Lista 14

Kamil Matuszewski

29 stycznia 2016

1	2	3	4	5	6	7	8	9
✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	

Zadanie 1

Oblicz wektory reszt $\widetilde{r} = A\widetilde{x} + b$ $\widehat{r} = A\widehat{x} + b$ oraz wektory błędów $\widetilde{e} = x - \widetilde{x}$ $\widehat{e} = x - \widehat{x}$ dla:

$$A = \begin{vmatrix} 780 & 563 \\ 913 & 659 \end{vmatrix}, b = \begin{vmatrix} 217 \\ 254 \end{vmatrix}, \widetilde{x} = \begin{vmatrix} 0.999 \\ -1.001 \end{vmatrix}, \widehat{x} = \begin{vmatrix} 0.341 \\ -0.087 \end{vmatrix}$$

$$A\widetilde{x} = \begin{vmatrix} 215.657 \\ 252.428 \end{vmatrix}$$

$$A\widehat{x} = \begin{vmatrix} 216.999 \\ 254 \end{vmatrix}$$

$$A\widetilde{x} - b = \begin{vmatrix} -1.343 \\ -1.572 \end{vmatrix}$$

$$A\widehat{x} - b = \begin{vmatrix} -0.001 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$x = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix}$$

$$\widetilde{e} = \begin{vmatrix} -0.001 \\ -0.001 \end{vmatrix}$$

$$\widehat{e} = \begin{vmatrix} -0.659 \\ 0.913 \end{vmatrix}$$

Zadanie 2

Znajdź rozkład macierzy

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 9 & 12 & 15 \\ 3 & 26 & 41 & 49 \\ 5 & 40 & 107 & 135 \end{vmatrix}$$

Potem wykorzystaj ten rozkład do obliczenia wartości jej wyznacznika oraz macierzy A^{-1}

Wystarczy rozwiązać układ równań:

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}$$

$$l_{ji} = \frac{1}{u_{ii}} (a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} u_{ki})$$

$$L = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$U = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$$

$$det(A) = det(L) \cdot det(U) = 1 \cdot det(U) = det(U) = 400$$

Żeby policzyć A^{-1} wystarczy policzyć $U^{-1} \cdot L^{-1}$.

$$[U|I] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \frac{-2}{5} & \frac{-3}{40} & \frac{-21}{760} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{-3}{20} & \frac{-1}{380} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{-9}{152} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{19} \end{vmatrix}$$

$$[L|I] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 0 \\ -28 & 22 & -7 & 1 \end{vmatrix}$$

Teraz wystarczy wymnożyć:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{-2}{5} & \frac{-3}{40} & \frac{-21}{400} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{-3}{20} & \frac{-1}{200} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{-9}{80} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 0 \\ -28 & 22 & -7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{579}{200} & \frac{-251}{200} & \frac{117}{400} & \frac{-21}{400} \\ \frac{-101}{100} & \frac{69}{100} & \frac{-23}{200} & \frac{-1}{200} \\ \frac{151}{40} & \frac{-119}{40} & \frac{73}{80} & \frac{-9}{80} \\ \frac{-14}{5} & \frac{11}{5} & \frac{-7}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

Można sprawdzić, że działa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 9 & 12 & 15 \\ 3 & 26 & 41 & 49 \\ 5 & 40 & 107 & 135 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{579}{200} & \frac{-251}{200} & \frac{117}{400} & \frac{-21}{400} \\ \frac{-101}{100} & \frac{69}{100} & \frac{-23}{200} & \frac{-1}{200} \\ \frac{151}{40} & \frac{-119}{40} & \frac{73}{80} & \frac{-9}{80} \\ \frac{-14}{5} & \frac{11}{5} & \frac{-7}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zadanie 3

Stosując metodę faktoryzacji, rozwiąż układ równań:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 8 \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} 4 \\ 10 \\ 16 \\ 18 \end{vmatrix}$$

Najpierw, podobnie jak w poprzednim, rozbijam macierz A na L i U:

$$A = LU$$

$$L = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$U = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Teraz policzę $Ly = b$ i $Ux = y$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \\ 10 \\ 16 \\ 18 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \\ 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \\ 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Zadanie 4

Opracuj algorytm znajdowania rozkładu LU macierzy trójprzekątniowej.

Mając macierz

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & & & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & & & a_n & b_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & & & 0 \\ l_2 & 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & l_{n-1} & 1 & 0 \\ 0 & & & l_n & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 & d_1 & & & 0 \\ 0 & u_2 & d_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & u_{n-1} & d_{n-1} \\ 0 & & & 0 & u_n \end{vmatrix}$$

Teraz, z mnożenia macierzy $A = LU$:

$$d_k = c_k$$

$$b_1 = u_1 \Rightarrow u_1 = b_1$$

$$a_k = l_k u_{k-1} \Rightarrow l_k = \frac{a_k}{u_{k-1}}$$

$$b_k = l_k c_{k-1} + u_k \Rightarrow u_k = b_k - l_k c_{k-1}$$

Zadanie 5

(a) Pokaż, że iloczyn dwóch macierzy dolnotrójkątnych (górno) jest macierzą dolnotrójkątną (górno).

Dowód. Niech $C = AB$. $C = (c_{ij})$, gdzie:

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj}.$$

Ustalmy $i < j$, ponieważ B jest trójkątna dolna, dla $s < j$ $b_{sj} = 0$, więc:

$$c_{ij} = \sum_{s=j}^{n} a_{is} b_{sj}.$$

Ale A też jest trójkątna dolna, więc dla $i < s$ $a_{is} = 0$, co daje nam $c_{ij} = 0$ dla $i < j$.
Analogicznie dla trójkątnej górnej.

□

(b) Pokaż, że jeśli A jest macierzą trójkątną dolną z jedynkami na głównej przekątnej, to sama jest macierzą tego typu.

Dowód. Używając metody Gaussa-Jordana wychodzimy od macierzy $[I|A]$ wystarczy odpowiednio wyeliminować kolejne kolumny macierzy A. W ten sposób nie naruszymy ani głównej przekątnej ani miejsc nad główną przekątną. W końcu powstanie nam macierz $[B|I]$, gdzie B jest macierzą dolnotrójkątną z jedynkami na głównej przekątnej. Wiemy, że macierz B jest macierzą odwrotną do A.

□

Zadanie 6

Zaproponuj algorytm wyznaczania macierzy odwrotnej do macierzy dolnotrójkątnej i oszacuj jego złożoność.

Metoda eliminacji Gaussa-Jordana. Wykonujemy kolejno (n-1) odejmowań (do eliminowania pierwszej kolumny), (n-2) (do drugiej kolumny), (n-3), …, (n-n+1), (n-n).
Daje nam to sumaryczną złożoność $O(n^2)$. Nie miała być turboszybka xD

Zadanie 7

Metodą eliminacji w wersji skalarnej rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} 3x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 16 \\ x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & = & -12 \\ 6x_1 & + & 3x_2 & + & 7x_3 & = & 102 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 16 \\ 0 & + & \frac{11}{3}x_2 & - & 2x_3 & = & \frac{-52}{3} \\ 0 & - & 5x_2 & + & x_3 & = & 70 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 16 \\ 0 & + & \frac{11}{3}x_2 & - & 2x_3 & = & \frac{-52}{3} \\ 0 & + & 0 & - & \frac{19}{11} & = \frac{510}{11} \end{cases}$$

$$x = \begin{vmatrix} 58 \\ \\ -\frac{368}{19} \\ \\ -\frac{510}{19} \end{vmatrix}$$

Zadanie 8

Rozwiąż układ z poprzedniego zadania stosując metodę macierzową.

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & -1 \\ 6 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

$$M^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A^{(2)} = M^{(1)}A^{(1)} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 0 & \frac{11}{3} & -2 \\ 0 & -\frac{15}{3} & 1 \end{vmatrix}$$

$$b^{(2)} = M^{(1)}b^{(1)} = \begin{vmatrix} 16 \\ -\frac{52}{3} \\ 70 \end{vmatrix}$$

$$M^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{15}{11} & 1 \end{vmatrix}$$

$$A^{(3)} = M^{(2)}A^{(2)} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 0 & \frac{11}{3} & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{30}{11} \end{vmatrix}$$

$$b^{(3)} = M^{(2)}b^{(2)} = \begin{vmatrix} 16 \\ -\frac{52}{3} \\ \frac{510}{11} \end{vmatrix}$$

$$x = \begin{vmatrix} 58 \\ -\frac{368}{19} \\ -\frac{510}{19} \end{vmatrix}$$