Lista 6

Kamil Matuszewski

19.11.2015

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
X	X	X	X		X			X			X	X	X	X	X		X

Zadanie 1

Lewa strona: W delegacji możemy mieć od 1 do n osób. Wybieramy $\binom{n}{k}$ osób i na k sposobów wybieramy przewodniczącego. $k = 1..n$ więc mamy $\sum\limits_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$

Prawa strona: na n sposobów możemy wybrać przewodniczącego. Zostaje nam $n-1$ osób, i dla każdej decydujemy, czy jest ona w delegacji czy nie, mamy więc $n2^{n-1}$ sposobów.

Zadanie 2

Postawmy k jedynek, a pomiędzy nimi $k-1$ zer. Mamy więc ciąg 1010...1 i zostało nam $l-(k-1)$ zer. Możemy je wstawić w k miejscach - $k-1$ po jedynkach i jedno na końcu (ewentualnie na $k+1$, jeśli możemy wstawić także na początku). Z poprzednich ćwiczeń wiemy, że dowolną listę n nierozróżnialnych elementów możemy podzielić na k list (włącznie z listami pustymi) na $\binom{n+k-1}{k-1}$ sposobów. Tu robimy to samo: dzielimy listę pozostałych zer na k list $(k+1)$, dopuszczając też listy puste, i umieszczamy i-tą listę po i-tej jedynce, dostajemy dzięki temu wszystkie kombinacje.

Mamy listę długości $l-k+1$ i musimy ją podzielić na k list $(k+1)$, podstawiając do wzoru mamy $\binom{l-k+1+k-1}{k-1} = \binom{l}{k-1}$ jeśli nie dopuszczamy zer na początku, bądź $\binom{l-k+1+k+1-1}{k+1-1} = \binom{l+1}{k}$ jeśli dopuszczamy zera na początku.

Zadanie 3

Nasze A to liczby podzielne przez 2, B to liczby podzielne przez 3, C to liczby podzielne przez 5 i D to liczby podzielne przez 7. W rzeczywistości chcemy policzyć $|(A \cup B)|$, jednak nie chcemy, by w tej sumie znalazły się liczby podzielne przez 5 lub 7. Dlatego odejmijmy od sumy liczby podzielne przez 2 i 5 lub 7, oraz liczby podzielne przez 3 i 5 lub 7. Chcemy więc policzyć

$|(A \cup B)| - |((A \cap (C \cup D)) \cup (B \cap (C \cup D))|$

Wiemy, że liczb naturalnych pomiędzy 1 i n podzielnych przez a jest dokładnie $\frac{n}{a}$. Stąd nasz wynik to:

$$(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - \lfloor \frac{n}{2 \cdot 3} \rfloor) - ((\lfloor \frac{n}{2 \cdot 5} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2 \cdot 7} \rfloor - \lfloor \frac{n}{2 \cdot 5 \cdot 7} \rfloor) + (\lfloor \frac{n}{3 \cdot 5} \rfloor + \lfloor \frac{n}{3 \cdot 7} \rfloor - \lfloor \frac{n}{3 \cdot 5 \cdot 7} \rfloor) - (\lfloor \frac{n}{2 \cdot 3 \cdot 5} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2 \cdot 3 \cdot 7} \rfloor - \lfloor \frac{n}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} \rfloor))$$

Zadanie 4

Z zasady włączeń i wyłączeń.

Wszystkich permutacji mamy $n!$ Niech $|A_i|$ - układ, w którym na i-tej pozycji jest i-ta liczba. Interesuje nas $n! - |A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k|$

Możemy zauważyć, że:

$|A_i| = (n-1)!$, bo jedną pozycję mamy ustaloną, a pozostałe wybieramy. Analogicznie:

$|A_i \cap A_j \cap A_k| = (n-3)!$

...

$|A_1 \cap ... \cap A_j| = (n-j)!$

...

$|A_1 \cap ... \cap A_k| = (n-k)!$

$|\bigcap\limits_{i=1}^{k} A_i| = (n-k)!$ - to oznacza, że jest k liczb takich, że i-ta liczba jest na i-tej pozycji. Podstawiając do wzoru z zasady włączeń i wyłączeń otrzymujemy wynik:

$n! - \sum\limits_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \binom{k}{i} (n-i)!$

Zadanie 6

Ponownie, z zasady włączeń i wyłączeń: Wszystkich opcji mamy 20^n. Niech $|A_i|$ oznacza, że i-ta szafa jest pusta. W takim razie mamy $(20-4)^n$ opcji (bo 4 szuflady są puste). Tym samym sposobem, $|A_1 \cap A_2| = (20 - 4 \cdot 2)^n$
$|A_1 \cap ... \cap A_i| = (20 - 4 \cdot i)^n$
A interesuje nas: $20^n - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5|$, a podstawiając pod wzór włączeń i wyłączeń mamy:
$20^n - \sum\limits_{i=1}^{5} (-1)^{i+1} \binom{5}{i} (20 - 4 \cdot i)^n$

Zadanie 9

Mamy n par wrogów, czyli $2n$ osób. Mamy okrągły stół, więc musimy wybrać jakiś punkt odniesienia (np ciągi $abcde$ i $bcdea$ są teoretycznie różne ale przy okrągłym stole są takie same), ustawiamy więc 1 osobę i względem niej na $(2n-1)!$ sposobów ustawiamy resztę osób.

Teraz rozpatrzymy $|A_i|$ - takie ustawienie, że i-ta para wrogów siedzi obok siebie. Podobnie $|A_i \cap A_j|$ oznaczać będzie, że i-ta i j-ta para siedzi obok siebie. Szukamy $(2n-1)! - |A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n|$

$|\bigcap\limits_{i=1}^{k} A_i|$ oznacza więc, że k par wrogów siedzi koło siebie. Pozostałych osób jest więc $2n-2k$ i te osoby siedzą dowolnie. Możemy je ustawić na $(2n-2k-1)!$ sposobów (patrz wyżej). Pomiędzy nimi musimy ustawić k par osób. Obok każdego posadzonego przy stole możemy posadzić parę - pierwszą parę możemy więc usadzić na jednym z $2n-2k$ miejsc, drugą na jednym z $2n-2k+1$ miejsc (bo pary nie możemy rozdzielić), k-tą - $2n-2k+(k-1)$ miejsc. Mamy więc iloczyn $(2n-2k-1)! \cdot (2n-2k) \cdot (2n-2k+1) \cdot ... \cdot (2n-2k+k-1) = (2n-k-1)!$ sposobów, jednak, zwróćmy uwagę, że każdą parę wrogów możemy "zamienić" wewnątrz pary, co w tym iloczynie traktowaliśmy jako jedną opcję, a w rzeczywistości są to dwa różne ustawienia (np: a i b to wrogowie, możemy ich usadzić jako ab i ba i to są dwie opcje), musimy więc pomnożyć tą liczbę przez 2^k (bo jest k par). Otrzymujemy więc, że:

$|\bigcap\limits_{i=1}^{k} A_i| = (2n-k-1)! \cdot 2^k$

Podstawiając to pod wzór z zasady włączeń i wyłączeń otrzymujemy:

$(2n-1)! - \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} \cdot (2n-i-1)! \cdot 2^i$

Więc jest to nasz wynik.

Zadanie 12

a) i b) tak, zbiory są zamknięte na działania składania funkcji i na branie elementu odwrotnego
c) - nie, twierdzenie Lagrange'a mówi, że w grupie skończonej, rząd podgrupy jest dzielnikiem rzędu grupy, rząd naszej podgrupy to 7 a rząd grupy S_5 to 120.

Zadanie 13

Z algebry wiemy, że $|O_x||G_x| = |G|$, gdzie $|O_x|$ - liczba orbit elementu x, $|G_x|$ - liczba stabilizatorów el. x, oraz, z treści, że $|G| = 2^k$, i że $|X|$ jest nieparzysta.
Ze wzoru, wiemy, że albo $O_x = 1$ albo $O_x = 2^l$, gdzie $l > 0$ i $l \in \mathbb{N}$
Stąd, dla każdego x, $|O_x|$ jest dzielnikiem $|G|$. Ponadto X jest rozłączną sumą takich orbit (również algebra), stąd musi istnieć orbita jednoelementowa, bo inaczej wszystkie orbity miałyby parzystą liczbę elementów, więc $|X|$ byłaby parzysta, a przecież nie jest.

Zadanie 14

Mamy $|O_x||G_x| = |G|$, gdzie $|O_x| = 12$ (12 ścian), musimy policzyć $|G_x|$, ale symetrii pięciokąta mamy 10 (5 obrotów i 5 symetrii) więc $|G_x| = 10$, mamy więc $12 \cdot 10 = 120 = |G|$, co jest naszą odpowiedzią.

Zadanie 15

Mamy 8 ścian, dla dowolnej ściany możemy przypisać jedną liczbę: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 lub 8. Mamy więc 8! możliwości. Do tego mamy $|O_x||G_x| = |G|$, gdzie $|O_x| = 8$ (8 ścian), musimy policzyć $|G_x|$. Ale ośmiościan foremny ma w podstawie trójkąt równoboczny, który możemy obrócić na 3 sposoby, więc $|G_x| = 3$, mamy więc $8 * 3 = 24 = |G|$, co jest naszą mocą grupy. Przy wybraniu 8! możliwości uwzględniliśmy też kostki identyczne (czyli takie które możemy przekształcić na siebie przez obrót), więc nasze 8! musimy podzielić przez moc grupy obrotów, mamy więc $\frac{8!}{24}$ możliwości.

Teraz ile mamy kostek prawidłowych? Pierwszą ścianę możemy wybrać na 8 sposobów, na przeciwko będzie konkretna liczba (suma na przeciwnych ścianach musi być 9), kolejną na 6(bo 2 już postawiliśmy), potem 4 potem 2.
Mamy więc $8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2$, ale podobnie jak w poprzednim przypadku, musimy odjąć obroty, dlatego musimy podzielić na moc grupy. Stąd nasz wynik to $\frac{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{24}$

Zadanie 16

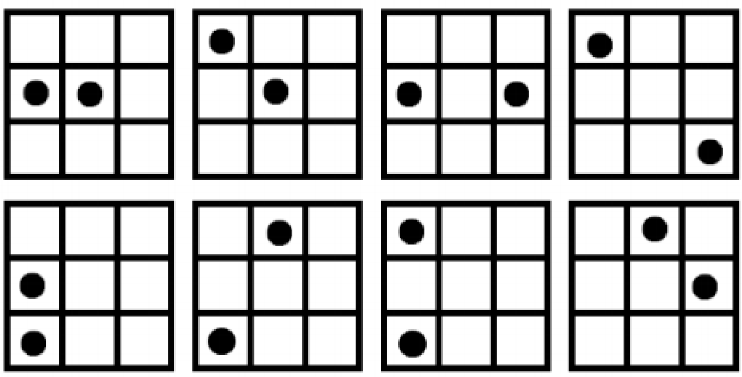
Nasza karta to kwadrat 3x3. Naszą grupą obrotów jest: G={id, o90, o180, o270, —, \, /, − }, $|G| = 8$.

Używając Lematu Burnside'a, wyznaczamy liczbę punktów stałych przekształceń.
$fix(id) = \binom{9}{2}$ bo wybieramy 2 dziurki z 9 możliwych miejsc, a punktem stałym identyczności jest każde ustawienie.
$fix(o90) = fix(o270) = 0$ bo nie ważne jak ustawimy kropki, obrót o 90 w prawo/lewo nie da nam tego samego.
$fix(o180) = 4$ bo umieszczamy jedną kropkę, a kolejną dajemy tam, gdzie znajdzie się nasza kropka po obrocie o 180.
$fix(|) = fix(\backslash) = fix(/) = fix(-) = 6$ bo możemy albo umieścić 2 kropki gdzieś na środku ($\binom{3}{2} = 3$), albo poza osią symetrii, jednak kolejny punkt będzie zależał od poprzedniego i osi symetrii, więc znów mamy $\binom{3}{2} = 3$, a 3+3=6, co daje nam wynik.

Teraz, ze wzoru:
$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} fix(g)$

$\frac{1}{8} \sum_{g \in G} fix(g) = \frac{\binom{9}{2} + 2 \cdot 0 + 4 + 4 \cdot 6}{8} = \frac{64}{8} = 8$, a to jest to co chcieliśmy pokazać.

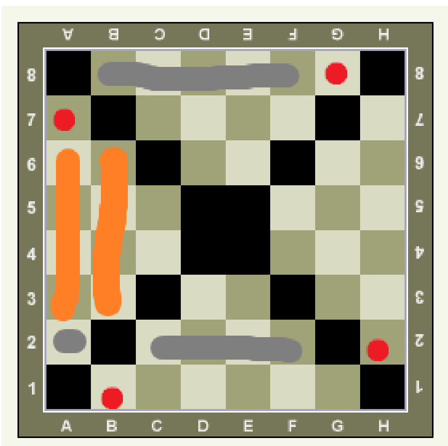
Te karty



Zadanie 18

Z Lematu Burnside'a mamy $\frac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G} fix(g)$.
Naszą grupą jest grupa symetrii kwadratu: G={id, o90, o180, o270, —, \, /, − }, $|G| = 8$.
$fix(id) = 8!$, bo pierwszy wiersz możemy wybrać na 8 sposobów, drugi na 7 trzeci na 6 itd.
$fix(o180) = 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2$, podzielmy sobie planszę na pół, i stawiajmy wieże na jednej z połówek. Musimy postawić 4 wieże (pozostałe 4 powstaną przez odbicie), a mamy 4 wiersze. Musimy więc postawić po jednej w każdym wierszu. Tak więc mamy 8 sposobów na wybranie miejsca w wierszu pierwszym, w którym ma stać pierwsza wieża. Ale ta wieża odbije się o 180 stopni, przez co usuną się nam 2 kolumny. Kolejną wieżę możemy więc postawić na 6 sposobów. Kolejną - z tego samego powodu - na 4. Kolejną już na 2 sposoby. Stąd wynik $8 * 6 * 4 * 2$.
$fix(o90) = fix(o270) = 12$, bo nie możemy stawiać wież w punktach na skosie szachownicy (bo po obrocie by się biły). Linie na których nie możemy stawiać wież tworzą nam 4 części, po 12 pól każda(6 wierszy i 3 kolumny). Ponownie stawiamy wieże tylko na jednym z pól, a resztę wież stawiamy zgodnie z obrotem. Po obrocie o 90/270 pojawią się nam 4 wieże, usuną się więc 4 wiersze, poza przypadkami, kiedy postawimy wieżę tak, by jej odbicie usuwało jeden z "nieaktywnych" wierszy (patrz obrazek), ale wtedy usuną się nam 2 z 3 kolumn. Po wyborze jednego z 12 miejsc, zawsze pozostaną nam 2 miejsca do wyboru, mamy więc $12 \cdot 2$, jednak kolejność miejsc nie ma znaczenia, a my policzyliśmy dwukrotnie tą samą sytuację, musimy więc wynik podzielić przez 2.
$fix(|) = fix(-) = 0$, bo nie ważne jak ustawimy wieże, po symetrycznym odbiciu będzie ona w tym samym wierszu/kolumnie, a chcieliśmy niebijące się wieże..
$fix(/) = fix(\backslash)$. Tu mamy jakąś oś symetrii, i względem niej rozstawiamy wieże. Rozpatrzmy następujące przypadki:
Gdy 0 wież na osi: $7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1$ - bo pierwszy wiersz wybieramy na 7 sposobów, po symetrycznym odbiciu usuną nam się dwa wiersze i dwie kolumny, więc następny wiersz możemy wybrać na 5 sposobów, kolejny na 3, kolejny na 1.
Gdy 2 wieże na osi: $\binom{8}{2} \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1$ - bo wybieramy z 8 miejsc na osi 2 na które postawimy wieże, usuwają się nam 2 wiersze i 2 kolumny, więc kolejną wieżę stawiamy na jednym z $7-2 = 5$ miejsc, znów pojawiają się nam 2 wieże, usuwają 2 wiersze i 2 kolumny, mamy więc 3 miejsca potem zostaje nam 1.
Gdy 4 wieże na osi: $\binom{8}{4} \cdot 3 \cdot 1$ - analogicznie do powyżej.
Gdy 6 wież na osi: $\binom{8}{6} \cdot 1$ - analogicznie do powyżej.
Gdy 8 wież na osi: $\binom{8}{8}$ - analogicznie do powyżej.
Zauważmy, że na osi symetrii nie może być nieparzysta liczba wież, bo wieże na osi się nie odbijają symetrycznie (czyli stawiamy tylko jedną), i musimy dostawić nieparzystą liczbę wież poza osią, co jest niewykonalne (bo zawsze stawiamy po 2 jeśli nie stawiamy na osi). Nie możemy więc mieć ani 1 ani 3 ani 5 ani 7 wież na osi.
Suma tego daje nam wynik. Mamy więc:
$\frac{1}{8}\sum\limits_{g\in G} fix(g) =$

$$\frac{8!+8\cdot 6\cdot 4\cdot 2+2\cdot 12+2\cdot 0+2\cdot(7\cdot 5\cdot 3\cdot 1+\binom{8}{2}\cdot 5\cdot 3\cdot 1+\binom{8}{4}\cdot 3\cdot 1+\binom{8}{6}\cdot 1+\binom{8}{8})}{8} = \frac{42256}{8} = 5282$$



Wieże usuwają kolumny i zostawiają 2 pola (przypadek $fix(o90)ifix(o270)$).