# TD (2) Algèbre Linéaire
# Diagonalisation d'une matrice carrée d'ordre $n$
# Vecteurs propres et Valeurs propres
# cas particulier d'une matrice Symétrique

**Diagonaliser une matrice carrée** d'ordre $n$ notée $A$ consiste, lorsque cela est possible, à chercher une matrice $P$ inversible et une matrice $D$ diagonale telles que l'on ait :

$$A = P\,D\,P^{-1} \quad (\star)$$

la diagonale de $D$ contient les **valeurs propres** de $A$ notées $\lambda_i$

la matrice $P$ contient des **vecteurs propres** $u_i$ associés, **écrits en colonne**

$$(\star) \quad \Leftrightarrow \quad A\,P = P\,D \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{A\,u_i = \lambda_i\,u_i} \quad \forall i$$

Lorsque les vecteurs propres sont linéairement indépendants, ils constituent une base de vecteurs propres $(\, u_1, \ldots, u_n\,)$ et $P$ est alors **la matrice de passage** vers cette base.

**Calcul des valeurs propres et des vecteurs propres associés :**

Dans la pratique, on commence par calculer les valeurs propres en posant :

$$A\,u = \lambda\,u \quad \Longleftrightarrow \quad A\,u = \lambda\,I_d\,u \quad \Longleftrightarrow \quad (\,A - \lambda\,I_d\,)\,u = \overrightarrow{0}$$

on en déduit que les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique $p_A(\lambda)$ avec :

$$\boxed{p_A(\lambda) = det(A - \lambda\,I_d)}$$

Pour trouver un vecteur propre $u$ associé à une valeur propre $\lambda$, on doit ensuite résoudre le système :

$$(A - \lambda I_d)\,u = \overrightarrow{0}$$

## Exercice 1

Calculer les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Proposer une base de vecteurs propres associés à ces valeurs propres et vérifier à l'aide d'un calcul matriciel que l'on peut écrire $A = P\,D\,P^{-1}$

## Exercice 2

Vérifier que la famille $u_1, u_2, u_3$ est une base de $\mathbb{R}^3$, avec :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Retrouver la matrice $B$ qui a pour valeurs propres $\lambda_1 = 1$ , $\lambda_2 = 0$ , $\lambda_3 = 2$ , respectivement associées aux vecteurs propres $u_1$, $u_2$ et $u_3$

Les matrices symétriques sont présentes dans de nombreuses applications.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à **coefficients réels**
et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous ensemble des **matrices symétriques** telles que : $\boxed{A^t = A}$

3 propriétés importantes :

(P1) si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ alors ses valeurs propres sont **réelles**.
( notons que les valeurs propres d'une matrice à coefficients réels peuvent $\in \mathbb{C}$ ,
où $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes)

(P2) si $u_1$ et $u_2$ sont deux vecteurs propres associés à des valeurs propres $\lambda_1 \neq \lambda_2$ de $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ , alors les vecteurs sont **orthogonaux** : $u_1 \perp u_2$

(P3) si $(u_1, u_2, u_3)$ est une base ortho**normée** de vecteurs alors la matrice de passage $P$ dans cette base est telle que :

$$\boxed{P^t = P^{-1}}$$

## Exercice 3

Illustrer les 3 propriétés précédentes sur les matrices $A$ et $B$ suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

## Exercice 4

Rappelons la **définition du produit scalaire** lorsque $u$ et $v$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ : $\boxed{\langle u, v\rangle = u^t\, v}$

1. Vérifier la propriété (P3)

2. Vérifier que l'on a bien, lorsque $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ : $\langle A\, u_1, u_2\rangle = \langle u_1, A\, u_2\rangle$
   En déduire la propriété (P2) lorsque $u_1$ et $u_2$ sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes de $A$

**Rappelons les formules liées à un changement de base :**
• Soit $\mathcal{B} = (\, e_1, \ldots, e_n\,)$ et $\mathcal{B}' = (\, u_1, \ldots, u_n\,)$ 2 bases
En notant $X = \overrightarrow{v}_{\mathcal{B}}$ et $X' = \overrightarrow{v}_{\mathcal{B}'}$ les coordonnées d'un même vecteur dans ces 2 bases,

on a $\boxed{X \,=\, P\, X'}$ où $P$ la **matrice de passage** s'écrit $P = \begin{pmatrix} | & | & | \\ | & u_{\mathcal{B}} & | \\ | & | & | \end{pmatrix} = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$

• la même Application Linéaire $f$ est décrite par la matrice
$A$ dans la base $\mathcal{B}$ : $X \longrightarrow Y = A\ X$
$A'$ dans la base $\mathcal{B}'$ : $X' \longrightarrow Y' = A'\, X'$

et on montre facilement que l'on a : $\boxed{A' \,=\, P^{-1}\, A\, P}$

## Exercice 5

1. Expliquer comment l'on trouve la formule précédente : $A' \,=\, P^{-1}\, A\, P$

2. Exprimer $A'$ lorsque $\mathcal{B}' = (\, u_1, \ldots, u_n\,)$ est une base de vecteurs propres de la matrice $A$.