$$y = f(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$$

Решение: Проведем исследование функции.

1) Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой, область определения: $D(f) = \Re$.

$$f(-x) = \sqrt[3]{1-(-x)^3} = \sqrt[3]{1+x^3}$$

$f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$, значит, данная функция не является четной или нечетной.

Функция непериодическая.

2) Асимптоты.

Так как функция непрерывна на $\Re$, очевидно, что вертикальные асимптоты отсутствуют.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{1-x^3}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\overset{\to 0}{\frac{1}{x^3}} - 1} = -1$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^3} + x\right) = 0$$

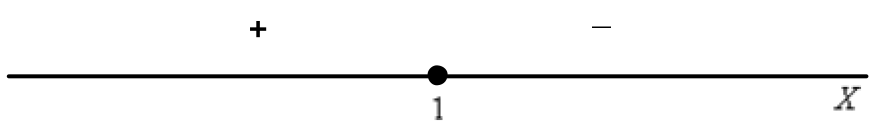
Прямая $y = -x$ является наклонной асимптотой для графика $f(x)$ при $x \to \pm\infty$.

3) Точки пересечения графика с координатными осями, интервалы знакопостоянства функции.

С осью OY: $x = 0 \Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{1-0^3} = 1$

С осью OX: $f(x) = \sqrt[3]{1-x^3} = 0$
$x = 1$

Определим знаки $f(x)$:



$f(x) > 0$, если $x < 1$;
$f(x) < 0$, если $x > 1$.

4) Возрастание, убывание, экстремумы функции.

$$f'(x)=\left(\sqrt[3]{1-x^3}\right)'=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}\cdot(1-x^3)'=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}\cdot(0-3x^2)=-\frac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}<0,$$

значит, функция убывает на всей области определения.

5) Выпуклость, вогнутость, перегибы графика.

$$f''(x)=\left(-\frac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}\right)'=-\frac{(x^2)'\cdot\sqrt[3]{(1-x^3)^2}-x^2\cdot\left((1-x^3)^{\frac{2}{3}}\right)'}{\sqrt[3]{(1-x^3)^4}}=$$

$$=-\frac{2x\cdot\sqrt[3]{(1-x^3)^2}-x^2\cdot\frac{2}{3}(1-x^3)^{-\frac{1}{3}}\cdot(1-x^3)'}{\sqrt[3]{(1-x^3)^4}}=-\frac{2x\cdot\sqrt[3]{(1-x^3)^2}-\frac{2x^2}{3\cdot\sqrt[3]{1-x^3}}(0-3x^2)}{\sqrt[3]{(1-x^3)^4}}=$$

$$=-\frac{2x\cdot\sqrt[3]{(1-x^3)^2}+\frac{2x^4}{\sqrt[3]{1-x^3}}}{\sqrt[3]{(1-x^3)^4}}=-\frac{2x\cdot(1-x^3+x^3)}{\sqrt[3]{(1-x^3)^5}}=-\frac{2x}{\sqrt[3]{(1-x^3)^5}}=0$$

$x=0$ – критическая точка.

Определим знаки $f''(x)$:

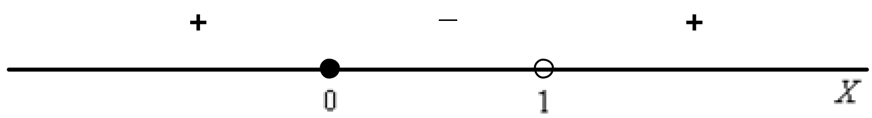
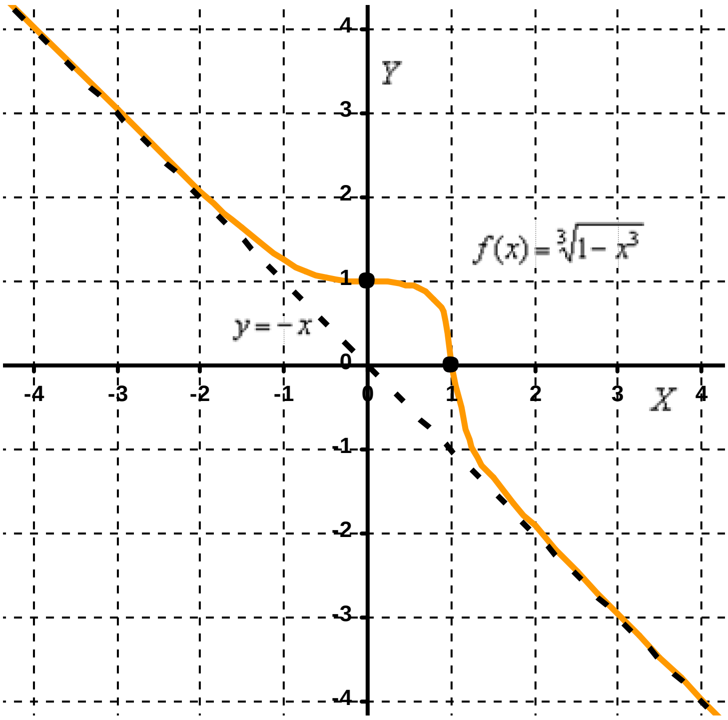


График $f(x)$ является вогнутым на $(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$ и выпуклым на $(0;1)$.

В обеих критических точках существуют перегибы графика:
$f(0)=1$, $f(1)=0$

6) Найдем дополнительные точки и построим график:

x	-2	-1	-0,5	0,5	2	3
$f(x)$	2,08	1,26	1,04	0,96	-1,91	-2,96


Y
X
$f(x)=\sqrt[3]{1-x^3}$
$y=-x$
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4