Lista 7

Kamil Matuszewski

13 kwietnia 2016

1	2	3	4	5	6	7
✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Zadanie 1

Mamy n-wymiarową zmienną $X = (X_1, \ldots, X_n)^T$. Zmienną $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)^T$ określamy następująco:

$$Y_1 = \overline{X},\ Y_k = X_k - \overline{X}\ dla\ k = 2, \ldots, n$$

. Znaleźć Jakobian przekształcenia.

Najpierw

$$X_k = Y_k + Y_1,\ dla\ k = 2, \ldots, n$$

$$nY_1 = \sum_{k=1}^{n} X_k \Rightarrow nY_1 = X_1 + X_2 + \cdots + X_n = X_1 + (Y_2 + Y_1) + (Y_3 + Y_1) + \cdots + (Y_n + Y_1) \Rightarrow X_1 = Y_1 - Y_2 - Y_3 - \cdots - Y_n$$

Stąd, mamy Jakobian:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \ldots & -1 \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & & 1 & & \\ 1 & & & \ddots & \\ 1 & & & & 1 \end{vmatrix}$$

Którego wyznacznik już liczyliśmy.

Zadanie 2

Pokaż, że $\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k-\mu)^2=\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k-\overline{X})^2+n(\overline{X}-\mu)^2$

Dowód.

$$\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu)^2=\sum_{k=1}^{n}(X_k-\overline{X}+\overline{X}-\mu)^2=\sum_{k=1}^{n}\left((X_k-\overline{X})^2+(\overline{X}-\mu)^2+2(X_k-\overline{X})(\overline{X}-\mu)\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(X_k-\overline{X})^2+n(\overline{X}-\mu)^2+2(\overline{X}-\mu)\left(\sum_{k=1}^{n}(X_k-\overline{X})\right)=\sum_{k=1}^{n}(X_k-\overline{X})^2+n(\overline{X}-\mu)^2+2(\overline{X}-\mu)\left(\sum_{k=1}^{n}X_k-\sum_{k=1}^{n}\overline{X}\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(X_k-\overline{X})^2+n(\overline{X}-\mu)^2+2(\overline{X}-\mu)\left(n\cdot\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}X_k-n\overline{X}\right)=\sum_{k=1}^{n}(X_k-\overline{X})^2+n(\overline{X}-\mu)^2+2(\overline{X}-\mu)\cdot 0=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(X_k-\overline{X})^2+n(\overline{X}-\mu)^2$$

□

Zadanie 3

Wyznacz rozkład zmiennych:

(a) $T_k=\left(\frac{X_k-\mu}{\sigma}\right)^2$

Po kolei. $M_{X_k}(t)=e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$, $M_{\frac{1}{\sigma}X_k}(t)=e^{\mu\frac{t}{\sigma}+\frac{1}{2}t^2}$, $M_{\frac{1}{\sigma}X_k}(t)=e^{\mu\frac{t}{\sigma}+\frac{1}{2}t^2}e^{-\frac{\mu}{\sigma}t}=e^{\frac{1}{2}t^2}\sim N(0,1)$
Mamy więc $Z\sim N(0,1)$, więc, z wykładu $Z^2\sim\chi^2(1)$

(b) Fakt z listy 5: dla rozkładu $Gamma(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ MGF to $(1-2t)^{-\frac{1}{2}}$.Wtedy, $M_Z(t)=(1-2t)^{-\frac{n}{2}}\sim Gamma(\frac{1}{2},n)\equiv\chi^2(n)$

Zadanie 4

Znajdź rozkład zmiennej $A=\frac{n}{\sigma^2}(\overline{X}-\mu)^2=(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\overline{X}-\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\mu)^2$

$$M_{X_k}(t)=e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$$

$$M_{\sum\limits_{k=1}^{n}X_k}(t)=e^{n\mu t+\frac{n}{2}\sigma^2t^2}$$

$$M_{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k}(t)=M_{\overline{X}}=e^{\mu t+\frac{1}{2n}\sigma^2t^2}$$

,

$$M_{\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\overline{X}}=e^{\mu\frac{\sqrt{n}}{\sigma}t+\frac{1}{2n}\sigma^2\frac{n}{\sigma^2}t^2}=e^{\mu\frac{\sqrt{n}}{\sigma}t+\frac{1}{2}t^2}$$

$$M_{\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\overline{X}-\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\mu}=e^{\mu\frac{\sqrt{n}}{\sigma}t+\frac{1}{2}t^2}e^{-\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\mu t}=e^{\frac{1}{2}t^2}\sim N(0,1)$$

Ponownie, niech $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\overline{X}-\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\mu=Z$, wtedy $Z\sim N(0,1)\Rightarrow Z^2\sim\chi^2(1)$, a $Z^2=A$, więc to nasz wynik.

Zadanie 5

Udowodnij, że $\frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, zakładając, że S^2 i $\overline{X}$ są niezależne.

Dowód. Spójrzmy na równanie, które pokazaliśmy w zadaniu 2.

$$\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu)^2 = \sum_{k=1}^{n}(X_k-\overline{X})^2 + n(\overline{X}-\mu)^2$$

Zauważmy, że wyrażenie $\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k-\overline{X})^2$ to nS^2, skoro tak, to podzielmy stronami przez σ^2, by otrzymać to o co nas pytają.

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu)^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k-\overline{X}\right)^2 + \frac{n}{\sigma^2}\left(\overline{X}-\mu\right)^2$$

Skoro S^2 i $\overline{X}$ są niezależne, mogę zapisać, że:

$$M_{\frac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k-\mu)^2} = M_{\frac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(X_k-\overline{X}\right)^2} M_{\frac{n}{\sigma^2}\left(\overline{X}-\mu\right)^2} \Rightarrow M_{\frac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(X_k-\overline{X}\right)^2} = \frac{M_{\frac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k-\mu)^2}}{M_{\frac{n}{\sigma^2}\left(\overline{X}-\mu\right)^2}}$$

Albo, inaczej, z notacją z poprzednich zadań (A to jest M z zadania 4, zmieniłem oznaczenie żeby się nie jebało):

$$M_{\frac{nS^2}{\sigma^2}} = \frac{M_Z}{M_A}$$

Z poprzednich zadań, mamy:

$$M_{\frac{nS^2}{\sigma^2}} = \frac{(1-2t)^{-\frac{n}{2}}}{(1-2t)^{-\frac{1}{2}}} = (1-2t)^{-\frac{n-1}{2}} \sim Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right) \equiv \chi^2(n-1)$$

□

Zadanie 6

Wykaż, że $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

Dowód.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$$

Niech $y = \sqrt{2x} \Rightarrow x = \frac{1}{2}y^2$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx = \begin{cases} y = \sqrt{2x} & \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}y^2 \\ dy = \frac{1}{\sqrt{2x}}dx \end{cases} = \sqrt{2}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}y^2}$$

Teraz, trikowo zapiszmy sobie

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}y^2}dy\sqrt{2}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}z^2}dz = 2\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(y^2+z^2)}\,dy\,dz$$

Coś nam to przypomina, prawda? Jeśli tak, to bardzo dobrze. Jeśli nie, to bardzo źle. Robiliśmy coś podobnego tydzień temu.

Podobnie jak w zadaniu 4 z listy 6 zmieniamy to na współrzędne biegunowe, i liczymy jakobian przekształcenia. To będzie praktycznie to samo, z drobną poprawką. θ będzie tym razem z przedziału $[0, \frac{1}{2}\pi]$. Jak widzimy, niewiele nam to zmieni. Okaże się, że ta podwójna całka to $\frac{1}{2}\pi$, więc:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2 \cdot \frac{1}{2}\pi = \pi \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$\square$

Zadanie 7

Rozpatrzmy niezależne zmienne losowe $X_1 \dots X_n$ z rozkładem $Poisson(\lambda)$. Jaka jest najbardziej prawdopodobna wartość λ, jeśli zanotowaliśmy, że $X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$?

Po pierwsze, mamy rozkład Poissona, więc:

$$P(X_k = x_k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x_k}}{\lambda_k!}$$

Zmienne są niezależne, więc:

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1)P(X_2 = x_2)\dots P(X_n = x_n) = e^{-\lambda n}\frac{\lambda^{\sum x_k}}{\prod x_k} = e^{-\lambda n}\frac{\lambda^{n\overline{x}}}{\prod x_k} = L(\lambda)$$

Szukamy maksimum funkcji, czyli chcemy, by pierwsza pochodna się zerowała. Logarytm nie wpływa na monotoniczność funkcji, możemy więc zapisać:

$$\log L(\lambda) = -\lambda n + n\overline{X}\log\lambda - \log\prod x_k!$$

Liczymy pierwszą pochodną po λ i przyrównujemy do 0:

$$-n + n\overline{X}\frac{1}{\lambda} = 0 \Rightarrow \frac{\overline{x}}{\lambda} = 1 \Rightarrow \hat{\lambda} = \overline{x}$$

Co jest naszą odpowiedzią.