Lista 9

Kamil Matuszewski

13 grudnia 2015

1	2	3	4	5	6	7	8
✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	

Zadanie 1

(a) Trywialne, Spójrzmy na wzór

$$B_i^n(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i}$$

Wprost z definicji wynika, że 0 jest i-krotnym zerem funkcji (u^i), a 1 jest $(n-i)$-krotnym zerem funkcji $\left((1-u)^{n-i}\right)$

(b) To, że B_i^n jest dodatnie na przedziale $(0,1)$ wynika wprost z tego, że ma miejsca zerowe w 0 i 1.

$$u^i(1-u)^{n-i} > 0 \qquad u \in (0,1)$$

Dodatkowo $\binom{n}{i}$ jest dodatnie z definicji(można też pokazać to, że jest dodatnie indukcyjnie, korzystając ze wzoru rekurencyjnego z zadania 3)
Teraz, można łatwo pokazać, że pochodną wzoru

$$B_i^n(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i}$$

Jest

$$\binom{n}{i}\left(iu^{i-1}(1-u)^{n-i} - u^i(n-i)(1-u)^{n-i-1}\right)$$

Skoro tak, to maksimum funkcji będzie:

$$\begin{array}{ll}
\binom{n}{i}\left(iu^{i-1}(1-u)^{n-i} - u^i(n-i)(1-u)^{n-i-1}\right) = 0 & \backslash : \binom{n}{i} \\
iu^{i-1}(1-u)^{n-i} - u^i(n-i)(1-u)^{n-i-1} = 0 & \backslash : u^{i-1} \\
i(1-u)^{n-i} - u(n-i)(1-u)^{n-i-1} = 0 & \backslash : (1-u)^{n-i-1} \\
i(1-u) - u(n-i) = 0 & \\
i - ui - (un - ui) = 0 & \\
i - un = 0 & \\
i = un & \backslash : n \\
u = \frac{i}{n} &
\end{array}$$

Warto zauważyć, że działania te możemy wykonywać tylko dlatego, że wiemy, że $u \neq 0$ oraz $u \neq 1$.
Stąd nasza funkcja ma dokładnie jedno ekstremum, w punkcie $u = \frac{i}{n}$

Zadanie 2

Wiemy, że:

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k} = \binom{n}{i}\binom{i}{k}$$

Najpierw, rozpiszmy B_k^n

$$B_k^n(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = \binom{n}{k} t^k \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n-k}{i} t^i = \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n}{k}\binom{n-k}{i} t^{i+k} = \sum_{i=k}^{n} (-1)^{i-k} \binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k} t^i$$

$$= \sum_{i=k}^{n} (-1)^{i-k} \binom{n}{i}\binom{i}{k} t^i$$

Teraz, pokażmy liniową niezależność:

$$0 = c_0 B_0^n(t) + c_1 B_1^n(t) + \cdots + c_n B_n^n(t)$$
$$= c_0 \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}\binom{i}{0} t^i + c_1 \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \binom{n}{i}\binom{i}{1} t^i + \cdots + c_n \sum_{i=n}^{n} (-1)^{i-n} \binom{n}{i}\binom{i}{n} t^i$$

Teraz, możemy zapisać, że(nie interesuje nas $(-1)^x$, później pokażę czemu):

$$c_0 t^0 + \left[\sum_{i=0}^{1} c_i \binom{n}{1}\binom{1}{i}\right] t^1 + \cdots + \left[\sum_{i=0}^{n} c_i \binom{n}{n}\binom{n}{i}\right] t^n$$

$t^0 \dots t^n$ są liniowo niezależne, czyli dla dowolnych b

$$b_0 + b_1 t^1 + \cdots + b_n t^n = 0 \Leftrightarrow b_0 = \cdots = b_n = 0$$

Nasze współczynniki to: $\sum\limits_{i=0}^{k} c_i \binom{n}{k}\binom{k}{i}$, stąd możemy zapisać równania:

$$\begin{aligned}
c_0 &= 0 \\
\sum_{i=0}^{1} c_i \tbinom{n}{1}\tbinom{1}{i} &= 0 \\
&\vdots \\
\sum_{i=0}^{n} c_i \tbinom{n}{n}\tbinom{n}{i} &= 0
\end{aligned}$$

Widać, że $c_0 = 0$. Teraz, odejmujemy (lub dodajemy, dlatego nie obchodzi nas minus) stronami równania, tak, by w każdej kolejnej sumie zostawić tylko ostatni wyraz, np:

$$\begin{aligned}
c_0 &= 0 \\
\sum_{i=0}^{1} c_i \tbinom{n}{1}\tbinom{1}{i} &= 0 && \backslash - c_0\tbinom{0}{1}\tbinom{1}{0} \\
c_1 \tbinom{n}{1}\tbinom{1}{1} &= 0 \quad \Leftrightarrow c_1 = 0 \\
\sum_{i=0}^{2} c_i \tbinom{n}{2}\tbinom{2}{i} &= 0 && \backslash - c_1\tbinom{n}{2}\tbinom{2}{1} - c_0\tbinom{0}{2}\tbinom{2}{0} \\
c_2 \tbinom{n}{2}\tbinom{2}{2} &= 0 \quad \Leftrightarrow c_2 = 0
\end{aligned}$$

Symbol newtona jest liczbą całkowitą (dodatnią), dlatego obliczając ten układ równań, wychodzi nam, że:

$$0 = c_0 = c_1 = \cdots = c_n$$

A to oznacza, że $B_0^n \dots B_n^n$ są liniowo niezależne, a jest ich $n+1$, więc jest to baza $\prod_n$

Zadanie 3

(a) Wychodząc z lewej dojdę do prawej:

$$(1-u)B_{n-1}^i(u) + uB_{n-1}^{i-1}(u) = (1-u)\binom{n-1}{i}u^i(1-u)^{n-1-i} + u\binom{n-1}{i-1}u^{i-1}(1-u)^{n-1-(i-1)} =$$

$$= \binom{n-1}{i}u^i(1-u)^{n-i} + \binom{n-1}{i-1}u^i(1-u)^{n-i} = \left[\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}\right]u^i(1-u)^{n-i} = \binom{n}{i}u^i(1-u)^{n-i} = B_n^i(t)$$

(b) Wykorzystamy fakt, że $B_n^i(u) = (1-u)B_n^i(u) + uB_n^i(u)$:

$$\begin{aligned}(1-u)B_n^i(u) &= \tbinom{n}{i}u^i(1-u)^{n+1-i} \\ &= \frac{\binom{n}{i}}{\binom{n+1}{i}}\tbinom{n+1}{i}u^i(1-u)^{n+1-i} \\ &= \tfrac{n-i+1}{n+1}B_i^{n+1}(u)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}uB_n^i(u) &= \tbinom{n}{i}u^{i+1}(1-u)^{n-i} \\ &= \tbinom{n}{i}u^{i+1}(1-u)^{n+1-(i+1)} \\ &= \frac{\binom{n}{i}}{\binom{n+1}{i+1}}\tbinom{n+1}{i+1}u^{i+1}(1-u)^{n+1-(i+1)} \\ &= \tfrac{i+1}{n+1}B_{i+1}^{n+1}(u)\end{aligned}$$

Stąd

$$B_n^i(u) = (1-u)B_n^i(u) + uB_n^i(u) = \frac{n-i+1}{n+1}B_i^{n+1}(u) + \frac{i+1}{n+1}B_{i+1}^{n+1}(u)$$

Zadanie 4

(a)

$$\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) \equiv 1$$

$$\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}t^i(1-t)^{n-i} \overset{*}{=} ((1-t)+t)^n = 1^n = 1$$

* - dwumian newtona

(b)

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{i}{n}B_i^n(t) = t$$

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{i}{n}B_i^n(t) \overset{*}{=} \sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\binom{n}{i}t^i(1-t)^{n-i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\frac{n!}{i!(n-i)!}t^i(1-t)^{n-i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!}t^i(1-t)^{n-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!} t^{i+1}(1-t)^{n-i-1} = t\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} t^i(1-t)^{n-1-i} = t\sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) \overset{(a)}{=} t\cdot 1 = t$$

* - Pierwszy wyraz sumy to 0.

Zadanie 5

Niech:

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) W_i$$

Gdzie $P(t)$ to krzywa Beziera, a W_i - punkty kontrolne.

Wtedy:

$$\begin{array}{ll} W_k^{(0)} = W_k & (k = 0, 1, \ldots, n), \\ W_k^{(i)} = (1-t)W_k^{(i-1)} + tW_{k+1}^{(i-1)} & (i = 1, 2, \ldots, n; k = 0, 1, \ldots, n-i) \end{array}$$

Wtedy $P(t) = W_0^{(n)}$, pokażę, że tak jest dla dowolnego n.

Dla $n = 0$

$$P(t) = B_0^0(t)w_0 = w_0 = w_0^{(0)}$$

Naszym założeniem indukcyjnym będzie, że $W_0^{(n-1)}$ i $W_1^{(n-1)}$ są odpowiadającymi danej wartości parametru t punktami krzywych Beziera, reprezentowanych przez punkty kontrolne odpowiednio $w_0, \ldots, w_{n-1}$ i $w_1, \ldots, w_n$

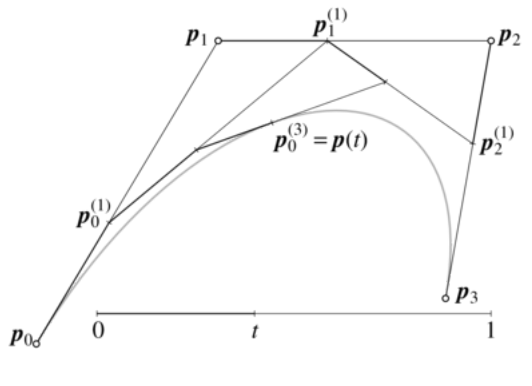
(1) $\quad (1-t)B_0^{n-1}(t) = (1-t)\cdot(1-t)^{n-1} = (1-t)^n = B_0^n(t) \qquad tB_{n-1}^{n-1}(t) = t\cdot t^{n-1} = t^n = B_n^n(t)$

$$W_0^{(n)} = (1-t)W_0^{(n-1)} + tW_1^{(n-1)} \overset{za.ind.}{=} (1-t)\sum_{i=0}^{n-1} w_i B_i^{n-1}(t) + t\sum_{i=1}^{n} w_i B_{i-1}^{n-1}(t)$$

$$= (1-t)w_0 B_0^{n-1}(t) + tw_n B_{n-1}^{n-1}(t) + \sum_{i=1}^{n-1} w_i((1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t))$$

$$\overset{def}{=} w_0(1-t)B_0^{n-1}(t) + w_n t B_{n-1}^{n-1}(t) + \sum_{i=1}^{n-1} w_i B_i^n \overset{(1)}{=} w_0 B_0^n + w_n B_n^n + \sum_{i=1}^{n-1} w_i B_i^n = \sum_{i=0}^{n} w_i B_i^n = P(t)$$

Więc nasz algorytm wyznacza $P(t)$ dla dowolnego n. Interpretacja graficzna:



Zadanie 6

Zadanie nie jest wcale trudne, wystarczy wyłączać $(1-t)$. Najpierw wprowadźmy oznaczenie $s=(1-t)$ dla uproszczenia. Mamy:

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) W_i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i s^{n-i} W_i$$

$$P(t) = \binom{n}{0} t^0 s^n W_0 + \binom{n}{1} t^1 s^{n-1} W_1 + \cdots + \binom{n}{n-1} t^{n-1} s^1 W_{n-1} + \binom{n}{n} t^n s^0 W_n$$

$$P(t) = \left(\ldots \left(W_0 \binom{n}{0} s + W_1 \binom{n}{1} t \right) s + \cdots + W_{n-1} \binom{n}{n-1} t^{n-1} \right) s + W_n \binom{n}{n} t^n$$

Dodatkowo, z Dyskretnej wiemy, że:

$$\binom{n}{i} = \binom{n}{i-1} \cdot \frac{n+1-i}{i}$$

Algortym działający w czasie $O(n)$:
$s = 1 - t$;
$b = n$; - dwumian newtona
$p = p_0$; - wynik
$d = 1$; - t^n
for $i = 1$ to n do
  $p = p \cdot s + b \cdot p_i \cdot d$;
  $d = d \cdot t$;
  $b = (b \cdot (n-i))/(i+1)$;
end
return p;

Zadanie 7

Nie jestem pewien, ale (wiedząc, że, kiedy mamy sumę w liczniku i sumę w mianowniku, możemy każdy składnik sumy z licznika podzielić najpierw przez sumę z mianownika - w końcu tak działa dodawanie ułamków o tym samym mianowniku):

$$R_n(t) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} w_i W_i B_i^n(t)}{\sum\limits_{i=0}^{n} w_i B_i^n(t)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{w_i W_i B_i^n(t)}{\sum\limits_{j=0}^{n} w_j B_j^n(t)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{w_i B_i^n(t)}{\sum\limits_{j=0}^{n} w_j B_j^n(t)} \cdot W_i$$

Teraz z wykładu wiemy, że

$$\alpha_0 W_0 + \alpha_1 W_1 + \cdots + \alpha_n W_n$$

jest kombinacją barycentryczną punktów (dla $W_0 \ldots W_n$ - punktów $\alpha_0 \ldots \alpha_n$ - liczby rzeczywiste) $\Leftrightarrow$ gdy $\sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i = 1$. Skoro tak, to:

$$\frac{w_i B_i^n(t)}{\sum\limits_{i=0}^{n} w_i B_i^n(t)}$$

Jest naszym α_i, więc:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{w_i B_i^n(t)}{\sum\limits_{j=0}^{n} w_j B_j^n(t)} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} w_i B_i^n(t)}{\sum\limits_{i=0}^{n} w_i B_i^n(t)} = 1$$

A to jest to co chcieliśmy pokazać, więc $R_n(t)$ jest kombinacją barycentryczną punktów, więc można go utożsamić z punktem.