Algorytmy probabilistyczne
Lista zadań nr 4

1. Wykazać następujący fakt, z którego często korzysta się: Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o wartościach 0-1 oraz $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Niech $\mu = E[X]$ oraz $\mu_L \leq \mu \leq \mu_H$. Wtedy dla dowolnej $\delta > 0$
$$Pr(X \geq (1+\delta)\mu_H) \leq \left(\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^{\mu_H}.$$
Podobnie wykazać, że dla dowolnej $0 < \delta < 1$ zachodzi
$$Pr(X \leq (1-\delta)\mu_L) \leq \left(\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{1-\delta}}\right)^{\mu_L}.$$

2. Rozważamy ciąg n niezależnych zmiennych losowych $X_1, \ldots, X_n$ o wartościach ze zbioru $\{0, 1, 2\}$ wybieranych z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$. Niech $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ oraz $0 < \delta < 1$. Wyprowadzić nierówności ogonowe Chernoffa na $Pr(X \leq (1-\delta)n)$ oraz $Pr(X \geq (1+\delta)n)$.

3. Dany jest algorytm zrandomizowany Monte Carlo, który może dać błędną odpowiedź TAK/NIE z prawdopodobieństwem błędu $\leq 1/2 - 1/p(n)$ przy wejściu rozmiaru n, gdzie $p(n)$ jest wielomianem. Używając nierówności Chernoffa wyznaczyć liczbę powtórzeń tego algorytmu, która wystarczy do zredukowania prawdopodobieństwa popełnienia błędu do 2^{-n}.

4. Rozważmy następujący problem zero-jedynkowej aproksymacji wektora: dana jest macierz A rozmiaru $n \times n$ o elementach 0-1 oraz wektor p rozmiaru n liczb wymiernych z przedziału [0,1]. Wyznaczyć należy wektor q rozmiaru n o wartościach 0-1, który minimalizuje $||A(p-q)||_\infty$. Stosując metodę losowego zaokrąglania przyjmujemy, że q_i ma wartość 1 z prawdopodobieństwem p_i. Znaleźć oszacowanie na $||A(p-q)||_\infty$, które zachodzi z dużym prawdopodobieństwem.

5. Wykazać, że zrandominizowany *QuickSort* (**RandQS**) działa w czasie $O(n \log n)$ z dużym prawdopodobieństwem.

20 marca 2019 *Marek Piotrów*