Lista 6

Kamil Matuszewski

11 maja 2016

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Zadanie 1

Znajdź estymator $Geom(p)$ parametru p.

$$f(x;p) = (1-p)^{x-1}p$$
$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, p) = p^n(1-p)^{\sum_1^n x_i - n} = L(p)$$
$$\log L(p) = n\log p + \left(\sum_1^n x_i - n\right)\log(1-p)$$
$$\frac{d[\log L(p)]}{p} = \frac{n}{p} + \frac{\sum_1^n x_i - n}{1-p} = 0 \Rightarrow p = \frac{n}{\sum_i^n x_i}$$

Zadanie 2,3

Znajdź estymator $Pareto(x;a,k)$ zmiennej a oraz zmiennej k.

$$f(x;a,k) = \frac{ka^k}{x^{k+1}}$$
$$L(a,k) = f(x_1, \ldots, x_n; a, k) = \prod_{i=1}^n \frac{ka^k}{x_i^{k+1}}$$
$$\log L(k,a) = \sum_{i=1}^n \log\frac{ka^k}{x_i^{k+1}} = n\log k + kn\log a - (k+1)\sum_{i=1}^n \log x_i$$

Zmienna a:
Zastanówmy się najpierw, z jakiego przedziału jest a a raczej jakie maksymalne a możemy podać. Maksymalnym a jakie możemy podać jest $min(x_k)$, bo $x \in (a, \infty)$.
Mamy:

$$\log L(k,a) = n\log k + kn\log a - (k+1)\sum_{i=1}^n \log x_i$$

Chcemy to z maksymalizować za pomocą a, kiedy k, n, x_i są dane. Żeby to zrobić, możemy tylko zmaksymalizować $\log a$. W takmi razie musimy wziąć największą możliwą wartość a którą jest $min(x_i)$, co jest naszym estymatorem.

Zmienna k:

$$\frac{d[\log L(k,a)]}{k} = \frac{n}{k} + n\log a - \sum_{i=1}^{n} \log x_i = 0$$

$$\frac{n}{k} - \sum_{i=1}^{n} \log \frac{x_i}{a} \Rightarrow k = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \log \frac{x_i}{a}}$$

Zadanie 4

Znajdź estymator rozkładu wykładniczego $f(x;\lambda)$ parametru λ.

$$f(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$f(x_1,\ldots,x_n;\lambda) = \lambda^n e^{-\lambda \sum x} = L(\lambda)$$

$$\log L(\lambda) = nlog(\lambda) - \lambda \sum x$$

$$\frac{d[\log L(\lambda)]}{\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum x = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{n}{\sum x}$$

Zadanie 5

Znajdź estymator rozkładu Weibulla $f(x;k,\lambda)$ parametru λ.

$$f(x;k,\lambda) = \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}$$

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n;k,\lambda) = \frac{k^n}{\lambda^{nk}} e^{-\sum_1^n \left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^k} \prod_{i=1}^{n} x_i^{k-1} = L(\lambda)$$

$$\log L(\lambda) = n\log k - nk\log\lambda - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^k + (k-1)\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{\log L(\lambda)}{\lambda} = \frac{-nk}{\lambda} + k\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^k}{\lambda^{k+1}} = 0$$

$$\frac{-nk}{\lambda} + k\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^k}{\lambda^{k+1}} = 0$$

$$\frac{-nk}{\lambda} + \frac{k}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^k}{\lambda^k} = 0 \qquad \backslash : \frac{-nk}{\lambda}$$

$$-1 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^k}{\lambda^k} = 0$$

$$\frac{1}{n}\frac{1}{\lambda^k}\sum_{i=1}^{n} x_i^k = 1$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k = \lambda^k \Rightarrow \lambda = \left(\frac{\sum_1^n x_i^k}{n}\right)^{-k}$$

Zadanie 6

Mamy $X \sim \chi^2(n)$ i $Y \sim \chi^2(k)$ - niezależne. Znajdź gęstość (X, Y)

$$f_X(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{\frac{-x}{2}}$$

$$f_Y(y) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2})} y^{\frac{k}{2}-1} e^{\frac{-y}{2}}$$

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{\frac{-x}{2}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2})} y^{\frac{k}{2}-1} e^{\frac{-y}{2}}$$