Lista 11

Kamil Matuszewski

13 stycznia 2016

1	2	3	4	5	6	7	8
✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓

Zadanie 1

Uzasadnij proces ortogonalizacji Grama-Schmidta.

Na początek, jak działa ortogonalizacja Grama-Schmidta: Dla układu liniowo niezależnego $\{f_0, f_1, \cdots, f_n\}$ możemy utworzyć układ liniowo niezależny $\{g_0, g_1, \cdots, g_n\}$ taki, że $< g_i, g_j >_N = 0$ dla $i \neq j$, za pomocą następującego algorytmu:

$$g_0 = f_0$$
$$g_k = f_k - \sum_{j=0}^{k-1} \tfrac{<f_k, g_j>}{<g_j, g_j>} g_j$$

Muszę najpierw udowodnić, że tak otrzymany układ jest ortogonalny.

Dowód. Indukcja. Niech $g_0 \cdots g_k$ będzie układem wektorów uzyskanym za pomocą tego algorytmu z bazy $v_0 \cdots v_n$. Załóżmy indukcyjnie, że $g_0 \cdots g_{k-1}$ są ortogonalne. Sprawdzę ortogonalność g_k względem dowolnego g_i gdzie $i < k$.
Zapiszmy g_k jako:

$$g_k = f_k - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{< f_k, g_j >}{< g_j, g_j >} g_j$$

Korzystając z własności iloczynu skalarnego, mamy:

$$< g_i, g_k >= \left\langle g_i, f_k - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{< f_k, g_j >}{< g_j, g_j >} g_j \right\rangle$$

$$< g_i, g_k >=< g_i, f_k > - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{< f_k, g_j >}{< g_j, g_j >} < g_j, g_i >$$

Z założenia indukcyjnego, wiemy, że $< g_j, g_i >= 0$ dla $j \neq i$, więc zostaje nam:

$$< g_i, g_k >=< g_i, f_k > - \frac{< f_k, g_i >}{< g_i, g_i >} < g_i, g_i >$$

$$< g_i, g_k >=< g_i, f_k > - < f_k, g_i >$$

$$< g_i, g_k >= 0$$

Co oznacza, że g_k jest ortogonalny z dowolnym g_i.

□

Zadanie 2

Układ ortogonalny $\{P_0, P_1, \cdots, P_n\}$ jest bazą $\prod_n$

Dowód. Skoro tych wielomianów jest $n+1$, to wystarczy sprawdzić liniową niezależność.

$$\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_n P_n = 0$$

Pomnóżmy (w sensie iloczynu skalarnego) przez P_i (gdzie i jest dowolne).

$$\begin{aligned} &\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_n P_n = 0 && \backslash \cdot P_i \\ &\alpha_0 < P_0, P_i > + \alpha_1 < P_1, P_i > + \cdots + \alpha_i < P_i, P_i > + \cdots + \alpha_n < P_n, P_i >= 0 \end{aligned}$$

Teraz, wiemy, że dla każdego $j \neq i < P_i, P_j >= 0$ (bo są ortogonalne), więc:

$$\alpha_i < P_i, P_i >= 0$$

$$\alpha_i = 0$$

Skoro możemy to zrobić dla każdego i, możemy napisać, że:

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_i = 0$$

A to jest to co chcieliśmy pokazać. □

Zadanie 3

Zapiszmy $w \in \prod_{k-1}$ jako kombinację liniową $P_0 ... P_{k-1}$, Iloczyn sumy to suma iloczynów, każdy z iloczynów jest 0, więc wszystko jest 0.

$$< a_0 P_0 P_k, a_1 P_1 P_k, \ldots, a_{k-1} P_{k-1} P_k >=< 0, 0, \ldots, 0 >= 0$$

Bo $< P_i, P_k >= 0$ z ortogonalności.

Zadanie 4

Pokaż, że wielomiany Czebyszewa są ortogonalne względem iloczynu skalarnego w postaci

$$\sum_{k=0}^{r} p_k f(u_k) g(u_k),$$

gdzie $u_k = \cos(\frac{k\pi}{r})$ $(k = 0 \ldots r)$ oraz

$$p(u_k) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (k = 0, r), \\ 1 & (1 < k < r) \end{cases}$$

Najpierw pokażę taki wzórek:

$$\sum_{k=0}^{r} cos(k\alpha) = \frac{1}{2} + \frac{\sin((N + \frac{1}{2})\alpha)}{2\sin(\frac{\alpha}{2})}$$

$$(1) \sum_{k=0}^{r}{}' cos(k\alpha) = \frac{\sin((N + \frac{1}{2})\alpha)}{2\sin(\frac{\alpha}{2})}$$

Dowód. Ze stacka, ale fajny i zrozumiały więc wklejam.

11

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(e^{ik\theta}+e^{-ik\theta}\right) \tag{1}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{i(n+1)\theta}-1}{e^{i\theta}-1}+\frac{e^{-i(n+1)\theta}-1}{e^{-i\theta}-1}\right) \tag{2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{i(n+1/2)\theta}-e^{-i\theta/2}}{e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2}}+\frac{e^{i\theta/2}-e^{-i(n+1/2)\theta}}{e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2}}\right) \tag{3}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{i(n+1/2)\theta}-e^{-i(n+1/2)\theta}}{e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2}}+\frac{e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2}}{e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2}}\right) \tag{4}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin((2n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}+1\right) \tag{5}$$

Explanation:

(1): rewrite cosine: $\cos(x)=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

(2): sum of geometric series: $\sum\limits_{k=0}^{n} r^k = \dfrac{r^{n+1}-1}{r-1}$

(3): multiply the left fraction by $\dfrac{e^{-i\theta/2}}{e^{-i\theta/2}}$ and the right fraction by $\dfrac{-e^{i\theta/2}}{-e^{i\theta/2}}$

(4): shuffle terms

(5): rewrite sine: $\sin(x)=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

share cite improve this answer

edited May 18 '14 at 20:37

answered May 18 '14 at 18:01

robjohn ♦

181k ● 17 ■ 208 ▲ 457

□

Teraz, przejdźmy do dowodu właściwego.

Dowód. Powiem też, że zapis $\sum\limits_{k=0}^{r}{}''$ oznacza sumę z połowionym pierwszym i ostatnim wyrazem(uproszczenie zapisu). Teraz, policzmy iloczyn skalarny dowolnych dwóch wielomianów Czebyszewa.

$$< T_a, T_b >= \sum_{k=0}^{r}{}'' T_a(u_k)T_b(u_k)$$

Ale, $u_k \in [-1,1]$ więc $T_a(u_k) = \cos(a \arccos(\cos(\frac{k\pi}{r}))) = \cos(a\frac{k\pi}{r}))$ więc,

$$< T_a, T_b >= \sum_{k=0}^{r}{}'' \cos(a\frac{k\pi}{r})\cos(b\frac{k\pi}{r})$$

Ze wzoru na iloczyn cosinusów:

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{r}{}'' \cos(k(a-b)\frac{\pi}{r}) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{r}{}'' \cos(k(a+b)\frac{\pi}{r})$$

Teraz, z (1), mamy

$$\frac{1}{2}\frac{\sin((r+\frac{1}{2})\frac{(a-b)\pi}{r})}{2\sin\frac{(a-b)\pi}{2r}} - \frac{1}{4}\cos((a-b)\pi) + \frac{1}{2}\frac{\sin((r+\frac{1}{2})\frac{(a+b)\pi}{r})}{2\sin\frac{(a+b)\pi}{2r}} - \frac{1}{4}\cos((a+b)\pi)$$

Rozpiszmy $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$

$$\frac{1}{2}\frac{\sin((a-b)\pi)\cos(\frac{(a-b)\pi}{2r}) + \sin(\frac{(a-b)\pi}{2r})\cos((a-b)\pi)}{2\sin\frac{(a-b)\pi}{2r}} - \frac{1}{4}\cos((a-b)\pi) +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\sin((a+b)\pi)\cos(\frac{(a+b)\pi}{2r}) + \sin(\frac{(a+b)\pi}{2r})\cos((a+b)\pi)}{2\sin\frac{(a+b)\pi}{2r}} - \frac{1}{4}\cos((a+b)\pi)$$

Teraz, $\sin k\pi = 0$, oraz po skróceniu:

$$\frac{1}{4}\cos((a-b)\pi) - \frac{1}{4}\cos((a-b)\pi) + \frac{1}{4}\cos((a+b)\pi) - \frac{1}{4}\cos((a+b)\pi) = 0$$

Czyli $< T_a, T_b >= 0$ Czyli są ortogonalne. $\square$

Zadanie 6

Niech ciąg $\{P_k\}$ będzie określony w sposób:

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x - c_1 \\ P_k(x) = (x - c_k)P_{k-1}(x) - d_k P_{k-2}(x) & (k = 2, 3, \dots) \end{cases}$$

Pokaż, że algorytm:

$$\begin{array}{ll} B_{m+2} = B_{m+1} = 0 & \\ B_k = a_k + (x - c_{k+1})B_{k+1} - d_{k+2}B_{k+2} & (k = m, m-1, \dots, 0) \\ wynik = B_0 & \end{array}$$

Oblicza $\sum_{k=0}^{m} a_k P_k(x)$

Dowód.

$$B_0 = a_0 + (x - c_1)B_1 - d_2B_2 = a_0P_0 + P_1B_1 - d_2B_2 = a_0P_0 + P_1(a_1 + (x - c_2)B_2 - d_3B_3) - d_2B_2 =$$

$$= a_0P_0 + a_1P_1 + (P_1(x - c_2) - d_2)B_2 - P_1d_3B_3 = a_0P_0 + a_1P_1 + P_2B_2 - P_1d_3B_3 =$$

$$= a_0P_0 + a_1P_1 + a_2P_2 + ((x - c_3)P_2 - d_3P_1)B_3 - P_2d_4B_4 = a_0P_0 + a_1P_1 + a_2P_2 + P_3B_3 - P_2d_4B_4 =$$

$$= \dots = \sum_{k=0}^{i} a_kP_k(x) + P_{i+1}B_{i+1} - P_id_{i+2}B_{i+2} = \sum_{k=0}^{i} a_kP_k(x) + P_{i+1}(a_{i+1} + (x - c_{i+2})B_{i+2} - d_{i+3}B_{i+3}) - P_id_{i+2}B_{i+2} =$$

$$= \sum_{k=0}^{i+1} a_kP_k(x) + P_{i+1}(x - c_{i+2})B_{i+2} - P_{i+1}d_{i+3}B_{i+3} - P_id_{i+2}B_{i+2} =$$

$$= \sum_{k=0}^{i+1} a_kP_k(x) + B_{i+2}(P_{i+1}(x - c_{i+2}) - P_id_{i+2}) - P_{i+1}d_{i+3}B_{i+3} = \sum_{k=0}^{i+1} a_kP_k(x) + B_{i+2}P_{i+2} - P_{i+1}d_{i+3}B_{i+3} = \dots =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} a_kP_k(x)$$

A to jest to co mieliśmy pokazać. $\square$

Jak wykorzystać ten algorytm do liczenia $P_m(x)$? Ustalmy $a_m = 1$, a dla reszty $a_k = 0$.

Zadanie 7,8

Nie chce mi się pisać, wiec wstawię rozwiązania z poprzednich lat(numeracja inna ale to są te dwa zadania). Obliczenia wydają się dobrze (nie sprawdzałem). Oba zadania wymagają wzorów które były podane na wykładzie.

Zad 6 [Krzysiek + Krzysiek = 2*Krzysiek]

[Krzysiek] Pierwszy sposób:

$x_0 = -2,\ x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ x_4 = 2$

$<P_0, P_0> = 5,\ <P_1, P_1> = 10$

$P_0(x) = 1$

$P_1(x) = x - \frac{<x P_0, P_0>}{<P_0, P_0>} = x$

$P_2(x) = (x - c_2)P_1(x) - d_2 P_0(x) = x^2 - \frac{<P_1, P_1>}{<P_0, P_0>} \cdot 1 = x^2 - 2$

[Krzysiek] Drugi sposób (ortogonalizcja Grama-Schmidta):

$f_0(x) = 1,\ f_1(x) = x,\ f_2(x) = x^2$

$P_0(x) = 1$

$P_1(x) = f_1(x) - \frac{<f_1, P_0>}{<P_0, P_0>} P_0(x) = x$

$P_2(x) = f_2(x) - \frac{<f_2, P_0>}{<P_0, P_0>} P_0(x) - \frac{<f_2, P_1>}{<P_1, P_1>} P_1(x) = x^2 - (\frac{10}{5} \cdot 1) - (\frac{0}{10} \cdot x) = x^2 - 2$

Zad 7 [Zyku]

Jak się komuś chce to może przepisać.

LISTA 11

zad 7

z zadania 6: $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = x^2 - 2$

$x_0 = -2 \quad x_1 = -1 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 1 \quad x_4 = 2$

$h(x_0) = 2 \quad h(x_1) = 1 \quad h(x_2) = 1 \quad h(x_3) = 1 \quad h(x_4) = 2$

$\| h - w_m^* \| = \min_{w_m \in \Pi_m} \| h - w_m \|_2 \qquad a_k = \frac{(h, P_k)}{(P_k, P_k)} \quad (k = 0, 1, 2)$

$a_0 = \frac{(h, P_0)}{(P_0, P_0)} = \frac{2+1+1+1+2}{1+1+1+1+1} = \frac{7}{5}$

$a_1 = \frac{(h, P_1)}{(P_1, P_1)} = \frac{-4-1+0+1+4}{(-2)^2+(-1)^2+0^2+1^2+2^2} = 0$

$a_2 = \frac{(h, P_2)}{(P_2, P_2)} = \frac{4+(-1)+(-2)+(-1)+4}{4+1+4+1+4} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$

$w_2^* = \sum_{k=0}^{2} a_k P_k(x) = \frac{7}{5} \cdot 1 + 0 \cdot x + \frac{2}{7}(x^2 - 2) = \frac{2}{7}x^2 - \frac{4}{7} + \frac{7}{5} = \underbrace{\frac{2}{7}}_{a} x^2 + \underbrace{0}_{b} \cdot x + \underbrace{\frac{29}{35}}_{c}$