① Uwarunkowanie zadania, zadanie algorytm źle uwarunkowany, wskaźnik uwarunkowania, kumulacja błędów

② Miejsca zerowe:

- bisekcja: dla f(x) ciągłej na $[a,b]$ $f(a)f(b)<0$ $\exists_\alpha$: $f(\alpha)=0$, $|\alpha - x_{n+1}| < \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(b-a)$

- metoda Newtona: wyliczanie za pomocą stycznych, $\begin{cases} x_0 \text{ - dane} \\ x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} \end{cases}$
musimy wybrać x_0 blisko α, metoda może stać w miejscu, musimy znać $f'(x)$

- metoda siecznych: wolniejsza niż newtona, poza tym prawie tosamo, ~~x_0, x_1 - dane~~ ~~$x_{n+1} = x_n -$~~
x_0, x_1 - dane
$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$

- rząd metody: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^p} = C$; $p = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log(e_{n+2}) - \log(e_{n+1})}{\log(e_{n+1}) - \log(e_n)}$

$x_{n+1} = F(x_n)$ rząd metody $p \Leftrightarrow F(\alpha) = \alpha$, $F'(\alpha) = F''(\alpha) = \ldots = F^{(p-1)}(\alpha) = 0$; $F^{(p)}(\alpha) \neq 0$

③ Wielomiany:

- postać Newtona: $w(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$

- schemat Hornera: ~~$w(x) = a$~~ $w_n(x) = a_n$; $w_k = w_{k+1}x + a_k$

- wielomiany Czebyszewa: $T_0(x) = 1$; $T_1(x) = x$; $T_k(x) = 2x\,T_{k-1}(x) - T_{k-2}(x)$

• st. $T_n = n$; T_{2n} - parzysta, T_{2n-1} - nieparzysta,

- $x \in [-1,1]$ $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$ $T_n(x) = 0$; $x_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right)$
- postać Czebyszewa: $\sum_{k=0}^{n}{}' c_k T_k(x) = w_n(x)$
- alg. Clenshawa: $w_n(x) = \frac{B_0(x) - B_2(x)}{2}$; $B_{n+2} = B_{n+1} = 0$; $B_k = 2xB_{k+1} - B_{k+2} + c_k$

(4) Interpolacja

- Lagrangea: $L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k(x) y_k$ $\lambda_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$
- Newtona: $L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{f[x_0, \dots, x_k]}_{b_k} p_k(x)$, $p_0(x) = 1$ $p_k(x) = (x-x_0)\dots(x-x_k)$
- Ilorazy różnicowe:

$$\begin{cases} f[x_0] = f(x_0) \\ f[x_0 \dots x_k] = \dfrac{f[x_1 \dots x_k] - f[x_0 \dots x_{k-1}]}{x_k - x_0} \end{cases}$$

x_0	y_0			
x_1	y_1	$f[x_0, x_1]$		
x_2	y_2	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	
$\vdots$				
x_n	y_n	$f[x_{n-1}, x_n]$	- - -	$f[x_0 \dots x_n]$

- Łamodzi wzór: $|f(x) - L_n(x)| \le \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} p_{n+1}$ max na $[-1,1]$ $p_n \le \frac{1}{2^n}$ dla Czebyszewa.

(5) NFS

1° $s_k(x_k) = y_k$ 2° $s_k|_{[x_k, x_{k+1}]} \in \Pi_3$; 3° s, s', s'' - ciągła

$s''(x_0) = s''(x_n) = 0$

⑥ Wielomiany Bernsteina: $p(t) = \sum W_k B_k^n(t)$ $t \in [0,1]$ $W_k \in \mathbb{R}^2$
krzywa Béziera.

$B_k^n(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$ $\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1 \Rightarrow \lambda_0 W_0 + \lambda_1 W_1 + \ldots + \lambda_n W_n$ - punkt

Alg. de Casteljau - znajdow. punktu p(t). Dzielimy wg odp. stosunku.

$W_k^0 = W_k$

$W_k^{(i)} = (1-t) W_k^{(i-1)} + t W_{k+1}^{(i-1)}$

⑦ Aproksymacja

- norma $\|\cdot\|_2$: $\|f\|_2 = \sqrt{\sum (f(x_k))^2}$, $\|f\|_2 \geq 0$ $\|f\|_2 = 0 \Leftrightarrow f(x_k) = 0$

$\|\lambda f\|_2 = |\lambda| \cdot \|f\|_2$ $\|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$

- $\|f - y\|_2^2 = \sum (f(x_k) - y(x_k))^2 = E(a, b, \ldots)$, szukamy min.

$$\begin{cases} \frac{\partial E(a,b,\ldots)}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial E(a,b,\ldots)}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

- iloczyn skalarny $(f,g)_N = \sum_{k=0}^{N} f(x_k) g(x_k)$ *

• $(f,f)_N \geq 0$, $= 0 \Leftrightarrow f(x_k) = 0$; $(\lambda f, g)_N = \lambda (f,g)_N$; $(f+g, h)_N = (f,h)_N + (g,h)_N$

• $(f,g)_N = 0$, to ortogonalne

• ortogonal. Grama-Schmidta
$$\begin{cases} g_0 = f_0, \\ g_k = f_k - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(f_k, g_j)_N}{(g_j, g_j)_N} g_j \end{cases}$$

• wiel. ortogonalne: $P_k \in \Pi_k \setminus \Pi_{k-1}$ $\Pi_{-1} = \emptyset$, $(P_k, P_l)_N = 0$ $k \neq l$; > 0 $k = l$

• ... ortogonalnych: $P_0(x) = 1$ ...

$$y_k = f_k - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(f_k, y_j)_N}{(y_j, y_j)_N} y_j$$

· Wiel. ortogonalne: $P_k \in \Pi_k \setminus \Pi_{k-1}$ $\quad \Pi_{-1} = \emptyset$, $(P_k, P_l)_N = 0$ $k \neq l$; > 0 $k = l$

· Inna ortogonalizacja: $P_0(x) = 1$; $P_1(x) = x - c_1$; $P_k(x) = (x - c_k) P_{k-1}(x) - d_k P_{k-2}$

$$c_k = \frac{(x P_{k-1}, P_{k-1})_N}{(P_{k-1}, P_{k-1})_N} \qquad d_k = \frac{(P_{k-1}, P_{k-1})_N}{(P_{k-2}, P_{k-2})_N}$$

utrzymujemy tylko c_k, ~~dk~~ jak policzyliśmy kiedyś rosta.

· alg. Clenshawa v2: $w_m(x) = \sum a_k Q_k$; $Q_0(x) = \alpha_0$, $Q_1 = (\alpha_1 x - \beta_1) Q_0(x)$, $Q_k(x) = (\alpha_k x - \beta_k) Q_{k-1}(x) - \gamma_k Q_{k-2}(x)$

$B_{m+1} = B_{m+2} = 0$

$B_k = a_k + (\alpha_{k+1} x - \beta_{k+1}) B_{k+1} - \gamma_{k+2} B_{k+2}$ $\quad \alpha, \beta, \gamma$ - znane.

$w_m(x) = \alpha_0 B_0$

$\min \| f(x) - w_m^*(x) \|_2$? $\quad w_n^*(x) = \sum a_k P_k(x)$ $\quad P_k$ - ortog. $\quad a_k = \frac{(f, P_k)_N}{(P_k, P_k)_N}$

$$w_n^*(x) = w_{n-1}(x) + a_n P_n(x)$$

Szereg Taylora:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

③ Kwadratury:

- Liczenie całki $\int_a^b f(x)$ $\quad Q_n(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ $\quad A_k$ - współczynniki

x_k - węzły.

$$I(f) = Q_n(f) + \underbrace{R_n(f)}_{\text{reszta, chcemy by była mała}}$$

- Rząd kwadratury $r \iff Q_n(w) = I(w)$ $w \in \Pi_{r-1}$, $\exists r \in \Pi_r / \Pi_{r-1} : Q_n(r) \neq I(r)$

rząd kw. wynosi $\leq 2n+2$

~~$\forall_n$~~

- Kwadratury interpolacyjne:

$$A_k = \int_a^b \lambda_k(x), \quad R_n(f) = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} p_n \, dx$$

A_k można ztablicować.

Rząd $\geq n+1 \iff$ kw. interpolacyjna.

- Kwadratura Newtona - Cotesa

$$x_k = a + \frac{b-a}{n} k$$

$$A_k = \int_a^b \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x-(a+h_n j)}{h_n(k-j)} \right) \quad A_k = A_{n-k}$$

$$R_n(f) = \begin{cases} \frac{f^{(n+1)}(\lambda)}{(n+1)!} \int_a^b (x-x_0)\dots(x-x_n) & n \text{ np.} \\ \frac{f^{(n+2)}(\beta)}{(n+2)!} \int_a^b (x-x_0)\dots(x-x_n) & n \text{ parz.} \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

$$A_k = \int_a^b \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x-(a+h_n j)}{h_n (k-j)} \right) \quad A_k = A_{n-k}$$

$$\frac{f^{(n+2)}}{(n+2)!} \int_a^b (x-x_0)\cdots(x-x_n) \text{ - parzyste}$$

* Wzory jawne kw. N-C.

$n=1$ - wzór trapezów: $Q_1(f) = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$

$$R_1(f) = -\frac{h_1^3}{12} f''(\eta) \qquad h_1 = b-a$$

$n=2$ - wzór Simpsona: $Q_2(f) = \frac{b-a}{3}[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)]$

$$R_2(f) = -\frac{h_2^5}{90} f^{(4)}(\eta)$$

$n \geq 3$ - niepraktyczne.

(3) Kw. złożone ~~...~~

zł. wzór trapezów: $T_n(f) = h_n \sum'' f(t_k)$

$$R_n^T(f) = (a-b)\frac{h_n^2}{12} f''(\eta)$$

zł. wzór Simpsona: $n=2m$

$$S_n(f) = \frac{h_n}{3}\left[2\sum_{k=0}^{m}{}'' f(t_{2k}) + 4\sum_{k=1}^{m} f(t_{2k-1})\right]$$

$$R_n^S(f) = -(b-a)\frac{h_n^4}{180} f^{(4)}(\eta) = (b-a)^5 \frac{1}{180 n^4} f^{(4)}(\eta)$$

- Metoda Romberga

$n = 2^k$

$T_{0k} = T_{2^k}(f) = h_k \sum_{i=0}^{2^k}{}'' f(x_i)$ - wzór trapezów

$T_{mk} = \frac{4^m T_{m-1,k+1} - T_{m-1,k}}{4^m - 1}$

Kwadratury Gaussa - Legendera

$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

Wybieramy współczynniki w zerach wielomianu

$P_0(x) = 1 \quad P_1(x) = x \quad P_k(x) = \frac{2k-1}{k} x P_{k-1} - \frac{k-1}{k} P_{k-2}(x)$

$x_k = -x_{n-k} \quad A_k = A_{n-k}$, Rząd $Q_n(f) = 2n+2$

$\int_{-1}^{1} \lambda_i(x)$

(10) Macierze! :)

- Rozkład LU: $A = LU$, $Ax = b \Rightarrow LUx = b$

Lz

Ly

$\sum_{n} \lambda_i(x)$

(10) Macierze! :)

- Rozkład LU: $A = LU$, $Ax = b \Rightarrow L\underbrace{Ux}_{y} = B$

$Ly = B$

$Ux = y$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}$$

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \right)$$

- odw. macierzy: $A^{-1} = U^{-1} L^{-1}$ / $LUx_1 = e_1$, $LUx_2 = e_2 \ldots LUx_n = e_n$

n^3. n^3.

- eliminacja w wersji skalarnej: eliminacja gaussa.
- eliminacja w wersji macierzowej.

- Macierz typu m $M^{(r)} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & 0 \\ & & \end{bmatrix}$ tylko pod r-tą jedynką ma współczynn.

$m_{jr} = -\frac{a_{jr}}{a_{rr}}$

$Ax = b$ $A^{(1)}x = b^{(1)}$. $M^{(1)} =$ ↑. $A^{(2)} = M^{(1)} A^{(1)}$, $b^{(2)} = M^{(1)} b^{(1)}$

$A^{(k)} = M^{(k-1)} A^{(k-1)}$, $b^{(k)} = M^{(k-1)} b^{(k-1)}$.

$A^{(n)} - \nabla$, łatwo rozw.