Algorytmy probabilistyczne

Lista zadań nr 1

1. (a) Załóżmy, że zbiory X i Y zostały wybrane jednostajnie i niezależnie spośród 2^n wszystkich możliwych podzbiorów zbioru $\{1, \dots, n\}$. Ile wynoszą $\mathbf{Pr}(X \subseteq Y)$ oraz $\mathbf{Pr}(X \cup Y = \{1, \dots, n\})$?

   (b) Udowodnić, że dla dowolnych zdarzeń $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$
   $$\mathbf{Pr}(\bigcap_{i=1}^{k} \varepsilon_i) = \mathbf{Pr}(\varepsilon_1) \cdot \mathbf{Pr}(\varepsilon_2 \,|\, \varepsilon_1) \cdot \mathbf{Pr}(\varepsilon_3 \,|\, \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2) \cdots \mathbf{Pr}(\varepsilon_k \,|\, \bigcap_{i=1}^{k-1} \varepsilon_i).$$

   (c) Niech $X_1, \dots, X_k$ będą dowolnymi zmiennymi losowymi i niech $h(X_1, \dots, X_k)$ będzie funkcją liniową. Udowodnić, że $\mathbf{E}(h(X_1, \dots, X_k)) = h(\mathbf{E}(X_1), \dots, \mathbf{E}(X_k))$.

2. Niech A będzie algorytmem Monte Carlo dla problemu Π, którego oczekiwany czas działania wynosi co najwyżej $T(n)$ na dowolnych danych rozmiaru n i który podaje poprawne rozwiązanie z prawdopodobieństwem $\gamma(n)$. Załóżmy także, że mając dane rozwiązanie problemu Π potrafimy sprawdzić jego poprawność deterministycznie w czasie $t(n)$. Pokazać, jak można otrzymać algorytm Las Vegas, który zawsze daje poprawne rozwiązanie problemu Π i którego oczekiwany czas działania wynosi co najwyżej $(T(n) + t(n))/\gamma(n)$.

3. Rozważmy algorytm Monte Carlo, który daje poprawne rozwiązania z prawdopodobieństwem co najmniej $1 - \epsilon_1$, niezależnie od danych. Ile niezależnych wykonań tego algorytmu wystarcza by zwiększyć prawdopodobieństwo otrzymania poprawnego rozwiązania do co najmniej $1 - \epsilon_2$, $\epsilon_2 < \epsilon_1$, niezależnie od danych? Rozważyć problemy optymalizacyjne i decyzyjne (z jednostronnym błędem, tzn. jedna z odpowiedzi TAK/NIE jest udzielana zawsze poprawnie).

4. Problem minimalnego przecięcia dla grafu spójnego polega na znalezieniu najmniejszego liczbowo podzbioru krawędzi, których usunięcie rozspaja graf. Algorytm $MinCut$ losuje dowolna krawędź $\{u, v\}$ z rozkładem jednostajnym, usuwa krawędzie pomiędzy u i v i łączy u i v w jeden wierzchołek (nazywamy to kontrakcją krawędzi - mogą powstać równoległe krawędzie pomiędzy parami wierzchołków). Powtarza tę czynność, aż pozostaną tylko dwa wierzchołki i zwraca zbiór krawędzi pomiędzy nimi. Przeanalizować złożoność czasową tego algorytmu i oszacować prawdopodobieństwo, że algorytm wyznaczy ustalone minimalne przecięcie.

   Wskazówka: Prawdopodobieństwo, iż algorytm nie usunie żadnej krawędzi z ustalonego, minimalnego $Cut(G) = C$ jest równe $\mathbf{Pr}(\bigcap_{i=1}^{n-2} \varepsilon_i)$, gdzie ε_i oznacza zdarzenie polegające na nie wylosowaniu w i-tym kroku krawędzi z C? Oszacować z dołu $\mathbf{Pr}(\varepsilon_i | \bigcap_{j=1}^{i-1} \varepsilon_j)$ używając oszacowania z dołu na liczbę krawędzi pozostałych w grafie po $i - 1$ iteracjach algorytmu.

5. Aby zwiększyć prawdopodobieństwo sukcesu możemy wykonać $MinCut$ na danym grafie $G = (V, E)$, $n = |V|$, dwukrotnie, niezależnie i wybrać mniejszy wynik. Wykonamy wtedy $2n - 4$ kontrakcji krawędzi. Inna możliwość wykorzystania tej samej liczby kontrakcji to wykonanie najpierw k kontrakcji, zapamiętanie wyniku, wykonanie na tym wyniku $l \leq \frac{2n-4-k}{n-2-k}$ niezależnych przebiegów $MinCut$-a i wybranie najlepszego wyniku. Wybrać optymalną wartość k i porównać prawdopodobieństwa sukcesu w obu przypadkach.

6. Udowodnij następujące relacje pomiędzy klasami problemów decyzyjnych:

$$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{ZPP} = \mathcal{RP} \cap co\text{-}\mathcal{RP} \subseteq \mathcal{RP} \subseteq \begin{matrix} \mathcal{NP} \\ \mathcal{BPP} \end{matrix} \subseteq \mathcal{PP} \subseteq \mathcal{PSPACE}$$

26 lutego 2019 Marek Piotrów