ВВЕДЕНИЕ

В соответствии с вариантом задания нужно реализовать два итерационных метода нахождения корней: метода секущих и метод Вегстейна.

Реализация будет выполнена на высокоуровневом языке программирования С. Данный язык идеально подходит под задачу быстрого нахождения корней, так как в современном мире является одним из самых быстро-выполняемых языков программирования. Так же отличительной чертой будет являться полная реализация алгоритмов нахождения корней, без использования каких либо библиотечных готовых решений и модулей, что позволит однозначно сравнить количество итераций и время выполнения. Для высчитывания погрешности и построения графиков будем использовать систему компьютерной алгебры – Mathcad. Основные графики и вычисления будут произведены именно в этом ПО.

Сама задача нахождения корней уравнения очень распространена, и на данный момент имеется большое количество алгоритмов нахождения корней: В частности, среди них выделяют итерационные методы приближенного нахождения корней. Суть таких методов можно описать одним предложением: «Суть метода заключается в нахождении по приближённому значению величины следующего приближения (являющегося более точным)».

Среди самих итерационных методов выделяют метод деления отрезка пополам, метод хорд, метод простой итерации, метод Ньютона, метод секущих, метод Вегстейна, метод парабол и др. В данной работе будут рассматриваться и сравниваться два итерационных метода: метод простой итерации и метод Вегстейна.

При решении таких задач с помощью ЭВМ важно рассмотреть такие параметры алгоритмов как число итераций, время и точность найденного корня, после чего можно выбрать наиболее подходящий под конкретную задачу алгоритм.

Для реализации самого проекта будет использоваться инструмент разработки на языке С – Visual Studio 2012. В нем представлены все основные инструменты для разработки, в частности очень удобный и продуманный debug модуль, что существенно упростит написание курсового проекта.

После анализа литературы, мною было выделено три основные позиции, которые необходимо рассмотреть при работе с итерационными методами уточнения корней:

* Аналитический способ отделения корней.
* Численные методы уточнения корней.
* Программная реализация вычислительного процесса.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

1. АНАЛИТИЧЕСКИЙ СПОСОБ ОТДЕЛЕНИЯ КОРНЕЙ

В данном разделе будет рассмотрен способ отделения корней т.е способ выделения интервала с одним дейсвительным корнем.

Входными данными для решения задачи нахождения корней будет являться алгебраические уравнения (в канонической форме):

*аn⋅x n + an-1⋅ x n-1 + ... + a1⋅x + a0 = 0*

Для примера рассмотрим упрощенный вариант алгебраического уравнения для некоторой функции *y*, заданной как:

*f(x) = cos(x)*

Таким образом нашей задачей будет являться нахождение точек пересечения графика функции *f(x)* с осью абсцисс, то есть нахождение нулей функции.



Рисунок 1.1 Нули функции

Однако для нахождения этих корней на ЭВМ, для начала необходимо выделить некоторые интервалы, на которых однозначно существует единственный корень. Необходимость выделения интервалов решает две проблемы. Первая – это существуют ли решение уравнения, то есть существуют ли действительные корни. Если не будет найдено ни одного интервала – можно сделать вывод, что корней нет. Вторая проблема возникает при анализе итерационных алгоритмов решения уравнения. Данные алгоритмы рассчитаны на нахождение первого и единственно корня, соответственно нам необходимо выделить интервал содержащий один корень, а затем применить итерационный алгоритм на этом интервале. Графическое преставления выделения интервалов представлено на рисунке 1.2:

Рисунок 1.2 Выделение корней

При выделении интервала мы получаем некоторые значения по оси абсцисс. В нашем случае это точки a и b. То есть функция будет иметь корень на интервале [a; b]. Но как выделить такой интервал?

Для программного выделения такого интервала заметим, что функция при пересечении оси абсцисс изменила свой знак. Таким образом достаточно проверить условие:



Если условие выполняется, то функция однозначно будет иметь корень на интервале [a; b]. Далее необходимо максимально сузить этот интервал, что бы было наиболее легко (меньше итераций) искать приближение корня на данном отрезке.

Для уточнения интервала вводится некоторая константа (*e*) – точность нахождения границ интервала. Так же выбирается некоторый шаг функции *h.* Как правило его берут равным одной десятой от точности *e.* Далее начиная со значения *a* мы идем по оси абсцисс с шагом *h*, и на каждом шаге вычисляем значение функции *f(x)*. Как только модуль значения функции становится меньшим заданной точности, мы запоминаем значение по оси абсцисс и продолжаем наращивать значение по *x* сшагом *h.* Как только модуль значения функции стал больше значения заданной точности *e*, мы повторно запоминаем значение по оси абсцисс. Запомненные значения и будут являться новым уточненным интервалом с точность *e.* Графическое представление данного метода отделения корней представлено на рисунке 1.3:



Рисунок 1.3 Метод отделения корней

На рисунке 1.3 показано движение по функции *f(x) = cos(x)* c шагом *h*. Первое запоминаемое значение меньшее *e* – start. Второе запоминаемое значении большее *e* – *end*. Таким образом интервал на котором однозначно будет хотя бы один корень – *[start; end]* (при условии, что *f(start)\*f(end) < 0*). После анализа всей функции мы получаем список интервалов, на которых однозначно будет корень. Далее применяя итерационные методы уточнения корней найдем (с определенной погрешностью) корень.

1. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ УТОНЕНИЯ КОРРНЕЙ

В данном разделе будут рассмотрено математическое обоснование методов приближенного нахождения корней: метода секущих, метода Вегстейна.

* 1. Метод секущих

Как отмечалось выше, необходимо найти нуль функции *f(x)*. Также на этапе отделения интервалов мы получили две точки (границы интервала), обозначим их как *C1(x1; y1)* и *C2(x2;y2)* и проведем через них прямую. Она пересечет ось абсцисс в точке *(x3;0)*. Теперь найдем значение функции с абсциссой *x3*. Временно будем считать *x3* корнем на отрезке *[x1; x2]* . Пусть точка C3 имеет абсциссу X3 и лежит на графике. Теперь вместо точек *C1*  и *C2* мы возьмём точку *C3* и точку *C2*. Теперь с этими двумя точками проделаем ту же операцию и так далее, то есть будем получать две точки *Cn+1*  и *Cn*  и повторять операцию с ними. Отрезок, соединяющий последние две точки, пересекает ось абсцисс в точке, значение абсциссы которой можно приближённо считать корнем. Эти действия нужно повторять до тех пор, пока не получим значение корня с нужным приближением.

Графически метод секущих представлен на рисунке 2.1:

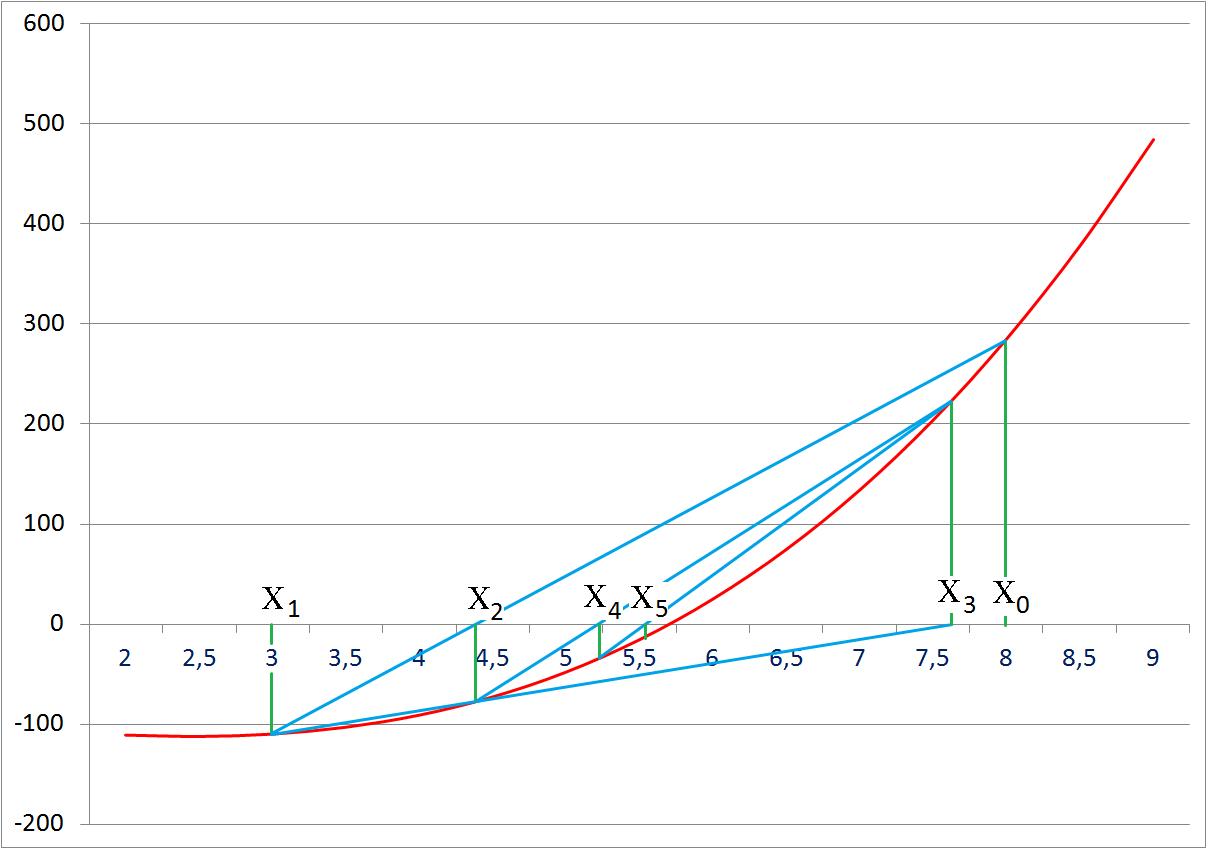


Рисунок 2.1 Графическое представление метода секущих

На рисунке 2.1 мы видим, как уточняется корень от значения X0 до X5 (значение функции приближается к нулю).

Рассмотрим математическое обоснование данного алгоритма.

Пусть *x1, x2* — абсциссы концов хорды, *y = kx+b -* уравнение секущей, содержащей хорду. Найдем коэффициенты *k* и *b* из системы уравнений:

*  
     \left\{  
     \begin{array}{rcl}  
      f(x_1) & = & kx_1+b,\\  
      f(x_2) & = & kx_2+b. \\  
     \end{array}   
     \right.  
  *.

Вычтем из первого уравнения второе:

f(x_1)-f(x_2)=k(x_1-x_2)

Затем найдем коэффициенты k и b:

k=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}

Тогда:

b=f(x_1)-\frac{(f(x_2)-f(x_1))x_1}{x_2-x_1}.

Уравнение принимает вид:

y=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)+f(x_1)

Таким образом, теперь можем найти первое приближение к корню, полученное методом секущих:

x_3=x_1-\frac{(x_2-x_1)f(x_1)}{f(x_2)-f(x_1)}

Теперь возьмем координаты *x2* и *x3* и повторим все проделанные операции, найдя новое приближение к корню. Таким образом, итерационная формула метода секущих имеет вид:

 x_{i+1}=x_{i-1}-\dfrac{f(x_{i-1})\cdot (x_i-x_{i-1})}{f(x_i)-f(x_{i-1})}.

Повторять операцию следует до тех пор, пока |*xi - xi-2*|  не станет меньше или равно заданному значению погрешности.

На основании выше сказанного можно составить алгоритм для нахождения корней уравнений:

* + - 1. Пользователь должен определить интервал, на котором он хочет найти корни уравнения.
      2. Данный интервал разбивается по методу отделения корней т.е на данном шаге определяется набор интервалов, на которых есть однозначно один корень. Если интервалов нет, значит уравнение не имеет действительных корней.
      3. На каждом интервале применяется метод секущих для нахождения корня:

1. Берем границы интервала как две точки *xi-1*и *xi*
2. Высчитываем третью точку *xi+1* по формуле:

 x_{i+1}=x_{i-1}-\dfrac{f(x_{i-1})\cdot (x_i-x_{i-1})}{f(x_i)-f(x_{i-1})}

1. Заменяем *xi-1 на xi; xi* на *xi+1*
2. Высчитываем разницу между двумя соседними точками, и если модуль разницы больше заданной точности *e* то возвращаемся к шагу b, если нет то выводим значение точки *xi+1*
   1. Метод Вегстейна

Метод Вегстейна эффективен для нахождения корней уравнений вида *x = g(x)*. Однако для нахождения корней уравнений вида *0 = f(x)* по своей сути является просто модификацией рассмотренного ранее метода секущих[1]. Кратко рассмотрим приведенное доказательство:

Дано уравнение:

*x = g(x) (1)*

Итерационная итерационный процесс метода Вегстейна имеет вид:

1. *x0*
2. *x1 = g(x0)*
3. *(2)*

Для случая когда решаем уравнение вида *f(x) =0 -* заменяя уравнение (1) эквивалентным ему уравнением *f(x) = g(x) - x*, и подставляя в (2) получаем:

*(3)*

Получившееся уравнение (3), является итерационным уравнением метода секущих. Все основные пункты для метода секущих мы рассмотрели ранее.

Так же метод Вегстейна иногда называют улучшенным методом простой итерации [2].

Алгоритм метода Вегстейна будет отличаться от метода секущих только формулой приближения:

1. Метод Вегстейна - это двухшаговый метод, и для начала нужно задать два приближения *х0* и *х1*
2. Вычислить новое приближение *x2* по формуле (2).
3. Присвоить *х0* значение *х1*; *х1* - значение *x2*
4. Вычислить значение в точке *x2*и вернуться на шаг 2, если модуль значения функции в точке *x2* больше заданной точности *e.*
5. Вывести корень

Литература

1.

2. http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=%D0%9C%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4\_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8B%D1%85\_%D0%B8%D1%82%D0%B5%D1%80%D0%B0%D1%86%D0%B8%D0%B9