Lista 12

Kamil Matuszewski

16 stycznia 2016

1	2	3	4	5	6	7
✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Zadanie 1

Chcielibyśmy policzyć całkę $\int_a^b f(x)dx$, ale możemy liczyć tylko całkę $\int_0^1$. W rzeczywistości wystarczy wykorzystać całkowanie przez podstawienie, aby policzyć odpowiednio zmodyfikowaną całkę.

$$\int_a^b f(x)dx = \begin{cases} y = \frac{x-a}{b-a} \\ dy = \frac{1}{b-a}dx \end{cases} = \int_0^1 f(y)\cdot(b-a)dy$$

A to jest to co chcieliśmy zrobić.

Zadanie 2

Chcielibyśmy pokazać, że kwadratura w postaci $Q_n(f) = \sum\limits_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ ma rząd $\geqslant$ n+1 $\Leftrightarrow$ gdy jest kwadraturą interpolacyjną.

Kwadratura interpolacyjna $\Rightarrow$ rząd $n+1$

Dowód. Weźmy dowolny wielomian W stopnia n. Z jednej strony mamy:

$$I(x) = \int_a^b W(x)$$

Wiemy, że kwadratura jest interpolacyjna, więc zachodzi:

$$\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) = \int_a^b L_n(x)$$

Gdzie L_n jest wielomianem Lagrange'a stopnia n. Z jednoznaczności interpolacji, wiemy, że L_n interpolujący wielomian stopnia n w n+1 punktach musi być wielomianem W. Stąd, z drugiej strony mamy:

$$\int_a^b L_n(x) = \int_a^b W(x)$$

Wiemy też, że $R(x) = \int_a^b W(x) - \int_a^b L_n(x) = 0$, tak więc kwadratura jest rzędu co najmniej n+1. $\square$

Rząd kwadratury co najmniej $n+1 \Rightarrow$ Kwadratura interpolacyjna

Dowód. Załóżmy, że rząd kwadratury jest co najmniej n+1. Rozważmy wielomian Lagrange'a w węzłach kwadratury. Dla dowolnego $f(x)$, zachodzi

$$f(x) = L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\lambda_i$$

gdzie

$$\lambda_i(x) = \prod_{k=0 \wedge k \neq i}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

Jak łatwo zauważyć, $\lambda_i(x_k) = 0$ gdy $i \neq k$ oraz $\lambda_i(x_k) = 1$ gdy $i = k$.
Zapiszmy teraz naszą kwadraturę rzędu co najmniej n+1 od wielomianu λ_i, wykorzystując powyższą obserwację.

$$Q(\lambda_i) = \int_a^b \lambda_i = \sum_{k=0}^{n} A_k \lambda_i(x_k) = A_i$$

Bo stopień λ_i pozwala na zapisanie tej całki w postaci kwadratury bez żadnej reszty. Teraz, rozpatrzmy kwadraturę naszej pierwotnej funkcji, wykorzystując to co zapisaliśmy powyżej.

$$Q(f) = \int_a^b f(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

Gdzie $A_k = \int_a^b \lambda_k(x)dx$
Co oznacza, że mamy do czynienia z kwadraturą interpolacyjną.

□

Zadanie 3

Chcielibyśmy pokazać, że rząd kwadratury w postaci $Q_n(f) = \sum\limits_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ nie przekracza 2n+2.

W tym celu zbudujemy wielomian rzędu 2n+2 dla którego nie zachodzi $\int_a^b f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$

Weźmy funkcję $f(x) = ((x - x_0) \dots (x - x_n))^2$
Jest ona rzędu $2n + 2$. Teraz mamy:

$$\int_a^b f(x) > 0$$

Bo dla dowolnego x $f(x) \geqslant 0$, dla większości x zachodzi $f(x) > 0$ (równość zachodzi tylko dla miejsc zerowych).
Z drugiej strony mamy:

$$\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) = 0$$

Bo x_k są miejscami zerowymi wielomianu. Widać więc, że ta kwadratura nie jest dokładna (powyższa równość nie zachodzi).

Zadanie 4

Chcielibyśmy uprościć wzór interpolacyjny Lagrange'a, dla węzłów równoodległych. Nasz wzór interpolacyjny wygląda tak:

$$\sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j=0 \wedge j \neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Podstawiając $x_k = a + \frac{b-a}{n}k$ mamy:

$$\sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j=0 \wedge j \neq i}^{n} \frac{x - (a + \frac{b-a}{n}j)}{(a + \frac{b-a}{n}i) - (a + \frac{b-a}{n}j)} = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j=0 \wedge j \neq i}^{n} \frac{x - a - \frac{b-a}{n}j}{\frac{b-a}{n}(i-j)}$$

Jeśli wprowadzimy $h = \frac{b-a}{n}$ otrzymamy:

$$\sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j=0 \wedge j \neq i}^{n} \frac{x - a - hj}{h(i-j)}$$

Dzięki temu licząc ten iloczyn nie musimy znać x'ów. Wartość iloczynu zależy tylko od przedziału na którym liczymy. Przy liczeniu wielu funkcji na tym samym przedziale może się to okazać przydatne.

Zadanie 5

Najpierw, współczynniki metody N-C to $\int_a^b \frac{x-a-hj}{h(i-j)}$. Nas jednak interesuje x, taki, że $x = a + th$. Musimy więc całkować po zmiennej t, a to wiąże się z podstawieniem a za razem i zmianą granicy całkowania.

$$\int_a^b L_n(x)dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \prod_{j=0 \wedge j \neq k}^{n} \frac{x - a - hj}{h(k-j)}$$

Wiemy, że $x = a + th \Rightarrow t = \frac{x-a}{h}$. Dla $a = x_0$ $t = 0$, dla x_1 $t = 1$, $\ldots$, dla $b = x_n$ $t = n$, a $dt = (\frac{x-a}{h})' = \frac{1}{h}dx \Rightarrow dx = hdt$ tak więc:

$$\int_a^b L_n(x)dx = \int_0^n \sum_{k=0}^{n} f(x_k = a + kh) \prod_{j=0 \wedge j \neq k}^{n} \frac{a + th - a - hj}{h(k-j)} hdt = \sum_{k=0}^{n} f(x_i)h \int_0^n \prod_{j=0 \wedge j \neq k}^{n} \frac{t-j}{k-j}dt$$

Tak więc,

$$A_k = h \int_0^n \prod_{j=0 \wedge j \neq k}^{n} \frac{t-j}{k-j}dt$$

Teraz, twierdzę, że $A_k = A_{n-k}$.

Dowód.

$$A_k = h \int_0^n \prod_{j=0 \wedge j \neq k}^{n} \frac{t-j}{k-j}dt$$

$v = n - t$, $dt = -dv$

$$A_k = -h \int_n^0 \prod_{j=0 \wedge j \neq k}^{n} \frac{n-v-j}{k-j}dv$$

$$A_k = h \int_0^n \prod_{j=0 \wedge j \neq k}^{n} \frac{n-j-v}{(n-j)-(n-k)}dv$$

$v' = n - j$

$$A_k = h \int_0^n \prod_{v'=0 \wedge v' \neq (n-k)}^{n} \frac{v'-v}{v'-(n-k)}dv$$

$$A_k = h\int_0^n \prod_{v'=0 \wedge v' \neq (n-k)}^{n} \frac{v-v'}{(n-k)-v'}dv$$

$$A_k = h\int_0^n \prod_{v'=0 \wedge v' \neq (n-k)}^{n} \frac{t-v'}{(n-k)-v'}dt = A_{n-k}$$

$$A_k = A_{n-k}$$

(Dla ułatwienia zapis ten jest równoważny z tym, gdy j'=v' a k'=n-k)

$$A_k = h\int_0^n \prod_{j'=0 \wedge j' \neq k'}^{n} \frac{t-j'}{k'-j'}dt = A_{k'} = A_{n-k}$$

$\square$

Zadanie 6

Pokaż, że $\frac{A_k}{b-a}$ dla $k = 0, \ldots, n$ są wymierne.

Dowód.

$$A_k = h\int_0^n \prod_{j=0 \wedge j \neq k}^{n} \frac{t-j}{k-j}dt$$

$$\frac{A_k}{b-a} = \frac{h}{b-a}\int_0^n \prod_{j=0 \wedge j \neq k}^{n} \frac{t-j}{k-j}dt = \frac{1}{n}\int_0^n \prod_{j=0 \wedge j \neq k}^{n} \frac{t-j}{k-j}dt$$

Teraz, $\frac{1}{k-j}$ nas nie interesuje. W rzeczywistości po policzeniu iloczynu z tego ułamka, wyjdzie nam jakaś liczba $\frac{1}{a}$, gdzie a jest liczbą całkowitą, więc to jest wymierne. Podobnie, $\frac{1}{n}$. Musimy jedynie sprawdzić, czy nasza całka $\int_0^n \prod_{j=0 \wedge j \neq k}^{n}(t-j)dt$ jest liczbą wymierną. Rozpiszmy to sobie wprost. Mamy:

$$\int_0^n (t(t-1)(t-2)\ldots(t-k-1)(t-k+1)\ldots(t-n))\,dt$$

Możemy to zapisać w bazie wielomianowej:

$$\int_0^n \left(a_{n-1}t^{n-1} + a_{n-2}t^{n-2} + \ldots a_0\right)dt = \int_0^n a_{n-1}t^{n-1}dt + \cdots + \int_0^n a_0 dt = -a_{n-1}\frac{n^n}{n} - a_{n-2}\frac{n^{n-1}}{n-1} \cdots - a_0\frac{n^1}{1}$$

Skoro wszystkie n i a_i są całkowite, to cała całka jest wymierna. Skoro tak to całe wyrażenie jest wymierne. $\square$

Zadanie 7

Jakieś gówniane obliczenia, nie robię.