Lista 4

Kamil Matuszewski

20 marca 2016

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Zadanie 1

Zmienna losowa X ma gęstość o wzorze $f(x) = a+bx^2$ dla $0 \leqslant x \leqslant 1$. Wiadomo też, że $E(X) = 0,6$. Znajdź a i b.

Wiemy, że $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1dx$ oraz, że $\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = 0,6$. Pozostają więc tylko obliczenia:

$$\int_0^1 a + bx^2dx = a + \frac{b}{3} = 1 \Rightarrow a = 1 - \frac{b}{3}$$

.

$$\int_0^1 (1-\frac{b}{3})x + bx^3dx = \int_0^1 x - b(\frac{x}{3} + x^3)dx = \frac{1}{2} - b\int_0^1 \frac{x}{3} + x^3dx = \frac{1}{2} - b(\frac{1}{6} + \frac{1}{4})$$

$$\frac{1}{2} - \frac{5}{12}b = \frac{3}{5} \Rightarrow b = -\frac{6}{25}; a = \frac{27}{25}$$

$$f(x) = \frac{27}{25} - \frac{6}{25}x^2$$

Dodatnie na przedziale $[0,1]$, więc chyba działa.

Zadanie 2

Oblicz wartość oczekiwaną rozkładu $Exp(\lambda)$ tzn takiego, gdzie $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

$$\int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}dx = \lambda\int_0^\infty xe^{-\lambda x}dx = \lambda\int_0^\infty x\left(\frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda}\right)'dx = \lambda\left(\left[x\frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda}dx\right)$$

$$= \lambda\left(0 + \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda x}dx\right) = \int_0^\infty e^{-\lambda x}dx = \left[-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^\infty = \frac{1}{\lambda}$$

Zadanie 3

Oblicz wariancje rozkładu $Exp(\lambda)$ tzn takiego, gdzie $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ Policzmy więc $E(X^2)$. W sumie liczyliśmy to w zadaniu poprzednim, z tą różnicą, że tym razem mamy x^2. Stąd niektóre przejścia są nierozpisane - są analogicze do tych z zad. 2.

$$\int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x} dx = \lambda \left(\left[x^2 \frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda} \right]_0^\infty - \int_0^\infty 2x \frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda} dx \right) =$$

$$= 2 \int_0^\infty x(e^{-\lambda x}) dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

Ostatnie przejście wynika z zad 2 - liczymy to samo, tylko tym razem nie skróci się nam $\frac{1}{\lambda}$

$E(X)$ mamy już policzone, wystarczy podnieść do kwadratu. Stąd:

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Zadanie 4

Oblicz wartość oczekiwaną zmiennej X, o gęstości $f(x) = xe^{-x}$

$$\int_0^\infty x^2 e^{-x} = \int_0^\infty x^2 (-e^{-x})' = \left[x^2(-e^{-x}) \right]_0^\infty + 2 \int_0^\infty xe^{-x} = 2 \int_0^\infty x(-e^{-x})'$$

$$= 2 \left(\left[x(-e^{-x}) \right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x} \right) = 2$$

Zadanie 5

Oblicz wartość oczekiwaną zmiennej X, o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} x & dla & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2-x & dla & 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 & w.p.p & \end{cases}$$

$$\int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 2x - x^2 dx = \int_0^1 x^2 dx + 2 \int_1^2 x dx - \int_1^2 x^2 dx = \frac{1}{3} + 3 - \frac{7}{3} = 1$$

Zadanie 6

Oblicz wartość oczekiwaną zmiennej X, o dystrybuancie

$$F(x) = \begin{cases} 0 & dla & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - \frac{2}{x} & dla & 1 \leqslant x \leqslant a \\ 1 & dla & x > a \end{cases}$$

Najpierw, gęstość. W tym celu liczymy pochodne.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & dla \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \frac{2}{x^2} & dla \quad 1 \leqslant x \leqslant a \\ 0 & dla \quad \quad x > a \end{cases}$$

Teraz, liczymy a:

$$\int_1^a \frac{2}{x^2} dx = 2 \int_1^a \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{2}{x} \right]_0^a$$

$$\left[-\frac{2}{x} \right]_0^a = 1 \Rightarrow a = 2$$

Więc nasza gęstość to $\frac{2}{x^2}$ dla $x \in [1, 2]$. Wartość oczekiwana to już tylko formalność:

$$\int_1^2 \frac{2}{x} dx = [2log(x)]_1^2 = log(4)$$

Zadanie 7

Oblicz wartość oczekiwaną zmiennej X o gęstości $f(x) = 3x^2$ dla $x \in [0, 1]$

$$\int_0^1 3x^3 dx = \frac{3}{4}$$