Lista 2

Kamil Matuszewski

22 października 2015

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
✓	✓	✓	✓	✓	✓				✓			✓		

Zadanie 1

Niech a będzie liczbą niewymierną i n liczbą całkowitą dodatnią. Pokaż, że $\lfloor an \rfloor + \lfloor (1-a)n \rfloor = n-1$. Jak wygląda analogiczna równość dla powały?

- $\lfloor an \rfloor + \lfloor (1-a)n \rfloor = n-1$

  Dowód. Najpierw, skoro n jest całkowite i a niewymierne, to an nie może być całkowite. Skoro tak, to $\lfloor an \rfloor = \lceil an \rceil - 1$ Mając tą wiedzę możemy przystąpić do rozwiązywania zadania.

  $$\lfloor an \rfloor + \lfloor (1-a)n \rfloor = \lfloor an \rfloor + \lfloor n - an \rfloor \stackrel{(1)}{=} \lfloor an \rfloor + n + \lfloor -an \rfloor \stackrel{(2)}{=} \lfloor an \rfloor - \lceil an \rceil + n \stackrel{(3)}{=} n-1$$

  (1) Skoro n jest całkowite, to możemy wyciągnąć je przed podłogę.
  (2) $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$, było na wykładzie.
  (3) Z spostrzeżenia wyżej.

  □

- $\lceil an \rceil + \lceil (1-a)n \rceil = n+1$

  Dowód.

  $$\lceil an \rceil + \lceil (1-a)n \rceil = \lceil an \rceil + \lceil n - an \rceil = \lceil an \rceil + n + \lceil -an \rceil = \lceil an \rceil - \lfloor an \rfloor + n = n+1$$

  Przejścia analogiczne do tych wyżej. Warto wspomnieć, że działają tylko i wyłącznie dlatego, że an nie jest liczbą całkowitą. □

Zadanie 2

Dla dowolnych $x \in \mathbb{R}$ i $m \in \mathbb{N}$ oblicz $\lfloor x/m \rfloor + \lfloor (x+1)/m \rfloor + \ldots + \lfloor (x+(m-1))/m \rfloor$.

Dowód. Niech $x = km + r$, gdzie $k \in \mathbb{N}$ i $r \in [0, m)$, czyli innymi słowy x jest jakąś wielokrotnością liczby m z ewentualną resztą z przedziału $[0, m)$. Niech $x_i = \lfloor \frac{x+i}{m} \rfloor$. Można łatwo sprawdzić, czemu równe są kolejne x_i.

$$x_i = \lfloor \frac{km + r + i}{m} \rfloor = \lfloor k + \frac{r+i}{m} \rfloor$$

Skoro $i \in \{0, \ldots, m-1\}$ a $k \in \mathbb{N}$ to $\lfloor k + \frac{r+i}{m} \rfloor$ może wynieść albo k albo $k+1$, w zależności od tego jak duże będzie $r+i$ w stosunku do m.
Jeśli $r + i \geqslant m$ to wyrażenie będzie równe $k+1$. W przeciwnym przypadku wyrażenie będzie równe k. Mamy więc:

$$x_i = \begin{cases} k & i < m - r \\ k+1 & i \geqslant m - r \end{cases}$$

Skoro wiemy już ile wynoszą kolejne wyrazy, to możemy łatwo policzyć sumę, która jest równa $mk + \lfloor r \rfloor = \lfloor x \rfloor$ □

Zadanie 3

Dla każdej nierówności rekurencyjnej określ (najmniejszą) liczbę warunków początkowych niezbędnych do jednoznacznego określenia wartości elementów ciągu dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$

- $a_n = na_{n-2}$, potrzebujemy przynajmniej a_0 i a_1 żeby obliczyć a_2. Żeby policzyć a_1 potrzebowalibyśmy wyrazu a_{-1}, który nie istnieje ($n \in \mathbb{N}$). Odpowiedź: 2.
- $a_n = a_{n-1} + a_{n-3}$, potrzebujemy przynajmniej a_2 i a_0 żeby policzyć a_3. Żeby policzyć a_2 potrzebowalibyśmy a_{-1}, z tej samej przyczyny co w pierwszym ten wyraz nie istnieje. Potrzebujemy więc wyrazów a_0, a_1, a_2. Odpowiedź: 3.
- $a_n = 2a_{\lfloor n/2 \rfloor} + n$, zwróćmy uwagę, że $a_0 = 2a_0 + 0 \Rightarrow a_0 = 0$. Nie potrzebujemy więc żadnych warunków początkowych. Odpowiedź: 0.

Zadanie 4

Rozwiąż zależności:

- $f_n = f_{n-1} + 3^n$ dla $n > 1$ i $f_1 = 3$

$$f_n = 3^n + f_{n-1} = 3^n + 3^{n-1} + \ldots + 3 = \sum_{k=1}^{n} 3^k = 3 * \frac{1-3^n}{1-3} = -\frac{3-3^{n+1}}{2} = \frac{3^{n+1}-3}{2} = \frac{1}{2}(3^{n+1}-3)$$

- $h_n = h_{n-1} + (-1)^{n+1}n$ dla $n > 1$ i $h_1 = 1$
  Robimy to metodą "Wolfram + dowód indukcyjny", lub oficjalnie "zgadnij i udowodnij". Później pojawią się jakieś metody rozwiązywania takich rekurencji, ale póki co to musi nam starczyć.
  Hipoteza: $h_n = (-1)^{n+1}(\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor)$

  Dowód. Podstawa indukcji: $h_1 = 1$, $h_2 = -1$, działa.
  Załóżmy, że $\forall_{n_0 < n}$ zachodzi $h_{n_0} = (-1)^{n_0+1}(\lfloor \frac{n_0+1}{2} \rfloor)$. Sprawdźmy dla n. Rozpatrzymy dwa przypadki:

(1) n parzyste.

$$h_n = h_{n-1} + (-1)^{n+1}\, n \stackrel{zal}{=} (-1)^n \left(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor\right) + (-1)^{n+1}\, n = (-1)^n \left(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor - n\right) \stackrel{*}{=}$$

$$\stackrel{*}{=} (-1)^n \left(\frac{n}{2} - n\right) = (-1)^n \left(-\frac{n}{2}\right) = (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{2}\right) \stackrel{*}{=} (-1)^{n+1} \left(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor\right) \stackrel{*}{=} (-1)^{n+1} \left(\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor\right)$$

$*$ - korzystamy z parzystości n, w szczególności z tego, że $\frac{n}{2}$ jest całkowite oraz, że $\frac{n}{2} = \lfloor\frac{n}{2}\rfloor = \lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor$

(2) n nieparzyste.

$$h_n = h_{n-1} + (-1)^{n+1}n = h_{n-2} + (-1)^n(n-1) + (-1)^{n+1}n \stackrel{zal}{=}$$

$$\stackrel{zal}{=} (-1)^{n-1} \left(\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor\right) + (-1)^n(n-1) + (-1)^{n+1}n = (-1)^{n-1} \left(\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor - (n-1) + n\right) \stackrel{*}{=}$$

$$\stackrel{*}{=} (-1)^{n-1} \left(\frac{n-1}{2} + 1\right) = (-1)^{n-1} \cdot (-1)^2 \left(\frac{n+1}{2}\right) \stackrel{*}{=} (-1)^{n+1} \left(\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor\right)$$

$*$ - korzystamy z nieparzystości n, w szczególności z tego, że $\frac{n+1}{2} = \lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor$ bo $\frac{n+1}{2}$ jest całkowite.

□

- $l_n = l_{n-1}l_{n-2}$ dla $n > 2$ i $l_1 = l_2 = 2$

$$l_n = l_{n-1}l_{n-2} = l_{n-2}l_{n-3}l_{n-2} = (l_{n-2})^2 l_{n-3} = (l_{n-3}l_{n-4})^2 l_{n-3} = (l_{n-4})^2 (l_{n-3})^3 =$$
$$= \ldots = (l_{n-(n-2)})^{F_{n-1}} (l_{n-(n-1)})^{F_{n-2}} = 2^{F_{n-1}} 2^{F_{n-2}} = 2^{F_n}$$

Zadanie 5

Rozwiąż zależności rekurencyjne:

- $a_0 = 1$, $a_n = \frac{2}{a_{n-1}}$
  Zauważmy, że $a_n = n \mod 2 + 1$.

  Dowód. Żeby to udowodnić użyjemy indukcji. Dla a_0 oczywiście działa. Załóżmy więc, że $\forall_{n_0 < n}$ zachodzi wzór $a_{n_0} = n_0 \mod 2 + 1$. Sprawdzimy dla n.

  $$a_n = \frac{2}{(n-1) \mod 2 + 1}$$

  Jeśli n parzyste, to $(n-1) \mod 2 + 1 = 2$, więc $a_n = 1 = 0 + 1 = n \mod 2 + 1$.
  Jeśli n nieparzyste, to $(n-1) \mod 2 + 1 = 1$, więc $a_n = 2 = 1 + 1 = n \mod 2 + 1$. □

- $b_0 = 0$, $b_n = \frac{1}{1+b_{n-1}}$
  Zauważmy (np wolframem), że $b_n = \frac{F_n}{F_{n+1}}$.

  Dowód. Dla b_0 oczywiście działa. Załóżmy więc, że $\forall_{n_0 < n}$ zachodzi wzór $b_{n_0} = \frac{F_{n_0}}{F_{n_0+1}}$. Sprawdzimy dla n.

  $$b_n = \frac{1}{1 + b_{n-1}} = \frac{1}{1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}} = \frac{1}{\frac{F_n + F_{n-1}}{F_n}} = \frac{1}{\frac{F_{n+1}}{F_n}} = \frac{F_n}{F_{n+1}}$$

  □

- $c_0 = 1$, $c_n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i$
  Zauważmy (np wolframem), że $c_n = 2^{n-1}$ dla $n > 0$.

  Dowód. $c_1 = 1$ i więc działa. Załóżmy więc, że $\forall_{n_0<n}$ zachodzi wzór $c_{n_0} = 2^{n_0-1}$. Sprawdzimy dla n.

  $$c_n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i = c_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} c_i \stackrel{def}{=} c_{n-1} + c_{n-1} = 2c_{n-1} \stackrel{zal}{=} 2 * 2^{n-2} = 2^{n-1}$$

  □

- $d_0 = 1$, $d_1 = 2$, $d_n = \frac{(d_{n-1})^2}{d_{n-2}}$
  Zauważmy (np wolframem), że $d_n = 2^n$.

  Dowód. $d_0 = 1$, $d_1 = 2$ więc działa. Załóżmy więc, że $\forall_{n_0<n}$ zachodzi wzór $d_{n_0} = 2^{n_0}$. Sprawdźmy dla n.

  $$d_n = \frac{(d_{n-1})^2}{d_{n-2}} \stackrel{zal}{=} \frac{(2^{n-1})^2}{2^{n-2}} = \frac{2^{2n-2}}{2^{n-2}} = 2^{2n-2-n+2} = 2^n$$

  □

Zadanie 6

Rozwiąż zależności rekurencyjne

- $y_0 = y_1 = 1$, $y_n = \frac{(y_{n-1})^2 + y_{n-2}}{y_{n-1} + y_{n-2}}$
  Zauważmy, że $y_n = 1$.

  Dowód. Dla y_0, y_1 oczywiście działa. Załóżmy więc, że $\forall_{n_0<n}$ zachodzi wzór $y_{n_0} = 1$. Sprawdźmy dla n.

  $$y_n = \frac{(y_{n-1})^2 + y_{n-2}}{y_{n-1} + y_{n-2}} \stackrel{zal}{=} \frac{1^2 + 1}{1 + 1} = \frac{2}{2} = 1$$

  □

- $z_0 = 1$, $z_1 = 2$, $z_n = \frac{(z_{n-1})^2 - 1}{z_{n-2}}$
  Zauważmy, że $z_n = n + 1$.

  Dowód. Dla z_0 oczywiście działa. Załóżmy więc, że $\forall_{n_0<n}$ zachodzi wzór $z_{n_0} = n_0 + 1$. Sprawdźmy dla n.

  $$z_n = \frac{(z_{n-1})^2 - 1}{z_{n-2}} \stackrel{zal}{=} \frac{((n-1)+1)^2 - 1}{(n-2)+1} = \frac{n^2 - 1}{n-1} = \frac{(n-1)(n+1)}{n-1} = n + 1$$

  □

- $t_0 = 0, t_1 = 1, t_n = \frac{(t_{n-1} - t_{n-2} + 3)^2}{4}$
  Zauważmy, że $t_n = n^2$

  Dowód. Dla t_0 oczywiście działa. Załóżmy więc, że $\forall_{n_0<n}$ zachodzi wzór $t_{n_0} = n_0^2$. Sprawdźmy dla n.

  $$t_n = \frac{(t_{n-1} - t_{n-2} + 3)^2}{4} \stackrel{zal}{=} \frac{((n-1)^2 - (n-2)^2 + 3)^2}{4} = \frac{(n^2 - 2n + 1 - n^2 + 4n - 4 + 3)^2}{4} =$$

  $$= \frac{(2n)^2}{4} = \frac{4n^2}{4} = n^2$$

  □

Zadanie 10

Podwójna wieża Hanoi składa się z $2n$ krążków n różnych rozmiarów, po 2 krążki każdego rozmiaru. W jednym kroku przenosimy dokładnie jeden krążek i nie możemy kłaść większego na mniejszym. Ile kroków jest potrzebnych by przenieść wieżę z pręta A na B, gdy krążki równej wielkości nie są rozróżnialne?

To samo co pojedyncza wieża Hanoi, tylko że rekurencja to $H(n) = H(n-1) + 2 + H(n-1)$, bo przenosimy wieżę z $2(n-1)$ klocków na pręt C, potem przenosimy dwa krążki na pręt B (dwa tych samych rozmiarów są nierozróżnialne) i znów wieżę z $2(n-1)$ klocków na pręt B. W ten sposób przenieśliśmy wieżę o $2n$ klockach z A na B. Można pokazać, że rozwiązanie tej rekurencji to $2^{n+1} - 2$.

Dowód. Dla $n = 1$ wzór zachodzi, bo potrzebujemy przenieść dwa klocki na pręt B, co daje nam 2 ruchy. Załóżmy więc, że dla każdego $n_0 < n$ wzór zachodzi, i sprawdźmy dla n.

$$H(n) = H(n-1) + 2 + H(n-1) \stackrel{zal}{=} 2^n - 2 + 2 + 2^n - 2 = 2 \cdot 2^n - 2 = 2^{n+1} - 2$$

□

Zadanie 13

Sprawdź, że liczby harmoniczne $H_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ spełniają zależność rekurencyjną

$$H_n = 1 + \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} H_i$$

dla $n > 1$.

Dowód. Wiemy, że

$$H_n = 1 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} H_i \Leftrightarrow nH_n - n = \sum_{i=1}^{n-1} H_i$$

Pokażę ten wzór indukcyjnie. Dla $n = 2$ oczywiście działa, bo

$$nH_n - n = 2H_n - 2 = 2(1 + \frac{1}{2}) - 2 = 1 = H_1 = \sum_{i=1}^{1} H_i$$

Załóżmy, że $\forall_{n_0<n}$ zachodzi wzór $n_0 H_{n_0} - n_0 = \sum_{i=1}^{n_0-1} H_i$. Sprawdzę dla n.

$$\sum_{i=1}^{n-1} H_i = H_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-2} H_i \stackrel{zal}{=} H_{n-1} + (n-1)H_{n-1} - (n-1) = nH_{n-1} - (n-1) =$$

$$= n(H_{n-1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}) - (n-1) = nH_n - 1 - (n-1) = nH_n - n$$

□