

15 kwietnia 2016

1	2	3	4	KR1	KR2
---	---	---	---	-----	-----

- Proszę podpisać wszystkie kartki.
- 1 zadanie \equiv 1 kartka.

1. **15p.** Rozpatrujemy losowanie 6 spośród 49 liczb (Toto-Lotek). Każdy układ (zbiór 6 liczb) jest losowany z tym samym prawdopodobieństwem.

- (a) Niech X będzie zmienną losową zdefiniowaną jako średnia arytmetyczna wylosowanych liczb. Obliczyć wartość oczekiwaną $E(X)$.
- (b) Niech Y będzie zmienną losową zdefiniowaną jako maksimum z wylosowanych liczb. Podać gęstość zmiennej Y .

[Do zadań 2–3] Zmienna losowa (X, Y) podlega rozkładowi o gęstości określonej wzorem:
 $f(x, y) = \frac{3}{2} \exp(-(x + y))$, gdzie $0 < y < 2x < \infty$.

2. **15p.** Obliczyć gęstość zmiennej (Z, W) , gdzie $Z = \frac{X + Y}{2}$, $W = \frac{X - Y}{2}$.

3. **15p.** Wyznaczyć gęstość brzegową zmiennej Z .

4. **15p.** Dana jest ustalona liczba a oraz dwie niezależne zmienne losowe X i Y przyjmujące wartości z przedziału $(0, 1)$. Rozkład zmiennej X ma gęstość daną wzorem postaci $c - ax$. Zmienna Y ma rozkład jednostajny. Parę wartości (X, Y) tych zmiennych interpretujemy jako współrzędne losowego punktu na płaszczyźnie.

- (a) Podać warunki, jakie muszą być spełnione, aby funkcja $c - ax$ mogła być gęstością zmiennej X .
- (b) Znaleźć prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosowany punkt (X, Y) jest odległy od początku układu współrzędnych o mniej niż 1.

5. **Zadanie KR1 – 8p.** (X, Y) jest ciągłą zmienną losową o gęstości $f(x, y)$. Podać szkic dowodu twierdzenia: $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

6. **Zadanie KR2 – 8p.** Wykazać, że wariancja różnicy dwóch niezależnych zmiennych losowych X, Y jest równa sumie wariancji tych zmiennych, a więc

$$V(X - Y) = V(X) + V(Y).$$

Czemu jest równa wariancja sumy dwóch takich zmiennych?