Algorytmy probabilistyczne

Lista zadań nr 8

1. Podany na wykładzie prosty algorytm dla MaxSAT (każdej zmiennej przydzielamy niezależnie jedną z wartości 0 lub 1 z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$) można zderandomizować metodą prawdopodobieństw warunkowych w następujący sposób: Dla zadanej formuły z wagami $F = C_1 \wedge \ldots \wedge C_m$ nad zbiorem zmiennych $\{x_1, \ldots, x_n\}$ przypisujemy kolejno wartości zmiennym z X. Załóżmy, że algorytm przypisał już wartości zmiennym $x_1 = b_1, \ldots, x_{i-1} = b_{i-1}$ i zajmuje się zmienną x_i. Dla tej zmiennej wylicza on dwie warunkowe wartości oczekiwane $E[w(F)|x_1 = b_1 \wedge \ldots \wedge x_{i-1} = b_{i-1} \wedge x_i = b]$, gdzie $b \in \{0,1\}$ i wybiera dla x_i tę wartość, która daje większą z nich (wartości oczekiwane liczymy zgodnie z rozkładem zadanym powyżej). Wykazać, że współczynnik aproksymacji takiego algorytmu deterministycznego wynosi $\frac{1}{2}$. Jaka jest jego złożoność?

2. Zderandomizować w podobny sposób drugi z podanych na wykładzie algorytmów dla MaxSAT, gdzie dla zmiennych występujących w klauzulach jednoelementowych modyfikuje się prawdopodobieństwa wyboru jednej z wartości. Jaki jest współczynnik aproksymacji dla tego algorytmu? Jaka jest jego złożoność?

3. Rozważmy jeszcze jeden algorytm zrandomizowany dla MaxSAT (przy oznaczeniach jak z zad. 1), który losuje kolejno wartości dla zmiennych z X. Dla aktualnie rozważanej zmiennej x_i wyznacza on następująco prawdopodobieństwo p_i, z jakim wylosuje wartość 1 dla x_i: Niech W_i i $\bar{W}_i$ oznaczają sumaryczne wagi klauzul, które nie są jeszcze spełnione (przez wartości zmiennych $x_1, \ldots, x_{i-1}$) i które zawierają odpowiednio x_i lub $\bar{x}_i$, ale nie zawierają literałów dla $x_{i+1}, \ldots, x_n$. Niech F_i i $\bar{F}_i$ oznaczają sumaryczne wagi pozostałych niespełnionych klauzul, które zawierają odpowiednio x_i lub $\bar{x}_i$. Wtedy niech $p_i = \max(0, \min(1, (F_i + W_i - \bar{W}_i)/(F_i + \bar{F}_i)$, gdzie przyjmujemy, że wynik dzielenia przez zero, to $+\infty$ lub $-\infty$ w zależności od znaku licznika. Uzupełnić szczegóły algorytmu i wykazać, że jego współczynnik aproksymacji wynosi co najmniej $3/4$. Jaka jest jego złożoność?

4. Rozważmy następujący problem pokrycia zbiorów: dla danego ciągu zbiorów $S_1, S_2, \ldots, S_n$ zawartych w $U = \{1, \ldots, m\}$, wyznaczyć najmniejszy zbiór $T \subseteq \{1, \ldots, n\}$, taki że $\bigcup_{i \in T} S_i = U$. W macierzowym sformułowaniu tego problemu trzeba dla danej macierzy 0-1 M o rozmiarach $m \times n$ wyznaczyć wektor 0-1 $\bar{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$ o minimalnej wadze $\sum_{i=1}^n c_i$, taki że iloczyn $M\bar{c}$ zawiera wszystkie pozycje dodatnie. Niech $C(M)$ oznacza wagę takiego wektora.

   Pokazać, jak przy pomocy programowania liniowego (w którym uzyskamy wyniki wymierne z przedziału [0,1] zamiast wartości 0 lub 1) i losowego zaokrąglania można wyznaczyć $(\log m)$-przybliżone rozwiązanie tego problemu, tzn. taki wektor zero-jedynkowy $c' = (c'_1, c'_2, \ldots, c'_n)^T$, że

$$(\sum_{i=1}^n c'_i) \in O(C(M) \cdot \log m).$$

5. Pokazać, że dla dostatecznie dużego n istnieją grafy dwudzielne $G = (L \cup R, E)$ mające poniższe własności ekspandera. W tym celu można wylosować krawędzie grafu i wykazać, że z dodatnim prawdopodobieństwem wylosowany graf ma pożądane własności.

   (a) $\mid L \mid = \mid R \mid = n$;

   (b) każdy wierzchołek z L ma stopień $n^{3/4}$, a każdy wierzchołek z R ma stopień najwyżej $3n^{3/4}$;

   (c) każdy $n^{3/4}$-elementowy podzbiór wierzchołków L ma co najmniej $n - n^{3/4}$ sąsiadów w R.

8 maja 2019 Marek Piotrów