Lista 8

Kamil Matuszewski

12 grudnia 2015

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
X			X	X							X	X	X	X

Zadanie 1

Z włączeń i wyłączeń:

$$S = \sum 2^{-k} - \sum 2^{-k\cdot 2} - \sum 2^{-k\cdot 3} - \sum 2^{-k\cdot 5} - \sum 2^{-k\cdot 7} + \sum 2^{-k\cdot 2\cdot 3} + \sum 2^{-k\cdot 2\cdot 5} + \sum 2^{-k\cdot 2\cdot 7} + \sum 2^{-k\cdot 3\cdot 5} +$$

$$+ \sum 2^{-k\cdot 3\cdot 7} + \sum 2^{-k\cdot 5\cdot 7} - \sum 2^{-k\cdot 2\cdot 3\cdot 5} - \sum 2^{-k\cdot 2\cdot 3\cdot 7} - \sum 2^{-k\cdot 2\cdot 5\cdot 7} - \sum 2^{-k\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \sum 2^{-k\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7}$$

Wiemy, że:

$$\sum 2^{-k\cdot n} = \sum (2^{-n})^k = \frac{1}{1-2^{-n}} = \frac{2^n}{2^n-1}$$

Stąd możemy policzyć:

$$2 - \frac{4}{3} - \frac{8}{7} - \frac{32}{31} - \frac{128}{127} + \frac{64}{63} + \frac{1024}{1023} + \frac{2^{14}}{2^{14}-1} + \frac{2^{15}}{2^{15}-1} + \frac{2^{21}}{2^{21}-1} + \frac{2^{35}}{2^{35}-1} - \frac{2^{30}}{2^{30}-1} -$$
$$- \frac{2^{42}}{2^{42}-1} - \frac{2^{70}}{2^{70}-1} - \frac{2^{105}}{2^{105}-1} + \frac{2^{210}}{2^{210}-1}$$

Zadanie 4

Wiemy, że:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k$$

$$f(x) = x^a$$

Rozpiszmy ze wzoru Taylora

$$(x)^a$$

w punkcie 1:

$$(x+1)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{k!} \cdot (x+1-1)^n$$

Wiemy, że

$$f^{(n)}(1) = a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdot \ldots (a-n+1)$$

$$(x+1)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{\underline{n}}}{k!} \cdot x^n$$

A to jest to co chcieliśmy pokazać.

Zadanie 5

a)

$$a_0 = a_1 = a_2 = 1$$

$$a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n + 1$$

$$A(x) = 1+x+x^2+\sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n = 1+x+x^2+\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+3}x^{n+3} \stackrel{def}{=} 1+x+x^2+\sum_{n=0}^{\infty}(a_{n+2}+a_{n+1}+a_n+1)x^{n+3} =$$

$$= 1 + x + x^2 + \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+3} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+3} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^{n+3} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}x^{n+3} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n + x^3 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^{n+1} + x \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}x^{n+2} =$$

$$= \frac{1}{1-x} + x^3 A(x) + x^2(A(x) - a_0) + x(A(x) - a_0 - a_1 x) = \left(-x - 2x^2 + \frac{1}{1-x}\right) + A(x)(x + x^2 + x^3)$$

$$A(x) = \left(-x - 2x^2 + \frac{1}{1-x}\right) + A(x)(x + x^2 + x^3)$$

$$A(x) = \frac{-x - 2x^2 + \frac{1}{1-x}}{1 - x - x^2 - x^3}$$

b)

$$b_0 = 0, b_1 = 1$$

$$b_{n+2} = b_{n+1} + b_n + \frac{1}{n+1}$$

$$B(x) = 0 + x + \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+2}x^{n+2} \stackrel{def}{=} x + \sum_{n=0}^{\infty}(b_{n+1} + b_n + \frac{1}{n+1})x^{n+2} =$$

$$= x + \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1}x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}x^{n+2} = x + x(B(x) - b_0) + x^2 B(x) + x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}x^{n+1} =$$

$$= x + xB(x) + x^2 B(x) + x \int \frac{1}{1-x}dx = x + xB(x) + x^2 B(x) + x(-\log(1-x))$$

$$B(x) = \frac{x\log(1-x) - x}{x^2 + x - 1}$$

c)

$$c_0 = 1$$

$$c_{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_{n-k}}{k!}$$

$$C(x) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}x^{n+1} \stackrel{def}{=} x \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_{n-k}}{k!}\right) x^n = 1 + x\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)$$

$$C(x) = 1 + xC(x) \cdot e^x$$

$$C(x) = \frac{1}{1 - xe^x}$$

Zadanie 12

Z wykładu wiemy, że:

$$P(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}$$

$$R(x) = \prod_{k=1}^{\infty} (1+x^k)$$

Teraz jest już prosto, bo:

$$R(x) \cdot P(x^2) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1+x^k}{1-x^{2k}} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1+x^k)}{(1+x^k)(1-x^k)} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^k)} = P(x)$$

Zadanie 13

Wiemy z algebry, że inwolucja w rozkładzie na cykle ma tylko cykle jedno i dwuelementowe. Skoro tak to można wyprowadzić prosty wzór rekurencyjny:

$$a_0 = a_1 = 1$$

$$a_{n+1} = a_n + na_{n-1}$$

Bo możemy albo wziąć wszystkie możliwe cykle a_n i dołożyć do nich jeden cykl jednoelementowy (na 1 sposób) lub utworzyć permutację n-1 elementów i dołożyć cykl dwuelementowy (sposobów wybrania takich elementów jest $n \cdot 1$).
Teraz, wykonując obliczenia analogiczne do Zadania 7:

$$A'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{na_{n-1}}{n!} x^n$$

Podobnie jak w zadaniu 7 możemy to zapisać, jako:

$$A'(x) = A(x) + xA(x)$$

$$\frac{A'(x)}{A(x)} = x + 1$$

$$A(x) = exp(\int 1 + xdx) = e^{x+x^2/2}$$

A to jest to co chcieliśmy pokazać.

Zadanie 15

Z wiedzą, że:

$$\int_0^\infty t^n e^{-t}\, dt = \Gamma(n+1)$$

Oraz, że

$$\Gamma(n+1) = n!$$

dla n naturalnych, możemy zacząć robić zadanie:

$$\int_0^\infty G_e(zt)e^{-t}\, dt = \int_0^\infty (\sum_{n=0}^\infty a_n \frac{z^n t^n}{n!} e^{-t})\, dt = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n \frac{1}{n!} (\int_0^\infty t^n e^{-t}\, dt) =$$

$$= \sum_{n=0}^\infty a_n z^n \frac{\Gamma(n+1)}{n!} = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n \frac{n!}{n!} = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n = G(z)$$