TD (2) TP-PYTHON Algèbre Linéaire
Diagonalisation d'une matrice carrée d'ordre n
Vecteurs propres et Valeurs propres
cas particulier d'une matrice Symétrique

• import numpy as np

M = np.array([[1., 2], [3, 4]]) pour $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
v1 = M[:, 0] (pour extraire la première colonne de M)
tester : np.ndim(M), np.shape(M)

D = np.diag([1., 2, 3]) (construit une matrice diagonale)
np.dot(M1, M2) ou M1 @ M2 (produit matriciel)
a = np.array([1, 2]) b = a.reshape(2,1) (pour choisir les dimensions)

• Le module d'**algèbre linéaire** de numpy permet de calculer l'inverse, le déterminant, les valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice :

np.linalg.inv(M)
np.linalg.det(M)
np.linalg.norm(vec) (norme d'un vecteur)
A = np.array([[-6., 4], [-12, 8]]) pour $M = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -12 & 8 \end{pmatrix}$
np.linalg.eig(A) (**eigen** values and eigen vectors)
(valP, vecP) = np.linalg.eig(A)

• Quelques indications sur les **nombres complexes** qui peuvent apparaître :

$z \in \mathbb{C}$ s'écrit $\boxed{z = a + i\,b}$ où a et b sont des réels (partie réelle et partie imaginaire)
i **le nombre imaginaire** vérifie $\boxed{i^2 = -1}$

a = 1 + 1j (j est le nombre imaginaire en Python)
('j' suffix comes from electrical engineering, where the variable 'i' is usually used for current)
np.real(a), np.imag(a), np.conj(a), np.abs(a), np.angle(a)
np.pi (pour le nombre pi), z=np.exp(1j*np.pi/2)

Exercice 1

1. Choisir une matrice A de dimension 2×2
   récupérer le vecteur v1 qui correspond à sa première colonne et calculer sa norme à la main puis avec Python.

2. Calculer la matrice B qui a comme vecteurs propres $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
   associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 4$

   Tester pour vérifier : (val, vec) = np.linalg.eig(B)
   Calculer la norme des vecteurs propres de B fournis par cette méthode.
   Que remarquez vous ?

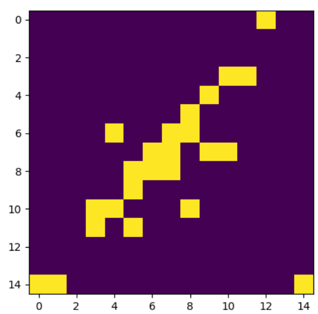
Exercice 2

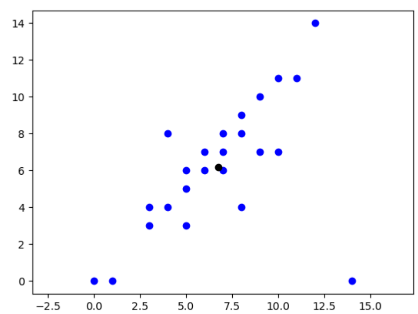
1. Choisir une matrice S d'ordre 3 qui soit **symétrique**.
   Vérifier que les vecteurs propres sont orthogonaux en effectuant un unique **calcul matriciel**.

2. Calculer les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$
   Commenter et regarder son polynôme caractéristique.

Exercice 3

Utiliser le programme fourni qui doit permettre de construire un nuage de points à partir d'une matrice que l'on peut aussi visualiser comme une image. Attention, les « repères » sont différents.





Après avoir calculé la **matrice de variance-covariance** de ce nuage de point, visualiser les vecteurs propres u_1 et u_2 de cette matrice en les faisant démarrer au centre de gravité de ce nuage.

Mais quelle longueur leur donner pour la visualisation ?

Précisions que a matrice de variance-covariance écrite dans la base (u_1, u_2) est la matrice diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$