Lista 3

Kamil Matuszewski

13 marca 2016

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	

Zadanie 1

Mamy funkcję $f(x,y) = C(x+y)exp\{-(x+y)\}$, dla $x > 0, y > 0$.

(a) Wyznacz stałą C taką, aby podana wyżej funkcja była gęstością zmiennej (X,Y).

$$\int_0^\infty \int_0^\infty C(x+y)exp\{-(x+y)\}dxdy = 1$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty C(x+y)exp\{-(x+y)\}dxdy = C\int_0^\infty \int_0^\infty (x+y)exp\{-(x+y)\}dxdy =$$
$$= C\int_0^\infty \int_0^\infty (x+y)e^{-x}e^{-y}dxdy = C\int_0^\infty e^{-y}\int_0^\infty (x+y)(-e^{-x})'dxdy =$$
$$= C\int_0^\infty e^{-y}\left(\left[(x+y)(-e^{-x})\right]_0^\infty - \int_0^\infty (-e^{-x})dx\right)dy =$$
$$= C\int_0^\infty e^{-y}\left(0-(-y)+1\right)dy = C\int_0^\infty e^{-y}(y+1)dy =$$
$$= C\left(\left[(-e^{-y})(y+1)\right]_0^\infty - \int_0^\infty (-e^{-y})dy\right) = C\left(1-(-1)\right) = 2C$$
$$2C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

(b) Czy zmienne losowe X,Y są niezależne?

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{1}{2}(x+y)e^{-x}e^{-y}dy = \frac{1}{2}e^{-x}\int_0^\infty (x+y)e^{-y}dy = \frac{1}{2}e^{-x}(x+1)$$
$$f(y) = \int_0^\infty \frac{1}{2}(x+y)e^{-x}e^{-y}dx = \frac{1}{2}e^{-y}(y+1)$$
$$f(x)f(y) \neq f(x,y) \Rightarrow nie$$

.

(c) Policz $m_{10}m_{01}$ i m_{11}

$$m_{pq} = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty x^p y^q f(x,y)dydx$$

$$m_{10} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \int_0^\infty x(x+y)e^{-x}e^{-y}dydx = \frac{1}{2}\int_0^\infty xe^{-x}(1+x)dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty (-e^{-x})'(x+x^2)dx =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\left[-e^{-x}(x+x^2)\right]_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-x}(1+2x)dx\right) = \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty e^{-x}(1+2x)dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[-e^{-x}(1+2x)\right]_0^\infty - \int_0^\infty -2e^{-x}dx\right) = \frac{1}{2}\cdot 3 = \frac{3}{2}$$

Zmienne są symetryczne, więc takimi samymi działaniami mamy $m_{01} = m10 = \frac{3}{2}$.

$$m_{11} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \int_0^\infty xy(x+y)e^{-x}e^{-y}dydx = \frac{1}{2}\int_0^\infty xe^{-x}\int_0^\infty (xy+y^2)e^{-y}dydx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty xe^{-x}\left(\left[-e^{-y}(xy+y^2)\right]_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-y}(x+2y)dy\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty xe^{-x}\left(\int_0^\infty e^{-y}(x+2y)dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty xe^{-x}\left(\left[-e^{-y}(x+2y)\right]_0^\infty - \int_0^\infty -2e^{-y}dy\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty xe^{-x}\left(x - 2\int_0^\infty -e^{-y}dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty xe^{-x}(x+2)dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x}(x^2+2x)dx = \frac{1}{2}\left(\left[-e^{-x}(x^2+2x)\right]_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-x}(2x+2)dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty e^{-x}(2x+2)dx\right) = \frac{1}{2}\left(\left[-e^{-x}(2x+2)\right]_0^\infty - \int_0^\infty -2e^{-x}dx\right) = 1+1 = 2$$

Zadanie 2

Czy można dobrać stałą C tak, że funkcja $f(x,y) = Cxy + x + y$, dla $0 \leqslant x \leqslant 3$, $1 \leqslant y \leqslant 2$ była gęstością?

$$\int_0^3 \int_1^2 Cxy + x + ydydx = 1$$

$$\int_0^3 \int_1^2 Cxy+x+ydydx = \int_0^3 \left(\int_1^2 Cxydy + \int_1^2 xdy + \int_1^2 ydy\right)dx = \int_0^3 \left(Cx\frac{3}{2} + x + \frac{3}{2}\right)dx =$$

$$= C\frac{3}{2}\cdot\frac{9}{2} + \frac{9}{2} + \frac{9}{2} = C\frac{27}{4} + 9 = 1 \Rightarrow C = \frac{-32}{27}$$

Więc $f(x,y) = \frac{-32}{27}xy + x + y$. Czyli, że tak?
OTUSZ NJE!
$f(x,y) \geqslant 0$ - warunek na bycie gęstością. Teraz:
$f(3,2) = \frac{-32}{27}3 * 2 + 3 + 2 = \frac{-19}{9} < 0$, czyli nie.

Zadanie 3

Mamy funkcję $f(x,y) = -xy + x$ dla $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Sprawdzić, czy XY są niezależne.
Robiliśmy podobne w 1.

$$f(x) = \int_0^1 (-xy+x)dy = \int_0^1 xdy - \int_0^1 xydy = [xy]_0^1 - \left[\frac{xy^2}{2}\right]_0^1 = x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2}$$

$$f(y) = \int_0^2 (-xy+x)dx = \int_0^2 (-y+1)xdx = (-y+1)\int_0^2 xdx = -2y+2$$

$$f(x,y) = f(x)f(y) \Rightarrow tak$$

Zadanie 4

Mamy funkcję $f(x,y) = -xy + x$ dla $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Oblicz ppb $P(1 \leqslant X \leqslant 3, 0 \leqslant Y \leqslant 0,5)$.

$$P(1 \leqslant X \leqslant 3, 0 \leqslant Y \leqslant 0,5) = \int_1^2 \int_0^{\frac{1}{2}} (-xy + x) dy dx = \int_1^2 x \int_0^{\frac{1}{2}} (1-y) dy dx =$$

$$= \int_1^2 x \left(\int_0^{\frac{1}{2}} 1 dy - \int_0^{\frac{1}{2}} y dy \right) = \int_1^2 \frac{3}{8} x = \frac{9}{16}$$

Zadanie 5

Załóżmy, że $X \sim U[0,1]$ i niech $Y = X^n$. Udowodnij, że $f_Y(y) = \frac{y^{\frac{1}{n}-1}}{n}$ dla $y \in [0,1]$.
Zwróćmy uwagę, że y jest dodatnie - nie musimy się więc przejmować parzystością n'a.

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(X^n < y) = P(X < \sqrt[n]{y}) = F_X(\sqrt[n]{y})$$

$$f_Y(y) = (F_X(\sqrt[n]{y}))' = \frac{y^{\frac{1}{n}-1}}{n}$$

Czyli to co chcieliśmy pokazać.

Zadanie 6

Niech $G(y), F(x)$ oznaczają dystrybuantę zmiennych losowych Y,X a $g(y), f(x)$ ich gęstość. Mamy:

$$G(y) = P(Y < y) = P(X^2 < y) = P(-\sqrt{y} < y < \sqrt{y}) = P(\sqrt{y}) - P(-\sqrt{y} < y) = F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y})$$

Gęstość to pochodna dystrybuanty:

$$g(y) = (F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}))' = (F(\sqrt{y}))' - (F(-\sqrt{y}))' = \frac{1}{2\sqrt{y}} f(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}} f(-\sqrt{y}) =$$

$$= \frac{f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}$$

A to jest to co mieliśmy pokazać.

Zadanie 7

Zmienna losowa X ma gęstość $f(x) = xe^{-x}$ dla $x \geqslant 0$. Znajdź gęstość zmiennej losowej $Y = X^2$
Korzystając z poprzedniego:

$$g(y) = \frac{f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{y} e^{-\sqrt{y}} - \sqrt{y} e^{-\sqrt{y}}}{\sqrt{y}} = \frac{1}{2} \left(e^{-\sqrt{y}} - e^{-\sqrt{y}} \right)$$

Zadanie 8

Zmienna losowa $X \sim U[-1, 1]$. Znaleźć gęstość $Y = |X|$

Podobnie jak poprzednio? Wygląda jak coś co działa...

$F_Y(y) = P(Y < y) = P(|X| < y) = P(-x > y > x) = P(x < -y) + P(x < y) = F_X(-y) + F_X(y)$

$$f_Y(y) = (F_X(-y) + F_X(y))' = (F_X(-y))' + (F_X(y))' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Zważywszy na to, że $Y \in [0, 1]$, to $Y \sim U[0, 1]$, więc ma jakiś sens.

Zadanie 9

X jest zmienną losową i $Y = F_X(X)$. Udowodnić, że $Y \sim U[0, 1]$.

Nie jestem pewien, ale... No zobaczmy. Dystrybuanta jest zawsze z przedziału $[0, 1]$, więc $Y \in [0, 1]$. Teraz, dla takiego Y, gęstość powinna wynieść 1. No sprawdźmy:

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(F_X(X) < y) = P(X < F_X^{-1}(y)) = F_X(F_X^{-1}(y)) = y$$
$$f_Y(y) = (F_Y(y))' = 1$$

No i działa...