Lista 13

Kamil Matuszewski

27 stycznia 2016

1	2	3	4	5	6	7	8
✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓

Zadanie 1

Sprawdź zbieżność metody trapezów.

Dowód. Wiemy z wykładu, że reszta w metodzie trapezów to:

$$R = \frac{-1}{12n^2}(b-a)^3 f''(\epsilon)$$

Teraz, możemy sprawdzić, że:

$$|R| = |\frac{-1}{12n^2}(b-a)^3 f''(\epsilon)| \leqslant |\frac{C}{12n^2}|$$

Gdzie C jest jakąś stałą (dokładniej $(b-a)^3 \cdot f''(\epsilon)$). Można zauważyć, że gdy $n \leftarrow \infty$ to $R = 0$. Skoro tak, to metoda jest zbieżna.

□

Zadanie 2

Opracuj algorytm liczenia wartości całki $\int_a^b f(x)dx$ z zadaną dokładnością, jeśli dla dowolnego $x \in [a, b]$ znamy dokładną wartość $f(x)$.

Stosujemy jakąś metodę. U mnie to będzie trapezów. Zauważamy, że skoro reszta w tym wzorze to $R = \frac{-1}{12n^2}(b-a)^3 f''(\epsilon)$ a $f''(\epsilon) < 1$, to możemy zapisać, że $n > \sqrt{\frac{(b-a)^3}{12\epsilon}}$

1. Niech $T = 0$ $n = \lceil\sqrt{\frac{(b-a)^3}{12\epsilon}}\rceil$
2. Niech $h = \frac{(b-a)}{n}$
3. Policz $T = \sum_{i=0}^{n}{}'' f(a+ih)$
4. Zakończ

Zadanie 3

Jak dobrać n by policzyć $\int_1^2 \ln(2x+1)dx$ z błędem 10^{-7} za pomocą złożonego wzoru Simpsona?

Wiemy, że wartość dokładna $\int_1^2 ln(2x+1)$ wynosi $1,3757$. Wiemy też, że reszta we wzorze Simpsona to $\frac{(b-a)h^4}{180}f^{(4)}(\epsilon)$
Reszta, to już obliczenia.

$$|\frac{\frac{\frac{(2-1)^5}{n^4}}{180}f^{(4)}(\epsilon)}{1,3757}| = |\frac{\frac{\frac{1}{n^4}}{180}f^{(4)}(\epsilon)}{1,3757}| = |\frac{\frac{1}{180n^4}f^{(4)}(\epsilon)}{1,3757}|$$

$f^{(4)}(x) = -\frac{96}{16x^4+32x^3+24x^2+8x+1}$. Moduł z tego możemy to ograniczyć na przedziale $(1,2)$ przez $1,2$. Skoro tak, to kontynuując:

$$|\frac{\frac{1}{180n^4}f^{(4)}(\epsilon)}{1,3757}| = |\frac{1,2}{180n^4 \cdot 1,3757}| = |\frac{1,2}{180 \cdot 1,3757}\frac{1}{n^4}|$$

$$|\frac{1,2}{180 \cdot 1,3757}\frac{1}{n^4}| \leqslant \frac{1}{10^7}$$

$$|n^4| \geqslant 48460$$

$$n \geqslant 15$$

Zadanie 4

Pokaż, że $T_{2n} = \frac{1}{2}(T_n + M_n)$, gdzie $M_n = h_n \sum\limits_1^n f(a + \frac{1}{2}(2i-1)h_n)$

Dowód. Najpierw, rozpiszmy sobie M_n.

$$M_n = h_n f(a+\frac{1}{2}h_n) + h_n f(a+\frac{3}{2}h_n) + h_n f(a+\frac{5}{2}h_n) + \cdots + h_n f(a+\frac{2n-1}{2}h_n)$$

Teraz, T_n

$$T_n = \frac{1}{2}h_n f(a+\frac{0}{2}h_n) + h_n f(a+\frac{2}{2}h_n) + h_n f(a+\frac{4}{2}h_n) + \cdots + h_n f(a+\frac{2n-2}{2}h_n) + \frac{1}{2}h_n f(a+\frac{2n}{2}h_n)$$

Łatwo poprzecinać ciąg T_n ciągiem M_n, i otrzymamy:

$$T_n+M_n = \frac{1}{2}h_n f(a+\frac{0}{2}h_n) + h_n f(a+\frac{1}{2}h_n) + h_n f(a+\frac{2}{2}h_n) + \cdots + h_n f(a+\frac{2n-1}{2}h_n) + \frac{1}{2}h_n f(a+\frac{2n}{2}h_n) =$$

$$= h_n\left(\frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b) + \sum_{i=1}^{2n} f(a+\frac{i}{2}h_n)\right) = h_n\left(\frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b) + \sum_{i=1}^{2n} f(a+ih_{2n})\right)$$

Pomnóżmy przez $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2}(T_n+M_n) = \frac{1}{2}h_n\left(\frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b) + \sum_{i=1}^{2n} f(a+ih_{2n})\right) = \frac{1}{2}h_{2n}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{2n} f(a+ih_{2n})\right) = T_{2n}$$

□

Mając $T_2 = T_{0,1}$ możemy w prosty sposób policzyć $T_4 = T_{0,2}, T_8 = T_{0,3}, T_{16} = T_{0,4}, \ldots$.

Zadanie 6

W ilu i w jakich punktach przedziału $[-1, 3]$ musimy znać wartość funkcji, by policzyć $T_{10,0}$ dla całki $\int\limits_{-1}^{3} f(x)dx$?

Wystarczy obliczyć pierwszą kolumnę, resztę możemy wyznaczyć rekurencyjnie. Żeby policzyć pierwszą kolumnę, musimy w ostatnim kroku policzyć $T_{0,10}$. $T_{0,i}$ odpowiada wzorowi trapezów $R_{0,2^i}$. Stąd, nasze $i = 10$. Nasz przedział dzielimy równoodlegle w punktach $x_0, x_1, \ldots, x_{2^i}$, stąd musimy podzielić przedział na 1024 przedziały. Potem rekurencyjne policzenie kolejnych kolumn nie wymaga znajomości punktów funkcji. Łatwo policzyć, że nasze $h = \frac{1}{256}$, stąd łatwo sprawdzić, że i-ty punkt to $-1 + \frac{i}{256}$ (jest ich 1025).

Zadanie 7

Pokaż, że dla

$$\begin{cases} T_{0,n} = T_{2^n} \\ T_{m,n} = \frac{4^m T_{m-1,n+1}}{4^m-1} - \frac{T_{m-1,n}}{4^m-1} \end{cases}$$

Jest zbieżny do $I = \int_a^n f(x)dx$

Dowód. To, że pierwsza kolumna zbiega do całki, jest udowodnione w zadaniu pierwszym - w końcu pierwsza kolumna to wzór trapezu. To nasza podstawa indukcji
Teraz, załóżmy indukcyjnie, że dla $m_0 < m$ rzeczywiście zbiega do całki. Sprawdzając dla m skorzystamy ze wzoru rekurencyjnego:

$$T_{m,n} = \frac{4^m T_{m-1,n+1}}{4^m - 1} - \frac{T_{m-1,n}}{4^m - 1}$$

Ale wiemy, że dla m-1 metoda zbieżna, stąd:

$$T_{m,n} = \frac{4^m}{4^m - 1} I - \frac{1}{4^m - 1} I = \frac{4^m - 1}{4^m - 1} I = I$$

A to jest to co chciałem pokazać. $\square$

Zadanie 8

Chcemy policzyć całkę $\int_{-2}^{3} f(x)dx = Q_2(f)$ tak, żeby działało dla wielomianów stopnia < 6.

Wiemy, że kwadratura Gaussa–Legendrea ma rząd 2n+2, czyli działa dla n=2, działa dla wielomianów stopnia < 6.
Można policzyć/sprawdzić w internecie, że współczynniki A_k i punkty x_k w tej metodzie to:

$$x_0 = \frac{-\sqrt{15}}{5}, A_0 = \frac{5}{9}$$

$$x_1 = 0, A_1 = \frac{8}{9}$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{15}}{5}, A_2 = \frac{5}{9}$$

Niestety, działa ona tylko dla całek na przedziale [-1,1]. Musimy więc sprowadzić nasze f(x) do całki na tym przedziale.

$$\int_{-2}^{3} f(x)dx = \begin{Bmatrix} y = \frac{2(x+2)}{5} - 1 \\ dy = \frac{2}{5}dx \end{Bmatrix} = \int_{-1}^{1} g(y)\frac{5}{2}dy$$

$$g(x) = f((x+1)\frac{5}{2} - 2)$$

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx = \frac{5}{9}g(\frac{-\sqrt{15}}{5}) + \frac{8}{9}g(0) + \frac{5}{9}g(\frac{\sqrt{15}}{5})$$

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx = \int_{-1}^{1} f((x+1)\frac{5}{2} - 2)dx = \frac{5}{9}f(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2}) + \frac{8}{9}f(\frac{1}{2}) + \frac{5}{9}f(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2})$$

$$\int_{-2}^{3} f(x)dx = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1} f((x+1)\frac{5}{2} - 2)dx = \frac{25}{18}f(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2}) + \frac{20}{9}f(\frac{1}{2}) + \frac{25}{18}f(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2})$$