

با استفاده از اصول موضوعه احتمال، حکم‌های زیر را برای پیشامدهای دلخواه  $A_1$  و  $\dots$  و  $A_n$  اثبات کنید.

الف)  $\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$  (پیشامدهای دلخواه هستند)

ب)  $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$

ج)  $\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^n A_i) \geq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - (n - 1)$

۲۰۰ نفر به ترتیب وارد هواپیمایی با دقیقاً ۲۰۰ صندلی می‌شوند. شماره‌ی صندلی هر نفر، در بلیت آن فرد مشخص شده است. نفر اول بلیت خود را گم کرده است، پس به صورت شانسی بر روی یک صندلی می‌نشیند. افراد بعدی اگر صندلی خودشان خالی باشد، در صندلی خود می‌نشینند و در غیر این صورت، یک صندلی را به صورت تصادفی انتخاب می‌کنند. احتمال آن که نفر آخر بر روی صندلی خودش بنشیند را بیابید.

می دانیم خانواده ای یک فرزند پنج ساله و یک فرزند سه ساله دارد. فرض کنید احتمال دختر یا پسر بودن هر نوزاد، فارغ از جنسیت سایر فرزندان یکسان است.

**الف**

احتمال این که این خانواده حداقل یک فرزند دختر داشته باشد را حساب کنید.

**ب**

اگر بدانیم فرزند اول دختر است احتمال این که فرزند دیگر نیز دختر باشد را حساب کنید.

**ج**

اگر بدانیم این خانواده یک فرزند دختر دارد احتمال این که فرزند دیگر نیز دختر باشد را حساب کنید.

دو سکه داریم که با پرتاب اولی به احتمال  $0/5$  شیر و به احتمال  $0/5$  خط میاید و با پرتاب دومی به احتمال  $0/6$  شیر ظاهر می شود و به احتمال  $0/4$  خط.  
یک سکه را شانسی برداشته ایم و پس از ۳ بار پرتاب کردن آن، به ترتیب به نتایج خط- شیر- شیر دست یافته ایم.

احتمال این که پرتاب چهارم خط بیاید چقدر است؟

- تعداد دنباله هایی مانند  $(A_1, A_2, \dots, A_k)$  از زیر مجموعه های مجموعه  $\Omega$  عضوی  $X$  بیابید طوری که:

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$$

در کیسه ای ۴ توپ قرمز و ۵ توپ آبی قرار دارد. اگر از این کیسه ۴ توپ را به صورت تصادفی در بیاوریم چقدر احتمال دارد ۲ تای اولی قرمز و ۲ تای بعدی آبی باشند؟

محمد در مسابقه‌ای جذاب شرکت می‌کند. او در هر مرحله به احتمال  $0/7$  پاسخ صحیح به سوال می‌دهد. همچنین اگر او به ۲۰ سوال، نادرست پاسخ دهد از مسابقه حذف خواهد شد. احتمال اینکه او قبل از حذف شدن، حداقل به ۱۰ سوال پاسخ صحیح بدهد، چقدر است؟

۵۰ بادکنک در جعبه ای قرار دارند که می دانیم ۵ تای آنها سوراخ دارند. احتمال این که ۳ بادکنک برداریم و همگی سالم باشند چقدر است؟



یک جعبه بزرگ و تعداد نامتناهی مهره با شماره های  $1, 2, 3, \dots$  در نظر بگیرید. حال آزمایش های زیر را انجام می دهیم:

یک دقیقه به ساعت 12 شب مهره های 1 تا 10 را در جعبه قرار می دهیم و مهره شماره 10 را خارج می کنیم (خارج کردن و گذاشتن مهره ها زمانی نمی برد).  $\frac{1}{2}$  دقیقه به 12 مهره های 11 تا 20 در جعبه قرار می گیرند و مهره شماره 20 از جعبه خارج می شود.  $\frac{1}{4}$  دقیقه به 12 مهره های 21 تا 30 در جعبه قرار داده می شوند و مهره شماره 30 از جعبه خارج می شود و الی آخر.

حال سوال مورد نظر این است که ساعت 12 چند مهره در جعبه قرار دارد؟

در مرحله بعد آزمایش را به نحوی دیگر انجام می دهیم. دوباره همان جعبه و مهره ها را در نظر بگیرید. (جعبه در ابتدا خالی می باشد). حال 1 دقیقه به ساعت 12 مهره های شماره 1 تا 10 را در جعبه قرار می دهیم و مهره شماره 1 را خارج می کنیم.  $\frac{1}{2}$  دقیقه به 12 مهره های 11 تا 20 را در جعبه قرار می دهیم و مهره شماره 2 را خارج می کنیم.  $\frac{1}{4}$  دقیقه به 12 مهره های 21 تا 30 را در جعبه می گذاریم و مهره شماره 3 را خارج می کنیم و الی آخر.

حال فکر می کنید با این روند ساعت 12 چند مهره در جعبه خواهد بود؟

حال فرض کنید وقتی یک مهره خارج می شود انتخاب آن تصادفی باشد. یعنی در 1 دقیقه به 12 مهره های 1 تا 10 در جعبه قرار داده می شود و 1 مهره به تصادف از مهره های موجود در جعبه خارج می شود.

با این روند فکر می کنید در ساعت 12 چند مهره در جعبه خواهد بود؟

