گردآورندگان: محمدرضا مفیضی، ایمان علیپور

مسئله‌ی ۱. آزمون دشوار

محمد در مسابقه‌ای جذاب شرکت می‌کند. او در هر مرحله به احتمال ۰/۷ پاسخ صحیح به سوال می‌دهد. همچنین اگر او به ۲۰ سوال، نادرست پاسخ دهد از مسابقه حذف خواهد شد. احتمال اینکه او قبل از حذف شدن، حداقل به ۱۰ سوال پاسخ صحیح بدهد، چقدر است؟

حل. احتمال اینکه دقیقا k پاسخ صحیح در $m+n-1$ سوال داشته باشیم برابراست با:

$$\binom{m+n-1}{k} p^k (1-p)^{m+n-1-k}$$

پس احتمال اینکه حداقل n پاسخ صحیح قبل از m پاسخ غلط داشته باشیم برابر است با:

$$P_{C \geqslant n} = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{m+k-1}{k} p^k (1-p)^{m-1}$$

حالا کافیست n=۱۰ و m=۲۰ و p=۰.۷ را جایگذاری کنیم. ▷

مسئله‌ی ۲. تاس‌های چند وجهی

در کشوی یک میز، یک تاس ۴ وجهی، یک تاس ۶ وجهی و دو تاس ۸ وجهی قرار دارند.(روی وجوه تاس i وجهی اعداد ۱ تا i نوشته شده اند، یعنی مثلا روی هیچ کدام از وجوه تاس ۴ وجهی، عدد ۵ ظاهر نمیشود.) فرض کنید پشمک با چشم بسته یکی از تاس‌ها را از کشوی میز برمی‌دارد و آن را پرتاب می‌کند، همچنین احتمال انتخاب شدن تاس‌ها باهم برابرند. اگر بدانیم عدد رو شده، ۳ باشد، احتمال اینکه تاس انتخاب شده تاس ۸ وجهی باشد، چقدر است؟

حل. اولا که توجه کنید برای هر گونه تاس، احتمال اینکه عدد ۳ رو شده باشد برابر است با:

$$P(R=3|S=4) = 1/4, P(R=3|S=6) = 1/6, P(R=3|S=8) = 1/8$$

با توجه به قانون بیز:

$$P(S=k|R=3) = \frac{P(R=3|S=k) \times P(S=k)}{P(R=3)}$$

حال باید با توجه به قانون احتمال کل، احتمال رو شدن ۳ را محاسبه کنیم، توجه کنید در رابطه زیر این موضوع لحاظ شده که احتمال انتخاب شدن تاس ۸ وجهی، دوبرابر گونه‌های دیگر است، چون از آن دوتا داریم.

$$P(R=3) = P(R=3|S=4)P(S=4) + P(R=3|S=6)P(S=6) + P(R=3|S=8)P(S=8)$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{۱}{۶}$$

یعنی به احتمال $\frac{۱}{۶}$ ، عدد رو شده، ۳ خواهد بود. حال با استفاده از قائده بیز، این احتمال را برای تاس ۸ وجهی محاسبه میکنیم:

$$P(S = ۸|R = ۳) = \frac{\frac{۱}{۱۶}}{\frac{۱}{۶}} = \frac{۳}{۸}$$

$\triangleright$

موفق باشید :)