آمار و احتمال مهندسی

نیم‌سال اول ۱۴۰۰-۱۴۰۱

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

گردآورندگان: یاسین موسوی، محمد ابول‌نژادیان

پاسخ آزمونک شماره ۴ — توزیع‌های توأم

مسئله‌ی ۱.

تابع توزیع توام برای دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر تعریف شده است:

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & 0 < x < \infty, 0 < y < \infty \\ 0 & O.W \end{cases}$$

تابع چگالی احتمالی (pdf) را برای متغیر تصادفی $\frac{X}{Y}$ به دست آورید.

حل.

$$F_{\frac{X}{Y}}(a) = P\{\frac{X}{Y} \leqslant a\}$$

$$= \int\int_{x/y \leqslant a} e^{x+y} dxdy$$

$$= \int_0^\infty \int_0^{ay} e^{-(x+y)} dxdy$$

$$= \int_0^\infty (1 - e^{-ay}) e^{-y} dy$$

$$= 1 - \frac{1}{a+1}$$

حال از عبارت مشتق می‌گیریم.

$$f_{X/Y(a)} = \frac{1}{(a+1)^2} \qquad 0 < a < \infty$$

▷

مسئله‌ی ۲.

فرض کنید که X و Y دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع هندسی با پارامتر p باشند.

الف

بدون محاسبات، بنظر شما مقدار عبارت زیر چیست؟

$$P\{X = i | X + Y = n\}$$

راهنمایی: فرض کنید که یک سکه را که با احتمال p رو می‌آید به طور متوالی پرتاب می‌کنیم، اگر بار دومی که سکه رو می‌آید بار n ام باشد، تابع چگالی احتمال اولین باری که سکه رو می‌آید چیست؟

ب

مقدار عبارت بالا را حساب کنید.

حل.

$$P\{X=i|X+Y=n\}=P\{X=i,Y=n-i\}/P\{X+Y=n\}$$

$$=\frac{p(۱-p)^{i-۱}p(۱-p)^{n-i-۱}}{(n-۱)p^{۲}(۱-p)^{n-۲}}$$

$$=\frac{۱}{n-۱}$$

$\triangleright$

موفق باشید :)