# Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

## Lista zadań nr 7. 14 i 18 kwietnia 2016

W deklaracjach proszę sumować liczbę zadań. Każde z nich jest warte 1.5 pkt.

1. Dana jest $n$-wymiarowa zmienna losowa $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$. Zmienną $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)^T$ określamy następująco:

$$Y_1 = \bar{\mathbf{X}}, \quad Y_k = X_k - \bar{\mathbf{X}} \text{ dla } k = 2, \ldots, n.$$

Znaleźć postać (współczynniki) Jacobianu

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}.$$

2. Dane są zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n$. Udowodnić, że:

$$\sum_{k=1}^{n} (X_k - \mu)^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(X_k - \bar{\mathbf{X}}\right)^2 + n\,(\bar{\mathbf{X}} - \mu)^2. \tag{1}$$

**[Zadania 3–5]** Zakładamy, że niezależne zmienne losowe $X_k$ podlegają rozkładowi $\mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$.

3. Wyznaczyć rozkład zmiennych:
   (a) $T_k = \left(\dfrac{X_k - \mu}{\sigma}\right)^2$,
   (b) $Z = \sum_{k=1}^{n} T_k$.

   Objaśnienie: "MGFy" plus rozpoznanie rozkładu.

4. Znaleźć (wraz z uzasadnieniem) rozkład zmiennej $M = \dfrac{n}{\sigma^2} \cdot (\bar{\mathbf{X}} - \mu)^2$

5. Załóżmy, że zmienne $\bar{\mathbf{X}} = \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$ oraz $S^2 = \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(X_k - \bar{\mathbf{X}}\right)^2$ są niezależne. Korzystając z równania (1) udowodnić, że $\dfrac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \equiv \text{Gamma}\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{n-1}{2}\right)$

6. $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x}\, dx$. Wykazać, że $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.
   Wskazówka: Podstawienie $y = \sqrt{2x}$.

7. Rozpatrujemy **niezależne** zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n$ podlegające rozkładowi Poisson$(\lambda)$. Jaka jest najbardziej prawdopodobna wartość parametru $\lambda$, jeżeli zanotowaliśmy, że $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$.

Witold Karczewski