INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Escuela Superior de Cómputo

Unidad 1: La integral definida y sus aplicaciones

Zarate Cardenas Alejandro

Autores:
Campos Zeron Salvador
Díaz González Lizeth
Girón Flores Carlos Alberto
Hernández García Jaime Gabriel
Izoteco Zacarias Pedro Uriel
Sánchez Ortega Gabriel

10 de Marzo 2023

Índice

1 Introducción

La integral definida es uno de los conceptos fundamentales en el cálculo, una rama de las matemáticas que estudia el cambio y la variación. La integral definida es una operación matemática que permite calcular el valor de una función en un intervalo específico. A diferencia de la integral indefinida, que devuelve una familia de funciones, la integral definida da como resultado un número único.

La integral definida tiene múltiples aplicaciones en diversas áreas de la ciencia, la ingeniería y la economía. En física, la integral definida se utiliza para calcular la energía cinética y potencial, la velocidad y la aceleración de un objeto en movimiento. En ingeniería, se utiliza para diseñar puentes, carreteras y edificios, y para optimizar procesos industriales. En economía, la integral definida se utiliza para calcular el valor presente de una inversión o el flujo de caja de una empresa. En biología, se utiliza para modelar el crecimiento de poblaciones y la distribución de especies en un ecosistema.

Para calcular una integral definida, se divide el intervalo en pequeñas secciones llamadas subintervalos y se aproxima el valor de la función en cada uno de ellos. Luego, se suman los resultados de cada subintervalo para obtener una aproximación del valor de la integral. A medida que se dividen los subintervalos en secciones más pequeñas, la aproximación se vuelve más precisa.

En resumen, la integral definida es una herramienta matemática poderosa con innumerables aplicaciones prácticas en diversas áreas. Es una herramienta fundamental en el cálculo y se utiliza para calcular el área bajo una curva, la longitud de una curva y el volumen de un sólido de revolución, entre otras cosas. Su importancia en la ciencia y la ingeniería es crucial para el avance y desarrollo de la tecnología moderna.

1.1 Lo que revisamos

A lo largo de este documento se podra ver la resolucion de los problemas propuestos en el libro anteriormente mencionado aclarando que dichos problemas fueron divididos por equipo tocandole al ”Equipo Capibara” los problemas impares(5,17,29,41,53) de las paginas: 293-295, 303-305, 313-314, 331-332, 430-432

2 Problemario 1: 293-295

2.1 Problema 5

Desarrolle la suma indicada:

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{(-1)^k}{2k+5} \tag{1}$$

Donde si hacemos a sumatoria dada por la ecuacion 1 tenemos:

$$\frac{(-1)^1}{2(1)+5}+\frac{(-1)^2}{2(2)+5}+\frac{(-1)^3}{2(3)+5}+\frac{(-1)^4}{2(4)+5}+\frac{(-1)^5}{2(5)+5}+ \\ \frac{(-1)^6}{2(6)+5}+\frac{(-1)^7}{2(7)+5}+\frac{(-1)^8}{2(8)+5}+\frac{(-1)^9}{2(9)+5}+\frac{(-1)^{10}}{2(10)+5} \tag{2}$$

Realizando las respectivas operaciones en 2

$$-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}+\frac{1}{21}-\frac{1}{23}+\frac{1}{25}=-0.062065975\dots \tag{3}$$

Teniendo asi que el resultado esta dado en la ecuacion 4, es decir, la que esta a continuacion:

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{(-1)^k}{2k+5}=-0.062065975\dots \tag{4}$$

2.2 Problema 17

Escriba en notación sigma la suma dada

$$6+6+6+6+6+6+6+6 \tag{1}$$

Contando el numero de veces que aparce el 6 en la suma 1 tenemos que k(contador) toma valores de 1 a 8 dejandonos con la siguiente expresion:

$$\sum_{k=1}^{8}6 \tag{2}$$

2.3 Problema 29

Utilizando lo siguiente:

$$A=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)*\frac{b-a}{n} \tag{1}$$

Y los siguientes teoremas:

$$\sum_{k=1}^{n}c=nc \qquad \sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Con la propiedad dada en la ecuacion 1 y los teoremas dados anteriormente calcule el area bajo la funcion siguiente:

$$f(x)=x,[0,6] \tag{2}$$

Con dicha informacion podemos decir que:

$$a = 0 \qquad\qquad b = 6$$

Entonces:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(0 + k\frac{6-0}{n}\right) * \frac{6-0}{n} \tag{3}$$

Desarrollando:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(k\frac{6}{n}\right) * \frac{6}{n} = \dots$$

$$\dots = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{36k}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{36}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\right] = \dots$$

$$\dots = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{36}{n^2} * \frac{n(n+1)}{2}\right] = \lim_{n\to\infty} \left[18 * \frac{n(n+1)}{n^2}\right] = \dots$$

$$\dots = 18 \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n+1}{n}\right] = 18 * 1 = 18$$

Por lo tanto $A = 18$

2.4 Problema 41

Utilizando los teoremas y la definicion del problema anteriror resuelva lo siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & si \quad 0 \leq x < 1 \\ x+1, & si \quad 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Entonces podemos decir que el area esta dada por:

$$A = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^5 f(x)dx \tag{4}$$

Gracias a esta suma podemos trabajar por separado los dos trozos de la funcion. Asi facilitando s manipulacion. Para el segmento de $\int_0^1 f(x)dx$ la funcion esta evaluada en 2. Por lo cual el area esta dada por un valor constante y para este caso debemos agregar una propiedad:

$$\int_a^b kdx = k\int_a^b dx = k(b-a) \tag{5}$$

Sustituyendo:

$$A_1 = \int_0^1 2dx = 2\int_0^1 dx = 2(1-0) = 2 \tag{6}$$

Trabajando con la segunda parte tenemos:

$$A_2 = \int_1^4 f(x)dx = \int_1^4 xdx + \int_1^4 1dx \tag{7}$$

Trabajando por partes:

$$i)\int_1^4 xdx = \dots \qquad ii)1\int_1^4 dx = \dots$$

$$\dots = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[1+\frac{3k}{n}\right]\cdot\frac{3}{n} = \dots \qquad \dots = 1(4-1) = 3$$

$$\dots = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{3}{n}+\frac{9k}{n^2}\right]\cdot\frac{3}{n} = \dots$$

$$\dots = \lim_{n\to\infty}\left[3+\frac{9}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right] = \dots$$

$$\dots = \lim_{n\to\infty}\left[3+\frac{9}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\right] = 3+\frac{9}{2} = \frac{15}{2}$$

Ya que se tienen las integrales por partes tenemos lo siguiente:

$$A_2 = \int_1^4 xdx = \frac{15}{2}+3 = \frac{21}{2} \tag{8}$$

Para terminar realizamos la suma entre A_1 y A_2 para obtener A_T:

$$A_T = \int_0^4 f(x)dx = A_1 + A_2 = \frac{21}{2}+2 = \frac{25}{2} \tag{9}$$

2.5 Problema 53

Despeje $\bar{x}$ de :

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2 = 0 \tag{10}$$

Desarrollando:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2x_k\bar{x} + \bar{x}^2 = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \sum_{k=1}^{n} 2x_k\bar{x} + \sum_{k=1}^{n} \bar{x}^2 = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2\bar{x}\sum_{k=1}^{n} x_k + \bar{x}^2 = 0$$

$$\bar{x}^2 - 2\bar{x}\sum_{k=1}^{n} x_k = -\sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

$$\bar{x}^2 - 2\bar{x}\sum_{k=1}^{n} x_k + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

$$\left(\bar{x} + \sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

$$\bar{x} + \sum_{k=1}^{n} x_k = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

$$\bar{x} = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2} - \sum_{k=1}^{n} x_k$$

2.6 Conclusión

En conclusión, las sumas de Riemann son una técnica matemática utilizada para aproximar el valor de una integral definida. Esta técnica se basa en dividir el intervalo de integración en subintervalos y aproximar el valor de la función en cada uno de ellos. A medida que se divide el intervalo en secciones más pequeñas, la aproximación se vuelve más precisa. Las sumas de Riemann son una herramienta esencial en el cálculo y tienen aplicaciones en diversas áreas, como la física, la ingeniería y la economía. Además, son la base para el desarrollo del cálculo integral, una rama fundamental de las matemáticas.

3 Problemario 2: 303-305

3.1 Problema 5

Sea una funcion $f(x)$ definida por: $f(x) = sin(x)$ calcule el area dada por el intervalo cerrado: $[0, 2\pi]$ considerando los siguientes subintervalos:

$$x_0 = 0; x_1 = \pi; x_2 = \frac{3\pi}{2}; x_3 = 2\pi$$

y:

$$x_1^* = \frac{\pi}{2}; x_2^* = \frac{7\pi}{6}; x_3^* = \frac{7\pi}{4}$$

Como ya sabemos el area se calcula con:

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*) \triangle x_k$$

Por lo que desarrollando tenemos:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{3} f(x_k^*) \triangle x_k \quad &= \quad f(x_1^*) \triangle x_1 + f(x_2^*) \triangle x_2 + f(x_3^*) \triangle x_3 \\
f(x_1^*) = sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad &; \quad \triangle x_1 = \pi - 0 = \pi \\
f(x_2^*) = sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \quad &; \quad \triangle x_2 = \frac{3\pi}{2} - \pi = \frac{\pi}{2} \\
f(x_3^*) = sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad &; \quad \triangle x_3 = 2\pi - \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Sustituyendo:

$$\sum_{k=1}^{3} f(x_k^*) \triangle x_k = f(x_1^*) \triangle x_1 + f(x_2^*) \triangle x_2 + f(x_3^*) \triangle x_3 = \dots$$

$$\dots = \pi - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \approx 1.245473$$

3.2 Problema 17

Integre por definicion lo siguiente:

$$\int_0^1 (x^3 - 1)dx$$

Utilizando las formulas dadas en el problema 29 de la seccion anterior y algunas propiedades de las integrales tenemos:

$$\int_0^1 x^3 dx + \int_0^1 1dx$$

Trabajando por separado:

$$\int_0^1 x^3 dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \dots \qquad -\int_0^1 1dx = -1(1-0) = -1$$

$$\dots = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k^3}{n^4}\right) = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^{n} k^3\right] = \dots$$

$$\dots = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{n^4}\right] = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{(n+1)^2}{n^2}\right] = \dots$$

$$\dots = \frac{1}{4} \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n^2+2n+1}{n^2}\right] = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$$

Realizando la suma de las 2 partes:

$$\int_0^1 (x^3 - 1)dx = \int_0^1 x^3 dx + \int_0^1 1dx = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$$