Trochę o logikach modalnych

Kamil Matuszewski

Uniwersytet Wrocławski

kamil.k.mat@gmail.com

20 marca 2018

Trochę historii

- Logika modalna rozszerza klasyczny rachunek zdań o modalności **możliwości** oraz **konieczności**
- Pierwsze próby nadania znaczenia tym modalnościom podejmował już *Arystoteles*
- Twórcą pierwszych systemów modalnego rachunku zdań jest *C. I. Lewis* - systemy nazwano **S1** i **S2**
- Później powstało także wiele innych systemów: *Kripkego*, *Feyesa*, *Wrighta*

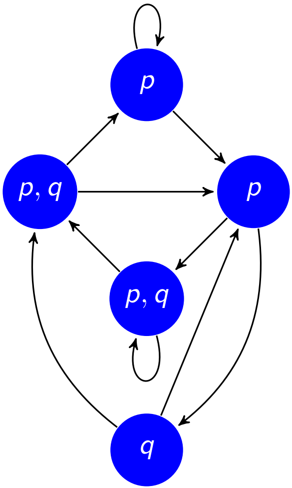
Gramatyka

- Rozszerzamy klasyczną logikę o nowe operatory $\Box$ i $\Diamond$
- $\varphi ::= \top \mid \bot \mid p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \Rightarrow \varphi \mid \Box\varphi \mid \Diamond\varphi$
- $\Box\varphi$ oznacza, że φ **jest konieczne**
- $\Diamond\varphi$ oznacza, że φ **jest możliwe**

Struktura Kripkego

- Ustalmy zbiór AP zmiennych atomowych
- Strukturą Kripkego nazywamy trójkę $\mathfrak{K} = (S, R, L)$ taką, że:
  - S to **zbiór światów**
  - $R \subseteq S \times S$ to **zbiór krawędzi**
  - $L : S \rightarrow 2^{AP}$ to **funkcja etykietująca**

Struktura Kripkego



Spełnialności lokalne i globalne oraz model checking

- Ustalmy strukturę $\mathfrak{K} = (S, R, L)$
- Poniżej definiujemy pojęcie **lokalnego spełnienia** w strukturze $\mathfrak{K}$ i świecie $s \in S$ (zapisujemy $\mathfrak{K}, s \models \varphi$)

$$
\begin{array}{lll}
\mathfrak{K}, s \models \top & & \\
\mathfrak{K}, s \not\models \bot & & \\
\mathfrak{K}, s \models p & \text{wtw} & p \in L(s) \\
\mathfrak{K}, s \models \neg\varphi & \text{wtw} & \mathfrak{K}, s \not\models \varphi \\
\mathfrak{K}, s \models \varphi \wedge \psi & \text{wtw} & \mathfrak{K}, s \models \varphi \text{ i } \mathfrak{K}, s \models \psi \\
\mathfrak{K}, s \models \varphi \vee \psi & \text{wtw} & \mathfrak{K}, s \models \varphi \text{ lub } \mathfrak{K}, s \models \psi \\
\mathfrak{K}, s \models \varphi \Rightarrow \psi & \text{wtw} & \mathfrak{K}, s \not\models \varphi \text{ lub } \mathfrak{K}, s \models \psi \\
\mathfrak{K}, s \models \Diamond\varphi & \text{wtw} & \exists_{s'} R(s, s') \wedge \mathfrak{K}, s' \models \varphi \\
\mathfrak{K}, s \models \Box\varphi & \text{wtw} & \forall_{s'} R(s, s') \Rightarrow \mathfrak{K}, s' \models \varphi
\end{array}
$$

- Zauważmy, że z poniższych definicji wynika, że operatory $\Diamond$ i $\Box$ są dualne ($\neg\Diamond\varphi \equiv \Box\neg\varphi$)

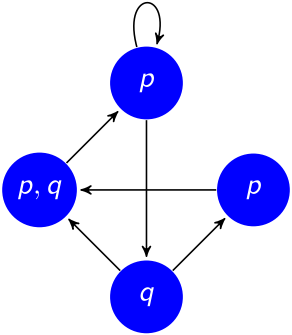
Spełnialności lokalne i globalne oraz model checking

- Prócz lokalnego spełnienia formuły, będziemy używać następujących pojęć:
  - Powiemy, że formuła φ jest **globalnie spełniona** w strukturze $\mathfrak{K} = (S, R, L)$, jeśli dla każdego $s \in S$ zachodzi $\mathfrak{K}, s \models \varphi$
    - Będziemy zapisywać $\mathfrak{K} \models \varphi$
    - Struktura $\mathfrak{K}$ nazywana jest **modelem** formuły φ
  - Powiemy, że formuła jest **poprawna**, jeśli dla każdej struktury $\mathfrak{K}$ zachodzi $\mathfrak{K} \models \varphi$
    - Będziemy zapisywać $\models \varphi$

Spełnialności lokalne i globalne oraz model checking

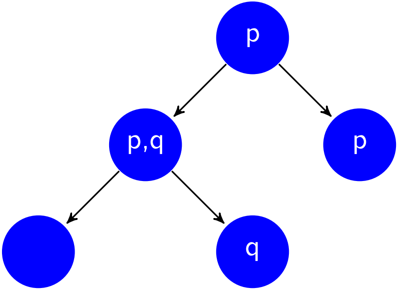
- Jakie pytania możemy zadać?
  - Czy istnieje struktura $\mathfrak{K}$, że φ jest lokalnie spełniona (problem lokalnej spełnialności)?
  - Czy istnieje struktura $\mathfrak{K}$, że φ jest globalnie spełniona (problem globalnej spełnialności)?
  - Czy w danej strukturze $\mathfrak{K}$ formuła φ jest (lokalnie lub globalnie) spełniona? (Model Checking)
  - Czy formuła φ jest poprawna (problem poprawności)?

Przykłady



- Czy formuła $\Box p$ jest globalnie spełniona? **NIE** A lokalnie spełniona? **TAK**
- Czy formuła $\Diamond p$ jest globalnie spełniona? **TAK** A lokalnie spełniona? **TAK**
- Czy formula $\Box p \Rightarrow \Diamond p$ jest globalnie spełniona? **TAK** Czy formuła jest poprawna? **NIE**

Bardziej skomplikowane przykłady



- Czy formuła $\Diamond(\Diamond(p \vee q) \Rightarrow (\Box p \vee \Box q))$ jest lokalnie spełniona? **TAK**
  A globalnie spełniona? **NIE**
- Czy formuła $\Box(p \wedge q) \Rightarrow (\Box p \wedge \Box q)$ jest lokalnie spełniona? **TAK**
  A globalnie spełniona? **TAK**
  Czy jest poprawna? **???**

Dodatkowe aksjomaty

- Graf $\mathfrak{G} = < S, R >$ złożony z dwóch pierwszych elementów modelu $\mathfrak{K} = (S, R, L)$ nazywać będziemy **ramą**
- Na ramy nakładać możemy różne ograniczenia, uzyskując w ten sposób różne logiki
- Ograniczenia na ramy możemy wyrazić za pomocą **aksjomatów**

Własność ramy	Dodatkowy aksjomat	Warunek logiki pierwszego rzędu
D - szeregowa	$\Box p \Rightarrow \Diamond p$	$\forall_x \exists_y R(x, y)$
T - zwrotna	$p \Rightarrow \Diamond p$	$\forall_x R(x, x)$
B - symetryczne	$p \Rightarrow \Box\Diamond p$	$\forall_{x,y} R(x, y) \Rightarrow R(y, x)$
4 - przechodnia	$\Box p \Rightarrow \Box\Box p$	$\forall_{x,y,z} R(x, y) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x, z)$
5 - euklidesowa	$\Diamond p \Rightarrow \Box\Diamond p$	$\forall_{x,y,z} R(x, y) \wedge R(x, z) \Rightarrow R(y, z)$

Nowe logiki

- Logika bez żadnych własności ramy, to **logika modalna K**
- Część z reguł wymusza inne (np. zwrotność wymusza szeregowość)

Nazwa logiki	Ograniczenia na ramę
K	brak
KD	szeregowa (D)
KB	symetryczna (B)
K4	przechodnia (4)
K5	euklidesowa (5)
T	szeregowa (D), zwrotna (T)
DB	szeregowa (D), symetryczna (B)
KD4	szeregowa (D), przechodnia (4)
KD5	szeregowa (D), euklidesowa (5)
K45	przechodnia (4), euklidesowa (5)
TB	szeregowa (D), zwrotna (T), symetryczna(B)
S4	szeregowa (D), zwrotna (T), przechodnia (4)
KB45	symetryczna (B), przechodnia (4), euklidesowa (5)
KD45	szeregowa (D), przechodnia (4), euklidesowa (5)
S5	szeregowa (D), symetryczna (B), przechodnia (4), euklidesowa (5)

Pamiętaj żeby zmienić tą nazwę

- Czy formuła $\Box(p \wedge q) \Rightarrow (\Box p \wedge \Box q)$ jest poprawna?

Rachunek sekwentów - przypomnienie

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi, \Delta}{\Gamma, \neg\varphi \vdash \Delta}\ L_{\neg} \qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg\varphi}\ R_{\neg}$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta \qquad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \Delta}\ L_{\vee} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \vee \psi}\ R_{\vee}$$

$$\frac{\Gamma, \varphi, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \Delta}\ L_{\wedge} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \qquad \Gamma \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \wedge \psi}\ R_{\wedge}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \qquad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \Rightarrow \psi \vdash \Delta}\ L_{\Rightarrow} \qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \Rightarrow \psi}\ R_{\Rightarrow}$$

Rozszerzenie

- Rozszerzamy nasz rachunek sekwentów o dwie operacje:

$$\frac{\Gamma^{\Box}, \varphi \vdash \Delta^{\Diamond}}{\Gamma, \Diamond\varphi \vdash \Delta} L_{\Diamond} \qquad \frac{\Gamma^{\Box} \vdash \Delta^{\Diamond}, \varphi}{\Gamma \vdash \Delta, \Box\varphi} R_{\Box}$$

- W zależności od logiki, symbole $\Gamma^{\Box}$ i $\Delta^{\Diamond}$ definiujemy w różny sposób
- Dla logik nie zawierających aksjomatu **4**:
  $\Gamma^{\Box} = \{\varphi \,|\, \Box\varphi \in \Gamma\}$
  $\Delta^{\Diamond} = \{\varphi \,|\, \Diamond\varphi \in \Delta\}$
- Dla logik zawierających aksjomat **4**:
  $\Gamma^{\Box} = \{\varphi, \Box\varphi \,|\, \Box\varphi \in \Gamma\}$
  $\Delta^{\Diamond} = \{\varphi, \Diamond\varphi \,|\, \Diamond\varphi \in \Delta\}$
- Dodatkowo, dla logik zawierających aksjomat **T**, rozszerzamy rachunek o operacje:

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma, \Box\varphi \vdash \Delta} L_{\Box} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}{\Gamma \vdash \Delta, \Diamond\varphi} R_{\Diamond}$$

Przykłady

- Dowód, że $\models_K \Box(p \wedge q) \Rightarrow (\Box p \wedge \Box q)$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p, q \vdash_K p}}{(p \wedge q) \vdash_K p}\, L_\wedge}{\Box(p \wedge q) \vdash_K \Box p}\, R_\Box \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p, q \vdash_K q}}{(p \wedge q) \vdash_K q}\, L_\wedge}{\Box(p \wedge q) \vdash_K \Box q}\, R_\Box}{\dfrac{\Box(p \wedge q) \vdash_K (\Box p \wedge \Box q)}{\vdash_K \Box(p \wedge q) \Rightarrow (\Box p \wedge \Box q)}\, R_\Rightarrow}\, R_\wedge
$$

- Dowód, że $\models_T \Box p \Rightarrow \Diamond p$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \vdash_T p}}{\Box p \vdash_T p}\, L_\Box}{\Box p \vdash_T \Diamond p}\, R_\Diamond}{\vdash_T \Box p \Rightarrow \Diamond p}\, R_\Rightarrow
$$

Przykłady

- Dowód, że $\models_K \Diamond(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\varphi \Rightarrow \Diamond\psi)$

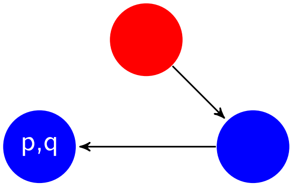
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi \vdash_K \psi, \varphi} \qquad \dfrac{}{\psi, \varphi \vdash_K \psi}}{\varphi \Rightarrow \psi, \varphi \vdash_K \psi}\, L_\Rightarrow}{\Diamond(\varphi \Rightarrow \psi), \Box\varphi \vdash_K \Diamond\psi}\, L_\Diamond}{\Diamond(\varphi \Rightarrow \psi) \vdash_K \Box\varphi \Rightarrow \Diamond\psi}\, R_\Rightarrow}{\vdash_K \Diamond(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\varphi \Rightarrow \Diamond\psi)}\, R_\Rightarrow$$

- Dowód, że $\models_{S4} \Diamond(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\varphi \Rightarrow \Diamond\psi)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi, \Box\varphi \vdash_{S4} \psi, \Diamond\psi, \varphi} \qquad \dfrac{}{\psi, \varphi, \Box\varphi \vdash_{S4} \psi, \Diamond\psi}}{\varphi \Rightarrow \psi, \varphi, \Box\varphi \vdash_{S4} \psi, \Diamond\psi}\, L_\Rightarrow}{\Diamond(\varphi \Rightarrow \psi), \Box\varphi \vdash_{S4} \Diamond\psi}\, L_\Diamond}{\Diamond(\varphi \Rightarrow \psi) \vdash_{S4} \Box\varphi \Rightarrow \Diamond\psi}\, R_\Rightarrow}{\vdash_{S4} \Diamond(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\varphi \Rightarrow \Diamond\psi)}\, R_\Rightarrow$$

Przykłady

- Czy $\models_K \Diamond(\Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi) \Rightarrow (\Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi)$?



Przykłady

- A może $\models_{K4} \Diamond(\Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi) \Rightarrow (\Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi)$?

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\Diamond\varphi, \Diamond\psi, \varphi \vdash_{K4} \Diamond\varphi, \varphi}}{\Diamond\varphi, \Diamond\psi \vdash_{K4} \Diamond\varphi, \varphi}\,L_\Diamond}{\Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi \vdash_{K4} \Diamond\varphi, \varphi}\,L_\wedge}{\Diamond(\Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi) \vdash_{K4} \Diamond\varphi}\,L_\Diamond
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\Diamond\varphi, \Diamond\psi, \psi \vdash_{K4} \Diamond\psi, \psi}}{\Diamond\varphi, \Diamond\psi \vdash_{K4} \Diamond\psi, \psi}\,L_\Diamond}{\Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi \vdash_{K4} \Diamond\psi, \psi}\,L_\wedge}{\Diamond(\Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi) \vdash_{K4} \Diamond\psi}\,L_\Diamond
}{
\dfrac{\Diamond(\Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi) \vdash_{K4} \Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi}{\vdash_{K4} \Diamond(\Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi) \Rightarrow (\Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi)}\,R_\Rightarrow
}\,R_\wedge
$$

Powiązania z innymi logikami

- Logikę modalną można przetłumaczyć na logikę klasyczną
  - Niech P_p - relacja taka, że $P_p(x) = T$ wtw gdy $\mathfrak{K}, x \models p$
  - $ST_x(\top) \equiv \top$
  - $ST_x(\bot) \equiv \bot$
  - $ST_x(p) \equiv P_p(x)$
  - $ST_x(\neg\varphi) \equiv \neg ST_x(\varphi)$
  - $\vdots$
  - $ST_x(\Diamond\varphi) \equiv \exists_y(R(x,y) \wedge ST_y(\varphi))$
  - $ST_x(\Box\varphi) \equiv \forall_y(R(x,y) \Rightarrow ST_y(\varphi))$
- Logika modalna na strukturach będących porządkami liniowymi jest równoważna logice LTL z operatorem **X**
- Logika modalna K jest równoważna logice CTL z operatorami **EX** oraz **AX**

Zastosowania

- Powody historyczne
- Podstawa logik temporalnych
- Proste przypadki automatycznej weryfikacji
- Jest rozstrzygalna, łatwo dowodliwa
- Ciekawe własności teoretyczne (własność modelu drzewiastego, własność modelu skończonego)

Lista zadań

- 5 Zadań
- Zadania 1-4 do zapoznania się ze strukturą Kripkego
- Zadanie 5 - dowody w obrębie różnych logik

Bez tytułu

Pytania? Uwagi? Komentarze?

Bibliografia

- http://www.cs.man.ac.uk/~ezolin/ml/
- *Back and Forth Between Modal Logic and Classical Logic* by Hajnal Andréka, Johan van Benthem, Istvan Németi
- *Handbook of Modal Logic, Volume 3* by Patrick Blackburn, Johan F.A.K. van Benthem, Frank Wolter
- *Modal Logic for Artificial Intelligence* by Rosja Mastop
- http://www.comp.nus.edu.sg/~cs5209/slides/slides_11.bw.pdf
- *Sequent Systems For Modal Logics* by Heinrich Wansing