مسئله‌ی ۱. قطعه‌سازی

در کارخانه تولید اتومبیل، قطعه‌ای با وزن تصادفی تولید می‌شود. n نمونه مستقل از قطعه‌ها را انتخاب کرده‌ایم و وزن آن‌ها را $w^{(1)}, w^{(2)}, ..., w^{(n)}$ اندازه گرفته‌ایم. اگر بدانیم وزن قطعه از توزیع زیر به دست می‌آید، تخمینگر بیشینه درست نمایی برای پارامتر λ را به دست آورید. (۴ نمره)

$$f_X(x) = \lambda x e^{\frac{-\lambda x^2}{2}} U(x)$$

حل. توضیح کلی راه حل:

$$\ell_n(\lambda) = n \log \lambda + \sum_{i=1}^n \log w_i - \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^n w_i^2 \Rightarrow \widehat{\lambda}_{ML} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n w_i^2}$$

▷

مسئله‌ی ۲. من یک دانشجوی ریاضی هستم

صورت کلی مسئله فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ را در نظر بگیرید. از این فضای احتمال، n نمونه تصادفی مستقل برداشته و آنها را به صورت $\omega_1, \omega_2, , ..., \omega_n$ نشان می‌دهیم.

الف

برای یک پیشامد A تخمین زیر را برای $\mathbb{P}(A)$ در نظر می‌گیریم.

$$\widehat{\mathbb{P}}(A) = \frac{\sum_{i=1}^n I_A(\omega_i)}{n}$$

که در آن $I_A(\omega_i)$ یک است اگر ω_i در A باشد و در غیر این صورت صفر است. نشان دهید که این تخمین یک تخمین unbiased و سازگار برای $\mathbb{P}(A)$ می‌باشد. (۴ نمره)

ب

کران بالای مناسبی برای $\mathbb{P}(|\widehat{\mathbb{P}}(A) - \mathbb{P}(A)| > \epsilon)$ بنویسید.(هر کران بالای غیر بدیهی قابل قبول است.) (۲ نمره)

حل.

الف

ابتدا ثابت می‌کنیم تخمینگر unbiased است.

$$\mathbb{E}[\widehat{\mathbb{P}}(A)] = \mathbb{E}[\frac{\sum_{i=1}^n I_A(\omega_i)}{n}] = \frac{1}{n}\mathbb{E}[\sum_{i=1}^n I_A(\omega_i)] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[I_A(\omega_i)] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(\omega_i \in A) = \mathbb{P}(A)$$

حالا نشان می‌دهیم که سازگار است. از قضیه نوت بوک‌ها در حالت unbiased کمک می‌گیریم.

$$MSE = Var(\widehat{\mathbb{P}}(A)) = Var(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_A(\omega_i)) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(I_A(\omega_i))$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\omega_i \in A) - \mathbb{P}(\omega_i \in A)^2 = \frac{\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(A)^2}{n}$$

لذا وقتی $n \to \infty$ داریم $MSE \to \infty$ پس سازگار است.

ب

از نامساوی چبیشف کمک می‌گیریم.

$$\mathbb{P}(|\widehat{\mathbb{P}}(A) - \mathbb{P}(A)| > \epsilon) \leqslant \frac{Var(\widehat{\mathbb{P}}(A))}{\epsilon^2} = \frac{\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(A)^2}{n\epsilon^2}$$

$\triangleright$

موفق باشید :)