

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Lista zadań nr 8 21 i 25 kwietnia 2016

1. Pociągi do miejscowości A odjeżdżają co 10 minut, rozpoczynając od 7.00. Pociągi do miejscowości B odjeżdżają co 15 minut, rozpoczynając od 7.05. Pasażer P_1 przychodzi na stację w czasie o rozkładzie jednostajnym pomiędzy 7.00 a 8.00; pasażer P_2 przychodzi na stację w czasie o rozkładzie jednostajnym pomiędzy 7.10 a 8.10. Jakie jest ppb, że pasażer P_1 dojedzie do A? Jakie jest ppb, że pasażer P_2 dojedzie do A?

2. Zmienna losowa X ma dyskretny rozkład jednostajny

$$P(X = i) = \frac{1}{100}, \quad i \in \{1, 2, \dots, 99, 100\}.$$

Zmienne losowe Y oraz Z określone są następująco

$$Y = \begin{cases} 1, & 2|X \vee 3|X, \\ 0, & \text{wpw}, \end{cases} \quad Z = \begin{cases} 1, & 3|X, \\ 0, & \text{wpw}. \end{cases}$$

Znaleźć wartość współczynnika korelacji ρ zmiennych Y i Z . (Odp.: $\rho = \frac{33}{67}$)

[Do zadań 2–4] Boki prostokąta są niezależnymi zmiennymi losowymi X_1 i X_2 o rozkładzie $U[1; 2]$. $Y_1 = 2X_1 + 2X_2$ jest obwodem tego prostokąta, $Y_2 = X_1X_2$ oznacza pole tego prostokąta.

3. Znaleźć wartości oczekiwane i wariancje zmiennych Y_1, Y_2 . (Odp.: 6, $2/3$ dla Y_1 , $9/4$, $55/144$ dla Y_2).
4. Obliczyć wartość współczynnika korelacji ρ zmiennych Y_1, Y_2 . (Odp.: $\frac{3\sqrt{330}}{55}$).
5. Ze zbioru n -elementowego wybieramy losowo niepusty podzbiór (każdy z podzbiorów jest jednakowo prawdopodobny). Wartością zmiennej losowej X jest liczba elementów wylosowanego podzbioru. Wykazać, że $E(X) = \frac{n}{2 - (.5)^{n-1}}$.
6. Załóżmy, że zmienna losowa X ma rozkład Beta(p, q). Wykazać, że $E(X) = \frac{p}{p+q}$,
 $V(X) = \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}$.
7. Metodą największej wiarygodności znaleźć estymator parametru λ rozkładu Poissona.
8. Znaleźć estymator parametru p w rozkładzie Bernoulliego $B(n, p)$.
9. Metodą NW znaleźć estymator parametru θ rozkładu jednostajnego na przedziale $[\theta - a; \theta + a]$, przy założeniu, że znana jest wartość parametru a .
10. Metodą NW znaleźć estymator parametru θ rozkładu jednostajnego na przedziale $[\theta - a; \theta + a]$, przy założeniu, że nie jest znana wartość parametru a .
11. Niezależne zmienne X_1, \dots, X_5 mają ten sam, ciągły, rozkład. Oznaczmy przez p prawdopodobieństwo $P(X_1 < X_2 > X_3 < X_4 > X_5)$. Wykazać, że p nie zależy od gęstości rozkładu $f(x)$ zmiennych X_k . Obliczyć wartość p .