

20 kwietnia 2017

1	2	3	4	KR1	KR2
Imię i nazwisko					

- Proszę podpisać wszystkie kartki.
- 1 zadanie  $\equiv$  1 kartka.
- Rozwiązujemy 4 zadania z 6.

1. **15p.** Niezależne zmienne  $X_1, \dots, X_n$  mają ten sam rozkład o wartościach dodatnich. Obliczyć

$$E \left( \sum_{i=1}^k X_i / \sum_{m=1}^n X_m \right), \text{ dla } k \leq n.$$

[Zadania 2–3] Rozważamy określony pierwiastek promieniotwórczy. Atomy takiego pierwiastka ulegają samorzutnemu rozpadowi w losowym momencie. Możemy obserwować atom tego pierwiastka (od pewnego momentu) i rozważać zmienną losową  $X$ , której wartością jest czas, jaki upłynął od rozpoczęcia obserwacji do rozpadu atomu. Zmienna ta ma rozkład wykładniczy z parametrem  $\lambda$ . Parametr rozkładu zależy od badanego pierwiastka, jest taki sam dla różnych atomów tego pierwiastka i nie zależy od momentu rozpoczęcia obserwacji. Różne atomy rozpadają się w zasadzie niezależnie od siebie.

2. **15p.**

- (a) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że rozpad atomu nastąpił w  $n$ -tej godzinie obserwacji. (czyli oblicz prawdopodobieństwo tego, że zmienna  $X$  o rozkładzie wykładniczym z parametrem  $\lambda$  przyjmuje wartość z przedziału  $[n-1, n)$ .)
- (b) Niech  $Y$  będzie zmienną losową przyjmującą dodatnie wartości naturalne, taką że  $Y = n$  wtedy i tylko wtedy, gdy rozpad obserwowanego atomu nastąpił w  $n$ -tej godzinie obserwacji (gdy  $X \in [n-1, n)$ ,  $X$  taka, jak wyżej). Jaki rozkład ma zmienna  $Y$ ?

3. **15p.**

- (a) Przypuśćmy, że obserwujemy 100 atomów naszego pierwiastka. Z jakim prawdopodobieństwem w czasie  $t$  od momentu rozpoczęcia obserwacji rozpadnie się dokładnie 50 atomów? (czyli rozpatrujemy 100 niezależnych zmiennych losowych o rozkładach wykładniczych z tym samym parametrem  $\lambda$ . Z jakim prawdopodobieństwem dokładnie 50 tych zmiennych przyjmuje wartość  $< t$ .)

(b) Znajdź  $t$ , dla którego prawdopodobieństwo rozpadu w czasie  $t$  dokładnie połowy ze 100 atomów jest największe. Jak zmieniają się obliczenia, gdy zamiast 100 atomów będziemy rozważać ich 1000 lub innych (parzystą) ich liczbę.

4. **15p.** Zmienna losowa  $(X, Y)$  podlega rozkładowi o gęstości określonej wzorem:

$$f(x, y) = \frac{3}{2} \exp(-(x + y)), \text{ gdzie } 0 < x < 2y < \infty.$$

Obliczyć gęstość zmiennej  $(Z, W)$ , gdzie  $Z = \frac{X + Y}{2}$ ,  $W = \frac{X - Y}{2}$ .

5. **Zadanie KR1 – 12p.** Niezależne zmienne losowe  $X_1, X_2, \dots, X_N$  mają rozkład  $N(\mu, \sigma^2)$ . Wiadomo, że  $M_{X_k}(t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2 / 2}$ . Jaki rozkład ma zmienna  $Z$ ?

$$Z = \left( \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \right)^2.$$

6. **Zadanie KR2 – 8p.** Wykazać, że wariancja sumy dwóch niezależnych zmiennych losowych  $X, Y$  jest równa sumie wariancji tych zmiennych, a więc

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y).$$

Witold Karczewski