IUT de Montreuil - Paris 8 2023-2024
BUT-2 Informatique R3-15 Outils mathématiques fondamentaux II

NOM (lisible) : BONNOT groupe TD : A

Mardi 7 novembre 2023 - Contrôle (Durée : 30 min)

Calculatrices, portables interdits

* * *

On rappelle les éléments suivants :
- Le nombre λ est une **valeur propre** de la matrice A s'il existe un vecteur non nul V tel que $AV = \lambda V$, V est alors appelé **vecteur propre** associé à la valeur propre λ
- Si la matrice A est diagonalisable, il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale tels que $A = PDP^{-1}$

Exercice 1 (*2 pts*)

Construire une matrice carrée non diagonale 3×3 ayant 1 et 3 comme valeurs propres.

Réponse :

Elle ne doit pas être diagonale, mais on peut la choisir triangulaire, par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$det(A - XId) = (1 - X)^2(3 - X)$ qui a bien 1 et 3 comme racines.

Exercice 2 (*4 pts*)

Trouver une matrice carrée 2×2 ayant 2 et -1 comme valeurs propres et les vecteurs $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_{-2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ comme vecteurs propres associés.

Réponse :

Les vecteurs propres donnent la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, les valeurs propres donnent la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et la matrice A cherchée vérifie $A = PDP^{-1}$.

Calculons P^{-1}, $det(P) = -2$ et $P^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 3 (*4 pts*)

1. Calculer les valeurs propres de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
2. Calculer des vecteurs propres associés à ces valeurs propres.

Réponse :

1. On calcule $det(A - XId) = (1 - X)^2 - 4 = (1 - X - 2)(1 - X + 2) = (-X - 1)(3 - X)$
   On a donc deux valeurs propres ; -1 et 3.
2. Vecteur propre associé à -1 : On résout $\begin{cases} x + 2y = -x \\ 2x + y = -y \end{cases}$ qui se résume à $x + y = 0$ soit $x = -y$ donc tous les vecteurs propres sont de la forme $\left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$

   Vecteur propre associé à 3 : On résout $\begin{cases} x + 2y = 3x \\ 2x + y = 3y \end{cases}$ qui se résume à $-x + y = 0$ soit $x = y$ donc tous les vecteurs propres sont de la forme $\left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$