Lista 1

Kamil Matuszewski

24 lutego 2016

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13-14
✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	

Zadanie 1

Niech Σ będzie σ-ciałem zbiorów.

(a) Sprawdzić, że $\Omega \in \Sigma$
Wiemy, że $\emptyset \in \Sigma$, oraz, że $A \in \Sigma \Rightarrow A^C \in \Sigma$ (Def 2). Stąd:

$$\emptyset \in \Sigma \Rightarrow \emptyset^C = \Omega \in \Sigma$$

(b) Załóżmy, że $A_k \in \Sigma$, dla $k = 1, 2, \dots$. Wykazać, że $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \Sigma$

Dowód. Niech $A^C = \Omega / A$
Z praw de Morgana:

$$\bigcap_k A_k = \Omega / \left(\Omega / \bigcap_k A_k \right) = \Omega / \left(\bigcup_k \Omega / A_k \right)$$

Teraz, wiemy, że $A_k \in \Sigma$ (z założenia). Z def 2.2 wiemy, że $\Omega / A_k \in \Sigma$. Z def 2.3 wiemy, że w takim razie $\bigcup_k \Omega / A_k \in \Sigma$. Ponownie z def 2.2 $\Omega / \left(\bigcup_k \Omega / A_k \right) = \bigcap_k A_k \in \Sigma$. $\square$

Zadanie 2

Znajdź wszystkie σ-ciała dla $\Omega = \{a, b, c\}$.

$$\Sigma_1 = \Big\{ \emptyset, \Omega, \{a\}, \{b, c\} \Big\}$$

$$\Sigma_2 = \Big\{ \emptyset, \Omega, \{b\}, \{a, c\} \Big\}$$

$$\Sigma_3 = \Big\{ \emptyset, \Omega, \{c\}, \{a, b\} \Big\}$$

$$\Sigma_4 = \Big\{ \emptyset, \Omega \Big\}$$

Zadanie 3

Znajdź najmniejsze σ-ciało zawierające zbiór $S = \{1,3\}$ dla $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$.

$$\Sigma = \Big\{\emptyset, \Omega, \{1,3\}, \{2,4,5\}\Big\}$$

Zadanie 4

Niech $\Omega = \{a,b,c\}$. Podać przykład funkcji X,Y takich, że X jest zmienną losową a Y nie jest zmienną losową.

Niech X: $a \to 1, b \to 2, c \to 2$
Y: $a \to 2, b \to 1, c \to 2$
$\Sigma = \Big\{\emptyset, \Omega, \{a\}, \{b,c\}\Big\}$

Wtedy, dla przestrzeni probabilistycznej (Ω, Σ, P) mamy:

$$X^{-1}((-\infty, a]) = \{a\} \in \Sigma$$

$$Y^{-1}((-\infty, a]) = \{b\} \notin \Sigma$$

Zadanie 5

Znajdź funkcję prawdopodobieństwa i wartość oczekiwaną EX zmiennej losowej X, której dystrybuanta określona jest następująco:

x	$(-\infty;-2]$	$(-2,3]$	$(3,5]$	$(5,\infty)$
F(x)	0	0,2	0,7	1

Wypiszmy punkty: 5,3,-2. Teraz p_i: 1-0,7=0,3; 0,7-0,2=0,5; 0,2-0=0,2. Stąd:

x_i	-2	3	5
p_i	0,2	0,5	0,3

Co do $EX = \sum_{i=0}^{2} x_i \cdot p_i = -2 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,5 + 5 \cdot 0,3 = 2,6$

Zadanie 6

Zmienna X ma rozkład Bernoulliego z parametrami $n, p (X \sim B(n,p))$. Sprawdzić, że:

- $\sum_{k=0}^{n} p_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1$

  Dowód. Szansa na uzyskanie k sukcesów po n próbach to $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ bo mamy k zwycięstw z prawdopodobieństwem sukcesu p, i n-k porażek z prawdopodobieństwem 1-p, a do tego wybieramy za którym razem ma być sukces. Stąd nasz wzór to $\sum_{k=0}^{n} p_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

  $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \overset{dwumiannewtona}{=} (1-p+p)^n = 1^n = 1$$

  □

- $E(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = np$

  Dowód. Dla $x_k = k$, i $E(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} x_k p_k = \sum\limits_{k=0}^{n} kp_k = \sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ Stąd mamy:

  $$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} np\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}(1-p)^{n-k} =$$

  $$= np\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k} = np\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}p^k(1-p)^{n-k-1} \stackrel{poprzedni}{=} np \cdot 1 = np$$

  □

Zadanie 7

Zmienna X ma rozkład Poissona z parametrem λ. Sprawdzić, że:

- $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = 1$

  Dowód. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$ □

- $E(X) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda$

  Dowód.

  $$\sum_{k=0}^{\infty} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda}\lambda\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda}\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\lambda\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda}\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda}\lambda = \lambda$$

  □

Zadanie 8

Udowodnić, że $E(aX + b) = aE(X) + b$

Dowód.

$$E(aX + b) = \sum_{k=0}(ax_k + b)p_k = \sum_{k=0} ax_k p_k + \sum_{k=0} bp_k = a\sum_{k=0} x_k p_k + b\sum_{k=0} p_k$$

Wiemy, że $E(X) = \sum\limits_{k=0} x_k p_k$ oraz, że $\sum\limits_{k=0} p_k = 1$, stąd:

$$E(aX + b) = aE(X) + b \cdot 1 = aE(X) + b$$

□

Zadanie 9

Udowodnić, że $V(X) = E(X^2) - (EX)^2$.

Dowód.

$$V(X) = E(X - EX)^2 = \sum_k (x_k - EX)^2 p_k = \sum_k (x_k^2 - 2x_k EX + (EX)^2) p_k =$$
$$= \sum_k x_k^2 p_k - 2EX \sum_k x_k p_k + (EX)^2 \sum_k p_k = EX^2 - 2EX \cdot EX + (EX)^2 \cdot 1 =$$
$$= EX^2 - 2(EX)^+(EX)^2 = EX^2 - (EX)^2$$

□

Zadanie 10

Pokaż, że $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

Dowód.

$$V(aX + b) \overset{zad9}{=} E[(aX + b)^2] - (E[aX + b])^2 = E[a^2X^2 + 2abX + b^2] - (aE(X) + b)^2 =$$
$$= a^2E(X^2) + 2abE(X) + b^2 - a^2E^2(X) - 2abE(X) - b^2 =$$
$$= a^2E(X^2) - a^2E^2(X) = a^2(EX^2 - (EX)^2) = a^2V(X)$$

□

Zadanie 11

Wykaż, że $\Gamma(n) = (n - 1)!$, $n \in \mathbb{N}$

Dowód.

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt$$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty 1 e^{-t} dt = 1$$

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt = \int_0^\infty t^{n-1} (-e^{-t})' dt = \left[t^{n-1}e^{-t}\right]_0^\infty - \int_0^\infty -(n-1)t^{n-2}e^{-t} dt = \left[t^{n-1}e^{-t}\right]_0^\infty + \int_0^\infty (n-1)t^{n-2}e^{-t} dt$$

Skoro $e^{-\infty} = 0$ i $0^{n-1} = 0$, stąd pierwsze wyrażenie to 0.

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty (n - 1)t^{n-2}e^{-t} dt = (n - 1) \int_0^\infty t^{n-2}e^{-t} dt = (n - 1)\Gamma(n - 1)$$

Stąd, oraz z tego, że $\Gamma(1) = 1$, mamy:

$$\Gamma(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n - 1) = (n - 1)!$$

□

Zadanie 12

Sprawdź, że:

(a) $B(p, q+1) = \frac{q}{p+q} B(p, q)$

Dowód. Najpierw, $t^p = t^{p-1} - t^{p-1}(1-t)$. Teraz:

$$B(p, q{+}1) = \int_0^1 t^{p-1}(1{-}t)^q dt = \left[\frac{t^p}{p}(1-t)^q\right]_0^1 + \frac{q}{p}\int_0^1 t^p(1{-}t)^{q-1}dt = \frac{q}{p}\int_0^1 t^{p-1}(1{-}t)^{q-1} {-} t^{p-1}(1{-}t)^q dt =$$

$$= \frac{q}{p}\left[\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt - \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^q dt\right] = \frac{q}{p}\left[B(p,q) - B(p,q+1)\right]$$

Teraz:

$$B(p, q+1) = \frac{q}{p}B(p,q) - \frac{q}{p}B(p,q+1)$$

$$B(p,q+1)\frac{q+p}{p} = \frac{q}{p}B(p,q)$$

$$B(p,q+1) = \frac{q}{p}\cdot\frac{p}{q+p}B(p,q)$$

$$B(p,q+1) = \frac{q}{q+p}B(p,q)$$

□

(b) $B(p,q) = B(p,q+1) + B(p+1,q)$

Lemat 1: $B(p,q) = B(q,p)$.

Dowód.

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt = \begin{cases} 1-t = x & \Rightarrow \quad t = 1-x \\ dt = -dx \end{cases}$$

Zastosujemy podstawienie. W tym podstawieniu, jeśli $t = 0$ to $x = 1$, a jeśli $t = 1$ to $x = 0$, stąd odwrócą się nam granice całkowania. Ale $dt = -dx$, a minus ponownie odwróci nam granice całkowania, stąd, granice całkowania pozostają bez zmian. Mamy więc:

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{q-1}(1-x)^{p-1}dx = B(q,p)$$

□

Lemat 2: $B(p+1,q) = \frac{p}{p+q}B(p,q)$.

Dowód. Wynika to wprost z podpunktu (a) i Lematu 1:

$$B(p+1,q) = B(q,p+1) = \frac{p}{p+q}B(q,p) = \frac{p}{p+q}B(p,q)$$

□

Teraz, dowód właściwy:

Dowód.

$$B(p,q+1) + B(p+1,q) = \frac{q}{p+q}B(p,q) + \frac{p}{p+q}B(p,q) = \frac{q+p}{p+q}B(p,q) = B(p,q)$$

□