Исследовать методами дифференциального исчисления и построить график функции.

$$y = f(x) = \frac{x^3 - 3x}{x^2 - 1}$$

Решение:

1) Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой кроме точек $x = \pm 1$, область определения: $D(f) = \Re \setminus \{\pm 1\}$.

$f(-x) = \dfrac{(-x)^3 - 3(-x)}{(-x)^2 - 1} = \dfrac{-x^3 + 3x}{x^2 - 1} = -\left(\dfrac{x^3 - 3x}{x^2 - 1}\right) = -f(x)$, значит, данная функция является нечетной, ее график симметричен относительно начала координат.

Очевидно, что функция непериодическая.

2) Асимптоты.

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1-0} \left(\frac{x^3 - 3x}{x^2 - 1}\right) = \frac{-2}{-0} = +\infty,$$

$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} \left(\frac{x^3 - 3x}{x^2 - 1}\right) = \frac{-2}{+0} = -\infty.$$

Прямые $x = 1$ и $x = -1$ являются вертикальными асимптотами для графика $f(x)$ при $x \to 1$ и $x \to -1$ соответственно.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 - 3x}{x(x^2 - 1)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 - 3x}{x^3 - x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{\frac{x^3 - 3x}{x^3}}{\frac{x^3 - x}{x^3}}\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{1 - \overset{\to 0}{\frac{3}{x^2}}}{1 - \overset{\to 0}{\frac{1}{x^2}}}\right) = 1,$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^3 - 3x}{x^2 - 1} - x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^3 - 3x - x^3 + x}{x^2 - 1}\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{-2x}{x^2 - 1}\right) = \frac{\infty}{\infty} =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{\frac{-2x}{x^2}}{\frac{x^2 - 1}{x^2}}\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{\overset{\to 0}{\frac{-2}{x}}}{1 - \overset{\to 0}{\frac{1}{x^2}}}\right) = \frac{0}{1} = 0.$$

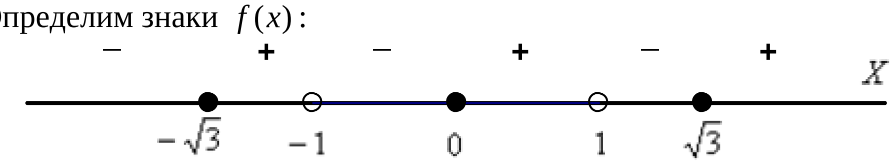
Прямая $y = x$ является наклонной асимптотой для графика $f(x)$ при $x \to \pm\infty$.

3) Точки пересечения графика с координатными осями, интервалы знакопостоянства функции.

График $f(x)$ проходит через начало координат, $x \neq \pm 1$

Точки пересечения с осью OX : $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x}{x^2 - 1} = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{3}$

Определим знаки $f(x)$:



$f(x) > 0$ при $x \in (-\sqrt{3}; -1)(0;1) \cup (1; +\infty)$,

$f(x) < 0$ при $x \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (-1; 0) \cup (1; \sqrt{3})$

4) Возрастание, убывание, экстремумы функции.

$$f'(x)=\left(\frac{x^3-3x}{x^2-1}\right)'=\frac{(x^3-3x)'(x^2-1)-(x^3-3x)(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}=\frac{(3x^2-3)(x^2-1)-(x^3-3x)\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=$$

$$=\frac{3x^4-6x^2+3-2x^4+6x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{x^4+3}{(x^2-1)^2}>0$$

Таким образом, функция возрастает на всей области определения.

5) Выпуклость, вогнутость, перегибы графика.

$$f''(x)=\left(\frac{x^4+3}{(x^2-1)^2}\right)'=\frac{\left(x^4+3\right)'(x^2-1)^2-\left(x^4+3\right)\left((x^2-1)^2\right)'}{(x^2-1)^4}=$$

$$=\frac{4x^3(x^2-1)^2-(x^4+3)\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4}=$$

$$=4x\cdot\frac{x^2(x^2-1)-(x^4+3)}{(x^2-1)^3}=\frac{4x(x^4-x^2-x^4-3)}{(x^2-1)^3}=-\frac{4x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}=0$$

$x=0$ – критическая точка.

Определим знаки $f''(x)$:

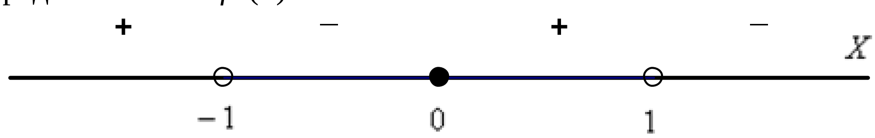


График функции является вогнутым на $x\in(-\infty;-1)\cup(0;1)$ и выпуклым на $x\in(-1;0)\cup(1;+\infty)$

В точке $x=0$ существует перегиб графика: $f(0)=0$

6) Найдем дополнительные точки и построим график:

x	0,25	0,5	0,75	1,25	1,5	2	3	4	5	6
$f(x)$	0,78	1,83	4,18	-3,19	-0,90	0,67	2,25	3,47	4,58	5,66

Пройти бесплатный курс обучения, а также найти исследования других функций можно на странице
http://mathprofi.ru/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika.html