一元四次方程

Hanford

2016 年 04 月 05 日

目 录

第 1 章　一元四次方程

1　费拉里法

历史上第一个被明确记载的一元四次方程求根方法就是费拉里法。本节将对其进行说明。

1.1　算法思路

一元四次方程

$$x^4+bx^3+cx^2+dx+e=0 \tag{1}$$

可变换为下式

$$x^4+bx^3=-cx^2-dx-e \tag{2}$$

上式两边加上$\left(\frac{1}{2}bx\right)^2$可得：

$$\left(x^2+\frac{1}{2}bx\right)^2=\left(\frac{1}{4}b^2-c\right)x^2-dx-e \tag{3}$$

上式两边再加上$\left(x^2+\frac{1}{2}bx\right)y+\frac{1}{4}y^2$，可得

$$\left(x^2+\frac{1}{2}bx+\frac{1}{2}y\right)^2=\left(\frac{1}{4}b^2-c+y\right)x^2+\left(\frac{1}{2}by-d\right)x+\left(\frac{1}{4}y^2-e\right) \tag{4}$$

上式右端是一个关于x的一元二次方程，当

$$\begin{aligned}\Delta&=\left(\frac{1}{2}by-d\right)^2-4\left(\frac{1}{4}b^2-c+y\right)\left(\frac{1}{4}y^2-e\right)\\&=y^3-cy^2+(bd-4e)y+\left(4c-b^2\right)e-d^2=0\end{aligned} \tag{5}$$

时，有

$$\left(x^2+\frac{1}{2}bx+\frac{1}{2}y\right)^2=\left(\frac{1}{4}b^2-c+y\right)\left[x+\frac{\frac{1}{2}by-d}{2\left(\frac{1}{4}b^2-c+y\right)}\right]^2 \tag{6}$$

可知：

$$2x^2+bx+y=\pm\left(x\sqrt{b^2+4y-4c}+\frac{by-2d}{\sqrt{b^2+4y-4c}}\right) \tag{7}$$

费拉里法就是首先把公式(5)中的 y 求解出来（一元三次方程），然后再求解上式中的 x（两个一元二次方程）。

1.2　特殊情况

方程(5)一般有三个根，一般情况下选取 $\left|b^2+4y-4c\right|$ 最大的 y 即可。

但是有一种情况，那就是方程(5)三个根的 $\left|b^2+4y-4c\right|$ 均为零。这意味着方程(5)有三重根，假定这个根为 y_0。方程(5)就应该是：

$$\left(y-y_0\right)^3=0\Rightarrow y^3-3y_0y^2+3y_0^2y-y_0^3=0 \tag{8}$$

上式与公式(5)比较，可得：

$$\begin{cases} c=3y_0 \\ bd-4e=3y_0^2 \\ \left(4c-b^2\right)e-d^2=-y_0^3 \end{cases} \tag{9}$$

上式联合 $b^2+4y_0-4c=0$ 可求得

$$\begin{cases} b=2\sqrt{2y_0} \\ c=3y_0 \\ d=\sqrt{2y_0}\,y_0 \\ e=y_0^2/4 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} b=-2\sqrt{2y_0} \\ c=3y_0 \\ d=-\sqrt{2y_0}\,y_0 \\ e=y_0^2/4 \end{cases} \tag{10}$$

将上式和 $y=y_0$ 代入方程(4)可得：

$$\frac{1}{4}\left(2x^2+bx+y_0\right)^2=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}\left(2x^2+bx+\frac{c}{3}\right)^2=0 \tag{11}$$

也就是说：方程(5)有三重根 y_0 时，只要求解上式即可。

1.3　计算公式

费拉里法求解一元四次方程 $x^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ 的计算公式如下：

$$P=\frac{c^2+12e-3bd}{9} \tag{12}$$

$$Q=\frac{27d^2+2c^3+27b^2e-72ce-9bcd}{54} \tag{13}$$

$$D=\sqrt{Q^2-P^3} \tag{14}$$

$u=\sqrt[3]{Q\pm D}$ （取模的较大值） (15)

$v=P/u$ （u 为零，则 v 也取值为零） (16)

y　有三种取法：

$$\begin{cases} y_1=u+v+c/3 \\ y_2=\omega u+\omega^2 v+c/3 \\ y_3=\omega^2 u+\omega v+c/3 \\ y_k=\omega^{k-1}u+\omega^{4-k}v+c/3 \quad k=1,2,3 \end{cases} \tag{17}$$

上式中

$$\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow \omega^n=\begin{cases} 1 & n=0,3,6,\cdots,3m,\cdots \\ \omega & n=1,4,7,\cdots,3m+1,\cdots \\ \bar{\omega}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i & n=2,5,8,\cdots,3m+2,\cdots \end{cases} \tag{18}$$

将 $y=y_1, y=y_2, y=y_3$ 分别代入 $m=\sqrt{b^2+4y-4c}$，就能得到三组 $\left(y,m\right)$。请选择 $|m|$ 最大或 $|m|\neq 0$ 的一组作为 y,m 的数值。

现在看 m 的数值

当 $m=0$ 时，一元四次方程有两对重根：

$$\begin{cases} x_{1,2}=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-8y}}{4}=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-\frac{8}{3}c}}{4} \\ x_{3,4}=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-8y}}{4}=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-\frac{8}{3}c}}{4} \end{cases} \tag{19}$$

写成通解形式就是

$$x_k=\frac{-b-(-1)^{\lceil k/2\rceil}\sqrt{b^2-\frac{8}{3}c}}{4}\quad (k=1,2,3,4) \tag{20}$$

当 $m\neq 0$ 时，首先按下式计算 n

$$n=\frac{by-2d}{m} \tag{21}$$

然后即可求得一元四次方程的四个根：

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{-(b+m)+\sqrt{(b+m)^2-8(y+n)}}{4} \\ x_2=\dfrac{-(b+m)-\sqrt{(b+m)^2-8(y+n)}}{4} \\ x_3=\dfrac{-(b-m)+\sqrt{(b-m)^2-8(y-n)}}{4} \\ x_4=\dfrac{-(b-m)-\sqrt{(b-m)^2-8(y-n)}}{4} \end{cases} \tag{22}$$

写成通解形式就是

$$x_k=\frac{-\left[b-(-1)^{\lceil k/2\rceil}m\right]+(-1)^{k+1}\sqrt{\left[b-(-1)^{\lceil k/2\rceil}m\right]^2-8\left[y-(-1)^{\lceil k/2\rceil}n\right]}}{4} \tag{23}$$

1.4　算例

1.4.1　算例 1

求解 $x^4-1=0$

上式中 $b=c=d=0, e=-1$

$$P=-\frac{4}{3}, Q=0, D=\frac{8}{3\sqrt{3}}, u=\frac{2}{\sqrt{3}}, v=-\frac{2}{\sqrt{3}}$$

y 取 $y_1=u+v+c/3=0$ 时， $m=0$ 。

y 取 $y_2=\omega u+\omega^2 v+c/3=2i$ ，则

$$m=\sqrt{8i}=2+2i, n=0$$

$$x_1=\frac{-(2+2i)+\sqrt{(2+2i)^2-8(2i)}}{4}=\frac{(-2-2i)+(2-2i)}{4}=-i$$

$$x_2=\frac{-(2+2i)-\sqrt{(2+2i)^2-8(2i)}}{4}=\frac{(-2-2i)-(2-2i)}{4}=-1$$

$$x_3=\frac{(2+2i)+\sqrt{(2+2i)^2-8(2i)}}{4}=\frac{(2+2i)+(2-2i)}{4}=1$$

$$x_4=\frac{(2+2i)-\sqrt{(2+2i)^2-8(2i)}}{4}=\frac{(2+2i)-(2-2i)}{4}=i$$

1.4.2　算例 2

求解 $(x-1)^4=0 \Rightarrow x^4-4x^3+6x^2-4x+1=0$

上式 $b=-4, c=6, d=-4, e=1$

$$P=0, Q=0, D=0, u=0, v=0$$

y 有三重根 $y_1=y_2=y_3=u+v+c/3=2$ ，此时 $m=0$ 。因此：

$$x_{1,2}=\frac{-b+\sqrt{b^2-8y}}{4}=1$$

$$x_{3,4}=\frac{-b-\sqrt{b^2-8y}}{4}=1$$

2　求根公式（四次项系数为一）

对费拉里法求得的通解，即公式(23)做个变形，就得到了一元四次方程 $x^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ 的求根公式：

$$x_n=\frac{-b+(-1)^{\lceil n/2\rceil}m+(-1)^{n+1}\sqrt{S+(-1)^{\lceil n/2\rceil}T}}{4}\quad(n=1,2,3,4)\tag{24}$$

上式中

$$\begin{cases}m=\sqrt{b^2+4y-4c}\\S=b^2+m^2-8y\\T=8n-2bm\end{cases}\tag{25}$$

将 $y=y_k=\omega^{k-1}u+\omega^{4-k}v+c/3$ 代入上式，可得

$$\begin{cases}m=\sqrt{b^2-\dfrac{8}{3}c+4\left(\omega^{k-1}u+\omega^{4-k}v\right)}\\S=2b^2-\dfrac{16}{3}c-4\left(\omega^{k-1}u+\omega^{4-k}v\right)\\T=\dfrac{8bc-16d-2b^3}{m}\end{cases}\tag{26}$$

上式中 k 可取值 $1,2,3$。取值时最好选择 $|m|$ 最大的，这样计算 T 时数值就比较稳定了。如果 k 取值 $1,2,3$ 时 $|m|$ 始终为零，则求根公式应该改为：

$$x_n=\frac{-b-(-1)^{\lceil n/2\rceil}\sqrt{b^2-\dfrac{8}{3}c}}{4}\quad(n=1,2,3,4)\tag{27}$$

上式相当于公式(24)中的 $m=T=0,S=b^2-\dfrac{8}{3}c$

3　求根公式（四次项系数不为零）

一元四次方程 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ 的求根公式：

$$P=\frac{c^2+12ae-3bd}{9} \tag{28}$$

$$Q=\frac{27ad^2+2c^3+27b^2e-72ace-9bcd}{54} \tag{29}$$

$$D=\sqrt{Q^2-P^3} \tag{30}$$

$$u=\sqrt[3]{Q\pm D}\text{（取模的较大值）} \tag{31}$$

$$v=P/u\text{（u 为零，则 v 也取值为零）} \tag{32}$$

$$\begin{cases} m=\sqrt{b^2-\dfrac{8}{3}ac+4a\left(\omega^{k-1}u+\omega^{4-k}v\right)} \\ S=2b^2-\dfrac{16}{3}ac-4a\left(\omega^{k-1}u+\omega^{4-k}v\right) \\ T=\dfrac{8abc-16a^2d-2b^3}{m} \end{cases} \tag{33}$$

上式中 k 可取值 $1,2,3$。取值时最好选择 $|m|$ 最大的，这样计算 T 时数值就比较稳定了。如果 k 取值 $1,2,3$ 时 $|m|$ 始终为零，则：

$$\begin{cases} m=0 \\ S=b^2-\dfrac{8}{3}ac \\ T=0 \end{cases} \tag{34}$$

四个根为：

$$x_n=\frac{-b+(-1)^{\lceil n/2\rceil}m+(-1)^{n+1}\sqrt{S+(-1)^{\lceil n/2\rceil}T}}{4a}\qquad (n=1,2,3,4) \tag{35}$$

4　求根公式（维基百科）

维基百科上列出了方程 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ 的求根公式，网址如下：
https://en.wikipedia.org/wiki/File:Quartic_Formula.svg
查看这个公式，需要非常的耐心和细心。将其分拆后，可以得到如下公式：

$$P=\frac{b^2-3ac+12d}{9} \tag{36}$$

$$Q=\frac{2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd}{54} \tag{37}$$

$$D=\sqrt{Q^2-P^3} \tag{38}$$

$$u=\sqrt[3]{Q+D} \tag{39}$$

$$v=P/u \tag{40}$$

$$\begin{cases} m_2=\dfrac{m}{2}=\sqrt{\dfrac{a^2}{4}-\dfrac{2b}{3}+(u+v)} \\ S_4=\dfrac{S}{4}=\dfrac{a^2}{2}-\dfrac{4b}{3}-(u+v) \\ T_4=\dfrac{T}{4}=\dfrac{-a^3+4ab-8c}{4m_2} \end{cases} \tag{41}$$

$$x_n=\frac{-a}{4}+\frac{(-1)^{\lceil n/2\rceil}}{2}m_2+\frac{(-1)^{n+1}}{2}\sqrt{S_4+(-1)^{\lceil n/2\rceil}T_4} \tag{42}$$

可见，上式与公式(24)是等价的。

注意：公式(41)中的三个参数 m_2,S_4,T_4 只是公式(26)中 $k=1$ 的一个特例。也就是说：公式(41)(42)只选用了一元三次方程三个根中的一个，当 $m=0$ 时无法正确求解。

5　求根公式（MATLAB）

如下图所示，在 MATLAB 里执行如下两条命令：

```
syms a b c d e
solve('a*x^4+b*x^3+c*x^2+d*x+e')
```

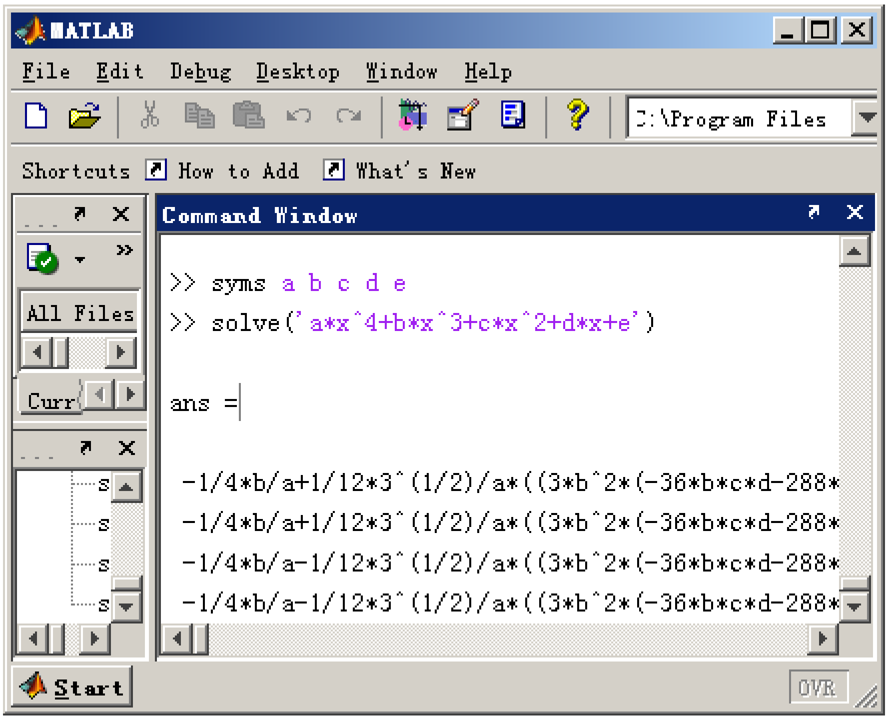

图 1

将得到方程 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ 的求根公式。对于每个根的计算公式，MATLAB 都用一万多个字符来表示它。可见不使用中间变量，根的表达公式是多么的复杂。

经笔者整理后，得

$$D_{18}=18D=\Big(-768a^3e^3+576a^2bde^2+384a^2c^2e^2-432a^2cd^2e+81a^2d^4 \\ -432ab^2ce^2+18ab^2d^2e+240abc^2de-54abcd^3-48ac^4e \\ +12ac^3d^2+81b^4e^2-54b^3cde+12b^3d^3+12b^2c^3e-3b^2c^2d^2\Big)^{\frac{1}{2}} \tag{43}$$

$$u_6=6u=\sqrt[3]{-288ace+108ad^2+108b^2e-36bcd+8c^3+12D_{18}} \tag{44}$$

$$v_{36a}=36av=\frac{a\left(288ae-72bd+24c^2\right)}{u_6} \tag{45}$$

$$m_3=3m=\sqrt{9b^2-24ac+6a\cdot u_6+v_{36a}} \tag{46}$$

$$S_9 = 9S = 18b^2 - 48ac - 6a \cdot u_6 - v_{36a} \tag{47}$$

$$T_9 = 9T = -\frac{54\left(8a^2d + b^3 - 4abc\right)}{m_3} \tag{48}$$

四个根的计算公式如下：

$$x_n = \frac{(-1)^{\lceil n/2 \rceil} m_3 + (-1)^{n+1}\sqrt{S_9 + (-1)^{\lceil n/2 \rceil} T_9} - 3b}{12a} \tag{49}$$

可见，上式与公式(35)是等价的。

同样的，这个公式只选用了一元三次方程三个根中的一个，当$m = 0$时无法正确求解。