Lista 1

Kamil Matuszewski

8 października 2015

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	✓			✓	✓	✓	✓					✓		

Zadanie 2

Mamy dane funkcje:

$$\log n$$
$$(\log n)^n = 2^{n\cdot\log\log n}$$
$$n^{\log n} = 2^{\log n \log n} = 2^{log^2 n}$$
$$\log n^n = n \log n$$
$$3^{\log n} = 2^{\log 3 \log n} = 2^{\log n \log 3} = n^{\log 3}$$
$$n$$
$$n^2$$
$$2^{\sqrt{n}}$$
$$(1,01)^n = 2^{\log 1,01 n}$$
$$(0,99)^n \underset{n\to\infty}{=} 0$$
$$(n+\frac{1}{n})^n \underset{n\to\infty}{=} e$$

Korzystając z wiedzy z wykładu oraz z powyższych równań możemy uporządkować funkcje:

$$(0,99)^n, (n+\frac{1}{n})^n, \log n, n, \log n^n, 3^{\log n}, n^2, n^{\log n}, 2^{\sqrt{n}}, (1,01)^n, \log n^n$$

Zadanie 5

Wykażemy, że:

(a) $f = o(g) \Rightarrow f = O(g)$

Dowód.

$$f(n) = o(g(n)) \overset{def}{\Leftrightarrow} \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \overset{def.Cauchy'ego}{\Rightarrow} \forall_{\epsilon>0}\exists_{n_0>0}\forall_{n>n_0}|\frac{f(n)}{g(n)} - 0| \leqslant \epsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall_{\epsilon>0}\exists_{n_0>0}\forall_{n>n_0}|\frac{f(n)}{g(n)}| \leqslant \epsilon \Leftrightarrow \forall_{\epsilon>0}\exists_{n_0>0}\forall_{n>n_0}|f(n)| \leqslant \epsilon\cdot|g(n)| \overset{def}{\Leftrightarrow} f(n) = O(g(n))$$

□

(b) $f \sim g \Rightarrow f = \Theta(g)$

Dowód.

$$f \sim g \overset{def}{\Leftrightarrow} \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1 \overset{def.Cauchy'ego}{\Rightarrow} \forall_{\epsilon>0}\exists_{n_0>0}\forall_{n>n_0}|\frac{f(n)}{g(n)} - 1| \leqslant \epsilon$$

To oznacza, że:

$$-\epsilon \leqslant \frac{f(n)}{g(n)} - 1 \leqslant \epsilon$$

$$1-\epsilon \leqslant \frac{f(n)}{g(n)} \leqslant 1+\epsilon$$

$$(1-\epsilon)g(n) \leqslant f(n) \leqslant (1+\epsilon)g(n)$$

Zachodzi dla każdego $\epsilon > 0$, więc w szczególności $\exists_\epsilon (1-\epsilon) > 0 \wedge (1+\epsilon) > 0$.
Niech $(1-\epsilon) = c$ i $(1+\epsilon) = d$. Z powyższego wiemy, że:

$$\exists_{c>0,d>0,n_0>0}\forall_{n>n_0} c \cdot g(n) \leqslant f(n) \leqslant d \cdot g(n) \overset{def}{\Leftrightarrow} f(n) = \Theta(g)$$

□

(c) $f = O(g) \Leftrightarrow g = \Omega(f)$

Dowód.

$$f = O(g) \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists_{c>0,n_0}\forall_{n>n_0}|f(n)| \leqslant c|g(n)| \Leftrightarrow \exists_{c>0} g(n) \geqslant \frac{1}{c}|f(n)| \Leftrightarrow g = \Omega(f)$$

□

(d) $f = O(g) \wedge g = O(f) \Leftrightarrow g = \Omega(f)$

Dowód.

$$f = O(g) \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists_{c>0,n_0}\forall_{n>n_0}|f(n)| \leqslant c|g(n)|$$

$$g = O(f) \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists_{d>0,n_0}\forall_{n>n_0}|g(n)| \leqslant d|f(n)|$$

Więc:

$$\exists_{c>0,d>0,n_0}\forall_{n>n_0} \frac{1}{c}|f(n)| \leqslant g(n) \leqslant d|f(n)| \overset{def}{\Leftrightarrow} g = \Theta(f)$$

□

Przechodnie: Wszystkie
Symetryczne: $\sim, \Theta$ Wynika wprost z definicji.

Zadanie 6

Pokaż, że
$$e^{1/n} = 1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Dowód.
$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$
$$e^{1/n} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{n})^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n^i i!} = 1 + \frac{1}{n} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{n^i i!}$$
$$\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{n^i i!} \leqslant \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 2^i} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{2^i} \stackrel{1}{=} \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{n^i i!} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
Gdzie 1 wynika ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego. W takim razie mamy:
$$e^{1/n} = 1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

□

Zadanie 7

Rozważmy algorytm sortujący n liczb w następujący sposób. Wybierz najmniejszą, postaw na pierwszym miejscu, wybierz najmniejszą z pozostałych i postaw na drugim miejscu, najmniejszą z pozostałych postaw na trzecim miejscu itd. aż do wyczerpania liczb. Określ złożoność czasową powyższej procedury.

Rozważmy najgorszy możliwy przypadek. Wtedy, w pierwszym kroku wykonujemy $n-1$ porównań. W drugim $n-2$, w trzecim $n-3$, aż w końcu w $n$tym wykonujemy 0 porównań. Ile porównań wykonaliśmy w sumie?
$$(n-1) + (n-2) + (n-3) + \cdots + 0 = \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{1}{2}(n-1)n = O(n^2)$$

Złożoność to $O(n^2)$.

Zadanie 8

Oceń złożoność czasową pisemnego dodawania i mnożenia liczb długości n.

- Dodawanie Dodajemy do siebie dwie liczby długości n. Dodajemy do siebie ich cyfry i ewentualne przeniesienie. Operacją jednostkową jest dodawanie. Dla każdej z n cyfr możemy więc wykonać trzy dodawania. W ten sposób otrzymujemy maksymalnie $2n$ dodawań, mamy więc złożoność $O(n)$.
- Mnożenie Mnożymy dwie liczby długości n. Dla każdej z n liczb wykonujemy n mnożeń i w najgorszym wypadku dodatkowo n dodawań. Daje nam to $2n^2$ operacji. Następnie dodajemy do siebie n liczb długości maksymalnie $2n-1$. To daje nam dodatkowo $2n^2 - n$ operacji. W sumie mamy maksymalnie $4n^2 - n$ operacji, czyli $O(n^2)$.

Zadanie 13

Wykaż, że:

(a) W przedziale $[a, b]$ jest $\lfloor b \rfloor - \lceil a \rceil + 1$ liczb całkowitych.

Dowód. Najmniejsza liczba całkowita w przedziale to $\lceil a \rceil$, a największa to $\lfloor b \rfloor$.
Pomiędzy $\lceil a \rceil$ a $\lfloor b \rfloor$ jest $\lfloor b \rfloor - \lceil a \rceil - 1$ liczb, dodatkowo $\lceil a \rceil$ oraz $\lfloor b \rfloor$, to daje nam $\lfloor b \rfloor - \lceil a \rceil + 1$ liczb całkowitych. $\square$

(b) W przedziale $[a, b)$ jest $\lceil b \rceil - \lceil a \rceil$ liczb całkowitych.

Dowód. Najmniejszą liczbą całkowitą w przedziale jest $\lceil a \rceil$. Co do największej, to mamy dwa przypadki:

- Jeśli $b \in \mathbb{C}$ to największą liczbą w przedziale jest $b - 1$, ale $b \in \mathbb{C} \Rightarrow b = \lceil b \rceil$. Skoro tak to w tym przedziale mamy $\lceil b \rceil - 1 - \lceil a \rceil + 1 = \lceil b \rceil - \lceil a \rceil$ liczb całkowitych w przedziale.
- Jeśli $b \notin \mathbb{C}$ to największą liczbą w przedziale jest $\lfloor b \rfloor$, ale wiemy, że $b \notin \mathbb{C} \Rightarrow \lfloor b \rfloor = \lceil b \rceil - 1$, mamy więc $\lfloor b \rfloor - \lceil a \rceil + 1 = \lceil b \rceil - \lceil a \rceil$ liczb całkowitych w przedziale.

$\square$

(c) W przedziale $(a, b]$ jest $\lfloor b \rfloor - \lfloor a \rfloor$ liczb całkowitych.

Dowód. Największą liczbą całkowitą w przedziale jest $\lfloor b \rfloor$. Co do najmniejszej, to mamy dwa przypadki:

- Jeśli $a \in \mathbb{C}$ to najmniejszą liczbą w przedziale jest $a + 1$, ale $a \in \mathbb{C} \Rightarrow a = \lfloor a \rfloor$. Skoro tak to w tym przedziale mamy $\lfloor b \rfloor - (\lfloor a \rfloor + 1) + 1 = \lfloor b \rfloor - \lfloor a \rfloor$ liczb całkowitych w przedziale.
- Jeśli $a \notin \mathbb{C}$ to najmniejszą liczbą w przedziale jest $\lceil a \rceil$, ale wiemy, że $a \notin \mathbb{C} \Rightarrow \lceil a \rceil = \lfloor a \rfloor + 1$, mamy więc $\lfloor b \rfloor - \lceil a \rceil + 1 = \lfloor b \rfloor - \lfloor a \rfloor$ liczb całkowitych w przedziale.

$\square$

(d) W przedziale (a, b) jest $\lceil b \rceil - \lfloor a \rfloor - 1$ liczb całkowitych.

Dowód. Mamy cztery przypadki (choć bardzo podobne, zadbajmy jednak o jakiś formalizm):

- $a, b \in \mathbb{C}$
  Najmniejszą liczbą jest $a + 1 = \lfloor a \rfloor + 1$. Największą jest $b - 1 = \lceil b \rceil - 1$. Mamy więc $\lceil b \rceil - 1 - \lfloor a \rfloor - 1 + 1 = \lceil b \rceil - \lfloor a \rfloor - 1$ liczb całkowitych w przedziale.
- $a, b \notin \mathbb{C}$
  Najmniejszą liczbą jest $\lceil a \rceil = \lfloor a \rfloor + 1$ (bo $a \notin \mathbb{C}$). Największą liczbą jest $\lfloor b \rfloor = \lceil b \rceil - 1$. Mamy więc $\lceil b \rceil - 1 - \lfloor a \rfloor - 1 + 1 = \lceil b \rceil - \lfloor a \rfloor - 1$ liczb całkowitych w przedziale.
- $a \in \mathbb{C} \land b \notin \mathbb{C}$
  Najmniejszą liczbą jest $a + 1 = \lfloor a \rfloor + 1$. Największą liczbą jest $\lfloor b \rfloor = \lceil b \rceil - 1$. Mamy więc $\lceil b \rceil - 1 - \lfloor a \rfloor - 1 + 1 = \lceil b \rceil - \lfloor a \rfloor - 1$ liczb całkowitych w przedziale.
- $a \notin \mathbb{C} \land b \in \mathbb{C}$
  Najmniejszą liczbą jest $\lceil a \rceil = \lfloor a \rfloor + 1$. Największą jest $b - 1 = \lceil b \rceil - 1$. Mamy więc $\lceil b \rceil - 1 - \lfloor a \rfloor - 1 + 1 = \lceil b \rceil - \lfloor a \rfloor - 1$ liczb całkowitych w przedziale.

$\square$