Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Lista zadań nr 1. 29 lutego i 25 lutego (3 marca)

<u>Def. 1.</u> Niepusty zbiór Ω nazywamy **przestrzenią zdarzeń**.

<u>Def. 2.</u> Rodzinę podzbiorów $\Sigma \subset 2^{\Omega}$ nazywamy **σ-ciałem zbiorów** wtedy i tylko wtedy gdy

1. $\overline{\overline{\Sigma}} > 0$.
2. $A \in \Sigma \ \Rightarrow A^C \in \Sigma$.
3. $A_1, A_2, \ldots \in \Sigma \ \Rightarrow \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \Sigma$.

<u>Def. 3.</u> Funkcję $P : \Sigma \to [0,1]$ nazywamy **prawdopodobieństwem** wtedy i tylko wtedy gdy

1. $P(\Omega) = 1$.
2. $A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j \ \Rightarrow P\left(\bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \sum\limits_{k \in \mathbb{N}} P\left(A_k\right)$.

<u>Def. 4.</u> Układ (Ω, Σ, P) nazywamy **przestrzenią probabilistyczną**.

<u>Def. 5.</u> Niech (Ω, Σ, P) będzie przestrzenią probabilistyczną. Funkcję $X : \Omega \to \mathbb{R}$ nazywamy **zmienną losową** wtedy i tylko wtedy gdy

$$\forall\, a \in \mathbb{R} \quad X^{-1}((-\infty, a]) \in \Sigma.$$

<u>Def. 6.</u> **Funkcją beta** nazywamy wyrażenie

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}\,(1-t)^{q-1}\,dt, \quad p > 0,\ q > 0.$$

<u>Def. 7.</u> **Funkcją gamma Eulera** nazywamy wyrażenie

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} t^{p-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,dt, \quad p > 0.$$

Zadania

1. Niech Σ będzie σ-ciałem zbiorów.
   (a) Sprawdzić, że $\Omega \in \Sigma$.
   (b) Załóżmy, że $A_k \in \Sigma$, dla $k = 1, 2, 3, \ldots$. Wykazać, że $\bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \Sigma$.

2. Niech $\Omega = \{a, b, c\}$. Opisać σ-ciała zbiorów tej przestrzeni zdarzeń.

3. Niech $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$, $S = \{1,3\}$. Wyznaczyć najmniejsze σ-ciało zbiorów zawierające S.
4. Niech $\Omega = \{a,b,c\}$. Podać przykład funkcji X, Y takich, że X jest zmienną losową, a Y nie jest zmienną losową.
5. Dystrybuanta F zmiennej losowej X określona jest następująco:

x	$(-\infty;-2]$	$(-2;3]$	$(3;5]$	$(5;\infty)$
$F(x)$	0	0.2	0.7	1

Znaleźć funkcję prawdopodobieństwa (gęstość) $f(x)$ i wartość oczekiwaną EX tej zmiennej.

6. Zmienna X ma rozkład Bernoulliego z parametrami n,p ($X \sim B(n,p)$). Sprawdzić, że:
$\sum_{k=0}^{n} p_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k\,(1-p)^{n-k} = 1, \quad \mathrm{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = np.$
7. Zmienna X ma rozkład Poissona z parametrem λ. Sprawdzić, że
$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} = 1, \quad \mathrm{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda.$$

W zadaniach 8–10 zakładamy, że wszystkie występujące zmienne losowe mają rozkład dyskretny.

8. Niech X będzie zmienną losową. Udowodnić, że $\mathrm{E}(aX+b) = a\,\mathrm{E}(X) + b$.
9. Udowodnić, że $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (EX)^2$.
10. Wykazać, że $\mathrm{V}(aX+b) = a^2\,\mathrm{V}(X)$.
11. Wykazać, że $\Gamma(n) = (n-1)!, \quad n \in \mathbb{N}$.
12. Sprawdzić, że
    (a) $B(p,q+1) = B(p,q)\,\dfrac{p}{p+q}$,
    (b) $B(p,q) = B(p,q+1) + B(p+1,q)$.

13–14. Udowodnić, że $\Gamma(p)\,\Gamma(q) = \Gamma(p+q)\,B(p,q)$.

Witold Karczewski