



مسئله ۱. سکه متفاوت

یک جفت سکه به طور همزمان پرتاب می‌کنیم. احتمال شیر آمدن هر سکه p هست.

الف

اگر این دو سکه را همزمان با هم n بار پرتاب کنیم و X مجموع تعداد پرتاب‌هایی باشد که نتایج این دو سکه با هم متفاوتند، X از چه نوع توزیع احتمالی است؟

ب

فرض کنید اگر نتایج این دو سکه متفاوت باشند، شما ۱ دلار جایزه می‌گیرید و در غیر آن صورت ۱ دلار از دست می‌دهید. اگر Y کل سود شما باشد، Y را برحسب X به دست آورید. امید ریاضی و واریانس Y چقدر است؟

حل.

الف

احتمال متفاوت بودن نتیجه پرتاب دو سکه معادل است با:

$$P(HT) + P(TH) = 2p(1-p)$$

بنابراین X از یک توزیع دوجمله‌ای به شکل زیر می‌باشد:

$$X \sim B(n, 2p(1-p))$$

ب

$$Y = X - (n - X) = 2X - n$$

$$E[Y] = E[2X - n] = 2E[X] - n = 2np(1-p) - n$$

$$Var[Y] = Var[2X - n] = 4 \cdot Var[X] = 4n \cdot 2p(1-p) \cdot [1 - 2p(1-p)]$$

▷

مسئله ۲. کت‌های تصادفی

یک مهمانی ترتیب داده‌ایم که n نفر مهمان دارد که هر مهمان یک کت به تن دارد. ما کت‌ها رو از بین مهمان‌ها جمع می‌کنیم و پس از آن دوباره کت‌ها را به صورت تصادفی میان مهمانان توزیع می‌کنیم. به این ترتیب پس از این توزیع هر مهمان دوباره یک کت دارد. حال، اگر متغیر تصادفی X_N را برابر تعداد مهمانانی که پس از توزیع کت‌ها،

همان کت خودشان را دوباره گرفته‌اند تعریف کنیم، PMF متغیر تصادفی X_N را حساب کنید.
(راهنمایی: با توجه به قضیه پریش برای همه $N = 1, 2, \dots$ داریم؛

$$P(X_N = 0) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots (-1)^N \frac{1}{N!}$$

حال با استفاده از آن $P(X_N = k)$ را برای همه $k \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$ محاسبه کنید.)

حل. ابتدا باید به این توجه کنیم که تعداد نابه‌جایی‌ها (derangements) برای تعداد n نفر طبق قضیه پریش از رابطه زیر پیروی می‌کند:

$$D_n = n! \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!}$$

حال برای اینکه این توزیع را حساب کنیم کافیست k دلخواه را در نظر بگیریم و فرض کنیم k کت به صورت درست به صاحب قبلی‌اش داده شده‌اند و باقی کت‌ها به صورت نابه‌جا توزیع شده‌اند. به این ترتیب کافیست ابتدا k نفر از n نفر را انتخاب نماییم که کت آنها به درستی بهشان داده شده است. سپس بنابر قضیه پریش بقیه کت‌ها را به صورت نابه‌جا تعیین نماییم:

$$P(X_N = k) = \frac{(\text{تعداد حالات نابه‌جایی‌های بقیه } N-k \text{ کت}) \times (\text{تعداد حالات مختلف } k \text{ نفر که کت‌های درست می‌گیرند})}{\text{تعداد کل حالات توزیع } N \text{ کت}}$$

$$= \frac{\binom{N}{k} (N-k)! \sum_{i=0}^{N-k} \frac{(-1)^i}{i!}}{N!}$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{N-k} \frac{(-1)^i}{i!}$$

▷

(موفق باشید:)