



۱

فرض کنید می خواهید اپلیکیشنی طراحی کنید که افراد هم مسیر با استفاده از یک خودرو به سمت مقصد خود حرکت کنند. مسیری به نام A در شهر وجود دارد که به طور میانگین، هر ۵ دقیقه ۲ نفر درخواست حرکت در آن مسیر را می دهند. حال با فرض اینکه درخواست ها از هم مستقل هستند و در هر خودرو گنجایش تنها ۳ مسافر را دارد، به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف

فردی درخواست سفر در مسیر یاد شده را می کند. احتمال اینکه حداقل یک نفر دیگر درخواست سفر در همین مسیر را تا ۵ دقیقه دیگر بدهد چقدر است؟

ب

کوشا درخواست سفر در مسیر A را می کند. تا ۵ دقیقه دیگر، تمامی مسافرانی که قصد سفر در همان مسیر را بکنند، به شرط جا داشتن خودرو، سوار همان خودروی اول می شوند. شما از هر نفر ۳۰ هزار تومان دریافت می کنید، ۵۰ هزار تومان هم دستمزد راننده است. انتظار دارید که از این سفر سود کنید؟

ج

احتمال اینکه مدت زمانی که طول می کشد تا مسافر بعدی که درخواست سفر در مسیر A را می دهد بیشتر از ۸ دقیقه باشد چقدر است؟

۲

آزمونی را در نظر بگیرید که در آن به شخصی n سوال داده میشود و او میتواند به هر ترتیب دلخواهی به آن ها پاسخ دهد. فرض کنید سوال i با احتمال p_i پاسخ داده میشود و در این صورت شخص جایزه v_i را دریافت میکند. با اولین پاسخ نادرست، آزمون به پایان میرسد و شخص جایزه هایی که تاکنون بدست آورده است را دریافت میکند. ترتیبی برای پاسخ دادن به سوال ها بدست آورید که در نهایت این شخص بیشترین جایزه را دریافت کند.

۳

یکی از خیابان های شهر شکرستان از نقطه ۰ تا ∞ روی محور x ها کشیده شده است. می دانیم هرگاه یکی از خانه های این خیابان دچار آتش سوزی شود، مکان آن متغیر تصادفی $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ خواهد بود. شهرداری شکرستان قصد دارد یک ایستگاه آتش نشانی در این خیابان احداث کند. این ایستگاه در کدام نقطه باید احداث شود تا میانگین فاصله آن از یک آتش سوزی فرضی کمینه باشد؟

۴

تابع وزن احتمال متغیر تصادفی X به صورت $P_X(n) = c.n^{-a}$ است که $a > 1$ و n یک عدد طبیعی میباشد. اگر اعداد اول را به ترتیب به صورت $1 < p_1 < p_2 < \dots$ بنویسیم، یعنی $p_1 = 2$ و $p_2 = 3$ و \dots ، و واقعه A_k واقعه بخش پذیری X بر p_k باشد، آنگاه:

الف

مقدار c را برحسب پارامتر a بدست آورید.

ب

احتمال $P(A_k)$ را بدست آورده و نشان دهید A_k ها مستقل هستند.

ج

ثابت کنید: $\prod_{k=1}^{\infty} (1 - p_k^{-a}) = c$.

۵

در صورتی که X و Y دو متغیر تصادفی مستقل باشند، به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف

حاصل $\rho(X + Y, X - Y)$ را به صورت کسری تنها از $var(X)$ و $var(Y)$ بدست آورید.

ب

در صورتی که $X \sim \exp(\frac{1}{\lambda})$ و $Y \sim N(0, \lambda)$ باشد، درباره‌ی استقلال X و Y چه میتوان گفت؟