Lista 7

Kamil Matuszewski

30 listopada 2015

1	2	3	4	5	6	7	8
X	D	X		X	?	X	D

Gdzie X-spisane, D-Deklarowane, N-niedeklarowane.

Zadanie 1

Wiemy, że wzór na pochodną p_{n+1} to $\sum_{i=0}^{n}(x_k - x_i)' \cdot \prod_{j=0;j\neq i}^{n}(x_k - x_j) = \sum_{i=0}^{n}\prod_{j=0;j\neq i}^{n}(x_k - x_j)$
Uzbrojeni w tą wiedzę, możemy zapisać, że:
$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\frac{p_{n+1}(x)}{(x-x_k)p'_{n+1}(x_k)} = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}{\sum_{i=0}^{n}\prod_{j=0;j\neq i}^{n}(x_k-x_j)}$
Teraz zauważmy, że dolna suma, będzie niezerowa dla i=k, dla wszystkich pozostałych elementów będzie to po prostu 0, stąd możemy zapisać:
$\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\frac{\prod_{i=0;i\neq k}^{n}(x-x_i)}{\prod_{j=0;j\neq k}^{n}(x_k-x_j)}$
Teraz, nie ważne czy najpierw pomnożymy czy podzielimy, możemy więc zapisać te równanie w inny sposób:
$\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\prod_{i=0;i\neq k}^{n}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}$
A to już jest dokładnie definicja wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a.

Zadanie 2

a)

x_k	-2	-1	0	1
y_k	1	0	1	-2

x_k	$f(x_k)$			
-2	1			
-1	0	-1		
0	1	1	1	
1	-2	-3	-2	-1

$L_n(x) = 1 - (x+2) + (x+2)(x+1) - (x+2)(x+1)x$

b)

x_k	1	2	-1	-2	0
y_k	-2	9	0	1	1

x_k	$f(x_k)$				
1	-2				
2	9	11			
-1	0	3	4		
-2	1	-1	1	1	
0	1	0	1	0	1

$$L_n(x) = -2 + 11(x-1) + 4(x-1)(x-2) + (x-1)(x-2)(x+1) + (x-1)(x-2)(x+1)(x+2)$$

Zadanie 3

Z definicji rekurencyjnej:
$$\begin{cases} f[x_i] = f(x_i) \\ f[x_0 \cdots x_k] = \frac{f[x_1 \cdots x_k] - f[x_0 \cdots x_{k-1}]}{x_k - x_0} \end{cases}$$
Widzimy, że jeśli znamy dwa wcześniejsze ilorazy różnicowe, potrzebujemy tylko jednego dzielenia i dwóch odejmowań (dla k¿1). Wiemy też, że możemy zrobić to metodą tabelkową. Mamy wtedy:

	k=0	k=1	$\cdots$	k=n
x_0	$f(x_0)$			
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$		
$\cdots$			$\cdots$	
x_n	$f(x_n)$	$f[x_{n-1}, x_n]$		$f[x_0 \cdots x_n]$

Teraz, obliczmy ilość dzieleń potrzebną do wypełnienia tabeli dla n:
$D(0) = 0$ bo mamy 0 dzieleń dla każdej wartości.
$D(1) = 1$ bo potrzebujemy tylko $f[x_0, x_1]$
$D(n) = D(n-1) + n$ bo obliczamy wszystkie ilorazy różnicowe dla n-1, i doliczamy do tego nty wiersz za pomocą n ilorazów różnicowych.
Rozwiązując tą zależność otrzymujemy:
$D(n) = \frac{(1+n)*n}{2}$
Odejmowań jest zawsze dwa razy więcej, stąd:
$S(n) = 2D(n) = (1+n)*n$

Zadanie 5

Wiemy, że zachodzi wzór:
$|f(x) - L_n(x)| \leqslant \frac{||f^{(n+1)}(\eta)||}{(n+1)!} \cdot max_{x\in[a,b]|p_{n+1}|}$
Teraz, wiemy, że skoro naszą funkcją jest sinus, to $||f^{(n+1)}(x)|| = \pm 2^{n+1}\sin(2x)\backslash\cos(2x)$
A $\sin(2x)$ i $\cos(2x)$ są zawsze $\leqslant 1$. Dodatkowo, węzły są równoodległe a x jest brany z przedziału $[0,1]$, stąd $p_{n+1} \leqslant 1$ $|f(x) - L_n(x)| \leqslant \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$
Teraz:
$\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \frac{1}{10^4} \Leftrightarrow n \geqslant 10$

Zadanie 6

$||f^{(n+1)}(x)|| \leqslant \frac{n!}{x^{n+1}}$
Węzły losowe, x musi być z przedziału [1,2], tak samo jak x_i, tak więc $(x - x_i) \leqslant 1$, więc $p_{n+1} \leqslant 1$, skoro tak, to:
$|f(x) - L_n(x)| \leqslant \frac{n!}{(n+1)!1^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)1^{n+1}} \leqslant \frac{1}{10^3}$
$(n+1) \cdot 1 \geqslant 10^3 \Leftrightarrow n \geqslant 999$

Zadanie 7

$||f^{(n+1)}(\pm 1)|| = e$
$p_{n+1} \leqslant \frac{1}{2^n}$
$\frac{e}{(n+1)! \cdot 2^n} \leqslant \frac{1}{10^5} \Leftrightarrow n \geqslant 6$

Zadanie 8

WYMACHAJ