Lista 9

Kamil Matuszewski

5 maja 2016

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Zadanie 1

Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład o gęstości $f(x, y) = 1$. $0 < x, y \leqslant 1$ Znajdź gęstość zmiennej $Z = \frac{X}{Y}$.

Znajdźmy gęstość zmiennej (Z, V) gdzie V jest dowolne (dla ustalenia uwagi $V = Y$). Następnie policzymy całkę po V, otrzymując w ten sposób gęstość Z. Zwróćmy uwagę, że skoro $y \in (0, 1]$, to $V \in (0, 1]$.

$$\begin{cases} V = Y & \Rightarrow \quad Y = V \\ Z = \frac{X}{Y} & \Rightarrow \quad X = ZV \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial Z} & \frac{\partial X}{\partial V} \\ \frac{\partial Y}{\partial Z} & \frac{\partial Y}{\partial V} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} V & Z \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = V$$

$$f(z, v) = f(x, y)J = V$$

Teraz, żeby policzyć jakim wzorem wyraża się Z należy scałkować po V. W tym celu określmy przedziały. Mamy punkt $(z, v) = \left(\frac{x}{y}, y\right)$, gdzie $y \in (0, 1]$ a $x \in [0, 1]$. Łatwo zauważyć, że $z \in [0, \infty)$, a dokładniej $z \in [0, \frac{1}{v})$. Dla $z \in [0, 1]$, $v \in (0, 1]$. Natomiast dla $z \in (1, \infty)$, $v \in (0, \frac{1}{z})$, co łatwo odczytać z wykresu funkcji $y = \frac{1}{x}$. W takim razie mamy dwa przedziały (dwie całki). Dla $z \in [0, 1]$ mamy:

$$\int_0^1 v \; dv = \frac{1}{2}$$

Natomiast dla $z \in (1, \infty)$ mamy:

$$\int_0^{\frac{1}{z}} v \; dv = \frac{1}{2z^2}$$

Stąd:

$$F_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} & dla \quad z \in [0, 1] \\ \frac{1}{2z^2} & dla \quad z > 1 \end{cases}$$

Do zadań 3-6

Zakładamy, że zmienne X_1, X_2, X_3 są niezależne i mają ten sam rozkład ciągły o dystrybuancie $F(x)$ i gęstości $f(x)$. Tworzymy zmienne $X_{(1)} = min\{X_1, X_2, X_3\}$, $X_{(2)}$ to druga co do wielkości wartość, $X_{(3)} = max\{X_1, X_2, X_3\}$. Dodatkowo w zadaniach $5 - 6$ zakładamy, że $X_k \sim U[0, a]$.

Zadanie 3

Znajdź gęstości $f_{(1)}(x)$ oraz $f_{(3)}(x)$.

Policzmy najpierw dystrybuanty.

$$F_{(1)}(x) = P(X_{(1)} < X) = P(min\{X_1, X_2, X_3\} < X) = 1 - P(min\{X_1, X_2, X_3\} > X) =$$
$$= 1 - P(X_1 > X, X_2 > X, X_3 > X) = 1 - P(X_1 > X)P(X_2 > X)P(X_3 > X) =$$
$$= 1 - [(1 - P(X_1 < X))(1 - P(X_2 < X))(1 - P(X_3 < X))] =$$
$$= 1 - ((1 - F(X))(1 - F(X))(1 - F(X))) = 1 - (1 - F(x))^3$$

$$F_{(3)}(x) = P(X_{(3)} < X) = P(max\{X_1, X_2, X_3\} < X) = P(X_1 < X, X_2 < X, X_3 < X) =$$
$$= P(X_1 < X)P(X_2 < X)P(X_3 < X) = (F(x))^3$$

Gęstość to pochodna z dystrybuanty:

$$f_{(1)}(x) = (1 - (1 - F(x))^3)' = 3(1 - F(x))^2 f(x)$$
$$f_{(3)}(x) = ((F(x))^3)' = 3(F(x))^2 f(x)$$

Zadanie 4

Znajdź gęstość $f_{(2)}(x)$.

Ciekawostka - zadania 3 i 4 da się łatwo uogólnić na dowolne n i k. Wychodzi, że dla zmiennych $X_1, \ldots, X_n$ $f_{(k)}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}F(x)^{k-1}(1 - F(x))^{n-k}f(x)$. Możecie sobie sprawdzić, że działa. Może kiedyś będzie mi się chciało spisać ten dowód.

Przejdźmy jednak do zadania. Jak obliczyć $P(X_{(2)} < x)$? Zastanówmy się kiedy środkowa wartość będzie mniejsza od x. No wtedy, kiedy przynajmniej dwie z wartości X_1, X_2, X_3 będą mniejsze od x. Mamy więc:

$$F_{(2)}(x) = P(X_{(2)} < x) = P(X_1 < x)P(X_2 < x)P(X_3 > x) + P(X_1 < x)P(X_3 < x)P(X_2 > x)+$$
$$+P(X_2 < x)P(X_3 < x)P(X_1 > x) + P(X_1 < x)P(X_2 < x)P(X_3 < x) = 3F^2(x)(1 - F(x)) + F^3(x)$$

$$(3F^2(x)(1 - F(x)) + F^3(x))' = 6F(x)f(x)(1 - F(x)) + 3F^2(x)(-f(x)) + 3F^2(x)f(x) =$$
$$= 3f(x)F(x)(2(1 - F(x)) - F(x) + F(x)) = 6f(x)F(x)(1 - F(x))$$

A to już nasza odpowiedź.

Zadanie 5, 6

Niech $Y_1 = \frac{X_1+X_2+X_3}{3}$, $Y_2 = X_{(2)}$, $Y_3 = \frac{X_{(1)}+X_{(3)}}{2}$. Udowodnij, że:

- $E(Y_1) = \frac{a}{2}$.

  Dowód.

$$E(Y_1) = E(\frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}) = \frac{E(X_1) + E(X_2) + E(X_3)}{3} = \frac{3\frac{a}{2}}{3} = \frac{a}{2}$$

□

- $E(Y_2) = \frac{a}{2}$

  Dowód.

  $$f_2(x) = 6F(x)(1 - F(x))f(x)$$

  Mamy rozkład jednostajny, więc $f(x) = \frac{1}{a}$, $F(x) = \frac{x}{a}$.

  $$f_2(x) = \frac{6x}{a}(1 - \frac{x}{a})\frac{1}{a} = \frac{6x(1-\frac{x}{a})}{a^2}$$

  $$E(x) = \int_0^a \frac{6x^2(1-\frac{x}{a})}{a^2}\, dx = \frac{a}{2}$$

  □

- $E(Y_3) = \frac{a}{2}$

  Dowód.

  $$E(Y_3) = E(\frac{X_{(1)} + X_{(3)}}{2}) \stackrel{*}{=} E(\frac{3Y_1 - Y_2}{2}) = \frac{3E(Y_1) - E(Y_2)}{2} = \frac{2\frac{a}{2}}{2} = \frac{a}{2}$$

  * - Spójrzmy, że dodanie maksymalnej i minimalnej wartości to to samo co wzięcie sumy wszystkich i odjęcie wartości środkowej ($X_{(2)} = Y_2$). Suma wszystkich to $3Y_1$. □

- $V(Y_1) = \frac{a^2}{36}$

  Dowód.

  $$V(Y_1) = V(\frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}) = \frac{V(X_1) + V(X_2) + V(X_3)}{9} = \frac{a^2}{36}$$

  Bo $V(X_k) = \frac{a^2}{12}$ (rozkład jednostajny). □

- $V(Y_2) = \frac{a^2}{20}$

  Dowód.

  $$V(Y_2) = E(Y_2^2) - (E(Y_2))^2 = \int_0^a \frac{6x^3(1-\frac{x}{a})}{a^2}\, dx - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{10} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{20}$$

  □

Zadanie 7

Mamy niezależne zmienne losowe $X, Y \sim N(0,1)$. Znajdź gęstość zmiennej (R, Θ), gdzie R i Θ są współrzędnymi biegunowymi (X, Y).

Najpierw, $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$. Zmienne są niezależne, więc $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$. Podstawmy $X = R\cos\Theta, Y = R\sin\Theta$.

$$J = \begin{vmatrix} \cos\Theta & -R\sin\Theta \\ \sin\Theta & R\cos\Theta \end{vmatrix} = r\cos^2\Theta + r\sin^2\Theta = R$$

$$f(R,\Theta)(r,\theta) = r\frac{1}{2\pi}\exp - \frac{r^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}{2} = r\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}$$

Zadanie 8

Zadanie jak poprzednie, tylko szukamy gęstości zmiennej (D, Θ), gdzie $D = R^2$. Mamy też sprawdzić czy D i Θ są niezależne, oraz jaki rozkład ma Θ.

Podobnie jak poprzednio. $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$. Podstawiam $X = \sqrt{D}\cos\Theta$, $Y = \sqrt{D}\sin\Theta$ (bo jedyna różnica z poprzednim zadaniem to to, że $R = \sqrt{D}$).

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\cos\Theta}{2\sqrt{D}} & -\sqrt{D}\sin\Theta \\ \frac{\sin\Theta}{2\sqrt{D}} & \sqrt{D}\cos\Theta \end{vmatrix} = \frac{\cos^2\Theta + \sin^2\Theta}{2} = \frac{1}{2}$$

$$f(D, \Theta)(d, \theta) = \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\exp - \frac{d(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}{2} = \frac{1}{4\pi}e^{-\frac{d}{2}}$$

Sprawdźmy rozkład zmiennej D. W tym celu policzmy całkę po Θ.

$$f_D(d) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi}e^{-\frac{d}{2}}\, d\Theta = \frac{1}{4\pi}e^{-\frac{d}{2}} \int_0^{2\pi} 1\, d\Theta = \frac{1}{2}e^{-\frac{d}{2}}$$

Łatwo zauważyć, że rozkład zmiennej D to rozkład wykładniczy z parametrem $\frac{1}{2}$. Co do zmiennej Θ:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{4\pi}e^{-\frac{d}{2}}\, dd = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\infty} e^{-\frac{d}{2}}\, dd = \frac{1}{2\pi}$$

Teraz:

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2}e^{-\frac{d}{2}} = \frac{1}{4\pi}e^{-\frac{d}{2}}$$

Czyli zmienne są niezależne.

Zadanie 9

Pokaż w pizde nudnych rzeczy.

Typowe zadanie w którym nic się nie dzieje oprócz liczenia. Obliczenia zacznij od podpunktu b w którym wykorzystaj MGF sumy niezależnych zmiennych losowych. Przejdź do podpunktu c gdzie prostym iloczynem wyznacz gęstość zmiennej (X, Y). Podstaw $U = X + Y$ $V = \frac{X}{X+Y}$ czyli $X = UV, Y = U(1 - V)$. Teraz jakobian to U. Podstawiając w tym ogromnym wzorze wszystkie x i y i mnożąc przez u otrzymaj gęstość (U, V). Zcałkuj to po U i otrzymaj gęstość V. Obliczenia nie będą trudne ale długie i nużące. Zabij się przy przepisywaniu tego na tablicę. Zauważ coś sprytnie i dojdź do wzoru z zadania. W podpunkcie a skorzystaj z b i c tj wymóż i sprawdź równość $Gamma(b, p + q) + Beta(p, q) =$ to coś co ci wyszło w gęstości (U, V).

Zadanie 10

Niech zmienne $X_1, \ldots, X_n$ będą niezależne i mają rozkład $Exp(\lambda)$. Niech $Y_i = X_1 + \cdots + X_i$ dla $i = 1, \ldots, n$. Znajdź gęstość $f_{Y_1,\ldots,Y_n}(y_1, \ldots, y_n)$.

Zacznijmy od znalezienia $f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n)$. Długo szukać nie musimy, zmienne są niezależne więc gęstość ta wynosi

$$\lambda^n e^{-\lambda \sum_i^n x_i}$$

Teraz policzmy jakobian przekształcenia. W tym celu spójrzmy jak wyglądają kolejne X_k.

$$X_1 = Y_1$$

$$X_2 + X_1 = Y_2 \Rightarrow X_2 + Y_1 = Y_2 \Rightarrow X_2 = Y_2 - Y_1$$

$$X_3 + X_2 + X_1 = Y_3 \Rightarrow X_3 + Y_2 = Y_3 \Rightarrow X_3 = Y_3 - Y_1$$
$$X_4 + X_3 + X_2 + X_1 = Y_4 \Rightarrow X_4 + Y_3 = Y_4 \Rightarrow X_4 = Y_3 - Y_2$$
$$\vdots$$
$$X_n + \cdots + X_1 = Y_n \Rightarrow X_n + Y_{n-1} = Y_n \Rightarrow X_n = Y_n - Y_{n-1}$$

Jakobian przekształcenia to taka śmieszna macierz z 1 na przekątnej, -1 pod przekątną, i zerami wszędzie indziej. Skoro tak, to jakobian wynosi 1, więc

$$f_{Y_1,\dots,Y_n}(y_1,\dots,y_n) = f_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) = \lambda^n e^{-\lambda \sum_i^n x_i}$$

Teraz spójrzmy na sumę po x_i. Patrząc wyżej łatwo zauważyć, że suma ta wynosi y_n. Mamy więc:

$$f_{Y_1,\dots,Y_n}(y_1,\dots,y_n) = \lambda^n e^{-\lambda y_n}$$

Zadanie 11

Znajdź $f_{Y_n}(y_n)$ dla gęstości z poprzedniego zadania.

Możemy to zrobić trikowo. Skoro chcemy gęstość y_n musimy zrobić całki po wszystkich pozostałych wartościach. dla dowolnego y_i całka będzie na przedziale $[0, y_{i+1}]$. Zauważmy, że gęstość nie zależy od żadnej z tych zmiennych więc możemy ją wyciągnąć przed całki. To co mamy policzyć to $\int_0^{y_n} \int_0^{y_{n-1}} \dots \int_0^{y_2} 1 \; dy_1 \dots \; dy_{n-2} \; dy_{n-1}$. Zacznijmy obliczenia od środka i zauważmy coś. $\int_0^{y_2} 1 \; dy_1 = y_2$. $\int_0^{y_3} y_2 \; dy_2 = \frac{y_3^2}{2}$. Wyciągnijmy $\frac{1}{2}$ przed całki. Mamy $\int_0^{y_4} y_3^2 \; dy_3 = \frac{y_4^3}{3}$. Wyciągnijmy $\frac{1}{3}$. Zauważmy, że będziemy postępować według pewnego schematu. Z każdą całką zwiększamy indeks o 1, potęgę o 1 i licznik o 1 większy niż poprzedni, który wyciągamy przez całkę. W ten sposób otrzymujemy ostatnią całkę: $\int_0^{y_n} y_{n-1}^{n-2} \; dy_{n-1} = \frac{y_n^{n-1}}{n-1}$. Ponownie wyciągnijmy $\frac{1}{n-1}$. W ten sposób wyciągnęliśmy $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n-1}$. Wymnażając wszystkie te ułamki mamy $\frac{1}{(n-1)!}$. Dodatkowo otrzymaliśmy y_n^{n-1}. Pamiętając o gęstości którą wyciągnęliśmy na początku mamy wynik:

$$\lambda^n e^{-\lambda y_n} \frac{y_n^{n-1}}{(n-1)!}$$