Lista 11

Kamil Matuszewski

7 stycznia 2016

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
✓	✓					✓	✓	✓	✓		✓						

Zadanie 1

Z poprzedniej listy wiemy, że zbiór wierzchołków centralnych drzewa składa się z jednego wierzchołka albo dwóch sąsiednich.
Pokażę, że w automorfizmie drzewa centrum zawsze jest punktem stałym automorfizmu.

Dowód. Indukcja po liczbie wierzchołków drzewa. Dla $n = 1, 2$ oczywiste. Załóżmy, że dla $\forall k < n$ działa. Sprawdzę dla n.
Weźmy dowolne n-wierzchołkowe drzewo. Usuńmy z niego wszystkie liście. Oczywiście operacja usunięcia liści nie zmieniła nam centrum. Skoro tak, to te centrum jest punktem stałym przekształcenia (z zał. ind). Teraz w dowolnym automorfizmie liść musi przechodzić na liść, a jeśli coś jest punktem stałym drzewa, to jest też punktem stałym tego samego drzewa z jakimiś liśćmi. Skoro tak, to centrum drzewa n-wierzchołkowego jest punktem stałym automorfizmu. □

Wiedząc, że w centrum drzewa zawsze jest albo wierzchołek albo para wierzchołków, oraz że centrum drzewa to zawsze punkt stały automorfizmu, widać, że punktem stałym w automorfizmie drzewa jest albo wierzchołek albo krawędź(para wierzchołków).

Zadanie 2

Gdy n-wierzchołkowy graf G jest samodopełniający, to $n \equiv 0$ lub $n \equiv 1$ modulo 4.

Dowód. Wiemy, że graf jest samodopełniający, gdy jet izomorficzny ze swoim dopełnieniem. Skoro tak, to G ma tyle samo krawędzi co $\widehat{G}$. Poza tym, kiedy zsumujemy graf G ze swoim dopełnieniem, otrzymujemy graf pełny. Wiemy też, że graf pełny ma $\frac{n(n-1)}{2}$ krawędzi.

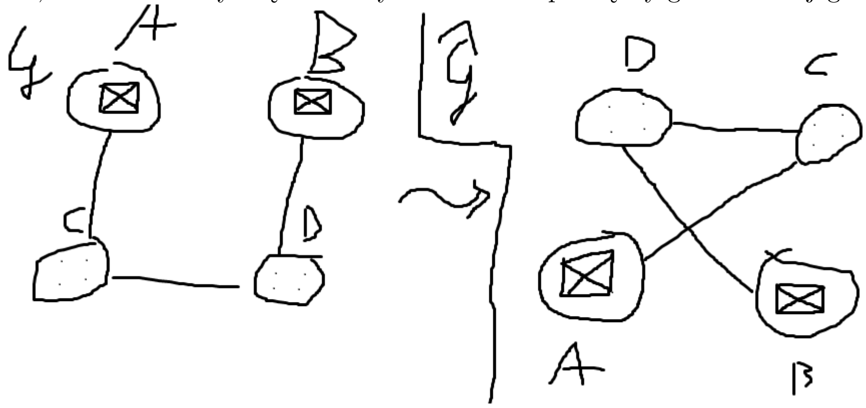
$$\#E(G) + \#E(\widehat{G}) = \frac{n(n-1)}{2} \cap \#E(G) = \#E(\widehat{G}) \Rightarrow \#E(G) = \frac{n(n-1)}{4}$$

Skoro liczba krawędzi musi być liczbą całkowitą, to albo n jest podzielne na 4, albo $n - 1$ jest podzielne na 4 ($NWD(n, n-1) = 1$). Czyli $n \equiv 0$ lub $n \equiv 1$ modulo 4. □

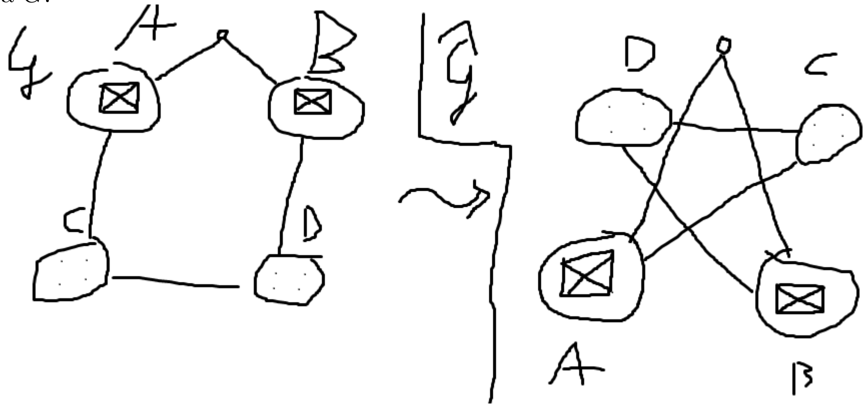
Gdy graf G ma n wierzchołków, gdzie $n \equiv 0$ lub $n \equiv 1$ modulo 4, to istnieje graf G który jest samodopełniający.

Dowód.

- $n \equiv 0$ mod 4
  Podzielmy n na cztery równoliczne grupy. Nazwijmy te grupy A,B,C i D. Teraz niech każde dwa wierzchołki w A będą połączone krawędzią (podgraf A jest grafem pełnym). Podobnie dla B. Sytuacja odwrotna będzie w C i D (podgrafy C i D są podgrafami pustymi). Teraz każdy wierzchołek z A połączmy z każdym wierzchołkiem z C, każdy wierzchołek C z każdym z D, każdy z D z każdym z B. Twierdzę, ze tak skonstruowany graf jest grafem samodopełniającym. Weźmy dopełnienie stworzonego grafu. W dopełnieniu, krawędzie w A i B znikną, ale pojawią się krawędzie w C i D. Znikną krawędzie między A i C oraz C i D, pojawią się natomiast pomiędzy C i B. Znikną krawędzie pomiędzy D i B pojawią się natomiast pomiędzy D i A. Dodatkowo pojawią się krawędzie pomiędzy A i B. Możemy zauważyć, że A zmieniło się miejscami z D a B z C: podgrafy C i D są podgrafami pełnymi, A i B są podgrafami pustymi. Pomiędzy podgrafami pełnymi nie ma krawędzi, natomiast są krawędzie pomiędzy C i B, B i A, A i D. Możemy więc utworzyć izomorfizm pomiędzy grafem G a jego dopełnieniem.



- $n \equiv 1$ mod 4
  Tutaj konstrukcja jest identyczna do tej w poprzednim przypadku. Zostaje nam jeden wierzchołek, który połączymy ze wszystkimi wierzchołkami z A i B. W dopełnieniu te krawędzie znikną, ale pojawią się krawędzie pomiędzy tym wierzchołkiem a wszystkimi wierzchołkami w C i D. A zmieniło się miejscami z D a B z C, więc nadal istnieje izomorfizm pomiędzy G a $\widehat{G}$.



□

Zadanie 7

W każdym turnieju istnieje wierzchołek, z którego można dojść do każdego innego po drodze skierowanej długości co najwyżej 2.

Dowód. Weźmy wierzchołek v o największej liczbie łuków wychodzących (maksymalnym $outdeg$). Jeśli $outdeg(v) = \#E(G)$ to z tego wierzchołka istnieje droga do każdego innego o długości dokładnie 1, co kończy zadanie. Załóżmy więc, że $outdeg(v) < \#E(G)$.
Załóżmy nie wprost że istnieje wierzchołek u, do którego nie da się dojść ścieżką skierowaną z v w dwóch ruchach. Skoro ten wierzchołek ma łuki do każdego innego wierzchołka, w szczególności ma łuki do wierzchołka v i każdego wierzchołka do którego da się dojść z v w jednym ruchu. Aby nie dało się dojść z v do u w maksymalnie dwóch ruchach, te wierzchołki muszą być połączone krawędziami wychodzącymi z u. Oznacza to, że $outdeg(u) = oustdeg(v) + 1$ bo nie dość, że wychodzą z niego krawędzie skierowanie do każdego z $outdeg(v)$ to także wychodzi z niego krawędź skierowana do v. Skoro tak, to nie wybraliśmy wierzchołka o maksymalnej liczbie łuków wychodzących, więc mamy sprzeczność. □

Zadanie 8

Turniej zawiera drogę Hamiltona.

Dowód. Indukcja. Dla $n = 1$ oczywiste, że działa. Zał, że działa dla $n - 1$, sprawdzę dla n.
Weźmy graf n-wierzchołkowy i usuńmy dowolny wierzchołek u. Oczywiście graf otrzymany po usunięciu tego wierzchołka ma drogę Hamiltona $v_0 \mapsto v_1 \mapsto \cdots \mapsto v_{n-1}$ (zał. indukcyjne). Teraz dołóżmy z powrotem wierzchołek u. Teraz, u ma łuk z każdym innym wierzchołkiem (bo to turniej). Jeśli istnieje krawędź $u \mapsto v_0$ lub $v_{n-1} \mapsto u$ to mamy rozwiązanie. Jeśli nie, to weźmy najmniejsze i takie, że $u \mapsto v_i$. Skoro to najmniejsze takie i, to $v_{i-1} \mapsto u$. Zastąpmy w naszej drodze Hamiltona $v_{i-1} \mapsto v_i$ poprzez $v_{i-1} \mapsto u \mapsto v_i$. Otrzymaliśmy drogę Hamiltona, i to jest nasze rozwiązanie. □

Zadanie 9

- Czy istnieje sposób obejścia szachownicy 5x5 ruchem konika szachowego? Tak:

  01|24|19|14|03
  18|13|02|09|20
  23|08|25|04|15
  12|17|06|21|10
  07|22|11|16|05

- Czy istnieje sposób obejścia szachownicy 5x5 ruchem konika szachowego, gdy wymagamy by konik wrócił na to samo pole? Nie istnieje. Weźmy szachownicę pomalowaną na czarno-biało (tak jak oryginalna szachownica). Łatwo zauważyć, że ruch konia zawsze jest z pola o jednym kolorze na pole o drugim kolorze. Pól do obejścia jest 25. W takim razie jeśli ruszamy z pola czarnego, przy nieparzystej liczbie ruchów trafiamy na pole białe. W 25 ruchu zawsze trafimy na pole białe, a powinniśmy skończyć na polu czarnym. Analogicznie, gdy ruszamy z białego, zawsze skończymy na czarnym. W takim wypadku nie ma opcji byśmy wrócili w to samo miejsce.

Zadanie 10

Szukaną drogą jest:
$[b, b, a, b, a, a], [b, a, b, b, a, a], [a, b, b, b, a, a], [a, b, b, a, b, a], [a, b, b, a, a, b], [b, a, b, a, a, b], [b, b, a, a, a, b],$
$[b, b, a, a, b, a], [b, a, b, a, b, a], [b, a, a, b, b, a], [a, b, a, b, b, a], [a, a, b, b, b, a], [a, a, b, b, a, b], [a, b, a, b, a, b],$
$[b, a, a, b, a, b], [b, a, a, a, b, b], [a, b, a, a, b, b], [a, a, b, a, b, b], [a, a, a, b, b, b], [a, a, a, b, b, b]]$

Zadanie 11

$[[c, b, c, c, c, a], [c, c, b, c, c, a], [c, c, c, b, c, a], [c, c, c, c, b, a], [c, c, c, c, a, b], [c, c, c, a, c, b], [c, c, a, c, c, b],$
$[c, a, c, c, c, b], [a, c, c, c, c, b], [a, c, c, c, b, c], [c, a, c, c, b, c], [c, c, a, c, b, c], [c, c, c, a, b, c], [c, c, c, b, a, c],$
$[c, c, b, c, a, c], [c, b, c, c, a, c], [b, c, c, c, a, c], [b, c, c, a, c, c], [c, b, c, a, c, c], [c, c, b, a, c, c], [c, c, a, b, c, c], [c, a, c, b, c, c],$
$[a, c, c, b, c, c], [a, c, b, c, c, c], [c, a, b, c, c, c], [c, b, a, c, c, c], [b, c, a, c, c, c], [b, a, c, c, c, c], [a, b, c, c, c, c], [a, b, c, c, c, c]]$

Zadanie 12

Pokaż, że w grafie prostym G, w którym dla dowolnych u,v,w istnieją co najmniej dwie spośród trzech krawędzi $\{u, v\}, \{u, w\}, \{v, w\}$,istnieje cykl Hamiltona.

Dowód. Z twierdzenia Orego, jeśli dla dowolnych u,v niepołączonych bezpośrednio $deg(u) + deg(v) \geqslant n$ to w G istnieje cykl Hamiltona.
W grafie pełnym-trywialne. Weźmy dowolny n-wierzchołkowy graf G. Teraz weźmy dowolnie dwie krawędzie u,v niepołączone bezpośrednio. Zostaje nam $n - 2$ wierzchołki. Weźmy dowolny z tych wierzchołków i nazwijmy go w. Wiemy, że dla pary u,v,w muszą istnieć przynajmniej dwie spośród trzech krawędzi $\{u, v\}, \{u, w\}, \{v, w\}$. Skoro nie ma krawędzi $\{u, v\}$, to v musi być połączony z w i u musi być połączony z w. Wierzchołek w wybraliśmy dowolnie, skoro tak, to v jest połączony z każdym z $n - 2$ wierzchołków, podobnie u. Mamy więc

$$deg(u) = deg(v) = n - 2$$

$$deg(u) + deg(v) = 2n - 4 \geqslant n$$

Więc z twierdzenia Orego, istnieje cykl Hamiltona.

□