Day 17

№ 2, 10

Задача 2

Образуют ли числа 2, 6, 10, 12, 16 арифметическую прогрессию? Ответьте да или нет?

$2+4=6$

$6+4=10$

$10+4=14$

$\neq 12$ Ответ: нет.

Задача 10.

Найдите разность арифметической прогрессии a_n, если $a_5=18$ и $a_2=9$

$a_{n+1}=a_n+d$

$a_2=a_1+d$

$a_5=a_2+d+d+d$

$18=9+3d$

$3d=18-9$

$3d=9$

$d=3$

Ответ: $d=3$

№ 5,11

Задача 5

Пусть a_n есть арифметическая прогрессия, для которой $a_1+a_2+a_3=102$ и $a_1=15$. Найдите a_{10}

$a_1=15$

$a_2=a_1+d$

$a_3=a_1+2d$

$a_1+a_2+a_3=\underbrace{15}_{a_1}+\underbrace{15+d}_{a_2}+\underbrace{15+2d}_{a_3}$

$45+3d=102$

$3d=57$

$d=19$

$a_n=a_1+d(n-1)$

$a_{10}=15+\underbrace{19}_{d}\cdot 9=186$

Ответ: $a_{10}=186$

Задача 11.

Если a_n есть арифметическая прогрессия, для которой $a_{10} = 15$ и $a_5 = 5$. Найдите a_1.

a_n

$a_{10} = 15$

$a_5 = 5$

$a_5 = a_1 + 5d$

$d = a_{n+1} - a_n$

$a_{n+1} = a_n + d$

$a_{10} = a_9 + d$

$a_8 + 2d$

$a_7 + 3d$

$a_6 + 4d$

$\boxed{a_5 + 5d}$

$a_{10} = a_5 + 5d$

$5d = a_{10} - a_5$

$5d = 15 - 5$

$5d = 10$

$d = 2$

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$a_5 = a_1 + 4d$

$a_1 = a_5 - 4d$

$a_1 = 5 - 4 \cdot 2$

$a_1 = -3$

Ответ: $a_1 = -3$

Scanned with AnyScanner

ИЗ 3

Задача 3

Пусть $\{a_n\}_1^{100}$ есть арифметическая прогрессия с 100 элементами.

$a_1 = 5$, $a_2 = 8$ и так далее.

$\{b_n\}_1^{100}$ также имеет 100 элементов, но $b_1 = 3$, $b_2 = 7$ и так далее.

Найдите, сколько общих элементов имеют $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$

$\{a_n\}_1^{100}$ – 100 элементов

$a_1 = 5$ $d = 8 - 5 = 3$

$a_2 = 8$

$a_n = a_1 + d(n-1)$

$a_{100} = 5 + 3 \cdot 99 = 302$

$\{b_n\}_1^{100}$ – 100 элементов

$b_1 = 3$ $d = 4$

$b_2 = 7$

$b_{100} = \underset{3}{b_1} + \underset{4}{d} \cdot 99 =$

$= 399$

$\Rightarrow$ Общие элементы д.б. не больше 302.

$\{a_n\}$ $d = 23 - 11 = 12$

5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29,

32, 35, ... 302

$\{b_n\}$ $d = 23 - 11 = 12$

3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39

... 399

→ общие элементы не больше 302

$$n = \frac{302 - 11}{d = 12} + 1 = 25{,}25 \; (25)$$

Ответ: 25 общих элементов

P.S.

Есть более изящное решение через китайскую теорему об остатках

IV 3, 12

Задача 3

Определите знаменатель q увеличивающейся геометрической прогрессии a_n, для которой $a_1 = 5$ и $a_3 = 20$

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$\frac{20}{5} = \frac{a_3}{a_1} = \frac{\cancel{a_1} \cdot q^2}{\cancel{a_1}} = q^2 = 4$$

$$|q| = \pm 2$$

По условию $q > 0$, $\Rightarrow q = 2$.

Ответ: $q = 2$

Задача 12

Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии a_n, определенной $a_1 = 1$ и $q = \frac{1}{2}$

Формула для суммы бесконечной геометрической прогрессии

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

$$S=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=1\cdot 2=2$$

Ответ: 2

$\underline{V}$ 7, 16

Задача 7

Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии $a_n=6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$$S=a_1\cdot\frac{1}{1-q}$$

$a_1=6\cdot\frac{1}{3}$

$q=\frac{1}{3}$

$$S=6\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-q}=6\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=$$

$$=6\cdot\frac{1}{3-\frac{\cancel{3}}{\cancel{3}}}=6\cdot\frac{1}{2}=3$$

Ответ: 3

Задача 16

Пусть x_1, x_2 будут корнями произведения $x^2-3x+a=0$ а y_1, y_2 будут корнями произведения $x^2-12x-b=0$. Если x_1, x_2, y_1, y_2 образуют возрастающую геометрическую прогрессию в указанном порядке определения значения $a.b$

x^2-3x+a $\qquad$ $x^2-12x-b=0$

ax^2+bx+c

$$\left|\begin{array}{l} a=0 \\ p=b=-3 \\ q=c=a \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} a=1 \\ p=b=-12 \\ q=c=b \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} x_1+x_2=x_1+x_1q \overset{-p}{=} 3 \\ y_1+y_2=x_1q^2+x_1\cdot q^3 \overset{-p}{=} 12 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} x_1+x_2=x_1(1+q)=3 \\ y_1+y_2=x_1q^2(1+q)=12 \end{array}\right.$$

Найдём q:
$$\frac{\cancel{x_1}q^2\cancel{(1+q)}}{\cancel{x_1}\cancel{(1+q)}}=4$$

$$q^2=4$$

$q_1 = 2 \qquad q_2 = -2$

т.к. q д.б. >0, $\Rightarrow$ $\underline{q = 2}$

$x_1(q+1) = 3$

$x_1(2+1) = 3$

$x_1 = \underline{1}$

$x_2 = x_1 \cdot q = 1 \cdot 2 = 2$

$y_1 = x_1 \cdot q^2 = 1 \cdot 4 = 4$

$y_2 = x_1 \cdot q^3 = 1 \cdot 2^3 = 8$

$\underline{\underline{a}} = c = q = x_1 \cdot x_2 = 1 \cdot 2 = \underline{\underline{2}}$

$-b = c = q = y_1 \cdot y_2$

$\underline{\underline{b}} = -(4 \cdot 8) = \underline{\underline{-32}}$

$a \cdot b = 2 \cdot (-32) = -64$

Ответ: -64.

Scanned with AnyScanner

VI 5

Задача 5

Найдите бесконечную сумму

$S = 1 + 2\cdot\frac{1}{7} + 3\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^2 + \dots + (n+1)\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^n + \dots$

$x = \frac{1}{7}$ $|x| < 1$

$S = 1 + 2\cdot x + 3\cdot x^2 + \dots + (n+1)(x)^n + \dots$

$= (1 + x + x^2 + x^3 + \dots) + x + 2x^2 + 3x^3 + \dots =$

$= (1 + x + x^2 + x^3 + \dots) + (x + x^2 + x^3 + \dots) +$

$+ x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \dots =$

$= 1\cdot(1 + x + x^2 + x^3 + \dots) + x(1 + x + x^2 + x^3) +$

$+ x^2(1 + x + x^2 + x^3 + \dots) + \dots =$

$= (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)(1 + x + x^2 + x^3 + \dots) =$

$= (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)^2$

$1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ Есть сумма бесконечной геометрической прогрессии

$a_1 = 1$, $q = x$

$S = \frac{a_1}{q} \Rightarrow S = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2$

$$S = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{7}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\frac{6}{7}}\right)^2 = \left(\frac{7}{6}\right)^2 = \frac{49}{36}$$

Ответ: $\frac{49}{36}$.