سوال یک :

1-1) $Z = X + Y \rightarrow F_Z(Z)_{\cdot z} = P(Z \leq z) = P(X+Y \leq z) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \int_{y=-\infty}^{y=z-x} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$

فرض استقلال

$\overset{}{=} \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{z-x} f_X(x) f_Y(y)\,dx\,dy = \int_{x=-\infty}^{+\infty} f_X(x) \left(\int_{y=-\infty}^{z-x} f_Y(y)\,dy \right) dx = \int_{x=-\infty}^{+\infty} f_X(x) F_Y(z-x)\,dx$

$f_Z(Z=z) = \partial F_Z / \partial z = \int_{x=-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx$

تغییر متغیر

$z - x = t$

$$\boxed{f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-t) f_Y(t)\,dt}$$

1-2) داریم : $\begin{cases} X \sim Pois(\lambda) \\ Y \sim Pois(\lambda) \end{cases}, X \perp Y \Rightarrow X+Y \sim Pois(2\lambda)$

$P(X=x \mid X+Y=k) = \dfrac{P(X, X+Y=k)}{P(X+Y=k)} = \dfrac{P(X=x, Y=k-x)}{P(X+Y=k)} = \dfrac{P(X=x)\,P(Y=k-x)}{P(X+Y=k)}$

$= \dfrac{\lambda^x e^{-\lambda} \lambda^{k-x} e^{-\lambda} \cdot k!}{x! \cdot (k-x)!\,(2\lambda)^k e^{-2\lambda}} = \dfrac{k!}{2^k x!\,k!} = \binom{k}{x} \left(\tfrac{1}{2}\right)^k \sim binomial\left(\tfrac{1}{2}\right)$

$\boxed{\text{پاسخ سوال ۲}}$ با فرض اینکه $Y_1=g_1(X_1)$، $Y_2=g_2(X_2)$، $Y_3=g_3(X_3)$ داریم:

برای متغیر تصادفی $Z\sim Exponential(\lambda)$ می‌دانیم: $f_Z(z)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda z} & z\geq 0\\ 0 & z<0\end{cases}$ پس در واقع دو مسئله

ما متغیر تصادفی های X_1,X_2,X_3 متغیر تصادفی های نامنفی هستند و لذا داریم:

$$0\leq Y_2=\frac{X_1+X_2}{X_1+X_2+X_3}\leq 1 \qquad 0\leq Y_3=\frac{X_1}{X_1+X_2}\leq 1 \Rightarrow 0\leq y_2,y_3\leq 1$$

$\boxed{\text{الف}}$ حال می‌خواهیم $P(Y_1=y_1,Y_2=y_2,Y_3=y_3)$ را حساب کنیم. از ژاکوبین استفاده می‌کنیم.

$$f_{Y_1,Y_2,Y_3}(y_1,y_2,y_3)=f_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3)\times\frac{1}{|J(x_1,x_2,x_3)|}$$

$$J(x_1,x_2,x_3)=\begin{vmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3}\\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2}{\partial x_3}\\ \frac{\partial g_3}{\partial x_1} & \frac{\partial g_3}{\partial x_2} & \frac{\partial g_3}{\partial x_3}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ \frac{x_3}{(x_1+x_2+x_3)^2} & \frac{x_3}{(x_1+x_2+x_3)^2} & \frac{-(x_1+x_2)}{(x_1+x_2+x_3)^2}\\ \frac{x_2}{(x_1+x_2)^2} & \frac{-x_1}{(x_1+x_2)^2} & 0\end{vmatrix}$$

$$=\frac{-1}{(x_1+x_2)(x_1+x_2+x_3)}\Rightarrow f_{Y_1,Y_2,Y_3}(y_1,y_2,y_3)=(x_1+x_2)(x_1+x_2+x_3)f_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3)$$

$$=\underbrace{(y_1y_2)}_{x_1+x_2}\underbrace{(y_1)}_{x_1+x_2+x_3}f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)f_{X_3}(x_3)=y_1^2y_2\lambda^3e^{-\lambda(x_1+x_2+x_3)}=\lambda^3y_1^2y_2e^{-\lambda y_1}$$

$$f_{Y_1,Y_2,Y_3}(y_1,y_2,y_3)=\lambda^3y_1^2y_2e^{-\lambda y_1}$$ با فرض اینکه $0\leq y_2,y_3\leq 1$ و $0\leq y_1$

$$f_{Y_1,Y_2,Y_3}(y_1,y_2,y_3)=0$$ اگر حداقل یکی از نامساوی های $y_3<0$ ، $1<y_3$ ، $y_2<0$ ، $1<y_2$ ، $y_1<0$ برقرار باشد.

$\boxed{\text{ب}}$

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{Y_1,Y_2,Y_3}(y_1,y_2,y_3)=\int_0^1\lambda^3y_1^2y_2e^{-\lambda y_1}dy_3=\lambda^3y_1^2y_2e^{-\lambda y_1}$$

$$f_{Y_1}(y_1)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)dy_2=\int_0^1\lambda^3y_1^2y_2e^{-\lambda y_1}dy_2=\frac{\lambda^3y_1^2e^{-\lambda y_1}}{2}$$

$$f_{Y_۲}(y_۲)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y_1,Y_۲}(y_1,y_۲)\,dy_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda^۳ y_1^۲ y_۲ e^{-\lambda y_1}\,dy_1=-y_۲\left(\lambda^۲ y_1^۲+۲\lambda y_1+۲\right)e^{-\lambda y_1}\Big|_0^{\infty}$$

$$=۲y_۲$$

$$f_{Y_۳}(y_۳)=\int_0^{\infty}\int_0^{1} f_{Y_1,Y_۲,Y_۳}(y_1,y_۲,y_۳)\,dy_۲\,dy_1=\left(\frac{y_۲^۲}{۲}\right)\Big|_{y_۲=0}^{y_۲=1}\times\left(-\left(\lambda^۲ y_1^۲+۲\lambda y_1+۲\right)e^{-\lambda y_1}\right)\Big|_{y_1=0}^{y_1=\infty}$$

$$-\frac{1}{۲}\times ۲=1 \Rightarrow$$

$$f_{Y_1}(y_1)=\frac{\lambda^۳ y_1^۲ e^{-\lambda y_1}}{۲} \qquad f_{Y_۲}(y_۲)=۲y_۲ \qquad f_{Y_۳}(y_۳)=1$$

ب. ابتدا سوال را برای حالت $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 0$ حل می‌کنیم.
می‌دانیم:

$$E(Var(Y|X)) = E(E(Y^2|X)) - E(E(Y|X)^2) = E(Y^2) - E(E(Y|X)^2)$$

از طرفی داریم:

$$\rho = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{Var(XVar(Y)}} = \frac{E(XY)}{\sqrt{E(X^2)E(Y^2)}}$$

پس حکم معادل می‌شود با:

$$E(Y^2) - E(E(Y|X)^2) \leq (1 - \frac{E(XY)^2}{E(X^2)E(Y^2)})E(Y)^2$$
$$\Longleftrightarrow E(XY)^2 \leq E(X^2)E(E(Y|X)^2)$$

حال دقت کنید که:

$$E(XY) = E(E(XY|X)) = E(XE(Y|X))$$

پس حکم معادل است با:

$$E(XE(Y|X))^2 \leq E(X^2)E(E(Y|X)^2)$$

که اگر داشته باشیم: $W = E(Y|X)$ حکم معادل می‌شود با:

$$E(XW)^2 \leq E(X^2)E(W^2)$$

که طبق نامساوی کوشی-شوارتز برقرار است.
سپس برای X و Y در حالت کلی، با ساده‌سازی از طرفین نشان می‌دهیم حکم که برای $Z = X - \mathbb{E}(X)$ و $T = Y - \mathbb{E}(Y)$ برقراراست، برای X و Y هم برقرار است.

Let $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \quad n = 1000.$

$$\begin{aligned}
X_i &\sim \quad \text{Bernoulli}(p = 0.1) \\
EX_i &= p = 0.1 \\
\text{Var}(X_i) &= p(1-p) = 0.09 \\
EY &= np = 100 \\
\text{Var}(Y) &= np(1-p) = 90
\end{aligned}$$

By the CLT:

$$\frac{Y - EY}{\sqrt{\text{Var}(Y)}} = \frac{Y - 100}{\sqrt{90}} \quad \text{(can be approximated by } \quad N(0,1)). \quad \text{Thus,}$$

$$\begin{aligned}
P(Y > 125) &= P\left(\frac{Y - 100}{\sqrt{90}} > \frac{125 - 100}{\sqrt{90}}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{25}{\sqrt{90}}\right) \\
&\approx 0.0042
\end{aligned}$$

مسئله‌ی ۴. عنوان مسئله

اگر داشته باشیم $X \sim N(0,\sigma^2)$، مقدار $\mathbb{E}(|X^3|)$ را حساب کنید.

حل.

$$\mathbb{E}(|x^3|) = \int_{-\infty}^{\infty} |x^3| f_X(x)dx = \int_0^{\infty} x^3 f_X(x)dx - \int_{-\infty}^{0} x^3 f_X(x)dx =$$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{\infty} x^3 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx - \int_{-\infty}^{0} x^3 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \right)$$

بنابراین کافیست مقدار انتگرال زیر را محاسبه کنیم:

$$\int_a^b x^3 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

با استفاده از انتگرال جزء به جزء داریم:

$$\int_a^b x^3 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \int_a^b x^2 . x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \left[-\sigma^2 x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right] \Big|_a^b + 2\sigma^2 \int_a^b x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\int_a^b x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \left[-\sigma^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right] \Big|_a^b$$

$$\Longrightarrow \int_a^b x^3 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \left[-\sigma^2 x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right] \Big|_a^b + 2\sigma^2 \left[-\sigma^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right] \Big|_a^b$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \int_0^{\infty} x^3 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = 2\sigma^4 \\ \int_{-\infty}^{0} x^3 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = -2\sigma^4 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \mathbb{E}(|x^3|) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma^3$$

(a) (1 pt) Construct a sample statistic which has zero mean under the null hypothesis.

Solution: $S = \bar{X} - .5\bar{Y}$.

(b) (2 pts) What is its variance under the null?

Solution: $var(S) = 16/100 + 9/100 = .25$.

(c) (2 pts) Construct a rejection region at 95% significance level.

Solution: $P(|S| \geq \xi; H_0) = .05$. *Under the null,* $S \sim N(0, .25)$. *So* $\xi/.5 = 1.96$ *and so* $\xi = .98$.

(d) (1 pt) Would you accept or reject the null hypothesis at the 95% significance level?

Solution: $|S| = |48 - 50| = 3$. *Clearly in the rejection region. reject*

حل. توضیح کلی راه حل

الف

$$f_{X_i}(x;\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}e^{-\frac{x^2}{2\theta}}$$

تابع درست نمایی را بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x_1,x_2,...,x_n;\theta)&=f_{X_1X_2...X_n}(x_1,x_2,...,x_n;\theta)\\&=f_{X_1}(x_1;\theta)f_{X_2}(x_2;\theta)...f_{X_n}(x_n;\theta)\\\Longrightarrow ln\mathcal{L}(x_1,x_2,...,x_n;\theta)&=-\frac{n}{2}\ln(2\pi\theta)-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2\theta}\end{aligned}$$

از تابع درست‌نمایی نسبت به θ مشتق می‌گیریم و آن را برابر با 0 قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\theta}ln\mathcal{L}(x_1,x_2,...,x_n;\theta)&=-\frac{n}{2\theta}+\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2\theta^2}=0\\\Longrightarrow\hat{\Theta}&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2\end{aligned}$$

ب

$$\begin{aligned}E[X_i^2]&=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f_{X_i}(x)dx\\&=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}e^{-\frac{x^2}{2\theta}}dx\\&=-\frac{\theta}{\sqrt{2\pi\theta}}\int_{-\infty}^{\infty}xd(e^{-\frac{x^2}{2\theta}})\\&=-\frac{\theta}{\sqrt{2\pi\theta}}(\underbrace{xe^{-\frac{x^2}{2\theta}}\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0}-\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2\theta}}dx)\\&=\theta\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}e^{-\frac{x^2}{2\theta}}dx\\\Longrightarrow E[X_i^2]&=\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B(\hat{\Theta})&=E[\hat{\Theta}]-\theta\\&=E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2]-\theta\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E[X_i^2]-\theta\\\Longrightarrow B(\hat{\Theta})&=0\end{aligned}$$

ج

$$\begin{aligned}
E[X_i^4] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^4 f_{X_i}(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-\frac{x^2}{2\theta}} dx \\
&= -\frac{\theta}{\sqrt{2\pi\theta}} \int_{-\infty}^{\infty} x^3 d(e^{-\frac{x^2}{2\theta}}) \\
&= -\frac{\theta}{\sqrt{2\pi\theta}} (\underbrace{x^3 e^{-\frac{x^2}{2\theta}} \Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - 3\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\theta}} dx) \\
&= 3\theta \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-\frac{x^2}{2\theta}} dx \\
&= 3\theta E[X_i^2]
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow E[X_i^4] = 3\theta^2$$

$$Var(X_i^2) = E[X_i^4] - (E[X_i^2])^2 = 2\theta^2$$

با توجه به مستقل بودن X_iها از یکدیگر، X_i^2ها نیز از یکدیگر مستقل اند.

$$\begin{aligned}
Var(\hat{\Theta}) &= Var(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i^2)
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow Var(\hat{\Theta}) = \frac{2\theta^2}{n}$$

$$MSE(\hat{\Theta}) = Var(\hat{\Theta}) + B(\hat{\Theta})^2 = \frac{2\theta^2}{n}$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} MSE(\hat{\Theta}) = 0$$