Лабораторная работа 1.
Критерий согласия Пирсона

Теоретические сведения

Теория вероятностей и математическая статистика занимаются анализом закономерностей случайных массовых явлений. Предметом математической статистики является изучение случайных величин (или случайных событий, процессов) по результатам наблюдений.

Множество значений результатов наблюдений над одной и той же СВ ξ при одних и тех же условиях называется ***выборкой***. Элементы выборки называются ***выборочными значениями***. Количество проведенных наблюдений называется ***объемом выборки***. Разность W между максимальным и минимальным элементами называется ***размахом выборки***: $W = x_{\max} - x_{\min}$.

Пусть имеется выборка объема n: x_1; x_2; ...; x_n. Если в выборке объема n элемент x_i встречается n_i раз, число n_i называется ***частотой*** выборочного значения x_i, а $\frac{n_i}{n}$ – ***относительной частотой***. Очевидно, что $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, где k – число различных элементов выборки.

Последовательность пар (x_i^*; n_i), где x_1^*, x_2^*, ..., x_k^* – различные выборочные значения, а n_1, n_2, ..., n_k – соответствующие им частоты, называется ***статистическим рядом***. Обычно статистический ряд записывают в виде таблицы, первая строка которой содержит различные выборочные значения x_i^*, а вторая – их частоты n_i (или относительные частоты $\frac{n_i}{n}$, иногда и те, и другие).

В случае, когда число значений признака (СВ ξ) велико или признак является непрерывным (т. е. когда СВ ξ может принимать любое значение в некотором интервале), составляют ***интервальный статистический ряд***. Для этого весь диапазон выборочных значений от $x_{\min}$ до $x_{\max}$ разбивают на k интервалов (обычно от 5 до 20; для определения количества интервалов можно использовать полуэмпирическую формулу Стерджесса $k \approx 1 + \log_2 n$) одинаковой длины $h = \frac{W}{k}$ и определяют частоты n_i – количество элементов выборки, попавших в i-й интервал (элемент, совпадающий с верхней границей интервала, относится к последующему интервалу). Полученные данные сводят в таблицу:

$[x_i; x_{i-1})$	$[x_0; x_1)$	$[x_1; x_2)$	…	$[x_{k-1}; x_k]$
$x_i^* = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$	x_1^*	x_2^*	…	x_k^*
n_i	n_1	n_2	…	n_k
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	…	$\frac{n_k}{n}$

Пусть выборка объема n представлена в виде интервального статистического ряда. Оценками для математического ожидания и дисперсии наблюдаемой случайной величины являются ***выборочное среднее***

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^* n_i$$

и ***выборочная дисперсия***

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i^* - \overline{x})^2 n_i, \text{ или } D_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i^*)^2 n_i - (\overline{x})^2.$$

При этом выборочная дисперсия дает всегда немного заниженную оценку для дисперсии, поэтому вместо нее используют несмещенную оценку дисперсии

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_{\text{в}}.$$

Эмпирической функцией распределения называется функция $F_n^*(x)$, определяющая для каждого значения x относительную частоту наблюдения значений, меньших x:

$$F_n^*(x) = \sum_{x_i^* < x} \frac{n_i}{n}.$$

Гистограммой относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длины h, а высоты равны $\frac{n_i}{nh}$. Площадь гистограммы относительных частот равна 1. При достаточно большом объеме выборки n и достаточно малых интервалах группировки h гистограмма относительных частот является хорошим приближением графика плотности распределения наблюдаемой случайной величины. Поэтому по виду гистограммы можно выдвинуть предположение (гипотезу) о распределении изучаемой случайной величины.

Процедура сопоставления высказанного предположения (гипотезы) с выборочными данными называется ***проверкой гипотез***.

Под ***статистической гипотезой*** понимают всякое высказывание (предположение) о виде (***непараметрическая гипотеза***) или параметрах (***параметрическая гипотеза***) неизвестного распределения. Статистическая гипотеза называется ***простой***, если она полностью определяет функцию распределения. В противном случае гипотеза называется ***сложной***.

Одну из гипотез выделяют в качестве ***основной*** (или ***нулевой***) H_0, а другую, являющуюся логическим отрицанием H_0, – в качестве ***конкурирующей*** (или ***альтернативной***) гипотезы $\overline{H}$.

Правило, по которому принимается решение принять или отклонить проверяемую гипотезу, называется ***критерием проверки статистической гипотезы*** (***статистическим критерием***). При этом заранее выбирают допустимое значение ошибки вывода, которое называется ***уровнем значимости*** статистического критерия и обозначается α (это вероятность отвергнуть нулевую гипотезу, когда она верна).

Статистические критерии, с помощью которых проверяются гипотезы о виде распределения, называются ***критериями согласия*** или ***непараметрическими критериями***.

Критерий согласия χ^2 Пирсона. Пусть имеется выборка объема n и сгруппированный статистический ряд, в котором k групп. Например, в случае непрерывной СВ это будут k интервалов $[x_{i-1}; x_i)$.

Группы должны выбираться так, чтобы охватывать весь диапазон значений предполагаемой СВ. Если диапазон значений СВ не ограничен (к примеру, нормальная СВ принимает любые значения из $(-\infty; +\infty)$), то крайние интервалы должны быть расширены до $-\infty$ и $+\infty$ соответственно.

Кроме того, интервалы (группы) должны быть не очень маленькими, чтобы в каждый из них входило не менее 5 наблюдений. Группы с малым количеством наблюдений объединяют с соседними.

Проверяемая гипотеза представляет собой предположение о распределении наблюдаемой СВ и является простой (конкретно указывает предполагаемое распределение):

H_0 : *функция распределения наблюдаемой СВ совпадает с* $F(x)$;

$\bar{H}$: *функция распределения наблюдаемой СВ не совпадает с* $F(x)$.

Критерий согласия χ^2 Пирсона основан на сравнении эмпирических и теоретических частот попадания СВ в рассматриваемые группы (интервалы):

n_i – эмпирическая частота наблюдения значений из интервала $[x_{i-1}; x_i)$;

$np_i = n\, P(\xi \in [x_{i-1}; x_i)) = n(F(x_i) - F(x_{i-1}))$ – теоретическое значение соответствующей частоты.

Рассмотрим статистику

$$\chi^2_{\text{расч}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}.$$

Для вычисления статистики $\chi^2_{\text{расч}}$ нужно знать сгруппированный статистический ряд и теоретическую функцию распределения $F(x)$ для расчета вероятностей p_i. При этом теоретическое распределение $F(x)$ может зависеть от одного или нескольких параметров. В этом случае вместо значений параметров используются их оценки, рассчитанные по сгруппированному статистическому ряду *до объединения групп*.

Замечание. Контроль вычислений можно осуществить по формуле

$$\chi^2_{\text{расч}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i^2}{np_i} - n.$$

Пусть r – число неизвестных параметров теоретического распределения, оцененных по выборке. **Критерий согласия χ^2 Пирсона** заключается в следующем: *если* $\chi^2_{\text{расч}} < \chi^2_{\alpha;\, k-r-1}$, *где* $\chi^2_{\alpha;\, k-r-1}$ *определяется по таблице квантилей распределения* χ^2, *то гипотеза* H_0 *принимается (признается непротиворечащей экспериментальным данным; нет оснований отвергнуть гипотезу* H_0*) на уровне значимости* α, *а если* $\chi^2_{\text{расч}} \geq \chi^2_{\alpha;\, k-r-1}$, *то гипотеза* H_0 *отвергается (не согласуется с данными эксперимента).*

Основное достоинство критерия согласия χ^2 Пирсона – его универсальность, т. е. применимость для любого закона распределения, в том числе с неизвестными параметрами. Основной недостаток – необходимость большого объема выборки (не менее 60– 100 наблюдений) и произвольность группировки, влияющая на величину $\chi^2_{\text{расч}}$.

Контрольные вопросы

1. Что называется выборкой? Что называется объемом выборки?
2. Что называется частотой выборочного значения? Что называется относительной частотой?
3. Как оценить по выборке математическое ожидание и дисперсию наблюдаемой СВ?
4. Как рассчитать несмещенную оценку дисперсии?
5. Как оценить по выборке функцию распределения и плотность распределения наблюдаемой СВ?
6. Что называется эмпирической функции распределения?
7. Что называется гистограммой относительных частот?
8. Чему равна площадь гистограммы относительных частот?
9. Что называется статистической гипотезой?
10. В каком случае статистическая гипотеза называется простой? сложной?
11. В чем разница между нулевой и альтернативной гипотезами?
12. Что называется уровнем значимости статистического критерия?
13. Что называется критерием согласия?
14. В чем суть критерия согласия χ^2 Пирсона?
15. Какие достоинства и недостатки имеет критерий согласия χ^2 Пирсона?

Пример и методические указания
по выполнению лабораторной работы в Excel

1. Составить интервальный статистический ряд.

Величину интервалов округлить с точностью до 0,1 в большую сторону.

2. Найти эмпирическую функцию распределения и построить ее график.
3. Построить гистограмму относительных частот.

Можно ли предположить, что данная выборка взята из нормального распределения?

4. Определить выборочное среднее и несмещенную оценку дисперсии по сгруппированному статистическому ряду.
5. Записать предполагаемую плотность закона распределения.
6. Проверить по критерию χ^2 Пирсона гипотезу о законе распределения.

Уровень значимости принять равным $\alpha = 0{,}05$.

37	34	42	38	31	41	40	35	32	34
37	37	26	39	45	37	40	40	45	31
39	42	47	37	42	40	29	35	40	36
34	33	31	28	37	40	41	41	49	41
37	29	43	43	39	35	42	42	39	50
31	33	38	42	38	35	32	37	45	42
44	34	34	34	38	38	38	30	39	35
42	33	35	31	35	53	48	39	47	41
37	48	41	43	42	29	33	48	39	42
41	41	36	43	37	33	38	43	37	34

1. Объем выборки $n=100$. Построим интервальный статистический ряд. Количество интервалов определим по формуле Стерджесса $k \approx 1+\log_2 n = 1+\log_2 100 = 7{,}644$. Принимаем $k=8$. Размах выборки $W = x_{\max} - x_{\min} = 53-26 = 27$. Длина каждого интервала будет $h \approx \frac{W}{k} = \frac{27}{8} = 3{,}375$. Округлив с точностью до 0,1 в большую сторону, принимаем $h=3{,}4$. Находим количество элементов выборки в каждом интервале.

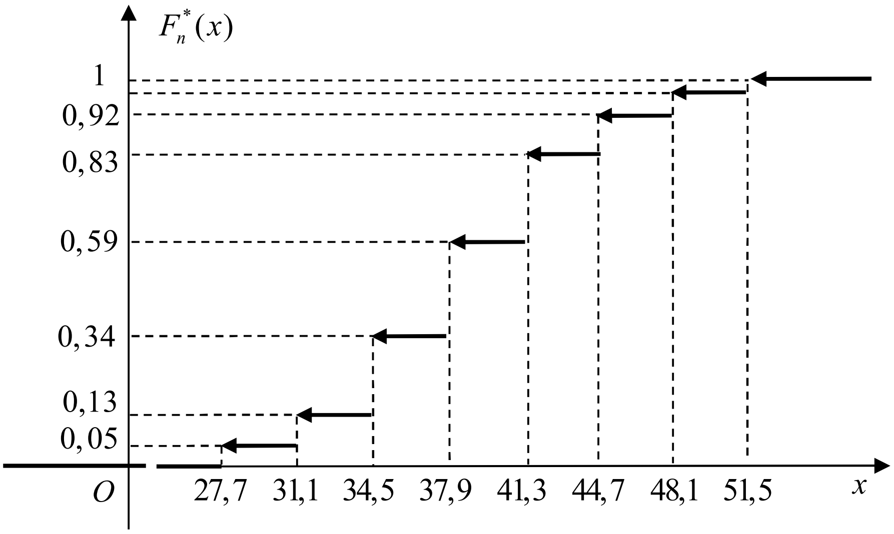
$[x_i; x_{i-1})$	x_i^*	n_i	$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_i}{nh}$
[26; 29,4)	27,7	5	0,05	0,015
[29,4; 32,8)	31,1	8	0,08	0,024
[32,8; 36,2)	34,5	21	0,21	0,062
[36,2; 39,6)	37,9	25	0,25	0,074
[39,6; 43)	41,3	24	0,24	0,071
[43; 46,4)	44,7	9	0,09	0,026
[46,4; 49,8)	48,1	6	0,06	0,018
[49,8; 53,2]	51,5	2	0,02	0,006

2. Для построения эмпирической функции распределения и гистограммы относительных частот дополним интервальный статистический ряд столбцами $\frac{n_i}{n}$ (относительные частоты нужны для построения эмпирической функции распределения) и $\frac{n_i}{nh}$ (высоты прямоугольников гистограммы).

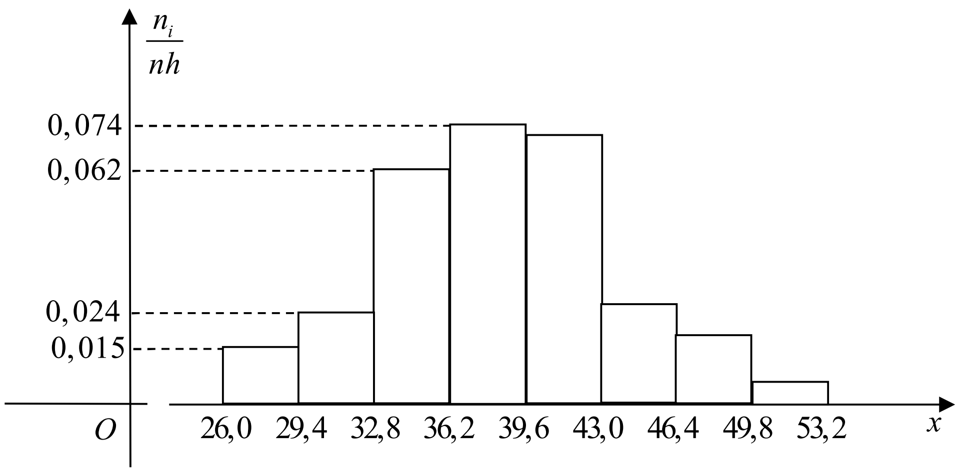
Запишем эмпирическую функцию распределения, накапливая относительные частоты $\frac{n_i}{n}$ (отметим, что при построении эмпирической функции распределения по интервальному статистическому ряду изменения ее значений (скачки) происходят в точках, соответствующих серединам интервалов группировки):

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при } x \le 27{,}7, \\ 0{,}05 \quad \text{при } 27{,}7 < x \le 31{,}1, \\ 0{,}13 \quad \text{при } 31{,}1 < x \le 34{,}5, \\ 0{,}34 \quad \text{при } 34{,}5 < x \le 37{,}9, \\ 0{,}59 \quad \text{при } 37{,}9 < x \le 41{,}3, \\ 0{,}83 \quad \text{при } 41{,}3 < x \le 44{,}7, \\ 0{,}92 \quad \text{при } 44{,}7 < x \le 48{,}1, \\ 0{,}98 \quad \text{при } 48{,}1 < x \le 51{,}5, \\ 1 \quad \text{при } x > 51{,}5. \end{cases}$$

Построим график $F_n^*(x)$.

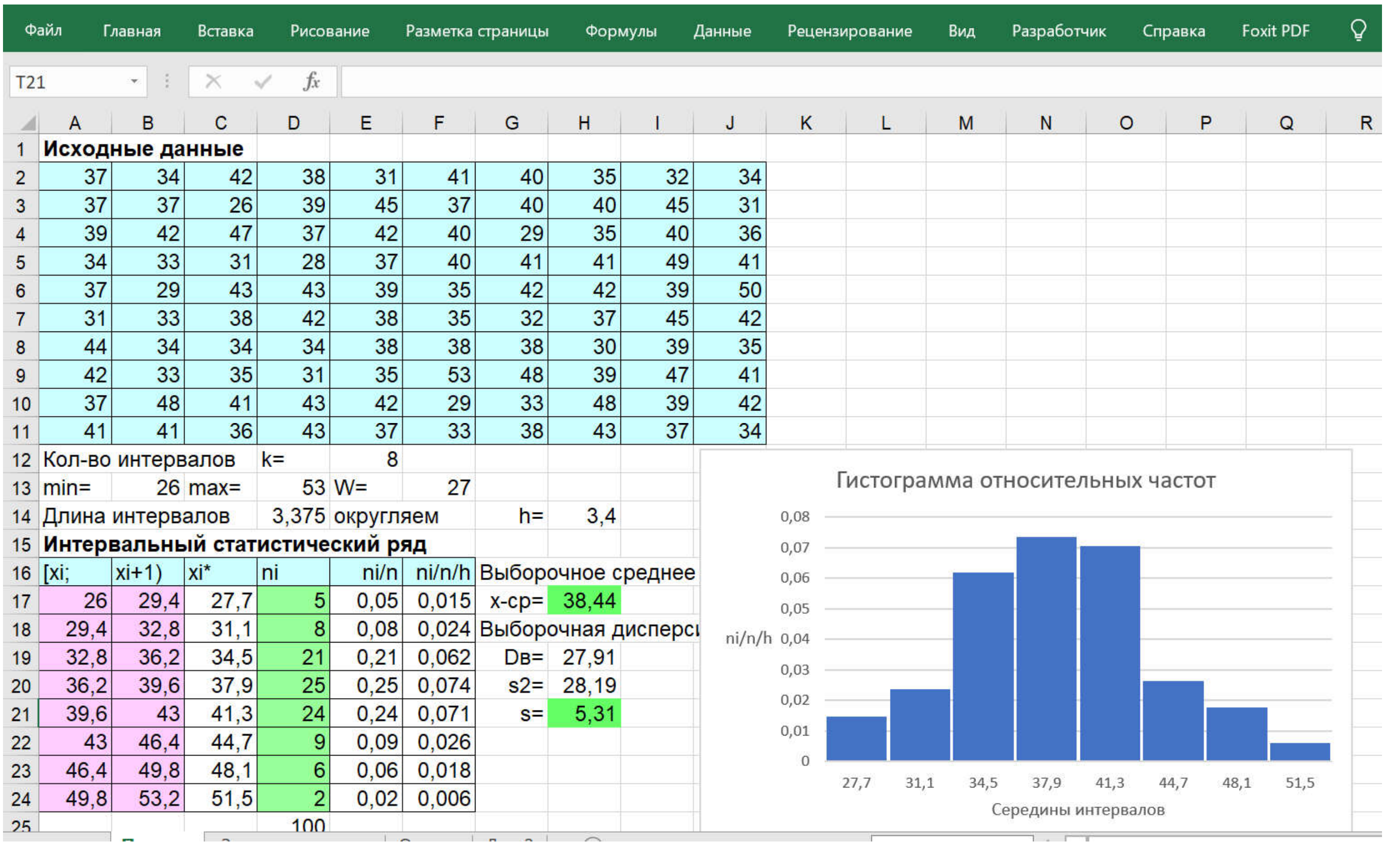


3. Построим гистограмму относительных частот, состоящую из прямоугольников шириной h = 3,4 и высотой $\dfrac{n_i}{nh}$,



По виду гистограммы можно выдвинуть гипотезу о том, что выборка взята из нормального распределения. Для проверки этой гипотезы по критерию согласия χ^2 Пирсона нужно рассчитать оценки параметров распределения по сгруппированному статистическому ряду.

Ниже приведен фрагмент рабочего листа и даны рекомендации по выполнению пунктов 1, 3 в Excel.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**Исходные данные**									
2	37	34	42	38	31	41	40	35	32	34
3	37	37	26	39	45	37	40	40	45	31
4	39	42	47	37	42	40	29	35	40	36
5	34	33	31	28	37	40	41	41	49	41
6	37	29	43	43	39	35	42	42	39	50
7	31	33	38	42	38	35	32	37	45	42
8	44	34	34	34	38	38	38	30	39	35
9	42	33	35	31	35	53	48	39	47	41
10	37	48	41	43	42	29	33	48	39	42
11	41	41	36	43	37	33	38	43	37	34
12	Кол-во интервалов			k=	8					
13	min=	26	max=	53	W=	27				
14	Длина интервалов			3,375	округляем		h=	3,4		
15	**Интервальный статистический ряд**									
16	[xi;	xi+1)	xi*	ni	ni/n	ni/n/h	Выборочное среднее			
17	26	29,4	27,7	5	0,05	0,015	x-cp=	38,44		
18	29,4	32,8	31,1	8	0,08	0,024	Выборочная дисперсі			
19	32,8	36,2	34,5	21	0,21	0,062	Dв=	27,91		
20	36,2	39,6	37,9	25	0,25	0,074	s2=	28,19		
21	39,6	43	41,3	24	0,24	0,071	s=	5,31		
22	43	46,4	44,7	9	0,09	0,026				
23	46,4	49,8	48,1	6	0,06	0,018				
24	49,8	53,2	51,5	2	0,02	0,006				
25				100						

1\. 1) В ячейке A1: "Исходные данные", в ячейки A2:J11 введите или скопируйте выборку.

2) В ячейке A12: "Кол-во интервалов"; в ячейке D12: "k="; в ячейке E12 вычислите количество интервалов по формуле Стерджесса и округлите до целого: =ОКРУГЛ(1+LOG(100;2);0) (в Excel каждая формула начинается со знака =; в формулах недопустимы пробелы). Получается $k = 8$.

В ячейке A13: "min="; в ячейке B13 =МИН(A2:J11); в ячейке C13: "max="; в ячейке D13 =МАКС(A2:J11); в ячейке E13: "W="; в ячейке F13 =D13-B13. В ячейке A14: "длина интервалов"; в ячейке D14 =F13/E12; в ячейке E14: "округляем"; в ячейке G14: "h="; в ячейке H14 =ОКРВВЕРХ(D14;0,1).

3) В ячейке A15: "Интервальный статистический ряд". В ячейке A16: "[xi;"; в ячейке B16 "xi+1)"; в ячейке C16: "xi*"; в ячейке D16: "ni"; в ячейке E16: "ni/n"; в ячейке F16: "ni/n/h".

4) Для нахождения концов интервалов в ячейку A17 запишите минимальное выборочное значение (используйте формулу или ссылку на вычисленное значение), а в ячейки A18 и B17 — формулу =A17+$H$14, затем скопируйте (протяните) эту формулу в ячейки соответствующих столбцов до строки 24 включительно (т. к. должно быть 8 интервалов).

При *копировании* формула в Excel перенастраивается на новые адреса (*относительные ссылки*). Чтобы адрес какой-либо ячейки был *абсолютным* (т. е. не перенастраивался), нужно после его указания в процессе формирования формулы нажать клавишу F4 или записать адрес в виде $A$1. Клавиша F4 действует в этом случае как переключатель, преобразуя адрес последовательно в $A$1, A$1, $A1, A1. Знаком $ обозначается та часть адреса, которая должна оставаться абсолютной. При *перемещении* формулы в новое место таблицы ссылки в формуле не изменяются.

5) В столбце C вычислите середины интервалов.
6) Для вычисления частот в ячейке D17 запишите формулу `=СЧЁТЕСЛИМН($A$2:$J$11;">="&A17;$A$2:$J$11;"<"&B17)` и протяните ее на ячейки D18:D24. В последнем интервале нужно включить правый конец, поэтому в ячейке D24 формулу нужно записать в виде:
`=СЧЁТЕСЛИМН($A$2:$J$11;">="&A24;$A$2:$J$11;"<="&B24)`.
Для контроля вычислений рассчитайте в ячейке D25 сумму частот.
7) Вычислите относительные частоты и высоты прямоугольников гистограммы в столбцах E и F.
3. Построим гистограмму относительных частот, используя вкладку Вставка → Диаграмма.
1) Выделите данные, которые будут отображаться по оси *Ox*, т. е. ячейки C17:C24 (обозначим интервалы их серединами) и, нажав клавишу **Ctrl**, выберите данные, которые будут включены в гистограмму по оси *Oy*, т. е. ячейки F17:F24.
2) Выберите вкладку Вставка → Диаграмма, выберите вариант Гистограмма.
3) Щелкнув по прямоугольникам гистограммы правой кнопкой мыши, выбираем Формат ряда данных и во вкладке Параметры устанавливаем Боковой зазор 5%.
4) Далее можно изменить название гистограммы и подписи осей.

4. Рассчитаем оценки параметров предполагаемого нормального закона распределения по сгруппированному статистическому ряду. Данный закон содержит два параметра a и σ, которые имеют смысл математического ожидания и среднего квадратического отклонения СВ ξ: $M\xi = a,\ D\xi = \sigma^2$.

В качестве оценок для математического ожидания a и дисперсии σ^2 наблюдаемой случайной величины рассчитаем соответственно выборочное среднее $\overline{x}$ и несмещенную оценку дисперсии s^2, для вычисления s^2 предварительно найдем выборочную дисперсию $D_{\text{в}}$:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^* n_i;$$

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} (x_i^*)^2 n_i - (\overline{x})^2;$$

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_{\text{в}}.$$

Используя интервальный статистический ряд, получим:

$$\overline{x} = \frac{1}{100}\cdot(27{,}7\cdot 5 + 31{,}1\cdot 8 + 34{,}5\cdot 21 + 37{,}9\cdot 25 + 41{,}3\cdot 24 + \\ +44{,}7\cdot 9 + 48{,}1\cdot 6 + 51{,}5\cdot 2) \approx 38{,}44;$$

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{100}\cdot(27{,}7^2\cdot 5 + 31{,}1^2\cdot 8 + 34{,}5^2\cdot 21 + 37{,}9^2\cdot 25 + 41{,}3^2\cdot 24 + \\ +44{,}7^2\cdot 9 + 48{,}1^2\cdot 6 + 51{,}5^2\cdot 2) - 38{,}44^2 \approx 27{,}91;$$

$$s^2 = \frac{100}{99} \cdot 27,91 \approx 28,19.$$

Тогда оценкой для среднего квадратического отклонения σ будет $s = \sqrt{28,19} \approx 5,31$.

5. Функция плотности нормального закона распределения имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Следовательно, выдвигаем гипотезу о том, что выборка взята из нормального распределения с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{5,31\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-38,44)^2}{56,38}}.$$

E X C E L

4. 1) В ячейке G16: "Выборочное среднее"; в ячейке G17: "x-ср="; в ячейке H17 вычислите выборочное среднее по формуле =СУММПРОИЗВ(C17:C24;D17:D24)/100.
2) В ячейке H18: "Выборочная дисперсия"; в ячейке G19: "Dв="; в ячейке H19 вычислите выборочную дисперсию по формуле =СУММПРОИЗВ(C17:C24;C17:C24;D17:D24)/100-H17*H17.
3) В ячейке G20: "s2="; в ячейке H20 вычислите несмещенную оценку дисперсии: =H19*100/99.
4) В ячейке G21: "s="; в ячейке H21 вычислите оценку среднего квадратического отклонения: =КОРЕНЬ(H20).

6. Проверим с помощью критерия согласия χ^2 Пирсона гипотезу

H_0: *наблюдаемая СВ имеет нормальное распределение с параметрами* $a = 38,44, \sigma = 5,31$

при альтернативе

$\bar{H}$: *наблюдаемая СВ имеет другое распределение.*

Для расчета статистики критерия Пирсона

$$\chi^2_{\text{расч}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$$

составим новую таблицу, содержащую следующие столбцы:

интервалы $[x_{i-1}; x_i)$ (при этом крайние интервалы должны быть расширены до $-\infty$ и $+\infty$ соответственно; а интервалы с количеством наблюдений меньше 5 объединяются с соседними);

n_i – эмпирическая частота наблюдения значений из интервала $[x_{i-1}; x_i)$;

$p_i = P(\xi \in [x_{i-1}; x_i))$ – теоретическая вероятность попадания СВ в интервал $[x_{i-1}; x_i)$, в случае нормального распределения с параметрами $a = 38,44, \sigma = 5,31$ эта вероятность рассчитывается как разность значений функции Лапласа:

$$p_i = \Phi\left(\frac{x_i - 38,44}{5,31}\right) - \Phi\left(\frac{x_{i-1} - 38,44}{5,31}\right);$$

np_i – теоретическое значение соответствующей частоты, а также столбцы со значениями $n_i - np_i, (n_i - np_i)^2, \dfrac{(n_i - np_i)^2}{np_i}, \dfrac{n_i^2}{np_i}$.

Последний столбец используется для контроля вычислений по формуле

$$\chi^2_{\text{расч}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i^2}{np_i} - n.$$

Все вычисления заносим в таблицу.

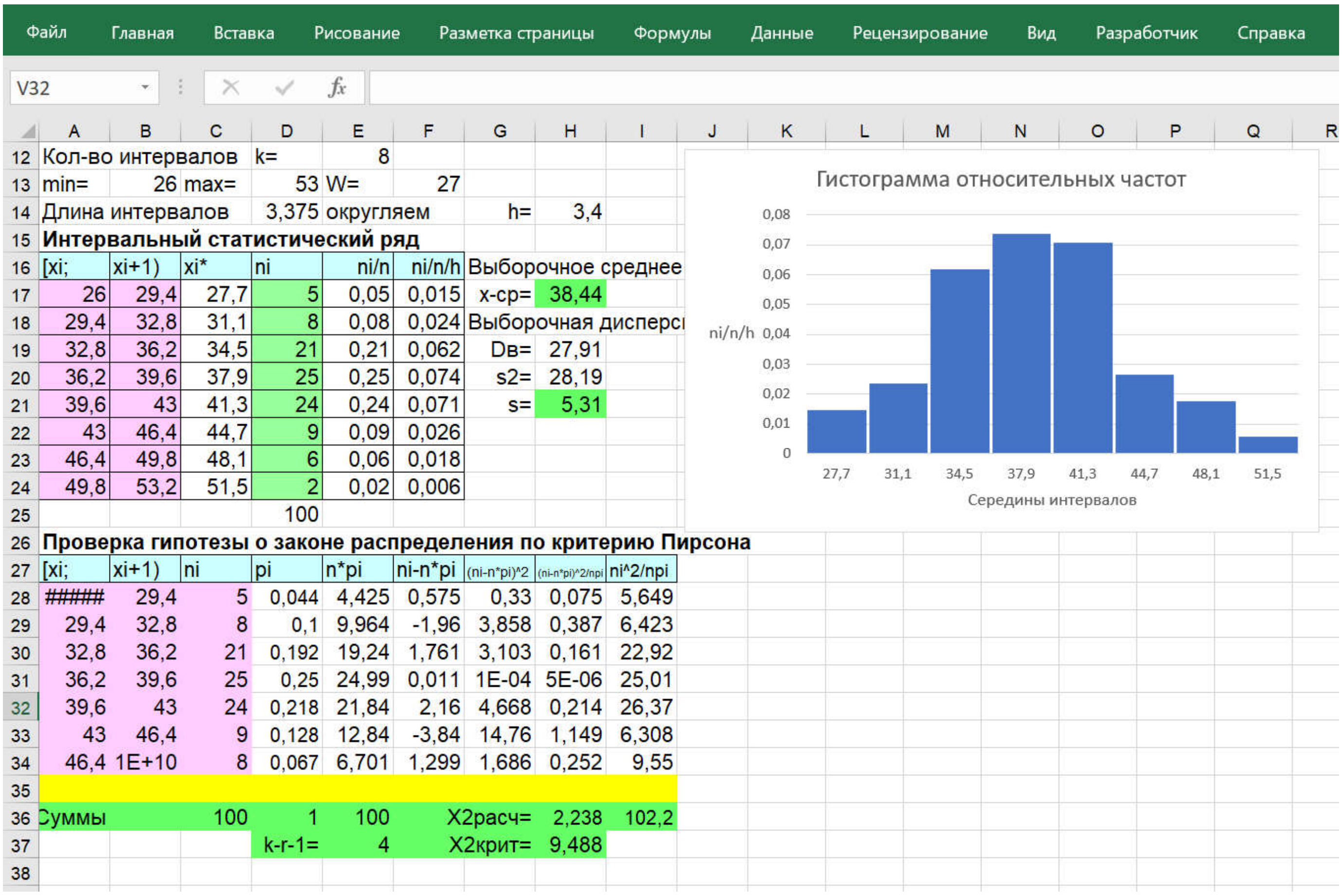
Интервалы	n_i	p_i	np_i	n_i-np_i	$(n_i - np_i)^2$	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$	$\frac{n_i^2}{np_i}$
[-∞; 29,4)	5	0,0443	4,425	0,575	0,33	0,075	5,649
[29,4; 32,8)	8	0,0996	9,964	-1,96	3,858	0,387	6,423
[32,8; 36,2)	21	0,1924	19,24	1,761	3,103	0,161	22,92
[36,2; 39,6)	25	0,2499	24,99	0,011	0,0001	0,000	25,01
[39,6; 43)	24	0,2184	21,84	2,16	4,668	0,214	26,37
[43; 46,4)	9	0,1284	12,84	-3,84	14,76	1,149	6,308
[46,4; +∞)	8	0,067	6,701	1,299	1,686	0,252	9,55
Суммы	100	1	100			$\chi^2_{\text{расч}}$=2,2376	102,24

Суммирования значения в предпоследнем столбце, вычисляем выборочное значение статистики критерия χ^2 Пирсона: $\chi^2_{\text{расч}} = \sum_{i=1}^{k} \dfrac{(n_i - np_i)^2}{np_i} \approx 2,24.$ Сумма элементов последнего столбца равна $\sum_{i=1}^{k} \dfrac{n_i^2}{np_i} \approx 102,24.$ Это позволяет провести контроль вычислений: $\chi^2_{\text{расч}} = \sum_{i=1}^{k} \dfrac{n_i^2}{np_i} - n = 102,24 - 100 = 2,24.$

Определим критическое значение $\chi^2_{\text{крит}} = \chi^2_{\alpha;\, k-r-1}$, где $\alpha = 0,05$ – заданный уровень значимости; k = 7 – число интервалов после объединения малочисленных групп с соседними; $r = 2$, поскольку при расчете теоретических вероятностей p_i использовались две полученные по выборке оценки $\overline{x}$ и s параметров нормального распределения. По таблице квантилей распределения χ^2 получаем $\chi^2_{\text{крит}} = \chi^2_{0,05;\,4} = 9,4877.$

Таким образом, $\chi^2_{\text{расч}} = 2,24 < \chi^2_{\text{крит}} = 9,4877$, поэтому на уровне значимости $\alpha = 0,05$ нет оснований отвергнуть гипотезу H_0, согласно которой выборка взята из нормального распределения с параметрами $a = 38,44, \sigma = 5,31$.

Ниже приведен фрагмент рабочего листа и даны рекомендации по выполнению пункта 6 в Excel.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
12	Кол-во интервалов		k=		8				
13	min=	26	max=	53	W=	27			
14	Длина интервалов			3,375	округляем		h=	3,4	
15	**Интервальный статистический ряд**								
16	[xi;	xi+1)	xi*	ni	ni/n	ni/n/h	Выборочное среднее		
17	26	29,4	27,7	5	0,05	0,015	x-ср=	38,44	
18	29,4	32,8	31,1	8	0,08	0,024	Выборочная дисперс		
19	32,8	36,2	34,5	21	0,21	0,062	Dв=	27,91	
20	36,2	39,6	37,9	25	0,25	0,074	s2=	28,19	
21	39,6	43	41,3	24	0,24	0,071	s=	5,31	
22	43	46,4	44,7	9	0,09	0,026			
23	46,4	49,8	48,1	6	0,06	0,018			
24	49,8	53,2	51,5	2	0,02	0,006			
25				100					
26	**Проверка гипотезы о законе распределения по критерию Пирсона**								
27	[xi;	xi+1)	ni	pi	n*pi	ni-n*pi	(ni-n*pi)^2	(ni-n*pi)^2/npi	ni^2/npi
28	#####	29,4	5	0,044	4,425	0,575	0,33	0,075	5,649
29	29,4	32,8	8	0,1	9,964	-1,96	3,858	0,387	6,423
30	32,8	36,2	21	0,192	19,24	1,761	3,103	0,161	22,92
31	36,2	39,6	25	0,25	24,99	0,011	1E-04	5E-06	25,01
32	39,6	43	24	0,218	21,84	2,16	4,668	0,214	26,37
33	43	46,4	9	0,128	12,84	-3,84	14,76	1,149	6,308
34	46,4	1E+10	8	0,067	6,701	1,299	1,686	0,252	9,55
35									
36	Суммы		100	1	100		X2расч=	2,238	102,2
37				k-r-1=	4		X2крит=	9,488	
38									

6. 1) В ячейке A26: "Проверка гипотезы о законе распределения по критерию Пирсона". В ячейках A27:G36 будет расположена таблица, помогающая рассчитать значение критерия $\chi^2_{\text{расч}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$.

2) Подпишите столбцы таблицы в строке 27: в ячейке A27: "[xi;"; в ячейке B27 "xi+1)"; в ячейке C27: "ni"; в ячейке D27: "pi"; в ячейке E27: "n*pi"; в ячейке F27: "ni-npi "; в ячейке G27: "(ni-npi)^2"; в ячейке H27: "(ni-npi)^2/npi"; в ячейке I27: "ni^2/npi".

3) Запишите в ячейки A28:B35 интервалы группировки, задав в ячейке A28 формулу =A17 и протянув ее на остальные ячейки. Аналогично скопируйте в массив C28:C35 частоты из массива D17:D24.

4) **Помните**, что при использовании критерия χ^2 Пирсона интервалы числом наблюдений *ni* < 5 объединяют с соседними. Исправьте интервальный статистический ряд в соответствии с этим замечанием. Учтите, что первый интервал нужно продлить до -∞, а последний — до +∞. В ячейке C36 введите формулу =СУММ(C28:C35) и проконтролируйте: сумма частот должна быть равна объему выборки. Скопируйте эту формулу на ячейки D36, E36, H36, I36.

5) В столбце D вычислите вероятности попадания нормальной случайной величины в соответствующие интервалы. Для этого в ячейке D29 задайте формулу
=НОРМ.РАСП(B29;$H$17;$H$21;ИСТИНА)-НОРМ.РАСП(A29;$H$17;$H$21;ИСТИНА) и протяните ее на ячейки D30:D34. Функция

НОРМ.РАСП(x;среднее;стандартное откл;интегральная) вычисляет значение функции нормального распределения $F(x)=0,5+\Phi\left(\dfrac{x-a}{\sigma}\right)$. Здесь x — значение, для которого вычисляется значение функции, среднее — математическое ожидание a (задаем выборочное среднее $\overline{x}$), стандартное откл — среднеквадратическое отклонение σ (задаем s), интегральная — логическое значение, определяющее форму функции. Для того чтобы получить нужное значение интегральной функции распределения, задаем Интегральная: ИСТИНА. Если задать значение ЛОЖЬ, то получится значение плотности нормального распределения.

Для первого интервала вероятность вычисляется в ячейке D28 как =НОРМ.РАСП(B28;$H$17;$H$21;ИСТИНА), для последнего — в ячейке D34 как =1-НОРМ.РАСП(A34;$H$17;$H$21;ИСТИНА). В ячейке D36 проконтролируйте, что сумма вероятностей равна 1.

6) В столбцах E, F, G, H, I вычислите для каждого интервала значения np_i, $n_i-np_i, (n_i-np_i)^2, \dfrac{(n_i-np_i)^2}{np_i}, \dfrac{n_i^{\,2}}{np_i}$ и посчитайте соответствующие суммы:

$$\sum_{i=1}^{k} np_i = n\,; \qquad \chi^2_{\text{расч}} = \sum_{i=1}^{k}\frac{(n_i-np_i)^2}{np_i}\,; \qquad \sum_{i=1}^{k}\frac{n_i^{\,2}}{np_i} = \chi^2_{\text{расч}} + n.$$

7) Вычислите критическое значение $\chi^2_{\text{крит}} = \chi^2_{\alpha;\; k\text{-}r\text{-}1}$, где k — число интервалов группировки после объединения малочисленных с соседними, r = 2, поскольку при расчете теоретических вероятностей использовались две полученные по выборке оценки $\overline{x}$ и s параметров нормального распределения. Для этого в ячейке E37 запишите значение $k-r-1$ с учетом объединения интервалов, а в ячейке H37 найдите $\chi^2_{\text{крит}}$ по формуле =ХИ2.ОБР.ПХ(0,05;E37).

8) Сделайте вывод о соответствии или несоответствии проверяемой гипотезы экспериментальным данным при заданном уровне значимости.