Lista 6

Kamil Matuszewski

23 listopada 2015

Zadanie 1

Mamy algorytm w postaci:
$w_n = a_n$
$w_{n-1} = w_n x + a_{n-1}$
Mamy więc:
$a_0(1+\beta_0) + a_1 x(1+\alpha_1)(1+\beta_0)(1+\beta_1) + ... + a_n x^n(1+\alpha_1)...(1+\alpha_n)(1+\beta_0)...(1+\beta_n)$
$= \sum\limits_{i=0}^{n} x^i a_i \prod\limits_{j=0}^{i}(1+\beta_j)\prod\limits_{j=1}^{i}(1+\alpha_j)$
Teraz, niech $(1+\beta)$ to będzie maksymalny błąd $(1+\beta_i)$, a $(1+\alpha)$ maksymalny błąd $(1+\alpha_i)$.
Mamy wtedy:
$\sum\limits_{i=0}^{n} x^i a_i \prod\limits_{j=0}^{i}(1+\beta)\prod\limits_{j=1}^{i}(1+\alpha)$
$\sum\limits_{i=0}^{n} x^i a_i (1+\beta)^i(1+\alpha)^i$
A teraz $(1+\epsilon) = (1+\alpha)(1+\beta)$. Ten błąd jest nadal małym błędem, wtedy mamy:
$$\sum_{i=0}^{n} x^i a_i((1+\beta)(1+\alpha))^i = \sum_{i=0}^{n} x^i a_i (1+\epsilon)^i = \sum_{i=0}^{n}(x(1+\epsilon))^i a_i = \sum_{i=0}^{n}\tilde{x}^i a_i$$
a to jest dokładny wynik dla lekko zaburzonych danych, czyli algorytm jest numerycznie poprawny.

Zadanie 3

a)

$T_0(x) = 1$
$T_1(x) = x$
$T_2(x) = 2x \cdot T_1(x) - T_0(x)$
$T_2(x) = 2x^2 - 1$
$T_3(x) = 2x \cdot T_2 - T_1$
$T_3(x) = 2x \cdot (2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x$
$T_4(x) = 2x \cdot T_3 - T_2$
$T_4(x) = 2x \cdot (4x^3 - 3x) - 2x^2 + 1 = 8x^4 - 6x^2 - 2x^2 + 1 = 8x^4 - 8x^2 + 1$
$T_5(x) = 2x \cdot T_4 - T_3$
$T_5(x) = 2x \cdot (8x^4 - 8x^2 + 1) - 4x^3 + 3x = 16x^5 - 16x^3 - 4x^3 + 3x = 16x^5 - 20x^3 + 5x$
$T_6(x) = 2x \cdot T_5 - T_4$
$T_6(x) = 2x \cdot (16x^5 - 20x^3 + 5x) - 8x^4 + 8x^2 - 1 = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$

b)

Dla $n = 1$ - oczywiste, z definicji.
Teraz załóżmy, że $\forall_{i<n}$ działa, sprawdźmy dla n.
Wiemy, że $T_n = 2x \cdot T_{n-1} - T_{n-2}$, wiemy, że stopień n-tego wielomianu czebyszewa to n (łatwo można pokazać). Dlatego n-ta potęga powstanie przez przemnożenie 2x przez T_{n-1}, ale odjęcie T_{n-2} nie wpłynie na współczynnik (bo jest stopnia n-2). Ale z założenia wiemy, że współczynnik przy x^{n-1} w T_{n-1} to 2^{n-2}, mnożąc to przez 2, więc współczynnik to 2^{n-1}, a to to co chcieliśmy pokazać.

c)

i)

Wiemy, że $T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos(x))$, a $\cos(\alpha) \in [-1, 1]$, więc to jest co co mieliśmy pokazać...

ii)

Z wiedzą, że $\cos(\alpha) = 1 \leftrightarrow \alpha = k \cdot \pi$, oraz, że $T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos(x))$, wiemy, że
$n \cdot \arccos(x) = k \cdot \pi$
$\arccos(x) = \frac{k \cdot \pi}{n}$
$x_k = \cos(\frac{k \cdot \pi}{n}), (k = 0..n-1)$

iii)

Chcemy, żeby $\cos((n+1)\arccos x) = 0$. $\cos(\alpha) = 0$ gdy $\alpha = k\pi + \frac{\pi}{2}$. Więc:

$$(n+1)\arccos x = k\pi + \frac{\pi}{2}, \text{ więc } \arccos x = \frac{k\pi + 0.5 \cdot \pi}{n+1}$$

$$x_k = \cos(\frac{k\pi + 0.5 \cdot \pi}{n+1})$$

Teraz wiemy, że istnieje co najwyżej n+1 zer (bo wielomian jest rzędu n+1). Weźmy $k = 0...n$, jest ich n+1, więc jest ich przynajmniej n+1, skoro jest ich przynajmniej n+1 i najwyżej n+1 to jest ich dokładnie n+1.

Zadanie 4

Załóżmy, że istnieją dwa wielomiany stopnia n interpolujące w węzłach $x_0 ... x_n$ te same wartości. Nazwijmy je $W_1(x)$ i $W_2(x)$ Weźmy teraz $W_3(x) = W_1(x) - W_2(x)$. Wiemy, z własności odejmowania wielomianów, że jest on stopnia co najwyżej n. Ale wiemy, że $W_1(x)$ i $W_2(x)$ w węzłach $x_0 ... x_n$ przyjmują te same wartości. Dla tych punktów mamy więc $W_3(x_k) = 0$, ma on więc n+1 miejsc zerowych.
Ale $W_3(x)$ jest stopnia nie większego niż n, a każdy niezerowy wielomian stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków rzeczywistych, co oznacza, że $W_3(x)$ musi być wielomianem tożsamościowo równy zeru. A to oznacza, że$W_3(x) = W_1(x) - W_2(x) = 0 \leftrightarrow W_1(x) = W_2(x)$, a to jest sprzeczne z założeniem, że są różne.

Zadanie 5

$x_0 = 0, x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 7$
$y_0 = -1, y_1 = 1, y_2 = 3, y_3 = -5$

$$L_3(x) = (-1)\frac{(x-2)(x-4)(x-7)}{(0-2)(0-4)(0-7)} + (1)\frac{(x-0)(x-4)(x-7)}{(2-0)(2-4)(2-7)} + (3)\frac{(x-0)(x-2)(x-7)}{(4-0)(4-2)(4-7)} + (-5)\frac{(x-0)(x-2)(x-4)}{(7-0)(7-2)(7-4)} =$$

$$= \frac{(x-2)(x-4)(x-7)}{56} + \frac{(x-0)(x-4)(x-7)}{10} + \frac{(x-0)(x-2)(x-7)}{8} - \frac{(x-0)(x-2)(x-4)}{21} = \frac{41x^3-456x^2+1063x-210}{120}$$

Zadanie 6

a)
Wielomian stopnia $\leqslant 6$ zinterpolować funkcję stopnia 3, więc z jednoznaczności z zad 4, to ta sama funkcja, koniec.
b)
$x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$
$y_0 = 1, y_1 = 1, y_2 = 5$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} + \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} + (5)\frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)} = \frac{(x-0)(x-1)}{2} - \frac{2(x+1)(x-1)}{2} + (5)\frac{(x+1)(x-0)}{2} = 2x^2 + 2x + 1$$

Zadanie 7

Mamy:

$\lambda_k(x) = \prod\limits_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$

a)

Wielomian interpolacyjny Lagrange'a ma postać:

$L_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f(x_k)\lambda_k(x)$ Weźmy funkcję f(x) stale równą 1. Mamy wtedy:

$L_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k(x)$. Ale wiemy, że $f(x)$ jest stopnia co najwyżej n, skoro tak, to $L_n(x) = f(x)$, czyli też jest stale równe 1, czyli, że:

$L_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k(x) \equiv 1$, a to jest to co chcieliśmy pokazać.

b)

Podobnie jak w poprzednim przypadku, weźmy funkcję $f(x) = x^j$. Gdy $j = 0$, $x^0 = 1$ - punkt 1.

W przeciwnym przypadku:

$f(x)$ jest stopnia co najwyżej n, więc $L_n(x) = x^j$, a skoro tak to mamy:

$L_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} x_k^j \lambda_k(x) = x^j$, weźmy teraz $L_n(0)$, mamy:

$0^j = 0 = \sum\limits_{k=0}^{n} x_k^j \lambda_k(0)$, a to jest to co mieliśmy pokazać.