دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

آمار و احتمال مهندسی

نیم‌سال اول ۱۴۰۰-۱۴۰۱

دکتر شریفی

پایانترم

همه مباحث

۱

الف

ثابت کنید اگر X و Y متغیرهایی تصادفی با چگالی احتمال f_X و f_Y باشند، آنگاه چگالی احتمال $Z = X + Y$ از رابطه زیر بدست میاید:

$$f_Z(z) = \int f_X(z-t) f_Y(t) dt$$

ب

دو متغیر تصادفی گسسته مستقل X و Y دارای توزیع پوآسون با پارامتر λ اند. مطلوبست توزیع X به شرط دانستن $X + Y$.

۲

فرض کنید $X_۱, X_۲, X_۳ \overset{iid}{\sim} Exp(\lambda)$ همچنین در نظر بگیرید:

$Y_۱ = X_۱ + X_۲ + X_۳$

$Y_۲ = \frac{X_۱+X_۲}{X_۱+X_۲+X_۳}$

$Y_۳ = \frac{X_۱}{X_۱+X_۲}$

الف

توزیع احتمال مشترک $Y_۱$، $Y_۲$ و $Y_۳$ را بیابید.

ب

توزیع حاشیه‌ای $Y_۱$، $Y_۲$ و $Y_۳$ را بیابید.

ج

درباره استقلال $Y_۱$، $Y_۲$ و $Y_۳$ چه چیزی می‌توان گفت؟

۳

X, Y دو متغیر تصادفی با ضریب همبستگی ρ هستند. ثابت کنید:

$$E[Var(Y|X)] \leqslant (1-\rho^2)Var(Y)$$

۴

لئوناردو به تازگی یک پازل هزارتایی خریده و به سختی آن را حل کرده است. اما حالا باید به خانه جدیدش اسباب‌کشی کند. او چون خیلی برای حل پازلش زحمت کشیده، می‌خواهد آن را بدون خراب‌کردن به خانه‌اش منتقل کند، اما ممکن است در بین راه، تعدادی از تکه‌های پازل از جا در بیاید. اگر بعد از جابجایی، حداکثر ۱۲۵ تکه خراب شود، لئوناردو می‌تواند دوباره آن را کامل کند و در غیر این صورت، جابجایی پازل با شکست مواجه می‌شود. اگر هر تکه با احتمال ۰/۱ خراب شود و خراب شدن تکه‌ها از هم مستقل باشد، احتمال شکست خوردن در جابجایی این پازل را به دست آورید.

۵

اگر داشته باشیم $X \sim N(0, \sigma^2)$، مقدار $\mathbb{E}(|X^3|)$ را حساب کنید.

۶

گیاهی تنها در دو جزیره‌ی متفاوت رشد می‌کند. فرض کنید طول عمر این گیاه در جزیره‌ی اول از یک توزیع نرمال با واریانس $\sigma_x^2 = 16$ و میانگین μ_x ناشناخته می‌آید. طول عمر گیاه در جزیره‌ی دوم نیز همانند جزیره‌ی اول، از یک توزیع نرمال با واریانس $\sigma_y^2 = 16$ و میانگین μ_y ناشناخته می‌آید. حال می‌خواهیم فرض صفر $H_0 : \mu_x = 0/5\mu_y$ را تست کنیم. فرض مقابل برابر است با $H_1 : \mu_x \neq 0/5\mu_y$ و تست فرضیه را می‌خواهیم بر اساس ۱۰۰ نمونه‌ی مستقل از هر جزیره انجام دهیم. برای نمونه‌های جزیره‌ی اول از نمادهای $X_1, X_2, ... X_{100}$ و برای نمونه‌های جزیره‌ی دوم از نمادهای $Y_1, Y_2, ... Y_{100}$ استفاده می‌کنیم.
مقدار میانگین نمونه برای دو گروه عبارت است از:

$$\bar{X} = \frac{\Sigma_i X_i}{100} = 48, \bar{Y} = \frac{\Sigma_i Y_i}{100} = 100.$$

الف

آماره‌ای تعریف کنید که تحت فرض صفر، مقدار میانگینش برابر ۰ باشد.

ب

مقدار واریانس آماره‌ای که در بخش قبل تعریف کرده‌اید، تحت فرض صفر، برابر با چه مقداری است؟

ج

بازه‌ای جهت رد فرض صفر برای آماره‌ای که تعریف کردده‌اید با اطمینان ۹۵ درصد بیابید.

د

با توجه به اطلاعات داده شده، مقادیری که در بخش‌های قبلی محاسبه کردید و در نظر گرفتن $\alpha = 0/05$ ، آیا فرض صفر را رد می‌کنید؟

۷

X_1، X_2، ...، X_n نمونه‌های تصادفی از توزیع $Uniform(\theta_1, \theta_2)$ با پارامترهای نامعلوم θ_1 و θ_2 هستند.

الف

تخمین‌گر درست‌نمایی بیشینه را برای θ_1 و θ_2 بدست آورید.

ب

نشان دهید تخمین‌گرهای بدست آمده در قسمت الف سازگار هستند.

ج

عدد c_1 و c_2 را به گونه‌ای بیابید که $c_1\hat{\Theta}_2$ و $c_2\hat{\Theta}_2$ تخمین‌گر unbiased برای θ_1 و θ_2 باشند.