Информация о контрольной работе № 1 по дискретной математике

Типы задач:

1 задача

Тип 1.1. Для конкретных множеств, заданных перечислением элементов или условиями в виде неравенств, найти результат выполнения определенных операций над множествами, представленных символьной записью.

Тип 1.2. Для конкретных множеств, заданных перечислением элементов, вставить правильно символы $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$ между парами множеств, или ответить на вопросы, верны ли приведенные в задаче записи с использованием этих символов.

2 задача

Доказать тождество с использованием алгебры теории множеств или упростить выражение, включающее операции над множествами.

3 задача

Для множества в виде совокупности кортежей найти проекции на указанные в задаче оси.

4 задача

На примере конкретных множеств найти результат их декартова произведения или с использованием конкретных примеров доказать справедливость равенства, в котором фигурируют операции над множествами и декартово произведение.

5 задача

Тип 5.1. Для конкретных примеров двух множеств выписать все соответствия, относящиеся к указанному в задаче типу (биекция, сюръекция, инъекция и т.п.).

Тип 5.2. Для приведенной в задаче функции определить, является ли она сюръекцией, инъекцией, биекцией.

6 задача

Тип 6.1. Заданы два соответствия. Найти их композиции.

Тип 6.2. Заданы два отношения в виде множеств упорядоченных пар. Найти их композиции.

Тип 6.3. Задано одно отношение R. Найти композиции $R \circ R$ и $R \circ R^{-1}$.

7 задача

Исследовать бинарное отношение R, заданное определенным математическим условием, на множестве M (проверить, является ли данное отношение рефлексивным, симметричным, транзитивным, антисимметричным; если является – доказать (обосновать), если нет – привести опровергающий пример).

8 задача

Тип 8.1. Разбить множество M на классы эквивалентности при заданном бинарном отношении R.

Тип 8.2. Доказать, что отношение R на множестве M есть отношение эквивалентности и построить соответствующее разбиение множества.

Тип 8.3. Определить, является ли эквивалентным отношение R = {условие}, определенное на множестве чисел (например, целых чисел) или геометрических объектов (например, прямых плоскости).

Тип 8.4. На множестве M задано отношение R. Построить Диаграмму Хассе для этого отношения.

Пояснения для задачи 5. На лк рассмотрен пример двух множеств X и Y, для которых выписаны все возможные варианты соответствий и указано, какие из них относятся к тому или иному типу:

Пример. Пусть $\boldsymbol{X} = \{1, 2\}$, $\boldsymbol{Y} = \{3, 5\}$, значит, $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y} = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5)\}$. Это множество дает возможность получить 16 различных соответствий. Графики соответствий:

$\boldsymbol{Q}_0 = \{(\,)\} = \varnothing$,
$\boldsymbol{Q}_1 = \{(1, 3)\}$,
$\boldsymbol{Q}_2 = \{(1, 5)\}$,
$\boldsymbol{Q}_3 = \{(2, 3)\}$,
$\boldsymbol{Q}_4 = \{(2, 5)\}$,
$\boldsymbol{Q}_5 = \{(1, 3), (1, 5)\}$,
$\boldsymbol{Q}_6 = \{(1, 3), (2, 3)\}$,
$\boldsymbol{Q}_7 = \{(1, 3), (2, 5)\}$,
$\boldsymbol{Q}_8 = \{(1, 5), (2, 3)\}$,
$\boldsymbol{Q}_9 = \{(1, 5), (2, 5)\}$,
$\boldsymbol{Q}_{10} = \{(2, 3), (2, 5)\}$,
$\boldsymbol{Q}_{11} = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3)\}$,
$\boldsymbol{Q}_{12} = \{(1, 3), (1, 5), (2, 5)\}$,
$\boldsymbol{Q}_{13} = \{(1, 3), (2, 3), (2, 5)\}$,
$\boldsymbol{Q}_{14} = \{(1, 5), (2, 3), (2, 5)\}$,

$\boldsymbol{Q}_{15} = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5)\} = \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$.

Отображениями являются соответствия q_6–q_9, q_{11}–q_{15}.

Сюръективными соответствиями являются q_5, q_7, q_8, q_{10}–q_{15}.

Функциональные соответствия: q_1–q_4, q_6–q_9.

Инъективные соответствия: q_1–q_4, q_7, q_8.

Функциями являются q_6–q_9.

Биективные функции: q_7, q_8.

Для задачи 6 (тип 6.2, 6.3). Композиция отношений находится таким же образом, как и композиция соответствий.

Для отношения R = {(5,4), (5,3), (5,2), (2,5)}

R^{-1} = {(4,5), (3,5), (2,5), (5,2)}; $R \circ R^{-1}$ = {(5,5), (5,5), (5,5), (2,2)}

Для отношения R = {(5,4), (5,3), (3,2), (3,5)}

R^{-1} = {(4,5), (3,5), (2,3), (5,3)}; $R \circ R^{-1}$ = {(5,5), (5,5), (3,3), (3,3)}

Пример определения типа отношения R для задачи 7-8

Задача. Показать, что отношение R = {(*a*,*a*), (*a*,*b*), (*b*,*a*), (*b*,*b*), (*c*,*c*), (*d*,*d*), (*d*,*e*), (*e*,*d*), (*e*,*e*)} на множестве A = {*a*, *b*, *c*, *d*, *e*} является отношением эквивалентности. Разбить множество A на классы эквивалентности.

Решение. Очевидно, что отношение R рефлексивно, так есть все пары вида (*a*, *a*). Оно симметрично, поскольку содержит пары (*a*,*b*) и (*b*,*a*), (*d*,*e*) и (*e*,*d*). Транзитивно: (*a*,*b*), (*b*,*a*) и (*a*,*a*); (*d*,*e*), (*e*,*d*) и (*d*,*d*). Следовательно, отношение R – отношение эквивалентности.

Классы эквивалентности:

R(*a*) = {*a*, *b*}; R(*b*) = {*a*, *b*}; R(*c*) = {*c*}; R(*d*) = {*d*, *e*}; R(*e*) = {*d*, *e*}

Пояснения по диаграмме Хассе

Диаграмма Ха́ссе — вид диаграмм, используемый для представления конечного частично упорядоченного множества в виде рисунка его транзитивного сокращения. Конкретно, для частично упорядоченного множества $(S, \leq)$ диаграмма представляет каждый элемент S как вершины на плоскости и отрезки или кривые, идущие *вверх* от элемента x к элементу y, если $x \leq y$ и не существует элемента z, для которого $x < z < y$. Эти кривые могут пересекаться, но не должны проходить через вершины, если только они не являются концами линии. Такая диаграмма с помеченными вершинами однозначно определяют частичный порядок.

Пример диаграммы Хассе из ЛК:

aRb

$a, b \in F(R), \overline{\exists} c \in F(R)$ такого, что aRc и cRb.

$$R = \left\{\begin{matrix} (1,2), (1,3), (1,4), \\ (1,5), (1,6), (1,7), \\ (1,8), (2,5), (2,7), \\ (2,8), (3,5), (3,6), \\ (3,8), (4,6), (4,7), \\ (4,8), (5,8), (6,8), \\ (7,8) \end{matrix}\right\}$$