# Algorytmy probabilistyczne

Lista zadań nr 3

1. Niech $X$ będzie zmienną losową o wartości oczekiwanej $\mu_X$ i dodatnim odchyleniu standardowym $\sigma_X$ . Wykazać następujące nierówności dla dowolnego $t > 0$ .

$$Pr[X - \mu_X \geq t\sigma_X] \leq \frac{1}{1+t^2}$$

$$Pr[|X - \mu_X| \geq t\sigma_X] \leq \frac{2}{1+t^2}$$

   Kiedy to drugie oszacowanie jest lepsze od nierówności Czebyszewa?

2. Uzupełnić przedstawiony na wykładzie dowód górnego oszacowania $O(n^{-1/4})$ na prawdopodobieństwo, że pierwsza iteracja algorytmu *LazySelect* nie wyznaczy $k$-tego najmniejszego elementu zbioru $S$ . Dokładniej, oszacować w ten sposób:

$$Pr[|\{x \in S : S_{(k)} \leq x \leq R_{(h)}\}| \geq 2n^2 + 2].$$

3. Rozważamy pełne, ukorzenione drzewo $T_{k,d}$ o wysokości $2k$ , w którym: (a) wierzchołki wewnętrzne mają $d$ następników, (b) liście mają przypisane wartości $\{0, 1\}$ oraz (c) korzeń i wierzchołki wewnętrzne o parzystej odległości od korzenia etykietowane są funkcją AND, a pozostałe wierzchołki wewnętrzne - funkcją OR. Pokazać, że dla $A$ – dowolnego deterministycznego algorytmu wyznaczania wartości w korzeniu drzewa, istnieje takie drzewo $T_{k,d}$ , które zmusza algorytm $A$ do sprawdzenia wartości wszystkich $d^{2k}$ liści. Podać algorytm zrandomizowany typu Las Vegas, który wyznacza wartość w korzeniu drzewa i którego oczekiwana liczba sprawdzonych liści jest znacznie mniejsza.

4. Rozważmy pełne drzewo stopnia $3$ i wysokości $h$ . Każdy liść drzewa ma przypisaną wartość 0 lub 1. W każdym wierzchołku wewnętrznym obliczana jest funkcja większości: wynosi ona 1, jeżeli większość (tzn. 2 lub 3) synów danego wierzchołka ma wartość 1; w przeciwnym razie wynosi ona 0.

   (a) Pokazać, że dla dowolnego algorytmu deterministycznego istnieje przykład danych, dla których algorytm ten musi sprawdzić wartości wszystkich $n = 3^h$ liści,

   (b) Zaproponować rekurencyjny probabilistyczny algorytm wartościowania drzewa, którego oczekiwany koszt wynosi $\leq n^{0.9}$ .

13 marca 2019

Marek Piotrów