Algorytmy probabilistyczne

Lista zadań nr 10

1. Rozważamy jednowymiarowe błądzenie losowe z odbijaniem od ściany, tzn. dla każdej liczby naturalnej i istnieje stan i; w stanie 0 przechodzimy zawsze do stanu 1, a w każdym innym stanie $i > 0$ przechodzimy z prawdopodobieństwem p do stanu $i+1$, a z prawdopodobieństwem $1 - p$ do stanu $i - 1$. Udowodnić następujące własności powstałego w ten sposób łańcucha Markowa:

   (a) dla $p > \frac{1}{2}$ każdy stan jest chwilowy;

   (b) dla $p = \frac{1}{2}$ każdy stan jest zerowy-powracający;

   (c) dla $p < \frac{1}{2}$ każdy stan jest niezerowy-powracający.

2. W grafie spójnym G krawędź e nazywana jest mostem, jeśli jej usuniecie rozspaja graf. Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym niedwudzielnym oraz $n = |V|$ i $m = |E|$. Dla błądzenia losowego w grafie G wykazać, że dla każdej krawędzi $e = \{u, v\} \in E$ $h_{uv} + h_{vu} = 2m$ wtedy i tylko wtedy, gdy e jest mostem.

3. Rozważamy kratę dwuwymiarową o n wierzchołkach, tzn. graf, którego wierzchołkami są punkty na płaszczyźnie o współczynnikach całkowitych z przedziału $[1, n^{1/2}]$, a krawędzie występują pomiędzy punktami, które na jednej współrzędnej różnią się dokładnie o 1. Wykazać, że

$$\max_{u,v} C_{u,v} = \Theta(n \log n).$$

4. Niech graf G będzie 3-kolorowalny. Rozważamy następujący algorytm 2-kolorowania wierzchołków G, którego celem jest usunięcie z G wszystkich monochromatycznych trójkątów: Rozpoczynamy od dowolnego 2-kolorowania wierzchołków. Następnie, dopóki istnieje w G monochromatyczny trójkąt, wybieramy jeden z nich i zmieniamy kolor wybranemu losowo jego wierzchołkowi. Wyznaczyć górne ograniczenie na oczekiwaną liczbę przekolorowań do czasu uzyskania żądanego 2-kolorowania.

5 czerwca 2019 Marek Piotrów