Cours-TD Algèbre Linéaire
Interpolation, Approximation, problème des moindres carrés (MC)

Exercice 1

Résoudre $\boxed{A\,x\,=\,b}$ lorsque l'on a : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Exercice 2

Un problème d'interpolation :

On cherche un polynôme de degré 2 , de la forme : $p(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2$
qui passe par les 3 points suivants :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que a_0, a_1 et a_2 sont les solutions d'un système linéaire.

2. Ecrire matriciellement ce système, puis le résoudre en mettant en oeuvre un calcul matriciel.

Vous venez de résoudre un problème de la forme :

$$\boxed{A\,x\,=\,b} \quad \text{où A est une matrice} \quad n \times n \quad \text{inversible}$$

Exercice 3

Un **problème d'approximation : la méthode des Moindres Carrés (MC)**

On cherche un polynôme de degré 1, de la forme : $f(x) = a_0 + a_1\,x$

qui « approche au mieux » ou qui « passe au milieu » des points suivants :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que ce problème revient à trouver une solution qui cherche à résoudre, aussi bien que possible, une équation de la forme : $A\,x\,=\,b$.

   Ecrire cette équation matricielle en l'adaptant au problème.

2. Pour résoudre approximativement cette équation qui n'a pas de solution, nous allons appliquer **la méthode des moindres carrés** où l'on choisit de minimiser :

$$J(x) = \|\ A\,x\,-\,b\ \|^2$$

   On peut montrer que cette fonction est convexe et que **la solution** $x^\star$ **vérifie** :

$$A^t\,A\,x\,-\,A^t\,b\,=\,0$$

   Exprimer matriciellement cette solution $x^\star$

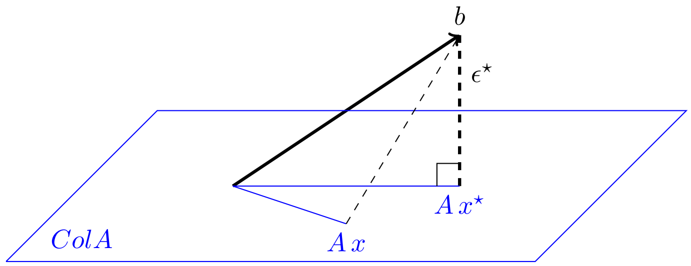
   Effectuer le calcul matriciel qui permet de résoudre ce problème et de calculer a_0 et a_1 .

Expliquons **la méthode des moindres carrés** en utilisant vos connaissances en Algèbre Linéaire qui permettent d'en présenter une interprétation géométrique :

La solution au sens des moindres carrés de $\boxed{A\,x\ =\ b}$

où A est une matrice $n \times p$ avec $(n \geq p)$ et $b \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur $x^\star \in \mathbb{R}^p$ tel que :

$$b\ =\ A\,x^\star\ +\ \epsilon^\star \quad \text{avec} \quad \|\ \epsilon^\star\ \| = \min\ \|\ b\ -\ A\,x\ \|$$



$A\,x^\star$ est la projection orthogonale de b sur le sous espace vectoriel engendré par la famille des vecteurs correspondant aux colonnes de la matrice $A = (V_1\,V_2\ \ldots\ V_p)$.

Rappelons que $A\,x$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire : $A\,x\ =\ x_1\,V_1 + \cdots + x_p\,V_p$

Le vecteur $\epsilon^\star$ doit donc être **orthogonal** à chacun des vecteurs colonne de A, ce qui signifie que tous les produits scalaires doivent donc être nuls :

$$V_1^t\,\epsilon^\star = 0 \quad , \ldots , \quad V_p^t\,\epsilon^\star = 0$$

Pour finir, on peut regrouper cela dans une écriture matricielle :

$$\boxed{A^t\,\epsilon^\star = 0} \quad \Leftrightarrow \quad A^t\,(b - A\,x^\star) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A^t\,b - A^t\,A\,x^\star = 0$$

Et la solution $x^\star$ vérifie donc ce que l'on appelle **les équations normales** :

$$\boxed{A^t\,A\,x^\star = A^t\,b}$$