

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Lista zadań nr 3. 14 i 17 marca 2016

Oznaczenie: $X \sim U[a, b]$ oznacza, że zmienna losowa X podlega rozkładowi jednostajnemu na przedziale $[a, b]$. Innymi słowy: $f_X(x) = \frac{1}{b-a}$, dla $x \in [a, b]$.

1. Dla funkcji $f(x, y) = C(x + y) \exp\{-(x + y)\}$, gdzie $x > 0, y > 0$
 - (a) Wyznaczyć stałą C taką, aby podana wyżej funkcja była gęstością zmiennej (X, Y) .
 - (b) Sprawdzić, czy zmienne losowe X, Y są niezależne.
 - (c) Obliczyć momenty m_{10}, m_{01}, m_{11} .

W zadaniach 2–10 zakładamy, że zmienne losowe są ciągłe, stosujemy też oznaczenia: gęstość i dystrybucja zmiennej losowej X to – odpowiednio – $f_X(x)$ oraz $F_X(x)$.

2. Czy można tak dobrać stałą C , aby funkcja $f_{XY}(x, y) = Cxy + x + y$, dla $0 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 2$, była gęstością dwuwymiarowej zmiennej losowej?

Do zadań 3–4. Dana jest funkcja $f_{XY}(x, y) = -xy + x$ dla $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$.

3. Sprawdzić, czy zmienne X i Y są niezależne.
4. Obliczyć ppb $P(1 \leq X \leq 3, 0 \leq Y \leq 0.5)$.

5. Załóżmy, że $X \sim U[0, 1]$ i niech $Y = X^n$. Udowodnić, że $f_Y(y) = \frac{y^{1/n-1}}{n}$, dla $0 \leq y \leq 1$.

6. Niech $Y = X^2$ (X określona na \mathbb{R}). Wykazać, że

$$f_Y(y) = \frac{f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}, \text{ dla } y \geq 0.$$

7. Zmienna losowa X ma gęstość $f_X(x) = xe^{-x}$, dla $x \geq 0$. Znaleźć gęstość zmiennej losowej $Y = X^2$.
8. Zmienna losowa $X \sim U[-1; 1]$. Znaleźć gęstość zmiennej losowej $Y = |X|$.
9. Niech X będzie zmienną losową i niech $Y = F_X(X)$. Udowodnić, że $Y \sim U[0; 1]$.
10. Niech X ma standardowy rozkład Cauchy'ego, $f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, dla $x \in \mathbb{R}$. Udowodnić, że $Y = \frac{1}{X}$ ma również standardowy rozkład Cauchy'ego.

Witold Karczewski