

20 kwietnia 2017

1	2	3	4	KR1	KR2
Imię i nazwisko					

- Proszę podpisać wszystkie kartki.
- 1 zadanie \equiv 1 kartka.
- Rozwiązujemy 4 zadania z 6.

1. **15p.** Niezależne zmienne X_1, \dots, X_n mają ten sam rozkład o wartościach dodatnich. Obliczyć

$$E \left(\sum_{i=1}^k X_i / \sum_{m=1}^n X_m \right), \text{ dla } k \leq n.$$

2. **15p.** Zmienna losowa (X, Y) podlega rozkładowi o gęstości określonej wzorem:

$$f(x, y) = \frac{3}{2} \exp(-(x + y)), \text{ gdzie } 0 < x < 2y < \infty.$$

$$\text{Obliczyć gęstość zmiennej } (Z, W), \text{ gdzie } Z = \frac{X + Y}{2}, W = \frac{X - Y}{2}.$$

3. **15p.** Niezależne zmienne losowe X_1, X_2, \dots, X_N mają rozkład $N(\mu, \sigma^2)$. Wiadomo, że $M_{X_k}(t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2 / 2}$. Jaki rozkład ma zmienna Z ?

$$Z = \left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \right).$$

4. **15p.** Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy, tzn. $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$, dla $x \in (0, \infty)$.

- Wyznaczyć postać funkcji tworzącej momenty $M_X(t)$.
- Obliczyć $E(X)$ i $V(X)$.

5. **Zadanie KR1 – 8p.** (X, Y) jest dyskretną zmienną losową o prawdopodobieństwach p_{ij} ($i = 1, \dots, I$; $j = 1, \dots, J$). Podać szkic dowodu twierdzenia:
 $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

6. **Zadanie KR2 – 8p.** Wykazać, że wariancja sumy dwóch niezależnych zmiennych losowych X, Y jest równa sumie wariancji tych zmiennych, a więc

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y).$$

Czemu jest równa wariancja różnicy dwóch takich zmiennych?

Witold Karczewski