}/\hbar = g_J \frac{q}{2m} B \qquad (B = |\vec{\mathbf{B}}|) \tag{2}$$

Also einem Übergang mit $\Delta m_J = 1$, wobei m_J der Magnetquantenzahl entspricht.
Im Allgemeinen gibt es beim Zeeman Effekt, abhängig von der Stärke des Magnetfeldes, zusätzlich Übergänge mit $\Delta m_J > 1$, sodass die effektive Larmorfrequenz etwas über den klassischen Erwartungen liegen wird, bei denen $g_J = 1$ angenommen wird. Der Faraday-Effekt entspricht quantenmechanisch aufgrund der Absorbtion von Lichtquanten also dem inversen Zeeman Effekt.
Der Effekt der Doppelbrechung von linearpolarisiertem Licht, einer elektromagnetischen Transversalwelle (vgl. homogene Maxwellgleichungen), welcher aus Gleichung 1 folgt, soll im folgenden klassisch motiviert werden, um die Eigenschaften der Verdet-Konstante abzuleiten (einer Proportionalitätskonstante zwischen Magnetfeldestärke und Drehwinkel).
Die Änderung der Wellenzahl k im Medium beschreibt man mit einem komplexen Brechungsindex $n = n(\omega)$ welcher von der Wellenlänge des Lichtes abhängt. Da uns in diesem Fall nicht die Absobtion des Lichtes interessiert, benötigen wir ausschließlich den Realteil, um den Effekt hinreichend zu beschreiben. Zusätzlich sei $n(\omega)$ unabhängig von der Polarisationrichtung des linear Polarisierten Lichtes, sodass in dem vorliegenden Medium ohne Magnetfeld keine Doppelbrechung stattfindet ($n_x = n_y = n$). Mit der Dispersionsrelation im Medium

$$\omega = k'(\omega) \cdot c = k \cdot n(\omega) \cdot c \tag{3}$$

erhält man die Wellenzahl k' in Abhängigkeit von $\omega = k \cdot c$, der Kreisfrequenz der einlaufenden Lichtwelle. Für die Breschreibung dieser elektromagnetischen Welle begibt man sich der Einfachheit halber in die komplexe Ebene, in welcher sie schwingen soll. Eine linear polarisierte Lichtwelle, welche in Richtung der reellen Achse schwingt, (wir betrachten O.B.d.A. nur das $\mathbf{E}$-Feld der Welle) und sich in Richtung $\vec{\mathbf{x}}$, der negativen Normalen der (komplexen) Ebene, ausbreitet, kann dann dargestellt werden als

$$\mathbf{E} = E_0 \cdot [e^{i(k_l' x - \omega t)} + e^{-i(k_r' x - \omega t)}] = \mathbf{E}_\mathrm{l} + \mathbf{E}_\mathrm{r} \tag{4}$$

(wobei das Tupel $(1, i, -\vec{\mathbf{x}})$ ein rechtshändiges Koordinatensystem aufspannt). Man sieht sofort, dass es sich um die Überlagerung einer linkszirkularen und einer rechtszirkularen Lichtwelle $\mathbf{E}_l$ und $\mathbf{E}_r$ mit der Amplitude E_0 handelt, woraus sich die Amplitude $2E_0$ für die linear polarisierte Welle $\mathbf{E}$ ergibt.

Es wird im Folgenden angenommen, dass die Lichtwelle am Ort $x = 0$ senkrecht in das Medium eintritt. Um zu verstehen, warum bei eingeschaltetem Magnetfeld Doppelbrechung stattfindet, muss man sich in das Bezugssystem der Elektronen begeben, welche, da man $\vec{\mathbf{B}}$ in Richtung $\vec{\mathbf{x}}$ zeigen lässt, mit den magnetischen Momenten $\vec{\mu}$ um die Ausbreitungsrichtung des Lichtes($\equiv \vec{\mathbf{x}}$) (gegen den Uhrzeigersinn) präzedieren. Aus der Sicht eines Elektrons schwingen zirkular polarisierte elektromagnetischen Wellen also mit einer um ω_L niedrigeren (rechtszirkular), bzw. um ω_L höheren Frequenz (linkszirkular). Daher gilt für die Wellenzahl einer linkszirkular polarisierten Lichtwelle $k'_l = k'(\omega + \omega_L)$, und für die Wellenzahl einer rechtszirkular polarisierten Lichtwelle $k'_r = k'(\omega - \omega_L)$, solange das Magnetfeld eingeschaltet ist.
Wenn man dies in Gleichung 4 einsetzt, erhält man:

$$\mathbf{E} = E_0 \cdot [e^{i(k'(\omega+\omega_L)x-\omega t)} + e^{-i(k'(\omega-\omega_L)x-\omega t)}] \tag{5}$$

Wenn man Annimmt, dass $\omega_L << \omega$ gilt, was in diesem Versuch offensichtlich gilt, kann man k' in Potenzen von $\Delta\omega = \omega_L$ um ω entwickeln, und nach dem ersten Glied abbrechen:

$$k'_\pm := k'(\omega \pm \omega_L) \approx k'(\omega) \pm \frac{\mathrm{d}k'}{\mathrm{d}\omega}(\omega) \cdot \omega_L := k' \pm \frac{\mathrm{d}k'}{\mathrm{d}\omega}\omega_L$$

Wenn man dies in Gleichung 5 einsetzt, erhält man:

$$\mathbf{E} = E_0 \cdot [e^{i((k'+\frac{\mathrm{d}k'}{\mathrm{d}\omega}\omega_L)x-\omega t)} + e^{-i((k'-\frac{\mathrm{d}k'}{\mathrm{d}\omega}\omega_L)x-\omega t)}] = E_0 \cdot [e^{i\frac{\mathrm{d}k'}{\mathrm{d}\omega}\omega_L \cdot x}(e^{i(k'x-\omega t)} + e^{-i(k'x-\omega t)})] \tag{6}$$

Man sieht also, dass sich die Polarisationsrichtung der Welle nach einer Strecke Δx um den Winkel

$$\beta = \frac{\mathrm{d}k'}{\mathrm{d}\omega}\omega_L \cdot \Delta x = \frac{\mathrm{d}k'}{\mathrm{d}\omega}\frac{e}{2m_e}B \cdot \Delta x \tag{7}$$

dreht (vgl. Gleichung 2 mit $g_J = 1$ und $q = e$). Mit Gleichung 3 ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}k'}{\mathrm{d}\omega} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\omega} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} \cdot \frac{-\lambda^2}{2\pi c} = -\frac{\lambda}{c} \cdot \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} \tag{8}$$

was in Gleichung 7 eingesetzt, den Drehwinkel

$$\beta = -\frac{\lambda}{c}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\frac{e}{2m_e} \cdot \Delta x \cdot B = \Delta x \cdot V \cdot B \tag{9}$$

ergibt, wobei $V = -\frac{\lambda}{c}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\frac{e}{2m_e}$ die Verdetkonstante ist. Da $n = n(\omega) = n(\frac{c}{\lambda}) = n'(\lambda)$ eine Funktion der Wellenlänge ist, hängt $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}$ ebenfalls von der Wellenlänge ab. Die Abhängigkeit der Verdetkonstante von der Wellenlänge kann also nur bestimmt werden, falls n als Funktion von λ bekannt ist. Bei nicht homogenen $\mathbf{B}$-Feld ist es nötig Gleichung 9 für $\Delta x \to 0$ zu betrachten, und über die Länge zu integrieren, sodass sich der allgemeine Drehwinkel als

$$\beta = V \cdot \int_{l_1}^{l_2} B dx \tag{10}$$

ergibt, wobei in diesem Fall $l_1 = 0$ gewählt wurde, da die Lichtwelle nach Voraussetzung bei $x = 0$ in das Medium eintritt.

Bemerkungen:

1. Aus der Quantenmechanik folgt, dass die Larmorfrequenz bei starkem **B**-Feld nach oben korrigiert werden muss ($g_J > 1$)

2. Die Verdet-Konstante ist temperaturabhängig ($\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}(T)$ im Bereich geringer Temperaturschwankungen vernachlässigbar)

3. Der Drehwinkel ist unabhängig von der Ausbreitungsrichtung der Lichtwelle, denn links/rechtszirkular polarisiertes Licht wird bei umkehr der Ausbreitungsrichtung zu rechts/linkszirkular polarisiertem Licht.
   Formel 4 bleibt also unter der Transformation

$$\begin{pmatrix} k_r \\ k_l \\ \omega \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -k_l \\ -k_r \\ -\omega \end{pmatrix} \tag{11}$$

   invariant.

[1]

[1] Quellen:
http://www.nssp.uni-saarland.de/lehre/FP_Anleitungen/Anleitung_Faraday.pdf;
https://en.wikipedia.org/wiki/Faraday_effect; https://en.wikipedia.org/wiki/Zeeman_effect;
https://de.wikipedia.org/wiki/Larmorpräzession