Lista 8

Kamil Matuszewski

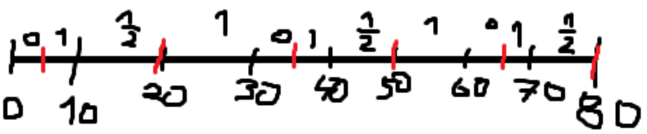
21 kwietnia 2016

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
		✓	✓	✓	✓	✓	✓			

Zadanie 1

Pociągi do miejscowości A odjeżdżają co 10 minut, rozpoczynając od 7.00. Pociągi do miejscowości B odjeżdżają co 15 minut, rozpoczynając od 7.05. Pasażer P_1 przychodzi na stację w czasie o rozkładzie jednostajnym pomiędzy 7.00 a 8.00; pasażer P_2 przychodzi na stację w czasie o rozkładzie jednostajnym pomiędzy 7.10 a 8.10. Jakie jest ppb, że pasażer P_1 dojedzie do A? Jakie jest ppb, że pasażer P_2 dojedzie do A?

Na to zadanie chyba można patrzeć tak:



Nad osią napisałem jakie są prawdopodobieństwa trafienia na pociąg A. Jeśli w tym czasie pierwszy przyjedzie pociąg do B, to szansa jest zero. Jeśli przyjadą dwa pociągi, szansa jest $\frac{1}{2}$. Patrzymy na $7:00$ jako na punkt 0, a pasażer przychodzi o pełnych minutach. To oznacza, że skoro pasażer 1 może przyjść do $8:00$, to przedział to $[0,60]$. Stąd, to co musimy policzyć, to sumę całek z przemnożonym prawdopodobieństwem. Skoro rozkład jest jednostajny, gęstość jest równa $\frac{1}{60}$, możemy więc wyciągnąć $\frac{1}{60}$ przed nawias. Mamy więc:

$$\frac{1}{60}\left(\int_5^{10} 1\,dx + \frac{1}{2}\int_{10}^{20} 1\,dx + \int_{20}^{30} 1\,dx + \int_{35}^{40} 1\,dx + \frac{1}{2}\int_{40}^{50} 1\,dx + \int_{50}^{60} 1\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{60}(5+5+10+5+5+10) = \frac{2}{3}$$

Podobnie dla pasażera B, tylko tym razem przedział to $[10,70]$. Wartości także wyczytujemy z rysunku. Możemy zauważyć, że to będzie dokładnie to samo, bo odpadnie nam $\int_5^{10} 1\,dx$ a dojdzie $\int_{65}^{70} 1\,dx$ a poza tym będziemy mieć to samo, stąd prawdopodobieństwo także wyniesie $\frac{2}{3}$

Uwaga, nie jestem pewien czy rozwiązanie jest poprawne.

Zadanie 3,4

Niezależne zmienne X_1 i X_2 mają rozkład $U[0,1]$. Niech $Y_1 = 2X_1 + 2X_2$ a $Y_2 = X_1X_2$.

- Wyznacz wartość oczekiwaną Y_1:

$$E(Y_1) = E(2X_1 + 2X_2) = E(2X_1) + E(2X_2) = 2\int_1^2 x_1\ dx_1 + 2\int_1^2 x_2\ dx_2 = 3 + 3 = 6$$

- Wyznacz wartość oczekiwaną Y_2:

$$E(Y_2) = E(X_1X_2) = \int_1^2\int_1^2 x_1x_2\ dx_1\ dx_2 = \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{9}{4}$$

- Wyznacz wariancje Y_1

$$V(Y_1) = E(Y_1^2) - E(Y_1)^2 = E(4X_1^2 + 8X_1X_2 + 4X_2^2) - 36 = 4E(X_1^2) + 8E(X_1X_2) + 4E(X_2^2) - 36$$

$$E(X_1^2) = E(X_2^2) = \int_1^2 x_1^2\ dx_1 = \frac{7}{3}$$

$$V(Y_1) = 4\frac{14}{3} - 36 + 8E(Y_2) = 4\frac{14}{3} - 36 + 8\frac{9}{4} = \frac{2}{3}$$

- Wyznacz wariancje Y_2

$$V(Y_2) = E(Y_2^2) - E(Y_2)^2 = E(X_1^2X_2^2) - \frac{81}{16} = \int_1^2 x_1^2\int_1^2 x_2^2\ dx_2\ dx_1 = \frac{49}{9} - \frac{81}{16} = \frac{55}{144}$$

- Wyznacz współczynnik korelacji Y_1 i Y_2.

$$p = \frac{E[(Y_1 - EY_1)(Y_2 - EY_2)]}{\sqrt{V(Y_1)V(Y_2)}} = \frac{E[(2X_1 + 2X_2 - 6)(X_1X_2 - \frac{9}{4})]}{\sqrt{\frac{55}{216}}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{55}{216}}} = \frac{3\sqrt{330}}{55}$$

Zadanie 5

Ze zbioru n elementowego losujemy jakiś podzbiór. Niech zmienna losowa X oznacza liczbę elementów wylosowanego podzbioru. Znajdź $E(X)$.

Mamy n elementowy zbiór, więc 2^n podzbiorów, bez zbioru pustego mamy $2^n - 1$
Prawdopodobieństwo wylosowania każdego zbioru jest równe $\frac{1}{2^n-1}$
Wtedy:

$$E(X) = \sum_{A\in P(S)} |A|\frac{1}{2^n - 1} = \frac{1}{2^n - 1}\sum_{A\in P(S)} |A|$$

Gdzie $P(S)$ oznacza moc podzbioru. Zadanie sprowadzamy więc do wyliczenia sumy po mocach wszystkich podzbiorów.
Jak wygląda ta suma? Wiemy, że w zbiorze n elementowym liczba podzbiorów i elementowych to $\binom{n}{i}$ (z dyskretnej). Innymi słowy ta suma to:

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}i = n2^{n-1}$$

Co pokażę:

$$f(x) = (1 + x)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i \Rightarrow f'(x) = n(1 + x)^{n-1} = \sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i}x^{i-1}$$

$$f'(1) = n2^{n-1} = \sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i}$$

Wracając do oryginalnego zadania, mamy:

$$E(X) = \frac{1}{2^n - 1}\sum_{A\in P(S)}|A| = \frac{1}{2^n - 1}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}i = \frac{1}{2^n - 1}n2^{n-1} = \frac{n}{2^{1-n}(2^n - 1)} = \frac{n}{2 - 2^{1-n}} = \frac{n}{2 - (0.5)^{n-1}}$$

Co jest naszą odpowiedzią.

Zadanie 6

The expected value of a Beta random variable X is

$$\mathrm{E}[X] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

Proof

It can be derived as follows:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx \\
&= \int_0^1 x \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx \\
&= \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \int_0^1 x^{(\alpha+1)-1}(1-x)^{\beta-1}dx \\
&= \frac{1}{B(\alpha,\beta)} B(\alpha+1,\beta) && \text{(by the integral representation of the Beta function)} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} && \text{(by the definition of Beta function)} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta)} \frac{\Gamma(\alpha)\cdot\alpha}{\Gamma(\alpha)} && \text{(because } \Gamma(z) = \Gamma(z-1)\cdot(z-1)\text{)} \\
&= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}
\end{aligned}$$

The variance of a Beta random variable X is

$$\mathrm{Var}[X] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}$$

Proof

It can be derived thanks to the usual variance formula ($\mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}\left[X^2\right] - \mathrm{E}[X]^2$):

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[X^2\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx \\
&= \int_0^1 x^2 \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx \\
&= \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \int_0^1 x^{(\alpha+2)-1}(1-x)^{\beta-1}dx \\
&= \frac{1}{B(\alpha,\beta)} B(\alpha+2,\beta) && \text{(by the integral representation of the Beta function)} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} && \text{(by the definition of Beta function)} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)\cdot(\alpha+\beta+1)} \frac{\Gamma(\alpha+1)\cdot(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} && \text{(because } \Gamma(z) = \Gamma(z-1)\cdot(z-1)\text{)} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta+1)\cdot(\alpha+\beta)} \frac{\Gamma(\alpha)\cdot(\alpha+1)\cdot\alpha}{\Gamma(\alpha)} && \text{(same as above)} \\
&= \frac{(\alpha+1)\cdot\alpha}{(\alpha+\beta+1)\cdot(\alpha+\beta)} \\
\mathrm{E}[X]^2 &= \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2 \\
\mathrm{Var}[X] &= \mathrm{E}\left[X^2\right] - \mathrm{E}[X]^2 \\
&= \frac{(\alpha+1)\alpha}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)} - \frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2} \\
&= \frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha+\beta) - \alpha^2(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2} \\
&= \frac{\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha^2+\alpha\beta-\alpha^3-\alpha^2\beta-\alpha^2}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2} \\
&= \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}
\end{aligned}$$

Zadanie 7

Metodą NW znaleźć estymator parametru λ w rozkładzie Poissona.

Zadanie to jest identyczne jak zadanie 7 z poprzedniej listy.

Zadanie 8

Metodą NW znaleźć estymator parametru p rozkładu Bernoulliego.

$$f(n,p) = p^n(1-p)^{1-n}$$

$$L = \prod_{i=0}^{n} P(x_i, p) = p^k(1-p)^{n-k}$$

Gdzie k to liczba sukcesów $(x_i = 1)$.

$$\log L = k \log p + (n-k)log(1-p)$$

$$\frac{d \log L}{dp} = \frac{k-np}{p-p^2}$$

Przyrównajmy do 0:

$$\frac{k-np}{p-p^2} = 0 \Rightarrow p = \frac{k}{n}$$