Lista 10

Kamil Matuszewski

6 stycznia 2016

1	2	3	4	5	6	7
✓	✓	✓		✓		

Zadanie 1

Musimy sprawdzić trzy warunki:

- $||f|| = 0 \Rightarrow f = 0$

$$||f|| = \sqrt{\sum_{k=0}^{N} p(x_k) f(x_k)^2}$$

Wiemy, że $p(x_k) > 0$ $\forall x_k \in X$, oraz, że $f(x_k)^2 \geqslant 0$ i $f(x_k)^2 = 0 \Rightarrow f(x_k) = 0$ (bo to kwadrat).
Suma jest nieujemna, więc jest zerem tylko wtedy, kiedy każdy jej składnik jest zerem.
Skoro tak to $f = 0$.

- $||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||$

$$||\alpha f|| = \sqrt{\sum_{k=0}^{N} p(x_k)(\alpha f(x_k))^2}$$

$$||\alpha f|| = \sqrt{\sum_{k=0}^{N} p(x_k)\alpha^2 f(x_k)^2}$$

$$||\alpha f|| = \sqrt{\alpha^2 \sum_{k=0}^{N} p(x_k) f(x_k)^2}$$

$$||\alpha f|| = |\alpha| \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^{N} p(x_k) f(x_k)^2}$$

$$||\alpha f|| = |\alpha| \cdot ||f||$$

- $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{N} p(w_k)(x_k + y_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=0}^{N} p(w_k) x_k^2} + \sqrt{\sum_{k=0}^{N} p(w_k) y_k^2}$$

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{N} p(w_k)(x_k^2 + 2x_k y_k + y_k^2)} \leqslant \sqrt{\sum_{k=0}^{N} p(w_k) x_k^2} + \sqrt{\sum_{k=0}^{N} p(w_k) y_k^2}$$

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{N} p(w_k)x_k^2 + 2\sum_{k=0}^{N} p(w_k)x_k y_k + \sum_{k=0}^{N} p(w_k)y_k^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=0}^{N} p(w_k)x_k^2} + \sqrt{\sum_{k=0}^{N} p(w_k)y_k^2}$$

Obie strony są nieujemne więc można podnieść obie strony do kwadratu:

$$\sum_{k=0}^{N} p(w_k)x_k^2+2\sum_{k=0}^{N} p(w_k)x_k y_k+\sum_{k=0}^{N} p(w_k)y_k^2 \leqslant \sum_{k=0}^{N} p(w_k)x_k^2+\sum_{k=0}^{N} p(w_k)y_k^2+2\sqrt{\sum_{k=0}^{N} p(w_k)x_k^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=0}^{N} p(w_k)y_k^2}$$

$$\sum_{k=0}^{N} p(w_k)x_k y_k \leqslant \sqrt{\sum_{k=0}^{N} p(w_k)x_k^2 \cdot \sum_{k=0}^{N} p(w_k)y_k^2}$$

Musimy to sprawdzić. W tym celu pokażę, że:

$$\left(\sum_{k=0}^{N} p(w_k)x_k y_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=0}^{N} p(w_k)x_k^2 \cdot \sum_{k=0}^{N} p(w_k)y_k^2$$

$$\sum_{k=0}^{N} p(w_k)x_k^2 \cdot \sum_{k=0}^{N} p(w_k)y_k^2 - \left(\sum_{k=0}^{N} p(w_k)x_k y_k\right)^2 \geqslant 0$$

$$\sum_{0\leqslant i,j\leqslant N} p(w_i)p(w_j)x_i^2y_j^2 - \sum_{0\leqslant i\leqslant N} p(w_i)^2x_i^2y_i^2 - \sum_{0\leqslant i<j\leqslant N} 2p(w_i)p(w_j)x_ix_jy_iy_j =$$

$$= \sum_{0\leqslant i\neq j\leqslant N} p(w_i)p(w_j)x_i^2y_j^2 - \sum_{0\leqslant i<j\leqslant N} 2p(w_i)p(w_j)x_ix_jy_iy_j =$$

$$= \sum_{0\leqslant i<j\leqslant N} p(w_i)p(w_j)x_i^2y_j^2 + p(w_j)p(w_i)x_j^2y_i^2 - \sum_{0\leqslant i<j\leqslant N} 2p(w_i)p(w_j)x_ix_jy_iy_j =$$

$$= \sum_{0\leqslant i<j\leqslant N} p(w_i)p(w_j)(x_i^2y_j^2 + x_j^2y_i^2 - 2x_ix_jy_iy_j) = \sum_{0\leqslant i<j\leqslant N} p(w_i)p(w_j)(x_iy_j - x_jy_i)^2$$

Wiemy, że $p(w) > 0\ \forall w \in X$. Skoro tak, to każdy składnik tej sumy jest $\geqslant 0$, czyli: $\sum\limits_{0\leqslant i<j\leqslant N} p(w_i)p(w_j)(x_iy_j - x_jy_i)^2 \geqslant 0$ więc:

$$\sum_{k=0}^{N} p(w_k)x_k^2 \cdot \sum_{k=0}^{N} p(w_k)y_k^2 \geqslant \left(\sum_{k=0}^{N} p(w_k)x_k y_k\right)^2$$

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{N} p(w_k)x_k^2 \cdot \sum_{k=0}^{N} p(w_k)y_k^2} \geqslant \sqrt{\left(\sum_{k=0}^{N} p(w_k)x_k y_k\right)^2} \geqslant \sum_{k=0}^{N} p(w_k)x_k y_k$$

A to jest to co chcieliśmy pokazać.

Zadanie 2

Mamy model:

$$y(x) = ax + 2015$$

$y \in Y : ||f-y||_2^2 = \sum\limits_{k=0}^{n}(f(x_k)-y(x_k))^2 = \sum\limits_{k=0}^{n}(f(x_k)-ax_k-2015)^2 = \sum\limits_{k=0}^{n}(f(x_k)-2015-ax_k)^2 = E(a)$

$$y^*(x) = a^* : ||f-y^*||_2 = \min_{y\in Y} ||f-y||_2 = \min_{a\in\mathbb{R}} \sqrt{E(a)}$$

Pierwiastek nie wpływa na monotoniczność, stąd wystarczy policzyć pochodną funkcji $E(a)$

$$E'(a) = \left(\sum_{k=0}^{n}(f(x_k)-2015-ax_k)^2\right)' = \left(\sum_{k=0}^{n}(f(x_k)-2015)^2 - 2ax_k(f(x_k)-2015) + (ax_k)^2\right)' =$$

$$= -2\sum_{k=0}^{n} x_k(f(x_k) - 2015 - ax_k)$$

$$-2\sum_{k=0}^{n} x_k(f(x_k) - 2015 - ax_k) = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} f(x_k)x_k - 2015x_k - \sum_{k=0}^{n} ax_k^2 = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} f(x_k)x_k - 2015x_k = \sum_{k=0}^{n} ax_k^2$$

$$\sum_{k=0}^{n} f(x_k)x_k - 2015x_k = a\sum_{k=0}^{n} x_k^2$$

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{n} x_k(f(x_k) - 2015)}{\sum\limits_{k=0}^{n} x_k^2} = a$$

Zadanie 3

Wystarczy znaleźć ekstremum funkcji:

$$\sum_{k=0}^{r} \frac{1}{\log(1 + x_k^2)} (y_k - a\sin x_k)^2$$

Łatwo sprawdzić, że pochodną jest:

$$-2\sum_{k=0}^{r} \frac{\sin x_k}{\log(1 + x_k^2)} \cdot (y_k - a\sin x_k)$$

Teraz przyrównujemy do 0:

$$-2\sum_{k=0}^{r} \frac{\sin x_k y_k}{\log(1 + x_k^2)} - \frac{a\sin^2 x_k}{\log(1 + x_k^2)} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{r} \frac{\sin x_k \cdot y_k}{\log(1 + x_k^2)} - \sum_{k=0}^{r} \frac{a\sin^2 x_k}{\log(1 + x_k^2)} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{r} \frac{\sin x_k \cdot y_k}{\log(1 + x_k^2)} = a \cdot \sum_{k=0}^{r} \frac{\sin^2 x_k}{\log(1 + x_k^2)}$$

$$a = \frac{\sum\limits_{k=0}^{r} \frac{\sin x_k \cdot y_k}{\log(1+x_k^2)}}{\sum\limits_{k=0}^{r} \frac{\sin^2 x_k}{\log(1+x_k^2)}}$$

Zadanie 4

Wystarczy zaproksymować funkcję odwrotną (trywialne)

Zadanie 5

Na wykładzie, pokazaliśmy, że dla modelu

$$Y = ax + b$$

Rozwiązaniem jest

$$a = \frac{(n+1)S_4 - S_1 S_3}{(n+1)S_2 - S_1^2}$$
$$b = \frac{S_2 S_3 - S_1 S_4}{(n+1)S_2 - S_1^2}$$

Gdzie:

$$S_i = \sum_{k=0}^{n} x_k^i \qquad i = 1, 2$$
$$S_3 = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)$$
$$S_4 = \sum_{k=0}^{n} x_k f(x_k)$$

Co można pokazać poprzez pochodną dwóch zmiennych i regresję liniową.

$$\begin{aligned} &n = 7 \\ &S_1 = 10 + 20 + 30 + 40 + 80 + 90 + 95 = 365 \\ &S_2 = 100 + 400 + 900 + 1600 + 6400 + 8100 + 9025 = 26525 \\ &S_3 = 514,5 \\ &S_4 = 671 + 1328 + 1968 + 2584 + 4944 + 5490 + 5700 = 22685 \end{aligned}$$

Stąd:

$$\begin{aligned} a &= -0,08 \\ b &= 67,96 \end{aligned}$$

Więc:

$$S = -0,08 \cdot T + 67,96$$

Co jest zgodne z podaną tabelką(z jakąś dokładnością).

Zadanie 6

Zadanie 7

Liczymy pochodną wyrażenia, i porządkujemy. Oznaczmy sobie: