1.Способы задания множеств

МНЖ-совок. различимых между собой объ., объед. в целое некот. общ. призн.
Эл-ты-объ., из кот. сост. мнж.
Обозн.:*A,B,C*-мнж; a,b,c-эл-ты мнж.
Задание мнж. Чтобы задать мнж, нужно указ., какие эл-ты ему принадл. Это можно сделать различ. спос.:
Перечисл. эл-тов: $A=\{a_1,a_2,...,a_k\}$;
Указ. характеристич. св-ва (хар. предикатом): M := {x|P(x)};
Порожд. проц.: M:={x | x:=f}.
Хар. предик.-это некот. усл., выраж. в форме логич. утв. или проц., возвр. логич. знач., и позвол. провер., принадл. ли люб. данный эл-т мнж-ву. Если для данного эл-та усл. вып., то он принадл. определ. мнж-ву, иначе-не принадл. Порожд. процед.-это процед., кот. в процессе раб. порожд. некот. объ., явл. эл-тами определяемого мнж-ва. Примеры:
M_9:={1,2,3,4,5,6,7,8,9};
M_9:={n | n∈N&n<10};
M_9:={n | for i from 0 to 8 do n:=i+1}.
Перечисл. можно зад. только конеч. мнж-ва. Бесконеч. мнж-ва зад. характеристич. предик. или порожд. процед. Из опред. мнж-ва след., что в нем не должно быть неразлич. элементов. Поэтому во мнж-ве не м.б. одинак. эл-тов. Запись мнж-ва {2,2,3,5} след. рассм. как некорр. и замен. на {2,3,5}.

2.Операции над множествами и их свойства. Диаграммы Венна

Мнж-ва A и B ***равны****(A=B),* т. и т. т., когда *A⊆B* и B⊆*A,*т.е. сост. из одинак. эл-тов, причем порядок следования эл-тов не имеет знач.; в против. случ. пишут A≠B.
Объединением мнж-в A и B(A∪B)наз. мнж-во, сост. из всех тех и только тех эл-тов, кот. принадл. хотя бы одному из мнж-в A,B: A∪B={x | x∈A или x∈B}.
Для объединения множеств существуют коммут. и ассоц. законы: A∪B=B∪A, (A∪B)∪C=A∪(B∪C). A ∪ ∅ = A. A ∪ A = A. Для люб. мнж-в A и B верно A⊆(A∪B), но неверно A∈(A∪B).
Пересечением множеств A и B называется мнж-во C, состоящее из всех элементов, принадлежащих одновременно и A, и B: C=A∩B={x | x∈A и x∈B }. Аналогично определяется пересечение (в том числе бесконечной) системы множеств. Для пересечения множеств существуют коммутативный и ассоциативный законы: A ∩ B = B ∩ A, (A ∩ B) ∩ C = A ∩ (B ∩ C). Рассмотрим A ∩ ∅ = ∅. Очевидно, что A ∩ A = A для любого множества A. Для любых множеств A и B верно A ∪ (A ∩ B) = A, но неверно A ∩ (A ∪ B) = A.
Разностью *мнж-в A и B* наз. мнж-во C, сост. из тех эл-тов мн-жва *A,* кот. не содерж. в мнж-ве B: C=A\B={x | x∈A и x∉B}.
В отличие от операций объед. и пересеч. данная операция опред. только для двух мнж-в. Для произв. мнж-в A и B верны соотн.: A\B = ∅ ⇔ A⊆B, A\∅ = A, A\B = A ⇔ A∩B = ∅.
Дополнением мнж-ва A до универс. мн-жва U ($\overline{A}$) называется мнж-во всех эл-тов U, не принадл. A:
$\overline{A}$={x|(x∈U)&(x∉A)}, $\overline{A}$=U\A, A∩$\overline{A}$= ∅, A∪$\overline{A}$=U, $\overline{\overline{A}}$ = A.
Симм. разн. мнж-в ***A*** и ***B*** (***A*Δ*B***) наз. мнж-во (***A**B***)∪(***B**A***). Оно сост. из всех тех и только тех эл-тов универс. мнж-ва, кот. либо принадл. A и не принадл. B, либо наоборот.
Названные операции и свойства к ним могут быть проиллюстрированы **диаграммами Венна**

3.Декартово произведение множеств, булеан, мощность множества

Прямым произв. мнж-в A и B (A×B) наз. мнж-во, сост. из всех тех и только тех упорядоч. пар, первая компонента которых принадл. мнж-ву A, а вторая–мн-жву B. A×B={(a,b)|a∈A, b∈B}.
Пусть A и B – отрезки соответственно длинами a и b. Прямое произв. A×B предст. собой заштрих. Прямоуг. с длин. a и шир. b в декарт. сист. коорд.
Мнж-во всех подмнж-в мн-жва **A** наз. его ***булеаном*** (мнж-вом-степенью) и обозн. через P(A). **Пример**. Если A={a, b, c}, то P(A)={∅, {a},{b},{c},{a,b},{b,c},{a,c},{a,b,c}}.
Число эл-тов конечн. мн-жва наз. его ***мощностью***. Если мнж-во A содерж. n эл-тов, то будем писать |A| = n. Если A = ∅, то |A| = 0.

4.Упорядоч. мнж-ва. Проекция мн-жва

Кортеж–это послед. эл-тов, т. е. совок. эл-тов, в кот. кажд. эл-т заним. опред. место. Часто кортеж наз. вектором, а эл-ты, образ. кортеж, – его компонентами, или координатами. Комп-ты нумеруются слева направо. Число компонент наз. длиной кортежа. Могут быть и бесконеч. кортежи. В отличие от эл-тов мнж-ва координаты кортежа могут совп.. Кортеж будем заключ. в круглые скобки: a = $(a_1,…,a_n)$-кортеж длиной n с эл-тами a1,…,an. Два конеч. кортежа равны, если имеют одинак. длину и соотв. компоненты.
Операция проектирования мнж-ва может примен. лишь к таким мнж-вам, эл-тами кот. явл. кортежи одинак. длины. Пусть V – мнж-во кортежей одинак. длины. Тогда проекцией мнж-ва V на i-ю ось наз. мнж-во проекций всех векторов из V на i-ю ось: пpiV = {пpiv | vϵV}. Аналогично опред. проекция мнж-ва V на неск. осей: пpi1,...,ikV= | vϵV = { i1,...,ikv | vϵV }. Пример. Пусть V := {1, 2, 3, 4, 5), (2, 1, 3, 5, 5), (3, 3, 3, 3, 3), (3, 2, 3, 4, 3)}. Тогда пр2V={2, 1, 3},пр2,4V={(2, 4), (1, 5), (3, 3)}.

5.Соответствия, основные определения, способы задания

Пусть X и Y–два непустых мнж-ва. Если определен способ сопост. эл-тов Y элементам X, то говорят, что между мнж-вами X и Y уст. ***соответствие***. При этом соверш. необяз., чтобы в сопоставлении участв. все эл-ты мнж-в X и Y. Для того чтобы задать соотв. между мнж-вами X и Y, нужно задать мнж-во Q ⊆ X × Y, определяющее закон, по кот. осущ. соотв., т. е. перечисляющий все пары (x, y), участв. в сопост. Таким обр., соотв. q предст. собой тройку множеств q = (X, Y, Q), в которой Q ⊆ X × Y. X наз. обл. отправл. соотв., Y – обл. прибытия соответствия, Q – графиком соотв. С каждым соотв. неразрывно связаны еще два мнж-ва: мнж-во **пр1Q**, наз. обл. опред. соотв., кот. сост. из всех эл-тов мнж-ва X, участвующих в сопоставл., и мнж-во **пр2Q**, назыв. обл. знач. соотв., кот. сост. из всех эл-тов мнж-ва Y, участвующих в сопост. Если (x, y) ϵ Q, то говорят, что эл-т y соотв. эл-ту x. Если пр1Q = X, то соотв. наз. всюду определенным, или **отображением X в Y** (иначе-частичным). Если пр2Q=Y, то соотв. наз. **сюръективным**. Мнж-во всех y ϵ Y, соотв. эл-ту x ϵ X, наз. **образом** x в Y при соответствии q. Мнж-во всех x ϵ X, которым соотв. эл-т y ϵ Y, наз. **прообразом** y в X при соответствии q. Если C ⊆ пр1Q, то образом мнж-ва C наз. объед. образов всех эл-тов C. Аналогично определ. прообраз мнж-ва D для люб. D ⊆ пр2Q. Соотв. q наз. **инъективным**, если люб. различ. x1 и x2 из пр1Q имеют различ. образы и любые различ. y1 и y2 из пр2Q имеют различ. прообразы при соответствии q. Соотв. q называется **функциональным**, если образом люб. эл-та x ϵ пр1Q явл. единств. эл-т y ϵ пр2Q. Соотв. q между мнж-вами X и Y наз. взаимно однозначным, или **биективным**, если оно всюду определено, сюръективно и инъективно. Однозначное отображение наз. **функцией**. Ф-ция явл. инъективной, если различ. x1 и x2 из X соотв. различ. y1 и y2 из Y, и сюръективной, если она сюръективна как соответствие. Функция наз. биективной, если она одновременно инъективна и сюръективна.

Способы задания: табличный, графический, матрицей, аналитический (т.е.формулой), способ перечисления пар.

6.Бинарные отношения и их свойства

Бинар. отнош. - это отнош. между двумя объ. Бин. отнош. можно опред. как совокуп. упорядоч. пар, указ. объекты, находящиеся в данном отнош. В общем случае, если два эл-та a,b наход. в данном отнош. R, то этот факт запис. (a, b) ϵ R или aRb. Если эти эл-ты не наход. в отнош. R, то это запис. так: (a, b) ∉ R, или a$\overline{R}$b. Некоторым из наиб. изв. отнош. присваивают специальные названия и обозначения. Примеры: эквив. (⇔), отношение порядка (>)или(<), равенство(=), паралл.(‖), перпенд.(⊥) и т. д. Очевидно, что всякое бин. отнош. R можно рассм. как подмнж-во прямого произведения некот. мнж-в A и B: R⊆ A×B. Левой обл. бин. отнош. наз. мнж-во всех первых компонент упорядоч. пар, составл. данное отнош., то есть R_-={a| (a,b)ϵR}. Правой обл. бин. отнош. R наз. мнж-во всех вторых компонент упорядоч. пар, составл. данное отнош., то есть R_+={b| (a,b)ϵR}. Полем бин. отнош. R наз. объедин. его левой и правой областей: F(R)= $R_- \cup R_+$. Бин. отнош. R^{-1} наз. обр. к отнош. R, если (a,b)ϵR^{-1} т и т т, когда (b,a)ϵR то есть R^{-1} ={(a,b)| (b,a)ϵR}.
Пересечением бин. отнош. R по элементу a ϵ F(R) наз. совок. всех вторых компонентов упорядоч. пар, составл. данное отнош., и таких, у кот. первой компонентой есть элемент a. Обозначение: R_a.
Композицией бин. отнош. R и S наз. бин. отнош. T, сост. из всех упорядоч. пар (a, b), для каждой из кот. сущ. эл-т c ϵ $R_+ \cap S_-$ такой, что (a, c) ϵ R, (c, b) ϵ S (то есть aRc, cSb). Операцию композиции записывают так: T = R°S. Например, пусть R = {(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 3)}, S = {(2, 4), (2, 5), (3, 2), (5, 5)}. Тогда R°S = {(1, 4), (1, 5), (2, 2), (3, 2)}, S°R = {(3, 3)}
Св-ва бин. отнош. Бин.отнош. R наз. **рефлексивным**, если для люб. эл-та a ϵ F(R) имеет место aRa. Бин. отнош. R наз. **антирефлексивным**, если для любого элемента поля a ϵ F(R) имеет место a$\overline{R}$a. Бин. отнош. R **симметричное**, если из aRb следует bRa. Бин. отнош. R **асимметрично**, если из aRb следует b$\overline{R}$a. Бин. отнош. R наз. **антисимметричным**, если из aRb и bRa следует, что a = b. Бин. отнош. R наз. **транзитивным**, если из aRb и bRc следует aRc. В противном случае отношение R наз. нетранзитивным. Бин. отнош. наз. отношением **эквивалентности**, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Классом эквив. Ra наз. мнж-во всех вторых компонентов упорядоч. пар отношения эквив. R, у кот. первой компонентой явл. эл-т a: R_a = {b | (a, b) ϵ R}.

7.Способы зад. Бин. отнош.

1. Бин. отнош. R можно задать перечисл. всех упорядоч. пар, находящихся в отнош. R. Такой способ задания отнош. приемлем для относ. небольш. числа упорядоч. пар. Например: R1 = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)}.
2. Задать формулой. Например: $S = \{(a,b) | (a-b) = 0 \bmod 3; a,b \in \{0..10\}\}$.
3. Графич. задание бин. отнош. предполаг. графич. представл. эл-тов левой и правой обл. отнош. в виде точек в этих областях, соедин. дугами. Каждая дуга представл. некот. упорядоч. пару, находящ. в данном отнош. Дуга нач. в точке, соотв. первой компоненте упорядоч. пары, и заканч. в точке, соотв. второй компоненте упорядоч. пары.
4. В табличной форме. В этой таблице указ. все эл-ы поля отнош. и соотв. им пересечения данного отнош. по выбранному эл-ту.
5. Бин. отнош. можно задать матрицей ||ai,j||, в кот. строки и столбцы соотв. полю отнош. В этой матрице i-я строка соотносится с некот. эл-том левой области отнош., а j-й столбец – с некот. эл-том правой области отнош. Тогда ai,j = 1, если соотв. эл-ты наход. в данном отнош., и ai,j = 0 в противном случае.

8.Операции над бинарными отношениями

Если R – бин. отнош., то в качестве универс. мнж-ва в этом случае рассм. мнж-во
U = F(R) × F(R), где F(R) – поле отнош. R. Если совместно рассм. несколько бин. отнош., то в кач. универс. мнж-ва рассм. мнж-во U = A × A, где A есть объед. полей каждого из рассм. отнош. Так как всякое бин. отнош. – это мнж-во упорядоч. пар, то над бин. отнош. можно вып. все теоретико-множественные операции: объед., пересеч., разность, дополн.
Пример**:** Пусть $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(3,3)\}$ и $S = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$. В этом случ. универс. мнж-во имеет вид: $U = \left\{ \begin{matrix} (1,1),(1,2),(1,3),(2,1), \\ (2,2),(2,3),(3,1)(3,2),(3,3) \end{matrix} \right\}$.
$\bar{R} = \{(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2)\}$; $\bar{S} = \{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\}$.
$R\backslash S = \{(1,2),(1,3)\}$; $R \cap S = \{(1,1),(3,3)\}$.

1.Высказывания и операции над ними

Высказывание – это повествовательное предлож-е, о к-ом можно сказать истинно оно или ложно. Каждое из высказ-ий принято обозначать латинской буквой. Если высказ-ие представляет собой одно утверж-ие - его наз-ют элементарным или простым. Используя такие логич-ие операции, как не, или, и, можно построить новые, так наз-ые составные высказывания компонуя более простые.
Логич операцией наз-ся построение нового высказ-ия из исходных высказываний
Отрицанием произвол высказ-ния *x* назыв высказ-ие вида ($\bar{x}$), чье истинностное знач-е строго противоположно знач-ию X. Определяющая таблица истинности отрицания высказ-ия приведена в табл.
Конъюнкцией или логическим умножением двух высказываний X и У называют составное высказ-ние вида z=x^y(x*y). Оно принимает истинное знач-ие только в том случае, когда истинны обе его составные части.
Дизъюнкцией или логическим сложением двух высказ-ий X и У назыв составное высказ-ие z=x˅y(x+y). Оно истинно, если хотя бы одна из ее состав частей имеет истинное знач.
Импликацией двух высказываний X и У называется составное высказ-ие z=x→y. Оно будет ложью когда x – истинно, а y – ложно, в остальных случаях будет истиной.
Эквиваленцией двух высказываний X и У называется составное высказывание z=x↔y. Оно истинно, только когда оба высказывания либо истины, либо ложны.
Исключающее двух высказываний X и У называется составное высказывание z=x(+)y. Оно истинно, только когда оба высказывания не совпадают.

2.Формулы алгебры высказываний и порядок выполнения операций. Таблицы истинности.
С пом-ю логич опер-ий над высказ-ями можно строить различ формулы. Порядок операций: ¬,^,˅,(+),→,↔. Всякое высказ-ие, кот. м.б. получено из элементарных высказ-ий путём применения конеч числа логич операций, наз. ***формулой алгебры логики.*** Логич знач формулы опр-тся заданными логич знач-ями входящих в неё элементарных высказ-ий. Если ставится задача определить все возможные формулы в зависимости от значения входящих в неё – решается через построение **таблицы истинности**.

3.Равносильности логических формул

Две формулы алгебры логики A и B называются равносильными, если они принимают один-ые логич знач-я при любом наборе знач-ий входящих в формулы элементарных высказываний (переменных).
Обозначение. A≡B. Формула A называется **тождественно истинной** (тавтологией), если она принимает значение 1 при всех знач-ях входящих в её переменных. Формула A называется **тождественно ложной**, если она принимает знач-ие 0 при всех значениях входящих в её переменных.
Свойства: 1) A=A –рефлексивность, 2) Если A=B, то B=A – симметричность, 3) A=B, B=C, то A=C – транзитивность 4)x*/+y=y*/+x – коммунитативность, 5) (x*/+y)*/+z=(x*/+z)*/+y – ассоциативность, 6) (x*/+y)+/*z=(x+/*z)*/+ (y+/*z) – дистрибутивность.

1. Основные равносильности.
- $x \wedge x \equiv x, x \vee x \equiv x$ – законы идемпотентности;
- $x \wedge 1 \equiv x$;
- $x \vee 1 \equiv 1$;
- $x \wedge 0 \equiv 0$;
- $x \vee 0 \equiv x$;
- $x \wedge \bar{x} \equiv 0$ – закон противоречия;
- $x \vee \bar{x} \equiv 1$ – закон исключенного третьего;
- $\bar{\bar{x}} \equiv x$ – закон снятия двойного отрицания;
- $x \vee (y \wedge x) \equiv x,\ x \wedge (y \vee x) \equiv x$ – законы поглощения.

1. Равносильности, выражающие одни логические опера
- $x \leftrightarrow y \equiv (x \to y) \wedge (y \to x)$;
- $x \to y \equiv \bar{x} \vee y$;
- $\overline{x \wedge y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y}$;
- $\overline{x \vee y} \equiv \bar{x} \wedge \bar{y}$;
- $x \wedge y \equiv \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}$;
- $x \vee y \equiv \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}}$.

Формулы расщепления: (x*y)+(x*$\bar{y}$)=x и (x+y)*(x+$\bar{y}$)=x

4.Булевы ф-и и способы их задания

Булевой ф-ей (*БФ*) или ф-ей алгебры логики (*ФАЛ*), от n переменных называется ф-ия $f(x_1,x_2,x_3,…,x_n)$, кот на любом наборе своих аргументов мож принимать одно из двух зн-ий: 0 или 1. Под набором аргументов пон-тся совок-сть зн-ий переменных, каждая из кот может быть равна 0 или 1. Для ф-и от n аргументов кол-во возможных наборов равно $2^{\wedge}2^{n}$
1) Задание булевой ф-и таблицей истинности

	x_1	x_2	...	x_n	$f(x_1,x_2,...,x_n)$
0	0	0	...	0	$f(0,0,...,0)$
1	0	0	...	1	$f(0,0,...,1)$
...	...	...	...	...	...
a	a_1	a_2	...	a_n	$f(a_1,a_2,...,a_n)$
...	...	...	...	...	...
2^n-1	1	1	...	1	$f(1,1,...,1)$

2) Задание булевой ф-ии характер-ими множествами. Так называются два множества:
M^1_f, сос-ее из всех наборов, на кот ф-я принимает знач 1, то есть $M^1_f = \{\alpha \in B^n : f(\alpha) = 1\}$;
M^0_f, сос-ее из всех наборов, на кот ф=я принимает знач 0, то есть $M^0_f = \{\alpha \in B^n : f(\alpha) = 0\}$.
3) Задание булевой ф-и вектором ее значений. φ_f=f(0,0, …, 0)f(0,0, …, 1) … f(1,1, …, 1).
4) Задание булевой ф-и матрицей Грея. Булево прост-во задается матрицей Грея, и наборы (клетки матрицы), на которых булева ф-я $f(x_1, …, x_n)$ принимает знач 1, отмечаются и называются *точками*.
5) Интервальный способ задания булевой ф-и. Булеву ф-ию $f(x_1, …, x_n)$ можно задать мн-ом интервалов $I_f = \{I_1, I_2, …, I_k\}$, объединение кот. образует харак-ческое мн-во M^1_f, то есть $I_1 \cup I_2 \cup … \cup I_k = M^1_f$. Мн-во интервалов I_f назыв *достаточным* для ф-и $f(x_1, …, x_n)$.
6) Задание булевой ф-и формулами.

5.Дизъюктивные формы представления логический функций. Приведение к ДНФ

ДНФ логич-ой ф-и назыв дизъюнкция любого конечного множества попарно различных элементарных конъюнкций. $f(x_1,x_2,x_3) = x_1\bar{x}_2 \vee x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_3$.
Алгоритм приведения формулы к ДНФ:
1. Выражают все логич операции в формуле через дизъ-ию, конъюнкцию и отрицание.
2. Используя законы Де-Моргана переносят все отрицания к переменным и сокращают двойные отрицания.
3. Используют закон дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции, преобразуют формулу так, чтобы все конъюнкции встречались раньше дизъюнкции.

6.Совершенная нормальная дизъюктивная форма и её свойства

Совершенная дизъюнктивная норм форма формулы (СДНФ) - это дизьюнкция коньюнкций, обладающая свой-ми:
1. Каж логич-ие слагаемое формулы содерж все переменные, вход-ие в ф-ю F(x1,x2,...xn)
2. Все логич слагаемые формулы различны
3. Ни одно логич слагаемое не содержит переменную и её отрицание
4. Ни одно логич слагаемое формулы не содержит одну и ту же переменную дважды. СДНФ можно получить или с пом-ю таблиц истинности или с пом-ю равносильных преобразований.

7.Конъюнктивные формы представления логических функций. Приведение к КНФ

Что значит нормальна форма: Нормальная форма логич формулы не содержит знаков импликации, эквиваленции и отрицания неэлементарных формул. **Конъюнктивная нормальная форма**, т. е. конъюнкция нескольких дизъюнкций КНФ: $(x \vee \bar{y} \vee z) \wedge (y \vee z)$

Для приведение к КНФ:
1. Привести ф-ю к виду, используя базовые операции – конъ-цию, дизъ-цию и инверсию;
2. преобразовать инверсию с помощью законов де Моргана до отдельных букв;
3. уничтожить все суммы произведений, используя законы поглощения, с помощью второго закона дистрибутивности.

8.Совершенная нормальная конъюнктивная форма и её свойства

Совершенно конъюнктивная НФ - конъюнкция дизъюнкций, причём в каждой дизъюнкции (в каждой скобке) присутствуют все переменные, входящие в формулу, либо их отрицание, нет одинаковых дизъюнкций, в каждой дизъюнкции нет одинаковых слагаемых.
Свойства: 1. в ней нет одинаковых элементарных дизъюнкций
2.в каждой дизъюнкции нет одинаковых пропозициональных переменных
3.каждая элементарная дизъюнкция содержит каждую пропозициональную букву из входящих в данную КНФ пропозициональных букв.

9.Базис представления логических функций(Функционально полная система)

Функц-но полная система логических элементов - это такой набор элементов, используя кот-й можно реализовать любую сколь угодно сложную логич-ую ф-ю. Поскольку любая логич-ая ф-я представляет собой комбинацию простейших ф-й – дизъ-ии, конъ-ии и инверсии, то набор из элементов трех типов, реализующих соответ-нно ф-и И, ИЛИ и НЕ, естественно, явл функц-но полным.
Система логич-их ф-й $\Sigma = \{f_1,...,f_m\}$ называется *Функц-но полной системой*, если любая логическая ф-я может быть выражена через ф-и $f_1,...,f_m$ с помощью их суперпозиции

10.Процедуры приведения ДНФ к КНФ и наоборот

Алгоритм этого перехода следующий: ставим над ДНФ два отрицания и с помощью правил де Моргана (не трогая верхнее отрицание) приводим отрицание ДНФ снова к ДНФ. При этом приходится раскрывать скобки с использованием правила поглощения (или правила Блейка). Отрицание (верхнее) полученной ДНФ (снова по правилу де Моргана) сразу дает нам КНФ:

$$xy \vee y\bar{z} = \overline{\overline{xy \vee y\bar{z}}} = \overline{\overline{xy} \cdot \overline{y\bar{z}}} = \overline{(\bar{x} \vee \bar{y})(\bar{y} \vee z)}$$
$$= \overline{\bar{y} \vee \bar{x}z} = y \cdot (\overline{\bar{x}z}) = y \cdot (x \vee \bar{z}).$$

Заметим, что КНФ можно получить и из первоначального выражения, если вынести y за скобки;

б) переход от КНФ к ДНФ. Этот переход осуществляется простым раскрытием скобок (при этом опять-таки используется правило поглощения)

$(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y})(\bar{y} \vee \bar{z}) = (\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) = \bar{y} \vee \bar{x}\bar{z}$. Таким образом, получили ДНФ.

11.Геометрическое представление логических функций. Контактные схемы

В геометрич-ом смысле кажд набор знач-ий_переменных $(x_1, x_2, ..., x_n)$ можно рассматривать как n – мерный вектор, определяющий точку в n –мерном пространстве. Все множество двоичных наборов значений аргументов образует геометрическое множество вершин n –мерного единичного куба. Выделяя вершины, на которых значение ф-и равно 1, можно получить геометрический образ истинностной ф-и.

Контактная схема (англ. *contact circuit*) представляет собой ориентированный ациклический граф, на каждом ребре которого написана переменная или ее отрицание. При операции конъюнкции(умножение) идёт последовательное соединение контактов, при операции дизъюнкция – параллельное. При отрицании – ключ замкнут.

12.Минимизация логических функций. Правила минимизации

Минимальной формой представления переключательной ф-и называют такую форму, которая не допускает больше никаких упрощений.
Основные этапы метода гиперкубов
- Построить таблицу истинности.
- Выписать все гиперкубы из M1(f) и импликанты.
- Взять простые импликанты.
- Построить таблицу накрытия.
- Из оставшихся простых импликантов создать тупиковую ДНФ.

Возьмем в качестве примера следующую булеву функцию.

$$f(x,y,z) = xy \vee \bar{x}z \vee yz$$

	x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

$M_1(K)$	K
{1}	$\bar{x}\bar{y}z$
{3}	$\bar{x}yz$
{6}	$xy\bar{z}$
{7}	xyz
{1,3}	$\bar{x}z$
{3,7}	yz
{6,7}	xy

	1	3	6	7
$\bar{x}z$	1	1		
yz		1		1
xy			1	1

1) Построим таблицу истинности для нее:
2) Выпишем все гиперкубы, лежащие в M1(f) и соответствующие им импликанты:
3) Выбираем простые импликанты и строим таблицу их накрытия:
4) Поскольку импликанта yz перекрывается другими, ее можно изъять из выражения. Выходит, что тупиковая ДНФ ф-и имеет вид:
$$f(x,y,z) = xy \vee \bar{x}z$$

13.Принцип двойственности в булевой алгебре

Булева ф-я f*(x1, …, xn) называется двойственной булевой ф-и f(x1, …, xn), если она получена из f(x1, …, xn) инверсией всех аргументов и самой ф-и.
Пример: $(x \vee y)^* = (\overline{\bar{x} \vee \bar{y}}) = \bar{\bar{x}}\bar{\bar{y}} = xy$. Ф-я f называется самодвойственной если **f*=f.**
ТЕОРЕМА (**Закон двойственности**)
Если формула f1 равносильна формуле f2 , то формула f1* равносильна формуле f2*.
ТЕОРЕМА (**Принцип двойственности**)
Двойственная к булевой формуле может быть получена заменой констант 0 на 1, 1 на 0, ∧ на ∨, ∨ на ∧ и сохранением структуры формулы.

14.Понятие предиката, *n*-местный предикат, равносильные предикаты.

Это понятие обобщает понятие «высказ-ие». Высказ-е как повествов-ное предложение состоит из подлежащего и сказуемого. Сказуемое в высказ-ии называется *предикатом*.
Предикат — это высказ-ие, содержащее неизвестную (или несколько неизвестных), т. е. в него можно подставлять аргументы. Если аргумент один — то предикат выражает свойство аргумента, если больше — то отношение между аргументами.
Пусть $N=\{N_1,N_2,N_3,…,N_n\}$ – конечный набор множеств. Всякая функция $P(X_1,…,X_n)$, ставящая в соответствие каждому набору из n элементов $\{a_1,a_2,…,a_n)$, где $a_i \in N_i$, какой-либо из элементов булевой алгебры (0,1) называется n-местным предикатом на N.
Предикаты P и Q, определенные на множестве $M = M_1 \times … \times M_n$, называются равносильными (пишут P≡Q), если $P(x_1,…, x_n) = Q(x_1,…, x_n)$. для любого набора $x_1,…,x_n$ предметных переменных из M.

15.Кванторы, понятие операции навешивания квантора.

Квантор связывает переменную, т.е. преобразует предикат в высказывание. Если переменная не связана квантором, она называется свободной. Число свободных переменных определяют размерность предиката.
Для общего случая n-местного предиката $P(x_1,…,x_n)$:
операции навешивания кванторов ∀ и ∃ по переменной x_1 (в общем случае по переменной x_i, где i= 1,…,n, ставит в соответствие предикату $P(X_1,…,x_n)$ (n-1) – местные предикаты $\forall x_1 P(x_1,…, xn)$ и $\exists x_1 P(x_1,…, x_n)$ соответственно.
Квантор общности

- P(x) – одноместный предикат, $x \in M$.
- P(x) является неопределенным высказыванием.
- Операция ∀ ставит в соответствие неопределенному высказыванию P(x) высказывание ∀x P(x), которое читается так: “для любого x имеет место P(x)” и по определению является истинным тогда и только тогда, когда P(x) истинно для любого элемента x ∈ M.
- Переход от неопределенного высказывания P(x) к высказыванию ∀x P(x) называется операцией навешивания квантора общности по предметному переменному x.
- Мы говорим, что предметная переменная x связана в предикате P(x) квантором всеобщности.

Квантор существования
- P(x) – одноместный предикат, $x \in M$.
- P(x) - неопределенное высказывание.
- Операция ∃ ставит в соответствие неопределенному высказыванию P(x) высказывание ∃x P(x), которое читается так: “существует такое x, что имеет место P(x)” и по определению является истинным тогда и только тогда, когда P(x) истинно хотя бы для одного элемента x ∈M.
- Переход от неопределенного высказывания P(x) к высказыванию ∃x P(x) называется операцией навешивания квантора существования по предметному переменному x.
- Мы говорим, что предметная переменная x связана в предикате P(x) квантором существования.

16.Формулы логики предикатов; атомарная, литеральная формулы.

Формула логики предикатов определяется индуктивно по следующей схеме:

1) Всякая логическая переменная (т. е. 0-местный предикат) есть формула.
2) Если P — n-местный предикат, то $P(x_1, , x_n)$ — формула. Все переменные x_1, , xn — свободные переменные, связанных переменных в этой формуле нет.
3) Если A — формула, то ¬A — формула с теми же свободными и связанными переменными, что и в формуле A.
4) Если A и B — формулы, причем нет таких переменных, которые были бы связанными в одной формуле и свободными в другой, то выражения (A& B), (A∨B), (A→B), (A↔ B), (A⊕B) – суть формулы, в которых свободные переменные формул A и B остаются свободными, а связанные переменные формул A и B остаются связанными.
5) Если A — формула, содержащая свободную предметную переменную x, то ∀x A и ∃x A — тоже формулы. Переменная x в них связана. Остальные же переменные, которые в формуле A были свободны, остаются свободными и в новых формулах. Переменные, которые были связаны в A, связаны и в новых формулах.
6) Других формул, кроме построенных по правилам пяти предыдущих пунктов, нет.
Формула вида $P(x_1, , x_n)$, где P — n-местный предикат, называется атомарной (или элементарной). Литеральной формулой (или литералом) называют атомарную формулу или отрицание атомарной формулы. Атомарная формула называется положительным литералом, а ее отрицание — отрицательным литералом. Дизъюнкт — это дизъюнкция конечного числа литералов. Если дизъюнкт не содержит литералов, его называют пустым дизъюнктом.

17.Основные равносильности, содержащие кванторы.

Пусть P(x), Q(x) и R(x,y) — произвольные два одноместных предиката и двухместный предикат, а S — произвольное переменное высказывание (или формула, не содержащая x). Тогда имеют место следующие равносильности:

1. $\neg(\forall x\, P(x)) \equiv \exists x\, \neg P(x)$ (первый закон де Моргана для кванторов);
2. $\neg(\exists x\, P(x)) \equiv \forall x\, \neg P(x))$ (второй закон де Моргана для кванторов);
6. $\forall x\, (S \wedge P(x)) \equiv \forall x\, P(x) \wedge S$;
7. $\forall x\, (S \vee P(x)) \equiv \forall x\, P(x) \vee S$;

- Эти соотношения показывают, что произвольное высказывание или формулу, не содержащую x, можно вносить под знак квантора всеобщности и выносить из-под знака этого квантора в конъюнкции и дизъюнкции.
  9. $\exists x\, (S \wedge P(x)) \equiv \exists x\, P(x) \wedge S$;
  11. $\exists x\, (S \vee P(x)) \equiv \exists x\, P(x) \vee S$;
- Эти соотношения показывают, что произвольное высказывание или формулу, не содержащую x, можно вносить под знак квантора существования и выносить из-под знака этого квантора в конъюнкции и дизъюнкции
- 13. $\forall x\, (P(x) \to S) \equiv \exists x\, P(x) \to S$;
- 14. $\forall x\, (S \to P(x)) \equiv S \to \forall x\, P(x)$;
- 15. $\exists x\, (P(x) \to S) \equiv \forall x\, P(x) \to S$;
- 16. $\exists x\, (S \to P(x)) \equiv S \to \exists x\, P(x)$;
- 17. $\forall x\, S \equiv S$;
- 18. $\exists x\, S \equiv S$;
- 19. $\forall x\, (Q(x) \wedge P(x)) \equiv \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$ (дистрибутивность квантора всеобщности относительно конъюнкции);
- 20. $\exists x\, (Q(x) \vee P(x)) \equiv \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$ (дистрибутивность квантора существования относительно дизъюнкции);
- 21. $\exists x\, (Q(x) \vee P(x)) \to (\exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x) \equiv 1$;
- 22. $(\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x)) \to \forall x\, (P(x) \vee Q(x)) \equiv 1$;
- 23. $\forall x\, P(x) \equiv \forall y\, P(y)$;
- 24. $\exists x\, P(x) \equiv \exists y\, P(y)$;
- 25. $\forall x\, \forall y\, R(x,y) \equiv \forall y\, \forall x\, R(x,y)$ (коммутация одноименных кванторов);
- 26. $\exists x \exists y\, R(x,y) \equiv \exists y \exists x\, R(x,y)$ (коммутация одноименных кванторов);
- 27. $\exists y\, \forall x\, R(x,y) \to \forall x\, \exists y\, R(x,y) \equiv 1$.
  Соотношения 21, 22 и 27 не будут верны, если поменять направления стрелок на противоположное.

18.Предваренная нормальная форма.

- Формула логики предикатов находится в предваренной (или префиксной) нормальной форме, если она имеет вид
- $Q_1x_1 \dots Q_nx_n\, F$, где каждый Q_i есть квантор всеобщности или существования, переменные x_i, x_j различны при $j \neq i$, а F — формула, содержащая операции ∧, ∨, ¬ и не содержащая кванторов. Выражение $Q_1x_1 \dots Q_nx_n$ называют префиксом (или кванторной приставкой), а формулу F — матрицей.
- Если все Q_i — ∀, то эта форма называется ∀-формулой. Если все Q_i — ∃, то эта форма называется ∃-формулой.
- Формулы, в которых из логических символов имеются только символы ∧, ∨, ¬, причем символ ¬ встречается лишь перед символами предикатов, называют приведенными формулами.
- Всякая формула логики предикатов с помощью равносильных преобразований может быть приведена к равносильной ей префиксной нормальной форме.

1.Правила суммы и произведения

Пусть X – конечное мнжво такое, что |X| = n. Тогда говорят, что объект x из X мб выбран n способами.
Пусть X1, …, Xn – попарно непересекающиеся мнжва, то есть Xi ∩ Xj = ∅ при любых i ≠ j. Тогда, очевидно, выполняется равенство

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |X_i|.$$

В комбин. этот факт наз. **правилом суммы.** Для n = 2 оно формулируется след. образом: «Если объект x мб выбран m способами, а объект y – другими n способами, то выбор “либо x, либо y” мб осуществлен m + n способами». **Правило произведения:** Если объект x1 мб выбран n1 способами, после чего объект x2 мб выбран n2 способами и для любого i, где 2 ≤ i ≤ m − 1, после выбора объектов x1, ..., xi объект xi+1 мб выбран ni+1 способами, то выбор кортежа (x1, x2, ..., xm) длины m может быть осуществлен n1 · n2 · … · nm способами. Сформулируем частный случай этого правила для кортежа длины 2: «Если объект x мб выбран m способами и после каждого из таких выборов объект y в свою очередь мб выбран n способами, то выбор упорядоченной пары (x, y) мб осуществлен m · n способами».

2.Размещения

Размещениями наз. комбинации, составленные из n различных эл-тов по m эл-тов, кот отличаются либо составом эл-тов, либо их порядком.
Число всех возможных размещений вычисляется по формуле:

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

(п, к)-размещением с повторениями наз. упорядоченная (п, А;)-выборка, эл-ты в кот. могут повторяться;
(п, к)-размещением без повторений наз. упорядоченная (п, /с)-выборка, эл-там в кот. повторяться запрещено;
Теорема. Число всевозможных размещений с повторениями из n элементов по k равно n^k.

3.Перестановки

Перестановками наз. комбинации, состоящие из одних тех же n различных эл-тов и отличающиеся только порядком их расположения.
Число всех возможных перестановок находится по формуле:
$P_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!$,
Если в основном мнжве k эл-тов a1,a2,...ak и выборка n эл-тов составляется так:
Эл-т a1 повторяется n1 раз,
...
Эл-т ak повторяется nk раз,
такие выборки называются перестановками с повторениям.
Их возможное количество вычисляется вычисляется по формуле:

$$\overline{P_n} = P_{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

4.Сочетания

Сочетаниями наз. комбинации, составленные из n различных элементов по m эл-тов, кот. отличаются хотя бы одним эл-том.
Число всех возможных сочетаний находится по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!}.$$

• неупорядоченная (n,k)-выборка с повторяющимися элементами называется (n,k)-сочетанием с повторениями
• неупорядоченная (n,k)-выборка без повторяющихся элементов называется (n,k)-сочетанием без повторений.
Теорема. Число сочетаний с повторениями из n элементов по k выражается формулой

$$\tilde{C}_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = C_{n+k-1}^k.$$

5.Биномиальные коэффициенты. Основные формулы. Треугольник Паскаля.

Биномиальные коэффициенты

1. $C_n^m = C_n^{n-m}$
2. $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$
3. $\sum_{m=0}^{n} C_n^m = 2^n$
4. $\sum_{m=0}^{n} mC_n^m = n2^{n-1}$
5. $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = \sum_{m=0}^{n-1} C_{n-1}^m$
6. Теорема (формула бинома Ньютона):

$$(x+y)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^n y^{n-m}$$

Треугольник Паскаля

Из формулы 2) следует эффективный способ рекуррентного вычисления значений биномиальных коэффициентов, которые можно представить в графической форме, известной как треугольник Паскаля.

```
        1
      1   1
    1   2   1
  1   3   3   1
1   4   6   4   1
. . . . . . . . .
```

6.Формулы включений и исключений

Формула включений-исключений — комбинаторная формула, позволяющая определить мощность объединения конечного числа мнжв, кот в общем случае могут пересекаться друг с другом. Например, в случае двух множеств AA, BB формула включений-исключений имеет вид:
|A∪B|=|A|+|B|−|A∩B|.
Теорема 2

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

для любых конечных множеств A, B и C.

Общая формула включений-исключений утверждает: $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots$

$\ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$.

1.Графы, основные понятия и определения

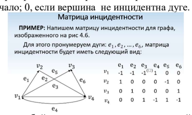
Пусть V – непустое мнжво и E – набор пар эл-тов мнжва V, причем в парах мб одинак эл-ты и допускается повторение пар. Тогда совокупность (V, E) наз. графом G. Будем обозначать иногда этот граф как G(V, E). Эл-ты мнжва V наз вершинами графа, а эл-ты мнжва E – ребрами. Ребра графа могут представляться как неупоряд. парами {vi, vj}, так и упоряд. (vi, vj). В последнем случае ребро наз. ориентир., или дугой, vi – начальной вершиной (началом), vj – конечной вершиной (концом) данной дуги. Ребро {vi, vi} или дуга (vi, vi) наз петлей. Граф, состоящий из вершин и соединяющих их ребер, наз неориентир, а граф, состоящий из вершин и соединяющих их дуг, – ориентир (орграфом). Графы, содержащие как ребра, так и дуги, именуются смешанными. Вершины, соединенные между собой хотя бы одним ребром или дугой, наз. смежными. Аналогично, два ребра, имеющие хотя бы одну общую вершину, наз. смежными. 4 и e5. Если ребро ek соединяет две вершины, т. е. ek = {vi, vj}, ek = (vi, vj) или ek = (vj, vi), то ребро ek наз. инцидентным вершинам vi и vj или вершины vi и vj наз. инцидентными ребру ek. Граф наз. конечным, если мнжва его вершин и ребер конечны (пустое мнжво тоже рассматривается как конечное). Назовем граф обыкновенным или простым, если в нем отсутствуют петли и кратные ребра (дуги). Граф, имеющий кратные ребра (дуги), наз мультиграфом, а граф, в кот есть хотя бы одна петля, наз псевдографом. Два графа G и H изоморфны (записывается G≡H), если между их мнжми вершин существует взаимно однозначное соответствие, сохраняющее смежность. Если ребра ориентированы, то их направления также должны соответ. друг другу. Обыкновенный неориентированный граф наз. полным, если любые две различные его вершины смежные. Обыкновенный орграф наз полным, если в нем любые две различные вершины соединены парой антипараллельных дуг. Число ребер неориентир. графа, инцидентных вершин v, наз степенью, или порядком, этой вершины. При подсчете числа ребер, инцидентных вершине v, некот неопределенность вносит петля, так как ее можно считать и как единственное, и как двойное ребро. Будем обозначать степень вершины v через d(v) (или deg(v)). Изолированными наз вершины, кот не явл концами ребер и не связаны ни между собой, ни с другими вершинами. Изолированность вершины v в неориентированном графе эквивалентна условию d(v) = 0. Вершина степени 1 (единица) наз. концевой, или висячей, вершиной, если петля считается двойной. Маршрутом в графе называется чередующаяся последовательность вершин и рёбер. Если vq — Vk, то маршрут замкнут, иначе — открыт. Если все рёбра различны, то маршрут называется цепью. Замкнутая цепь называется циклом, замкнутая простая цепь называется простым циклом. Число циклов в графе G обозначается z(G). Граф без циклов называется ациклическим. Для орграфов цепь называется путем, а цикл — контуром. Цепь(цикл) наз-ся гаментоновым, если он проходит через все вершины графа по одному разу.

Способы представления графов

1) Графически;
2) На языке теории множеств;
3) Матричным способом;
4) Списками.

Матрицей смежности вершин неор графа G наз. квад. матрица A(G) = (aij) порядка p (p – кол-во вершин графа), эл-ты aij кот. равны числу ребер, соединяющих вершины vi и vj (при этом петля может означать одно или два ребра по договоренности).
Матрицей смежности вершин ор графа G наз квад матрица A(G) = (aij) порядка p (p – кол-во вершин графа), эл-ты aij кот равны числу дуг, исходящих из вершины vi и заходящих в вершину vj.

Матрицей инцидентности неор графа G наз матрица B(G) = (bij) размерности p × q (p и q – кол-во вершин и ребер графа соотв), эл-ты кот определяются след.образом: 1, если вершина инцидентна ребру ; 0, если вершина не инцидентна ребру. **Матрицей инцидентности орграфа** G с вершинами p и ребрами q наз матрица B(G) = (bij) размерности p × q, эл-ты кот опред след образом: 1, если вершина начало дуги ; -1, если вершина конец дуги ; 1, если начало; 0, если вершина не инцидентна дуге.



Список смежности. Представляет собой струк данных, кот для каждой вершины графа хранит список смежных с ней вершин. Список представл собой массив указат, i-ый эл-т кот содержит указатель на список вершин, смежных с i-ой вершиной.
Список инцидентности. Эта структура содержит для каждой вершины v∈V список таких вершин u∈V, что существует дуга (v,u) в орграфе или ребро (v,u) в неориентированном графе. Каждый элемент такого списка содержит два поля: информацию о вершине и указатель на следующий элемент в списке.

5.Изоморфизм графов.

Два графа G и H изоморфны (записывается $G \cong H$), если между их мнжвами вершин сущ взаимно однозначное соответствие, сохраняющее смежность. Если ребра ор, то их направления также должны соответствовать друг другу. Очевидно, что отношение изоморфизма графов является эквив-стью, т. е. оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. След, мнжво всех графов разбивается на классы так, что графы из одного класса попарно изоморфны, а графы из разных классов не изоморфны. Изоморфные графы, естественно, отождествлять, т. е. считать совпадающими (их можно изображать одним рисунком). На практике доказывается с помощью перестановки строк и столбцов матрицы смежности.

6.Частичные графы. Подграфы

Граф H(x) наз **част.** для графа G(X), если все ребра H(X) явл ребрами G(X) и мнжво вершин графа H(X) совпадает с мнжвом вершин графа G(X) Част. граф содержит **часть ребер** (дуг). Подграф содержит **часть вершин** вместе с ребрами, соединяющими эти вершины. Граф наз связным, если любые две его вершины можно соединить цепью

7.Маршруты, цепи, циклы

Маршрутом в графе наз чередующаяся послед-сть вершин и рёбер. Если vq — Vk, то маршрут замкнут, иначе — открыт. Если все рёбра различны, то маршрут наз цепью. Замкнутая цепь наз циклом, замкнутая простая цепь наз простым циклом. Число циклов в графе G обозначается z(G). Граф без циклов наз ациклическим. Для орграфов цепь наз путем, а цикл — контуром. Цепь(цикл) наз гаментоновым, если он проходит через все вершины графа по одному разу.

8.Связность графа. Цикломатическое число.

Цикломатическим числом графа называется число
$\delta = N - n + q$, где N— ребера, n —вершины, q— число компонент связности. Для связного графа $\delta = N - n + 1$.
Теорема 4. Цикломатическое число графа равно наиб кол-ву независимых циклов.
Следствия:
1) Связный граф G не имеет циклов т и т т, когда $\delta = 0$. Такой граф есть дерево.
2) Связный граф G имеет один цикл тогда и только тогда, когда $\delta = 1$.

Цикломат. число связного графа можно опред как число ребер, кот нужно удалить, чтобы граф стал деревом. Неор граф считается связным, если из любой вершины есть путь в любую другую вершину (путь может состоять из любого кол-ва рёбер) - Чтобы граф с n вершинами был связным, он должен иметь не менее (n-1) рёбер. - Если граф имеет не менее (n*n - 3n + 4)/2 рёбер, то он гарантированно связный. - Если граф связный, у него обязательно есть вершины степени не менее 2, то есть вершины, каждая из кот имеет не менее двух смежных вершин. - Если граф связный и без циклов (то есть это дерево), то удаление любого ребра приведёт к потере связности.

9.Плоские и планарные графы. Свойства планарных графов. Раскраска графа.

Плоский граф – это граф, кот нарисован на плоскости так, что никакие два его ребра не пересекаются. **Планарный граф** – это граф, изоморфный плоскому графу. Для связного плоского графа справедливо следующее соотношение между кол-вом вершин V(G), рёбер E(G) и граней, формула Эйлера: F(G) - |V(G)|-|E(G)|+|F(G)|=2
Плоский граф – это граф уложенный на плоскость, а планарный граф – это граф кот можно уложить на плоскость.
При раскраске эл-там графа ставятся в соответствие метки с учётом опред ограничений; эти метки традиционно наз «цветами». В простейшем случае такой способ окраски **вершин графа**, при кот любым двум смежным вершинам соответствуют разные цвета, называется **раскраской вершин**.
Раскраска **рёбер** присваивает цвет каждому ребру так, чтобы любые два смежных ребра имели разные цвета. **Раскраска областей** планарного графа назначает цвет каждой области, так, что каждые две области, имеющие общую границу, не могут иметь одинаковый цвет. Наим число красок, необходимое для правильной раскраски графа G называется *хроматическим числом* графа G.

10.Операции над графами

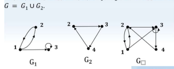
1) **Дополнением графа** $G_1(V_1,E_1)$ (обозначение — $\overline{G_1}(V_1,E_1)$)называется граф $G_2(V_2,E_2)$, где $V_2 = V_1$ & $E_2 = \overline{E_1} = \{e \in V_1 \times V_1 \mid e \notin E_1\} = V \times V \setminus E$.
2) **Объединением** (дизъюнктным) графов $G_1(V_1,E_1)$ и $G_2(V_2,E_2)$ (обозначение — $G_1(V_1,E_1) \cup G_2(V_2,E_2)$, при условии $V_1 \cap V_2 = \varnothing$) называется граф G(V,E), где $V = V_1 \cup V_2$ & $E = E_1 \cup E_2$.
3) **Соединением графов** $G_1(V_1,E_1)$ и $G_2(V_2,E_2)$ (обозначение — $G_1(V_1,E_1) + G_2(V_2,E_2)$, при условии $V_1 \cap V_2 = \varnothing$) называется граф G(V,E), где $V = V_1 \cup V_2$ & $E = E_1 \cup E_2 \cup \{e = (v_1, v_2) \mid v_1 \in V_1$ & $v_2 \in V_2\}$.
4) **Удаление вершины** *v* из графа $G_1(V_1,E_1)$ (обозначение — $G_1(V_1,E_1) - v$ при условии $v \in V_1$) даёт граф $G_2(V_2,E_2)$, где $V_2 = V_1 - v$ & $E_2 = E_1 \setminus \{e = (v_1, v_2) \mid v_1 = v \vee v_2 = v\}$.
5) **Удаление ребра** *e* из графа $G_1(V_1,E_1)$ (обозначение — $G_1(V_1,E_1) - e$ при условии $e \in E_1$) даёт граф $G_2(V_2,E_2)$, где $V_2=V_1$, $E_2 = E_1 - e$.
6) **Добавление вершины** *v* в граф $G_1(V_1,E_1)$ (обозначение — $G_1(V_1,E_1) + v$ при условии $v \notin V_1$) даёт граф $G_2(V_2,E_2)$, где $V_2 = V_1 + v$, $E_2 = E_1$.
7) **Добавление ребра** e в граф $G_1(V_1,E_1)$ (обозначение — $G_1(V_1,E_1) + e$ при условии $e \notin E_1$) даёт граф $G_2(V_2,E_2)$, где $V_2=V_1$, $E_2 = E_1 + e$.
8) **Стягивание** (правильного) подграфа A графа $G_1(V_1,E_1)$ (обозначение — $G_1(V_1,E_1)$ /A при условии $A \subset V_1, v \notin V_1$) даёт граф $G_2(V_2,E_2)$, где
$V_2 = (V_1 \setminus A) + v$,
$E_2 = E_1 \setminus \{e = (u, w) \mid u \in A \vee w \in A\} \cup \{e = (u, v) \mid u \in \Gamma(A) \setminus A\}$.
9) **Размножение вершины** *v* графа $G_1(V_1,E_1)$ (обозначение — $G_1(V_1,E_1) \uparrow v$ при условии $v \in V_1, v' \notin V_1$) даёт граф $G_2(V_2,E_2)$, где
$V_2 = V_1 + v'$ & $E_2 = E_1 \cup \{(v, v')\} \cup \{e = (u, v') \mid u \in \Gamma^+(v)\}$.
10) **Отожествление вершин.** Пусть u и v – две вершины графа $G = (V, E)$. Удалим эти вершины из графа G и добавим новую вершину x, соединив ее ребром с каждой вершиной, входящей в объединение окружений вершин u и v в исходном графе G. Построенный граф получился из графа G отождествлением вершин u и v. Отождествление вершин u и v называется стягиванием ребра (u,v), если $(u,v) \in E(G)$.
11) **Расщепление вершины.** Пусть v – вершина графа G. Рассмотрим два множества $N_1(v)$ и $N_2(v)$, объединение которых совпадает с окружением $N(v)$ вершины *v*. Удалив вершину v, добавим новые вершины v_1, v_2 и ребро (v_1, v_2). Соединим v_1 с каждой вершиной из $N_1(v)$, а v_2 – с каждой вершиной из $N_2(v)$. Произведенная операция называется расщеплением вершины v, а полученный граф обозначается G_v^*.
12) **Дублирование вершин.** При дублировании графа G получим новый граф G2 следующим образом: добавим вершину u’ и соединим эту вершину со всеми вершинами, которые смежны с вершиной u.
13) **Разбиение ребра.** При разбиении ребра l(u,v) графа G получаем новый граф следующим образом: удалим ребро e(u,v) из множества графа, добавим вершину w. Добавим рёбра (u,w), (w,v).
14) **Пересечение графов.** Пусть **графов** $G_1(V_1,E_1)$ и $G_2(V_2,E_2)$ – произвольные графы. Пересечением $G_1(V_1,E_1) \cup G_2(V_2,E_2)$, называется граф со множеством вершин V = V1∩V2и множеством ребер E=E1∩E2.
15) **Композиция графов.** Пусть $G_1(V_1,E_1)$ и $G_2(V_2,E_2)$– два ориентированных графа с одними и теми же множествами вершин V. Композицией (иногда произведением) G1(G2) графов G1 и G2 называется ориентированный граф с множеством вершин V, в котором существует дуга (vi, vj) тогда и только тогда, когда для некоторой вершины v ϵ V существуют дуги (vi, v) ϵ E1 и (v, vj) ϵ E2. Операция композиции может быть выполнена в матричной форме.
16) **Декартово произведение графов.** V(G1× G1) = V(G1) × V(G2).

11.Объединение графов, графический и матричный способы.

Пусть $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ – произвольные графы. Объединением $G_1 \cup G_2$ графов G_1 и G_2 на граф с мнжвом $V = V_1 \cup V_2$ и множеством ребер $E = E_1 \cup E_2$.
Операция объединения графов мб выполнена в матричной форме.
Теорема 6. Пусть $G1(V1, E1)$ и $G2(V2, E2)$ – два графа (ор или неородновременно), и пусть A1 и A2 – матрицы смежности вершин этих графов. Тогда матрицей смежности вершин графа $G(V, E) = G1 \cup G2$ является матрица A, полученная поэлементным взятием макс элемента вспомогательных матриц A1′ и A2′.
Матрицы Ai', $i = 1,2$, получаются из Ai с помощью добавления нулевых строк и столбцов, соответ вершинам, отсутствующим в Vi, но присутств в $V = V1 \cup V2$.

Следствие . Если эл-ты матриц смежности вершин A1 и $A2$ графов $G1$ и $G2$ принимают только значения 0 и 1, то операция взятия макс эл-та для нахождения матрицы смежности вершин графа $G1 \cup G2$ соответствует лог. сумме элементов.

На рисунке приведены графы G_1 и G_2 и их объединение $G = G_1 \cup G_2$.



Матрицы смежности вершин графов:

$$A_1 = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad A_2 = \begin{array}{c|ccc} & 2 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

ПРИМЕР 2 (продолжение) $V = V_1 \cup V_2 = \{1, 2, 3, 4\}$

матрицы смежности вершин вспомогательных графов G_1' и G_2' и графа G:

$$A_1' = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad A_2' = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \qquad A = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

12.Пересечение графов, графический и матричный способы.

Пусть $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ – произвольные графы.

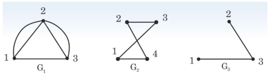
Пересечением $G_1 \cap G_2$ графов G_1 и G_2 наз граф с мнжвом $V = V_1 \cap V_2$ и мнжвом ребер $E = E_1 \cap E_2$.

$$G_1(V_1, E_1) \cap G_2(V_2, E_2) = G(V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2).$$

Операция пересечения графов мб выполнена в матричной форме.

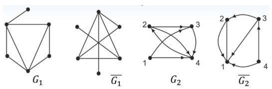
Теорема 7. Пусть $G1(V1, E1)$ и $G2(V2, E2)$ – два графа (ор или неор одновременно), и пусть $A1$ и $A2$ – матрицы смежности вершин этих графов. Тогда матрицей смежности вершин графа $G(V, E) = G1 \cap G2$ явл матрица A, получ поэл-тным взятием мин вспомогательных матриц $A_1{}'$ и $A_2{}'$. Матрицы $A_i{}'$, $i = 1,2$, получаются из A_i с помощью удаления строк и столбцов, соответвершинам, не вошедшим в $V = V1 \cap V2$.

Следствие 2. Если элементы матриц смежности вершин $A1$ и $A2$ графов $G1$ и $G2$ принимают только значения 0 и 1, то операция взятия минимального элемента для нахождения матрицы смежности вершин A графа $G = G1 \cap G2$ соответствует логическому (обычному) произведению элементов.



13.Дополнение графа; графический и матричный способы.

Пусть $G(V, E)$ – обыкновенный граф. Дополнение графа $\bar{G}$ (также обыкновенный граф) имеет в качестве множества вершин множество V. Любые две несовпадающие вершины в $\bar{G}$ смежны тогда и только тогда, когда они не смежны в G. На рисунке изображены графы G_1 и G_2 и их дополнения $\overline{G_1}$ и $\overline{G_2}$ соответственно.



Теорема 5. Пусть G – обыкновенный граф с матрицей смежности вершин A. Тогда матрицей смежности вершин графа $\overline{G}$ является матрица $\bar{A}$, образованная поэлементным логическим отрицанием матрицы A за исключением диагональных элементов, которые остаются нулевыми.

Пример 1. Матрицы смежности вершин A графа G_2 и графа , изображенных на рис., имеют вид:

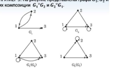
$$A = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \qquad \overline{A} = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

14.Композиция орграфов, матричный и векторный способы.

Пусть $G1(V, E1)$ и $G2(V, E2)$ – два ориентированных графа с одними и теми же множествами вершин V. Композицией $G1^{\circ} G2$ графов $G1$ и $G2$ называется ориентированный граф с множеством вершин V, в котором существует дуга (vi, vj) тогда и только тогда, когда для некоторой вершины $u \in V$ существуют дуги $(vi, u) \in E1$ и $(u, vj) \in E2$.

Теорема 8. Пусть $G1(V, E1)$ и $G2(V, E2)$ – два ор графа с матрицами смежности вершин $A1$ и $A2$ соответственно. Тогда матрицей смежности вершин графа $G(V, E) = G1 {}^{\circ} G2$ является матрица $A = A1 \cdot A2$.

ПРИМЕР 5: На рисунке представлены графы G_1, G_2 и их композиции $G_1{}^{\circ}G_2$ и $G_2{}^{\circ}G_1$.



15.Деревья, основные понятия, определения и теоремы

Связный граф без циклов наз (свободным) деревом. Деревья явл в некот смысле простейшим классом графов.

Ор деревья. Ор деревом (или ордеревом, или корневым деревом) наз орграф со следующими свойствами.

1. Сущ един узел r, полустепень захода кот равна 0, $d^+(r) = 0$. Он наз корнем ордерева.
2. Полустепень захода всех остальных узлов равна 1, $d^+(v) = 1$.
3. Каждый узел достижим из корня.

Упорядоченные деревья. Множества T1, ..., Tk в эквивалентном определении ордерева явл поддеревьями. Если относительный порядок поддеревьев T1, ..., Tk фиксирован, то ордерево наз упорядоченным.

Последовательное дерево, представляющее собой простую цепь, и звездное дерево (или **куст**), в котором одна из вершин (центр) смежна со всеми остальными вершинами. **Лесом** называют граф, связные компоненты которого являются деревьями.

Свойства: 1. Каждое дерево с вершинами имеет в точности ребро. 2. Граф явл деревом т и т т, когда каждая пара различных вершин графа соединяется одной и только одной простой цепью. 3.У каждого дерева найдется висячая вершина. 4.При удалении любого ребра дерева оно распадается на связные компоненты, являющиеся либо изолир вершинами, либо деревьями. При добавл в дерево любого нового ребра в нем образуется простой цикл, и оно перестает быть деревом.

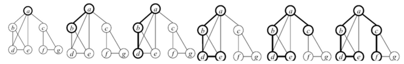
Полные бинарные деревья. Полным бинарным деревом будем называть такое дерево, в котором каждая вершина имеет не более двух «сыновей», а заполнение вершин осуществляется в порядке от верхних уровней к низшим, причем на одном уровне заполнение вершин производится слева направо. Верхним считается уровень с номером 1 (самый высокий).

16.Остовное дерево минимального веса и способы его построения

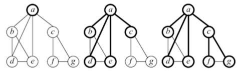
Подграф в G, являющийся деревом и включающий в себя все вершины G, называется остовным деревом. Остовное дерево в графе G строится просто: выбираем произвольное его ребро и последовательно добавляем другие ребра, не создавая при этом циклов, до тех пор, пока нельзя будет добавить никакого ребра, не получив при этом цикла. Для построения остовного дерева в графе из n вершин необходимо выбрать ровно n - 1 ребро. На языке теории графов нам нужно в нагруженном графе найти остовное дерево наименьшего общего веса. Такое дерево принято называть минимальным остовным деревом или, сокращенно, МОД. **Алгоритм Прима**: берем любую вершину, всякий раз ищется минимальное по весу ребро, один конец которого — уже взятая в граф вершина, а другой конец — ещё не взятая, и это ребро добавляется в граф(если таких рёбер несколько, можно взять любое). Этот процесс повторяется до тех пор, пока граф не станет содержать все вершины (или, что то же самое, ребро).

17.Обходы вершин графа: поиск в ширину и поиск в глубину

В глубину: когда возможные пути по *ребрам*, выходящим из вершин, разветвляются, нужно сначала полностью исследовать одну ветку и только потом переходить к другим.



Таким образом, основная идея **поиска в ширину** заключается в том, что сначала исследуются все вершины, смежные с начальной вершиной (*вершина* с которой начинается обход).



18.Задача о кратчайшем пути в орграфе. Алгоритм Форда

Находит кратчайшие пути от одной вершины графа до всех остальных во взвешенном графе. Вес ребер может быть отрицательным.

ЗАДАЧА

Дан ориентированный или неориентированный граф G со взвешенными рёбрами. Требуется найти кратчайшие пути от выделенной вершины s до всех вершин графа.

АЛГОРИТМ

.Перед началом работы алгоритма, для всех вершин, кроме стартовой, расстояние полагается равным бесконечности.

.В цикле проверяется необходимость производить релаксацию для конкретного ребра (сравнение текущего пути, с заново посчитанным).

.Если текущая метка вершины больше чем метка нового пути, то она изменяется в его сторону, иначе остается неизменной.

.Алгоритм заканчивает свою работу, только если на одном из его очередных шагов не было не проведено ни одной релаксации.

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если вершины } v_i \text{ и } v_j \text{ совпадают,} \\ \infty, & \text{если вершины } v_i \text{ и } v_j \text{ не смежны,} \\ w, & \text{если вершины } v_i \text{ и } v_j \text{ смежны, и } w - \text{вес ребра } (v_i, v_j). \end{cases}$$

19.Отношение порядка между вершинами орграфа

В любом ориентированном графе без циклов можно установить отношение порядка между его вершинами. Рассмотрим сеть G=(J,U) с одним источником S и одним стоком T. В сети n вершин. Рангом вершины i назовем max число дуг в пути, которое связывает источник – вершину S, с данной вершиной i.

Правильной считается такая нумерация вершин в сети, при которой все номера вершин r-го ранга будут меньше номеров вершин (t+1)-го ранга. Рассмотрим одни из способов, который называется методом вычеркивания дуг.

Исходной вершине сети, т.е. источнику присваиваем номер 1. Затем вычеркнем (удалим) все дуги выходящие из вершины 1. После этого в сети окажутся конечное число вершин без входящих дуг. Назовем эти вершины, вершины 1-го ранга и присвоим ми в произвольном порядке номера $2,\ldots,k_1$. Затем вычеркнем (удалим) все дуги, выходящие из верши 1-го ранга. В сети опять окажется конечное число вершин без входящих дуг. Назовем их вершинами 2-го ранга и присвоим им в произвольном порядке номера $k_1+1,\ldots,k_2$. И т.д., процесс нумерации вершин прекращается тогда, когда будет пронумерована последняя вершина сети – сток.

20.Задача о пути максимальной длины в орграфе

Задача ставится следующим образом.

Задан конечный ориентированный граф без контуров G(X,U).

Каждой дуге графа “u” ставится в соответствие длина дуги l(u).

Требуется определить длиннейший путь, соединяющий две вершины графа x_0 и x_n.

Алгоритм

Каждая вершина графа получает числовую метку, которая может меняться конечное число раз.

Установившаяся метка – величина длиннейшего пути из вершины x_0 в данную вершину x_j. В частности, установившаяся метка вершины x_n есть величина длиннейшего пути из x_0 в x_n.

Чтобы определить искомый путь, нужно рассмотреть последовательность шагов, на каждом из которых ищется одна из дуг длиннейшего пути между x_0 и x_n.

Алгоритм состоит в последовательном проведении следующих этапов:

1. Полагаем $\lambda_0 = 0$; $\lambda_i = -\infty$ $(i = 1,\ldots,n)$.

2. Ищем дугу (x_i, x_j) такую, что $\lambda_j - \lambda_i \le l(x_i, x_j)$. Если такой дуги нет, то не существует пути, соединяющего x_0 и x_n. Если такая дуга найдется, то изменяем метку l_j на $l'_j = l_j + l(x_0, x_j)$.

3.Продолжаем процедуру пункта 2 до тех пор, пока метки вершин x_i не перестанут меняться.

Установленные метки обозначим l^*_i. При этом могут встретиться два случая:

1) $l^*_n = -\infty$, это соответствует тому, что пути, соединяющего вершины x_0 и x_n, не существует;

2) l^*_n- конечное число. Оно равно длине пути максимальной длины из x_0 в x_n.

Сам путь находим, отмечая вершины, по которым достигается максимум, т.е. те вершины, для которых

$$\lambda_j^* = \lambda_i^* + l(x_i, x_j)$$

Если между вершинами графа-сети установлено отношение порядка, т.е. они “правильно” занумерованы, то решение задачи можно получить за один шаг, произведя подсчет меток с учетом следующей формулы:

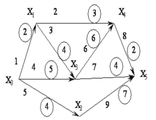
$$\lambda_j = \max_i \{\lambda_i + l(x_i, x_j)\}$$

21.Сетевое планирование. Задача о скорейшем пути завершения проекта

Сет план-ние — метод анализа сроков (ранних и поздних) начала и окончания нереализованных частей проекта, позволяет увязать выполнение различных работ и процессов во времени, получив прогноз общей продолж-ности реализации всего проекта.

Рассмотрим некоторый проект – совокуп операций (работ), составляющий некот многошаговый процесс. Пусть данные о строительстве приведены в след таблице

Виды работ	Какие работы следуют за перечисленными	Продолжитель-ность работ
1	2,3	2
2	8	3
3	6,7	4
4	6,7	5
5	9	4
6	8	6
7	–	4
8	–	2
9	–	7



Эту инфу о проекте представим в виде графа-сети. Дугами графа будем изображать работы, а вершинами графа – некот события. Назовем эл-тарными событиями начало и конец каждой работы, а некот совокупность эл-тарных событий – событием.

Вход графа – событие, заключ в начале всего проекта. Оно явл событием, стоящим в начале одной или нескол работ, а именно тех, кот не следуют ни за какими другими, т.е. работ, с кот мб начато строительство. В нашем примере такими работами явл №1,4,5 (их нет во 2-ом столбце). Выходом графа будет явл событие, заключающееся в окончании работ, за кот не следуют никакие другие работы, т.е. в окончании всего проекта. В данном примере – это работы №7,8,9. Все другие вершины графа есть события, заключающиеся в окончании одних и начале других работ. На графе номер работы обозначен числом вне кружка. Число, обведенное кружком, есть продолжительность данной работы.

Путь макс длины из вершины x_0 в x_i есть скорейшее время наступления события x_i. В самом деле, событие x_3, напр, соответс началу 6-й и 7-й работ, может произойти только после окончания 3-й и 4-й работ, а след, и после окончания 1-й, т.к. для выполнения 3-й работы необх окончание 1-й работы. След, скорейшее время наступления события x_3 есть $\max\{5,(2+4)\}=6$.

Скорейшее время наступления события 5 есть скорейшее время окончания проекта в целом и равно длине пути максимальной длины из вершины x_0 в x_5.

Итак, если x_0 и x_n есть вход и выход графа-сети, соответ данному проекту, то для определения наиболее раннего срока окончания всех работ нужно найти путь макс длины из x_0 в x_n, т.е. крит путь, и определить его длину. Время, соответ скорейшему окончанию работ, т.е. скорейшему завершению проекта, наз критическим временем данного проекта. Оно численно совпадает с длиной критического пути из x_0 в x_n.

В приведенном примере критический путь, проходящий через вершины x_0,x_1,x_3,x_4,x_5, имеет длину, равную 14 l(m)=14, т.е. крит время данного проекта равно 14.

Работы, составляющие крит путь, наз крит работами (операциями). От своевременного выполнения крит операций зависит срок завершения проекта. Они не допускают запаздывания в исполнении в отличие от некритических операций.

1.Конечные автоматы, их реализация и применение.

Конечный автомат - это модель вычислений, основанная на гипотетической машине состояний.

Конечные автоматы описываются набором возможных состояний, набором сигналов (событий) и таблицей переходов. В один момент времени только одно состояние может быть активным. Следовательно, для выполнения каких-либо действий машина должна менять свое состояние.

Таблица переходов – это сопоставление паре из текущего состояния и пришедшего сигнала нового состояния

Представление

Конечный автомат можно представить в виде орграфа, узлы которого являются состояниями, а дуги — переходы между ними. Каждая дуга имеет метку, информирующую о том, когда должен произойти переход.

Применение

1) Автоматное программирование (АП) – программирование с явным выделением состояний – это метод разработки ПО, основанный на модели конечных автоматов.

Речь идет о создании программ, поведение которых описывается конечными автоматами (например, ИИ).

2.Классификация абстрактных автоматов.

Классификация АА

I. *По определенности характеристических функций.*

- В автоматах **полностью определенных** областью определения функций f_q и f_y является множество всех пар $(q_i, x_k) \in QxX$, где $q_i \in Q$, $x_k \in X$.
- В автоматах **частично определенных** либо обе характеристические функции, либо одна из них имеют областью определения строгое подмножество декартова произведения QxX. Таким образом, характеристические функции подобных автоматов определены не для всех пар (q_i, x_k).

II. *По однозначности функции переходов.*

В **детерминированных** автоматах выполняется условие однозначности переходов: если АА находится в некотором состоянии $q_i \in Q$, то под воздействием произвольного входного сигнала $x_k \in X$ автомат может перейти в одно и только одно состояние $q_j \in Q$, причем ситуация $q_i = q_j$ вовсе не исключается.

В автоматах **вероятностных** при воздействии одного и того же входного сигнала возможны переходы из состояния q_i в различные состояния из множества Q с заданной вероятностью.

III. *По устойчивости состояний*:

В **устойчивых** автоматах выполняется условие устойчивости: если автомат под воздействием входного сигнала $x_k \in X$ оказался в состоянии $q_i \in Q$, то выход из него и переход в иное состояние возможен только при поступлении на вход автомата другого сигнала $x_z \in X$, $x_z \neq x_k$.

Если условие устойчивости не выполняется хотя бы для одного состояния $q_j \in Q$, то такой автомат называют **неустойчивым**.

3.Автоматное программирование. Графы переходов.-

Автоматное программирование (АП) – программирование с явным выделением состояний – это метод разработки ПО, основанный на модели конечных автоматов.

4.Теоретико-множественное определение автомата. Инициальные, синхронные и асинхронные автоматы.+

При теоретико-множественном представлении автоматов все элементы кортежа описываются явно (задаются перечислением элементов множеств).

Часто фиксируют также начальное состояние автомата $q0 \in Q$. Такие автоматы называют инициальными

Автомат называется синхронным, если интервал временной дискретизации постоянен, в противном случае говорят об асинхронном автомате.

В зависимости от способа определения выходного сигнала в синхронных автоматах выделяют автоматы Мили и Мура.

5.Автоматы Мили и Мура.+

Автомат Мили

Характеристические функции определяют, в какое состояние $q \in Q$ перейдет автомат в следующий, (t+1)-й момент времени и каково будет значение выходного сигнала $y \in Y$ в текущий момент времени t:

$$q(t+1) = fq\,(x(t), q(t)) \qquad (1)$$
$$y(t) = fy\,(x(t), q(t))$$

Из приведенных уравнений видно, что аргументами характеристических функций являются текущее значение входного сигнала и текущее состояние.

Конечный автомат, заданный парой уравнений (1), называется автоматом I рода или, по имени автора модели, автоматом Мили (Mealy).

Автомат Мура

На практике часто встречаются автоматы, выходные сигналы которых в момент времени t однозначно определяются текущим состоянием автомата и не зависят от компонентов вектора входных сигналов:

$$q(t+1) = fq(x(t+1), q(t)) \qquad (2)$$
$$y(t) = fy(q(t))$$

Автомат, заданный парой уравнений (2), называют автоматом II рода или автоматом Мура (Moore). Автомат Мили по отношению к автомату Мура «запаздывает» на один дискретный момент времени по входному сигналу.

Автоматы I и II рода являются двумя базовыми моделями, изучаемыми теорией автоматов.

6.Табличная форма задания автоматов.

Табличная форма представляется двумя таблицами: таблицей переходов и таблицей выходов. Строки этих таблиц соответствуют входным сигналам, а столбцы - состояниям, причем крайний левый столбец обозначен начальным состоянием q0. На пересечении столбца и строки в таблице переходов ставится функция перехода, то есть состояние, в которое автомат переходит из состояния под действием входного сигнала , а в таблице выходов - выходная функция , то есть соответствующий этому переходу выходной сигнал .

7.Графовая форма задания автоматов.

8.Матричная форма задания автоматов.

При матричной форме задания автоматов каждый элемент ams = xi/yj матрицы A соответствует входному сигналу xi, вызывающему переход из состояния qm в состояние qs с выработкой выходного сигнала yj.

9.Понятие частичного автомата. Реакция автомата.
Автомат называется частичным, если некоторые комбинации “состояние– входной сигнал” не могут возникнуть в реальных условиях. При этом в графе автомата появляются состояния, из которых определены выходы не для всех входных сигналов (т.е. присутствуют не все стрелки), а в таблицах переходов и выходов имеются незаполненные клеточки.
Реакцией автомата называется последовательность выходных сигналов автомата, полученная под воздействием некоторой последовательности входных сигналов, то есть реакция - это выходное слово автомата на конкретное входное слово.

10.Переход от автомата Мили к эквивалентному автомату Мура
Два автомата называются *эквивалентными*, если они имеют одинаковые входные и выходные алфавиты и на одинаковые входные слова выдают одинаковые выходные слова
Законы функционирования автоматов Мили и Мура отличаются функцией выходов. Поскольку каждой паре «состояние – входной сигнал» автомата Мили может соответствовать свой выходной сигнал, а в автомате Мура выходной сигнал приписывается состоянию, то каждой паре $q_i\ x_j$ автомата Мили ставится в соответствие состояние синтезируемого автомата Мура b_{ij}.
Существует стандартный прием, с помощью которого можно преобразовать автомат Мили в эквивалентных ему автомат Мура. Причем, если в автомате Мили n внутренних состояний и m входных, то в полученном автомате Мура будет $n * m+1$ состояний. Таким образом, каждой клеточке таблицы переходов автомата Мили будет соответствовать новое состояние автомата Мура. Кроме того, поскольку первый выходной сигнал автомат выдаст, когда из начального состояния под воздействием первого входного сигнала перейдет в какое-то состояние, которое и определит первый выходной сигнал, то необходимо для автомата Мура ввести также начальное состояние b0, которому может быть приписан любой допустимый выходной сигнал.
Поскольку функции переходов у автоматов Мили и Мура одинаковы, каждому состоянию автомата Мили ставится в соответствие класс изоморфных состояний автомата Мура

11.Переход от автомата Мура к эквивалентному автомату Мили
Из анализа переходов автоматов Мили и Мура следует, что для перехода от автомата Мили к автомату Мура необходимо как бы отнести каждый выходной сигнал к предшествующему состоянию и входному сигналу, который перевел автомат Мура в данное состояние. Другими словами, на графе автомата выходные сигналы, ранее приписанные вершинам, необходимо отнести ко всем заходящим в эту вершину дугам. Не менее просто осуществляется переход для автомата, заданного в табличной форме.
В этом случае таблица переходов дублирует существующую, а таблица выходов получается заменой в таблице переходов состояний, в которые переходит автомат, на выходные сигналы, которые этим состояниям были приписаны в автомате Мура.

12.Минимизация автоматов.
Минимальный автомат – это автомат, имеющий наименьшее возможное количество состояний и реализующий заданную функцию выходов.
Процедура минимизации состоит в следующем:
1. По таблице выходов автомата Мили (или по первой строке отмеченной таблице переходов автомата Мура) находятся состояния, имеющие одинаковые столбцы (отмеченные одинаковыми выходными сигналами) – это 1-эквивалентные состояния.
2. Далее используется таблица переходов. Все состояния, входящие в 1эквивалентный класс, которые под воздействием первого сигнала перешли в состояния, принадлежащие в свою очередь 1эквивалентному классу, образуют 2-эквивалентный класс.
3. Процедура разбиения на классы эквивалентности продолжается до те пор, пока при очередном шаге К-эквивалентные классы не совпадут с (К-1)-эквивалентными, т.е. получатся эквивалентные классы.
4. Все состояния, входящие в один класс эквивалентности, заменяются одним состоянием.

13.Распознающие автоматы.
Распознающий автомат – это автомат Мура, в котором фиксируется начальное состояние и подмножество состояний $F \subseteq Q$, называемое множеством заключительных состояний. Говорят, что автомат допускает (принимает, распознает, представляет) данное слово, если реакцией на это слово может быть переход автомата в одно из заключительных состояний
Для распознавания часто используются частичные автоматы.
Слово считается недопустимым, если в результате реакции на него автомат не остановится в заключительном состоянии или если будет подан запрещенный (для данного состояния) входной сигнал.
Если считать пустое (не содержащее ни одной буквы) слово допустимым, то можно еще более упростить частичный автомат, объединив начальное и заключительное состояния.