$$y = f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

Решение: Проведем исследование функции.

1) Найдём область определения функции:

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ 1-x^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x^2 < 1 \end{cases}$$

Таким образом, область определения: $D(f) = (-1;0) \cup (0;1)$.

$f(-x) = \dfrac{1}{-x\sqrt{1-(-x)^2}} = -\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}} = -f(x)$, значит, данная функция является нечетной, её график симметричен относительно начала координат.

Функция непериодическая.

2) Асимптоты.

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{+0 \cdot 1} = +\infty,$$

Прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой для графика $f(x)$ при $x \to 0$.

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1-0} \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{+0} = +\infty.$$

Прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой для графика $f(x)$ при $x \to 1-0$.

Очевидно, что наклонные асимптоты отсутствуют.

3) Точки пересечения графика с координатными осями, интервалы знакопостоянства функции.

График функции не пересекает координатные оси.

$f(x) > 0$, если $x \in (0;1)$,

$f(x) < 0$, если $x \in (-1;0)$.

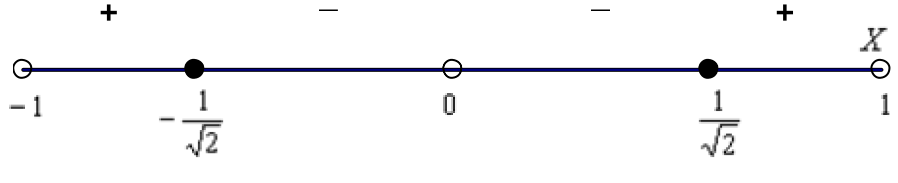
4) Возрастание, убывание, экстремумы функции.

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\right)' = ((x^2-x^4)^{-\frac{1}{2}})' = -\frac{1}{2}(x^2-x^4)^{-\frac{3}{2}} \cdot (x^2-x^4)' =$$

$$= -\frac{(2x-4x^3)}{2\sqrt{(x^2-x^4)^3}} = \frac{2x^3-x}{\sqrt{(x^2-x^4)^3}} = \frac{2x^3-x}{x^3\sqrt{(1-x^2)^3}} = \frac{2x^2-1}{x^2\sqrt{(1-x^2)^3}} = 0$$

$x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \approx \pm 0{,}71$ – критические точки.

Определим знаки $f'(x)$:



$f(x)$ возрастает на $\left(-1;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{2}};1\right)$ и убывает на $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};0\right)\cup\left(0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

В точке $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ функция достигает максимума: $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}}=-2$

В точке $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ функция достигает минимума: $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=2$.

5) Выпуклость, вогнутость, перегибы графика.

$$f''(x)=\left(\frac{2x^3-x}{\sqrt{(x^2-x^4)^3}}\right)'=\frac{(2x^3-x)'\sqrt{(x^2-x^4)^3}-(2x^3-x)(\sqrt{(x^2-x^4)^3})'}{(x^2-x^4)^3}=$$

$$=\frac{(6x^2-1)\sqrt{(x^2-x^4)^3}-(2x^3-x)\cdot\frac{3}{2}\sqrt{(x^2-x^4)}\cdot(2x-4x^3)}{(x^2-x^4)^3}=$$

$$=\frac{(6x^2-1)(x^2-x^4)+3(x-2x^3)\cdot(x-2x^3)}{\sqrt{(x^2-x^4)^5}}=\frac{x^2(6x^2-1)(1-x^2)+3x^2(1-2x^2)^2}{x^5\sqrt{(1-x^2)^5}}=$$

$$=\frac{(6x^2-1)(1-x^2)+3(1-4x^2+4x^4)}{x^3\sqrt{(1-x^2)^5}}=\frac{6x^2-1-6x^4+x^2+3-12x^2+12x^4}{x^3\sqrt{(1-x^2)^5}}=\frac{6x^4-5x^2+2}{x^3\sqrt{(1-x^2)^5}}$$

$6x^4-5x^2+2>0$

Определим знаки $f''(x)$:

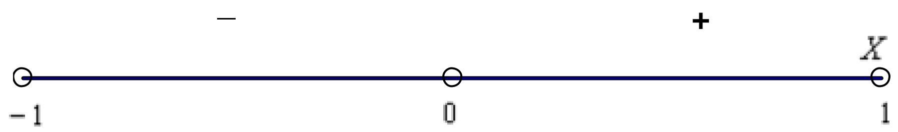
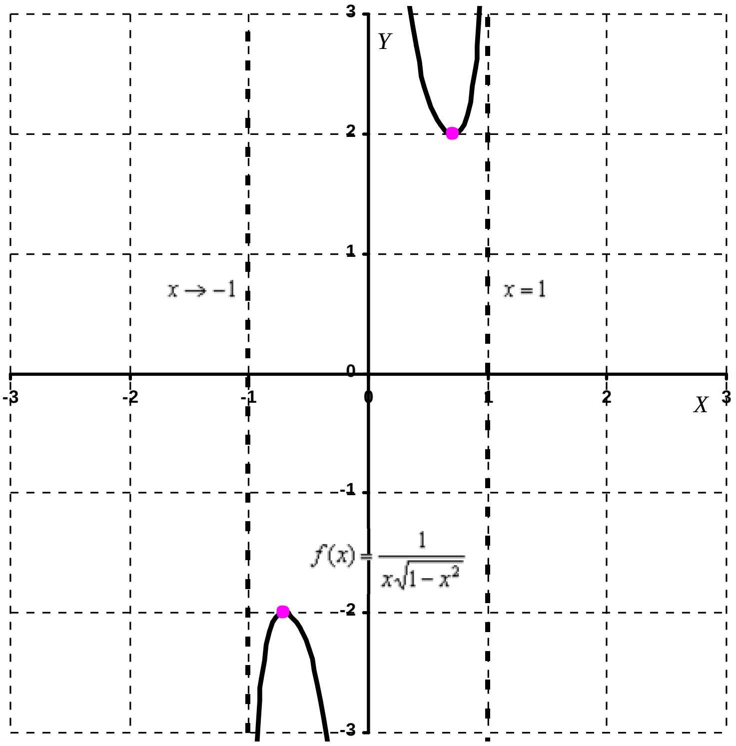


График $f(x)$ является выпуклым на $(-1;0)$ и вогнутым на $(0;1)$

6) Найдем дополнительные точки и построим график:

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
$f(x)$	10,05	5,10	3,49	2,73	2,31	2,08	2,00	2,08	2,55	3,37


3
Y
2
1
$x \to -1$
$x = 1$
0
-3
-2
-1
0
1
2
X
3
-1
$f(x)=\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$
-2
-3