Lista 1

Kamil Matuszewski

2 marca 2016

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		

Zadanie 1

A oraz B są zdarzeniami takimi, że: $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, $P(A^C) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{2}$. Znaleźć $P(A \cup B)$.

Prawdopodobieństwo musi się sumować do 1, więc skoro $P(A^C) = \frac{1}{3}$ to $P(A) = \frac{2}{3}$. Prawdopodobieństwo $P(A \cup B)$ to $P(A) + P(B)$. Ale zdarzenia A i B mogą się pokrywać, więc odejmujemy $P(A \cap B)$, i otrzymujemy: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Zadanie 2

Dane są niezależne zmienne losowe X o rozkładzie $B(n_1, p)$ oraz Y o rozkładzie $B(n_2, p)$. Wykazać, że zmienna $Z = X + Y$ ma rozkład $B(n_1 + n_2, p)$.

$$P(Z = k) = \sum_{i=1}^{k} P(X = i, Y = k-i) = \sum_{i=1}^{k} P(X = i)P(Y = k-i) = \sum_{i=1}^{k} \binom{n_1}{i} p^i (1-p)^{n_1-i} \binom{n_2}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{n_2-k+i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \binom{n_1}{i}\binom{n_2}{k-i} p^k (1-p)^{n_1+n_2-k} = p^k (1-p)^{n_1+n_2-k} \sum_{i=1}^{k} \binom{n_1}{i}\binom{n_2}{k-i} \stackrel{*}{=} p^k (1-p)^{n_1+n_2-k} \binom{n_1+n_2}{k} =$$

$$= B(n_1 + n_2, p).$$

* - tożsamość Cauchy'ego, pokazywana na MDM.

Mamy więc rozkład $B(n_1 + n_2, p)$ zmiennej $Z = X + Y$

Zadanie 3

Dane są niezależne zmienne losowe X,Y o rozkładach Poissona λ_1 i λ_2.Wykazać, że zmienna $Z = X + Y$ ma rozkład Poissona z parametrami $\lambda_1 + \lambda_2$

$$P(Z = k) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i, Y = k - i) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i) \cdot P(Y = k - i) = \sum_{i=0}^{k} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^i}{i!} \cdot e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!} =$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda_1^i}{i!} \cdot \frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{k!} \cdot \frac{k!}{i! \cdot (k-i)!} \lambda_1^i \lambda_2^{k-i} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda_1^i \lambda_2^{k-i} =$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^k}{k!}$$

Co daje nam to co chcieliśmy.

Zadanie 4

Prawdopodobieństwo sukcesu w jednej próbie jest równe p. Wykonujemy (niezależne) próby do otrzymania sukcesu. Wyznaczyć rozkład i wartość oczekiwaną X.

Nie wiem czy dobrze kombinuję:
Wykonujemy próbę do uzyskania sukcesu. Skoro tak, to przegrywamy $n - 1$ razy z prawdopodobieństwem $(1 - p)$, a następnie wygrywamy raz z prawdopodobieństwem p, stąd nasz rozkład to $p(1 - p)^{n-1}$.
Teraz, wartość oczekiwana to:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p(1 - p)^{k-1}$$

Zadanie 5

Prawdopodobieństwo sukcesu w jednej próbie jest równe p. Wykonujemy (niezależne) próby do otrzymania 2 sukcesów. Wyznaczyć rozkład i wartość oczekiwaną X.

Podobnie jak 4:
Wykonujemy $n - 1$ prób, i wśród nich musi być jedna wygrana. Stąd, z rozkładu Bernoulliego, prawdopodobieństwo to:

$$P = (n - 1)p(1 - p)^{n-2}$$

Na sam koniec musimy raz wygrać, z prawdopodobieństwem p, stąd ostateczny wzór to:

$$P = (n - 1)p(1 - p)^{n-2} \cdot p = (n - 1)p^2(1 - p)^{n-2}$$

Teraz, wartość oczekiwana:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (k - 1)p^2(1 - p)^{k-2}$$

Zadanie 6

Ok, pobawmy się w wypełnianie tabelki. Jeśli $X = \{0, 1, 2, 4\}$, wtedy łatwo zauważyć, że prawdopodobieństwa wylosowania danych kolorów to zawsze $\frac{1}{4}$, bo w każdym kolorze jest po 6 kart, i są 24 karty. Stąd prawdopodobieństwa, to kolejno $P(X) = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\}$
Trochę inaczej sprawa się ma z $Y = \{0, 2, 4, 5\}$. Zastanówmy się najpierw nad asem królem i damą. Są po 4 figury w talii, i mamy 24 karty, stąd prawdopodobieństwo wyciągnięcia danej karty wynosi $\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$. Co do wylosowania jakiejś pozostałej, to skoro mamy 4 asy, 4 damy i 4 króle, to zostaje nam 12 kart, więc prawdopodobieństwo to $\frac{12}{24} = \frac{1}{2}$. Stąd prawdopodobieństwa to kolejno $Y = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\}$. Zauważmy, że zrobiliśmy właśnie rozkład brzegowy! Super, pół zadania z głowy. Teraz tylko tabelka. Wykonujemy ją tak, że mnożymy prawdopodobieństwo wylosowania X z prawdopodobieństwem wylosowania Y. Stąd otrzymujemy tabelkę:

X\Y	0	2	4	5
0	$\frac{1}{8}$ (0)	$\frac{1}{24}$ (2)	$\frac{1}{24}$ (4)	$\frac{1}{24}$ (5)
1	$\frac{1}{8}$ (1)	$\frac{1}{24}$ (3)	$\frac{1}{24}$ (5)	$\frac{1}{24}$ (6)
2	$\frac{1}{8}$ (2)	$\frac{1}{24}$ (4)	$\frac{1}{24}$ (6)	$\frac{1}{24}$ (7)
4	$\frac{1}{8}$ (4)	$\frac{1}{24}$ (6)	$\frac{1}{24}$ (8)	$\frac{1}{24}$ (9)

(Aktualnie nie przejmujcie się tymi liczbami w nawiasach, przydadzą się do zad 8). Wszystko zgadza się z intuicją(w szczególności suma poszczególnych kolumn daje nam rozkład brzegowy, a cała tabelka sumuje się do 1) więc jest szansa, że nic nie pojebałem.

Zadanie 7

Mamy sprawdzić, czy zmienne X i Y są niezależne. Ale to wyszło już przy tworzeniu tabelki - szansa, że wylosujemy np kiera nie oznacza, że mamy większe/mniejsze szanse na wylosowanie damy. Więc mamy odpowiedź.

Zadanie 8

Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej $Z = X + Y$. Zapowiedziane w zadaniu 6 liczby w nawiasach to właśnie nasze Z. Teraz musimy tylko zsumować prawdopodobieństwa.

Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$