

# Lista 3

Kamil Matuszewski

27 października 2015

1	2	3	4	5	6	7
✓	✓		✓	✓	✓	✓

## Zadanie 1

Znajdź wartości dla których obliczanie funkcji może wiązać się z utratą cyfr znaczących wyniku i zaproponuj sposób dokładniejszego obliczania funkcji.

- $e^{-x^2} - e^{2x^2}$

$$e^{-x^2} - e^{2x^2} = e^{-x^2}(1 - e^{3x^2})$$

Kiedy  $3x^2$  jest bliskie 0 wtedy w nawiasie mamy odejmowanie dwóch bliskich sobie liczb. Żeby to naprawić, rozwińmy  $e^x$  w szereg Maclaurina:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^{3x^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x^2)^n}{n!}$$

$$e^{-x^2} - e^{2x^2} = e^{-x^2}(1 - e^{3x^2}) = e^{-x^2}(1 - (1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x^2)^n}{n!})) = -e^{-x^2}(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x^2)^n}{n!})$$

- $1 - \sin(2x)$  Oczywiście, kiedy  $\sin(2x)$  jest bliskie 1 to może nastąpić utrata cyfr znaczących wyniku. Jak to naprawić?

$$\sin x = \cos(x - \pi/2)$$

$$\sin x = \sin(x + 2\pi)$$

$$1 - \cos x = 2\sin^2(x/2)$$

$$1 - \sin(2x) = 1 - \cos(2x - \pi/2) = 2\sin^2(x - \pi/4) = 2\sin^2(x + 7\pi/4)$$

## Zadanie 2

Podaj bezpieczny numerycznie algorytm obliczania zer równania kwadratowego  $ax^2 + bx + c = 0$ . Przeprowadź testy dla odpowiednio dobranych wartości  $a$ ,  $b$  i  $c$  pokazujące, że Twój algorytm jest lepszy od metody szkolnej bazującej jedynie na dobrze znanych wzorach  $x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/(2a)$

Jeśli  $ac$  jest bardzo, bardzo, bardzo małe a  $b$  bardzo duże (co do modułu), wtedy mamy odejmowanie bliskich sobie liczb (w zależności od tego jaki znak ma  $b$  to inny wzór będzie nieprawidłowy).

Żeby to naprawić użyjemy wzorów Vietta. Mając  $a$ ,  $b$  i  $x_1$  możemy obliczyć  $x_2 = -\frac{b}{a} - x_1$  czy coś. Zrobienie testów w swoim ulubionym języku pozostawiam jako proste ćwiczenie.

## Zadanie 4

Wyprowadź wzór na wskaźnik uwarunkowania zadania obliczania wartości funkcji  $f$  w punkcie  $x$ .

Względna zmiana danych:

$$\left| \frac{(x+h) - x}{x} \right| = \left| \frac{h}{x} \right|$$

Względna zmiana wyniku:

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{f(x)} \right|$$

Względna zmiana wyniku/Względna zmiana danych:

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{f(x)} \right| \cdot \left| \frac{x}{h} \right| = \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \left| \frac{h}{f(x)} \right| \left| \frac{x}{h} \right| = \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \left| \frac{x}{f(x)} \right| = |f'(x)| \left| \frac{x}{f(x)} \right| = \left| \frac{f'(x)x}{f(x)} \right|$$

## Zadanie 5

Sprawdź dla jakich wartości  $x$  zadania obliczania funkcji  $f$  jest źle uwarunkowane.

Korzystamy z zadania 2, a dokładniej ze wskaźnika uwarunkowania.

- $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

$$\left| \frac{f'(x)x}{f(x)} \right| = \left| \frac{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}x}{\sqrt{1-x^2}} \right| = \left| \frac{-x^2x}{(\sqrt{1-x^2})^2} \right| = \left| \frac{-x^3}{1-x^2} \right|$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{-x^3}{1-x^2} \right| = \infty$$

- $f(x) = x \ln x$

$$\left| \frac{f'(x)x}{f(x)} \right| = \left| \frac{(1+\ln x)x}{x \ln x} \right| = \left| \frac{1+\ln x}{\ln x} \right|$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{1+\ln x}{\ln x} \right| = \infty$$

- $f(x) = \sqrt{x^4+1} - x^2$

$$\left| \frac{f'(x)x}{f(x)} \right| = \left| \frac{\left(\frac{2x^3}{\sqrt{x^4+1}} - 2x\right)x}{\sqrt{x^4+1} - x^2} \right| = \left| \frac{\frac{2x^4}{\sqrt{x^4+1}} - 2x^2}{\sqrt{x^4+1} - x^2} \right| \stackrel{wolfram}{=} \left| -\frac{2x^2}{\sqrt{x^4+1}} \right| = \left| \frac{2x^2}{\sqrt{x^4+1}} \right|$$

Zadanie dobrze uwarunkowane

- $f(x) = \sin(x)$

$$\left| \frac{f'(x)x}{f(x)} \right| = \left| \frac{x \cos x}{\sin x} \right| = |x \operatorname{ctg} x|$$

$$\lim_{x \rightarrow k\pi} |x \operatorname{ctg} x| = 0$$

## Zadanie 6

Musimy sprawdzić, czy algorytm jest numerycznie poprawny. To jest dosyć łatwe, choć akurat dla mnie nigdy nie było intuicyjne, ale robi się to jakoś tak:

Niech  $e_i = (1 + \varepsilon_i)$  a  $w_i = (1 + \alpha_i)$

$$\begin{aligned}
 S &:= (de_1 + 1)w_1 = de_1w_1 + w_1 \\
 S &:= \frac{ce_2}{de_1w_1 + w_1}w_2 \\
 S &:= (be_3 + \frac{ce_2}{de_1w_1 + w_1}w_2)w_3 = be_3w_3 + \frac{ce_2w_2w_3}{de_1w_1 + w_1} \\
 S &:= \frac{ae_4}{be_3w_3 + \frac{ce_2w_2w_3}{de_1w_1 + w_1}}w_4 = \frac{ae_4w_4}{be_3w_3 + \frac{ce_2w_2w_3}{de_1w_1 + w_1}} \\
 S &:= \frac{1}{\frac{ae_4w_4}{be_3w_3 + \frac{ce_2w_2w_3}{de_1w_1 + w_1}}}w_5 = w_5 \cdot \frac{be_3w_3 + \frac{ce_2w_2w_3}{de_1w_1 + w_1}}{ae_4w_4} = w_5 \cdot \frac{be_3w_3(de_1w_1 + w_1) + ce_2w_2w_3}{ae_4w_4(de_1w_1 + w_1)} = \\
 &= \frac{be_3w_3(de_1w_1 + w_1)w_5 + ce_2w_2w_3w_5}{ae_4w_4(de_1w_1 + w_1)} = \frac{be_3w_3de_1w_1w_5 + be_3w_3w_1w_5 + ce_2w_2w_3w_5}{ae_4w_4(de_1w_1 + w_1)} = \\
 &= \frac{be_3w_3w_1w_5 + ce_2w_2w_3w_5 + bde_3w_3e_1w_1w_5}{ae_4w_4(de_1w_1 + w_1)}
 \end{aligned}$$

Niech  $E = \max \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ . Wtedy:

$$S \leq \frac{bE^4 + cE^4 + bdE^5}{aE^2(dE^2 + E)} = \frac{E^4(b + c + bdE)}{E^3(a(dE + 1))} = \frac{(b + c + b\tilde{d})}{a(\tilde{d} + 1)}E$$

Mamy więc, że wynik to  $\tilde{S}(a, b, c, d) = S(a, b, c, \tilde{d})(1 + \epsilon)$ , czyli lekkie zakłócenie danych i lekkie zakłócenie wyniku. Algorytm jest więc numerycznie poprawny, bo błędy zarówno danych jak i wyniku są na poziomie błędu reprezentacji (bo  $E$  było na poziomie błędu reprezentacji).

DYGRESJA

Na wykładzie było coś takiego jak twierdzenie o kumulacji błędów. To chyba leciało jakoś tak, że jeśli mamy jakieś  $|\alpha_i| \leq 2^{-t}$  dla  $i = 1, 2, \dots, n$  to zachodzi  $\prod_{i=1}^n (1 + \alpha_i) = (1 + \gamma_i)$ , gdzie  $|\gamma_i| \leq n2^{-t}$

W praktyce to oznacza, że możemy jakoś sobie pozwijać błędy. Musimy tylko określić, czy ten skumulowany błąd jest duży, a to jest jakieś machanie rękami. Zazwyczaj jak te błędy się tak skumulują to algorytm jest dobrze uwarunkowany.

To była jednak jakaś dygresja, i nie jest zupełnie potrzebna przy tym zadaniu.

## Zadanie 7

To robimy podobnie jak poprzednie, i korzystamy z tej śmiesznej kumulacji błędów. To nie jest trudne zadanie. Kiedy liczby nie są maszynowe będzie dwa razy więcej błędów, ale to wciąż będzie numerycznie poprawne. Jeśli zapiszecie wzór i skorzystacie z twierdzenia o kumulacji błędów, oraz trochę pomachacie, że ten skumulowany błąd to w sumie nie jest duży, to raczej grzyba nie dostaniecie (ja tak robiłem i nie dostałem). Te zadanka z numeryczną poprawnością polegają właśnie na takim machaniu, i u nas to przechodziło. Ciężko jest pokazać przykład algorytmu numerycznie niepoprawnego, i raczej nie będzie takich na L.