Lista 6

Kamil Matuszewski

13 kwietnia 2016

1	2	3	4	5	6	7	8	9
✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Zadanie 1

Mamy

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & & 1 \end{vmatrix}$$

Pokaż, że $det(D_n) = n$.

Dowód. Okej. Dla $n = 1, n = 2$ trywialne. Załóżmy, że dla $n - 1$ jest ok, sprawdzę dla n. Aby to zrobić skorzystam z Laprasa.
Rozwińmy to względem ostatniego wiersza. Patrząc na kolejne wyznaczniki macierzy M_{ni} zobaczymy, że mnożymy je przez zera we wszystkich miejscach poza pierwszym i ostatnim elementem. Dla ułatwienia, najpierw pomińmy element pierwszy - do niego wrócimy za chwilę. Co do ostatniego, jeśli skreślimy ostatni wiersz i ostatnią kolumnę, otrzymamy D_{n-1}. Z założenia indukcyjnego, jej wyznacznik to $n - 1$.
Teraz, niech C_n będzie macierzą D_n bez pierwszej kolumny i ostatniego wiersza. Z Laprasa i z obserwacji powyżej, wyznacznik D_n to $znak \cdot det(C_n) + n - 1$, gdzie znak to $(-1)^{n+1}$.

$$C_n = \begin{vmatrix} -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Z pomocą eliminacji gaussa możemy ją łatwo sprowadzić do postaci

$$C_n = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & -1 \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Znów zróbmy Laprasa tym razem względem pierwszego wiersza. Wyznaczniki M_{1i} będą mnożone przez 0 poza ostatnim elementem. Wyznacznik macierzy z usuniętą pierwszą i ostatnią kolumną to 1. Mnożymy to przez -1 i znak. Znak to $(-1)^{n-1+1}$. Czyli wyznacznik C_n to $(-1)^{n+1}$.
Wracając do wyznacznika D_n, jak już wcześniej wspomniałem, wynosi on $(-1)^{n+1} \cdot det(C_n) + n - 1 = (-1)^{n+1} \cdot (-1)^{n+1} + n - 1 = (-1)^{2(n+1)} + n - 1$. Można łatwo zauważyć, że pierwszy składnik tej sumy to 1, niezależnie od n. Stąd otrzymujemy, że $det(D_n) = 1 + n - 1 = n$ □

UWAGA! ROZWIĄZANIE INNE (SZYBSZE):

Dowód. Weźmy nasze D_n. Zauważmy, że jeśli dodamy do pierwszego wiersza wszystkie kolejne dostaniemy:

$$D_n = \begin{vmatrix} n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & & 1 \end{vmatrix}$$

Czyli macierz dolnoprzekątniową. Wyznacznik tej macierzy to iloczyn liczb na przekątnej:

$$n \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 = n$$

□

Zadanie 2

Pokaż, że jeśli X ma rozkład $Poisson(\lambda)$ to zachodzi $E(X^n) = \lambda E[(X+1)^{n-1}]$. Za pomocą tego związku policz $E[X^3]$.

Dowód.

$$E(X^n) = \sum_{x=0}^{\infty} x^n \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \stackrel{*}{=} \sum_{x=1}^{\infty} x^n \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \lambda \sum_{x=1}^{\infty} x^{n-1} \frac{\lambda^{x-1} e^{-\lambda}}{(x-1)!} = \lambda \sum_{x=0}^{\infty} (x+1)^{n-1} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \lambda E[(X+1)^{n-1}]$$

$*$ - Zauważmy, że dla $x = 0$ wyraz to 0. □

Policzenie $E[X^3]$ zostawiam czytelnikowi jako ćwiczenie. Tu trzeba skorzystać z jakichś prostych własności, które wykorzystywaliśmy i dowodziliśmy na poprzednich listach.

Zadanie 3

Zmienna X ma rozkład *Poissona*. Jak wygląda $E(X!)$?

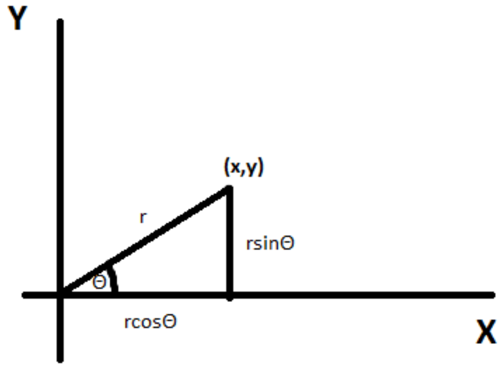
$$E(X!) = \sum_{x=0}^{\infty} x! \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \sum_{x=0}^{\infty} \lambda^x e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \frac{1}{1-\lambda}$$

Zadanie 4

Oblicz

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \, dx \, dy$$

Przenieśmy się na współrzędne biegunowe.



Widzimy, że w takim wypadku $x = r\cos\theta$ oraz $y = r\sin\theta$ Widzimy też, że $\theta \in [0°, 360°]$ (lub inaczej $[0, 2\pi]$), a $r \in [0, \infty)$. Teraz, wystarczy jakobian przekształcenia:

$$\begin{vmatrix} \sin\theta & r\cos\theta \\ -\cos\theta & r\sin\theta \end{vmatrix} = r$$

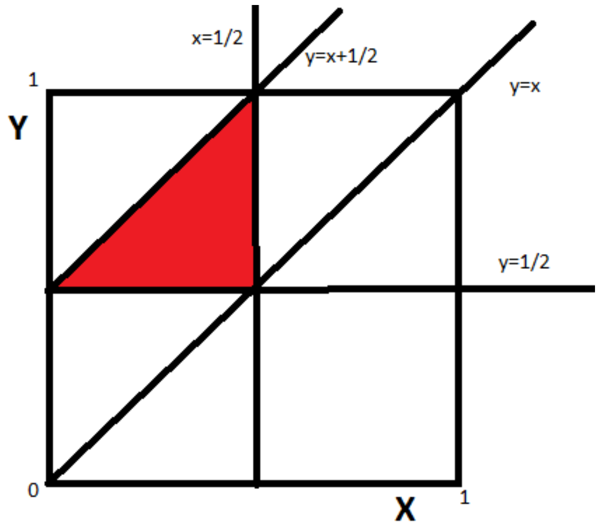
No i liczymy całeczkę:

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} re^{-\frac{1}{2}r^2}\ d\theta\ dr = \int_0^\infty re^{-\frac{1}{2}r^2} \int_0^{2\pi} 1\ d\theta\ dr = 2\pi \cdot \left[-e^{-r^2/2}\right]_0^\infty = 2\pi$$

Zadanie 5

Dane są niezależne zmienne losowe X, Y o rozkładzie $U[0,1]$. Niech x, y - wylosowane wartości zmiennych X, Y. Innymi słowy mamy odcinek $[0,1]$ i losujemy z niego x i y, dzieląc go na trzy części. Musimy sprawdzić, jakie jest prawdopodobieństwo, że z tych trzech punktów utworzymy trójkąt.

Okej. To jest w sumie zadanie podobne do jakiegoś zadania z LO, tylko trochę bardziej skomplikowane (troszeczkę). Na początku, wiemy, że losowanie 2 punktów na prostej $[0,1]$ jest izomorficzne z losowaniem jednego punktu w przestrzeni $[0,1]x[0,1]$. To nam trochę ułatwi. Teraz, możemy zmniejszyć przestrzeń zdarzeń o połowę - pamiętając o tym i ostateczny wynik pomnożyć przez 2 - zakładając, że $x \leqslant y$. W naszej przestrzeni otrzymaliśmy trójkąt. Teraz, zastanówmy się jakie warunki muszą spełniać proste stworzone przez punkty, by dały się one złożyć w trójkąt. Trójkąt da się utworzyć, jeśli najdłuższy odcinek jest krótszy niż suma dwóch pozostałych. Nasz odcinek ma długość 1, więc najdłuższy odcinek musi być mniejszy od $\frac{1}{2}$. Mamy zatem równania: $x < \frac{1}{2}$ - bo długość $[0, x]$ musi być mniejsza od $\frac{1}{2}$, jako, że jest to pierwszy punkt na prostej. Podobnie z y, tyko $y > \frac{1}{2}$, bo odcinek $[y, 1]$ musi być krótszy niż $\frac{1}{2}$. Ostatni warunek, to odległość pomiędzy x a y musi być mniejsza od $\frac{1}{2}$, stąd $y - x < \frac{1}{2} \Rightarrow y < x + \frac{1}{2}$.
Rysujemy więc trzy proste. $x = \frac{1}{2}$, i zaznaczamy pole na lewo od niej ($x < \frac{1}{2}$), $y = \frac{1}{2}$ i zaznaczamy obszar na górze od niej ($y > \frac{1}{2}$), i prostą $y = \frac{1}{2} + x$, i zaznaczamy pole na dół od niej ($y < \frac{1}{2} + x$). Część wspólna tych obszarów wyznacza nam trójkąt. Całka po tym trójkącie da nam połowę prawdopodobieństwa z zadania (pamiętamy że podzieliliśmy przestrzeń zdarzeń na pół). Obrazek poniżej obrazuje (hehe) co zrobiliśmy:



Czerwone pole to to co mamy policzyć. Ustalmy sobie x. $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$. Z prostej $y = x + \frac{1}{2}$, widać, że $\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant x + \frac{1}{2}$. Mamy już wszystko. Obliczmy całkę:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} 1 \; dy \; dx = \frac{1}{8}$$

Pamiętamy, że wynik trzeba wymnożyć przez 2, więc wynik to $\frac{1}{4}$.

Zadanie 6

Zadanie 5 dla gęstości $f(t) = 2t$.

To jest zadanie 5, tylko inaczej liczymy ostatnią całkę. Zmienne są niezależne, $f(x) = 2x$, $f(y) = 2y$, $f(x, y) = 4xy$.

Obliczmy całkę:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} 4xy \; dy \; dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 2x^2(x+1)dx = \left[2\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right)\right]_0^{\frac{1}{2}} = 2\left(\frac{1}{64} + \frac{1}{24}\right) = \frac{1}{32} + \frac{1}{12} = \frac{11}{96}$$

Pamiętamy, że wynik trzeba wymnożyć przez 2, więc wynik to $\frac{11}{48}$.

Zadanie 7

Mamy $f(x, y) = \frac{1}{\pi}$, dla $0 < x^2 + y^2 < 1$. Oblicz gęstości brzegowe X i Y.

Po pierwsze zauważmy, że warunek $x^2 + y^2 > 0$ gwarantuje nam jedynie, że x i y są niezerowe. Poza tym mamy $x^2 + y^2 = 1$ i mamy policzyć pole pod nią. Widać, że jest to równanie okręgu o promieniu 1. Wiedząc to możemy bez problemu ustalić jakie mamy granice całkowania.
Dla ustalonego x, mamy $x^2 + y^2 < 1 \Rightarrow y^2 < 1 - x^2 \Rightarrow -\sqrt{1-x^2} < y < \sqrt{1-x^2}$. Dla ustalonego y - analogicznie.

$$f(x) = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} dy = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}$$

$$f(y) = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\pi} dx = \frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}$$

Zadanie 8

Pokaż, że zmienne z zadania 7 są niezależne. Pokaż, że współczynnik korelacji wynosi 0.

To, że zmienne nie są niezależne widać od razu. Teraz, pokażę, że współczynnik korelacji wynosi 0.

Dowód.

$$p = \frac{\mu_{11}}{\sqrt{m_{20}m_{02}}} \quad - \quad \textit{wspoczynnik korelacji}$$

Gdzie:

$$\mu_{11} = E[(X - EX)(Y - EY)] \quad - \quad \textit{moment centralny}$$
$$m_{20} = E(X^2) \quad - \quad \textit{moment zwyky}$$
$$m_{02} = E(Y^2) \quad - \quad \textit{moment zwyky}$$

Okej. No to liczymy. Znów ustalamy sobie np. x. x przebiega od -1 do 1 (bo cały czas mówimy o okręgu o promieniu 1)

$$E(X) = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{x}{\pi}\, dy\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{\pi} dx = 0$$
$$E(Y) = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{y}{\pi}\, dy\, dx = \int_{-1}^{1} 0dx = 0$$
$$E(X^2) = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{x^2}{\pi}\, dy\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{2x^2\sqrt{1-x^2}}{\pi} dx = \frac{1}{4}$$
$$E(Y^2) = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{y^2}{\pi}\, dy\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3\pi} dx = \frac{1}{4}$$
$$E[(X-0)(Y-0)] = E(XY) = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{xy}{\pi}\, dy\, dx = \int_{-1}^{1} 0dx = 0$$
$$p = \frac{0}{\sqrt{\frac{1}{8}}} = 0$$

□

Zadanie 9

Niech $X_1 = Y_1 \cos Y_2$, $X_2 = Y_1 \sin Y_2$, $0 < Y_1 < 1$, $0 \leqslant Y_2 \leqslant 2\pi$. Znajdź gęstość $g(y_1, y_2)$ zmiennej (Y_1, Y_2). Sprawdź czy Y_1 i Y_2 są niezależne.

To się robi jakoś tak, że oblicza się jakobian, mnoży się przez gęstość. WKa ułatwił zadanie bo mamy już podane granice całkowania, więc obliczenie zależności zmiennych robi się trywialne.

Coś w stylu:
Jakobian:

$$|J| = \begin{vmatrix} \cos Y_2 & Y_1 \sin Y_2 \\ \sin Y_2 & -Y_1 \cos Y_2 \end{vmatrix} = |-Y_1\cos^2 Y_2 - Y_1 \sin^2 Y_2| = |-Y_1| = Y_1$$

Gęstość:

$$f(y_1, y_2) = f(x_1, x_2) \cdot |J| = \frac{y_1}{\pi}$$

Gęstość y_1:

$$f(y_1) = \int_0^{2\pi} \frac{y_1}{pi}\, dy_2 = \left[\frac{y_1 y_2}{\pi}\right]_{y_2=0}^{2\pi} = 2y_1$$

Gęstość y_2:

$$f(y_2) = \int_0^1 \frac{y_1}{pi} \; dy_1 = \frac{1}{2pi}$$

Niezależność:

$$f(y_1, y_2) = \frac{y_1}{pi} = \frac{1}{2pi} \cdot 2y_1 = f(y_1) \cdot f(y_2)$$

Wychodzi, że są niezależne. Z dokładnością do poprawności metody (na 95% poprawna).