Lista 5

Kamil Matuszewski

31 marca 2016

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
✓	✓	✓	✓	✓	✓				✓	✓

Zadanie 1

Znajdź MGF dla zmiennej $X \sim B(n,p)$.

Po pierwsze gęstość $X \sim B(n,p)$ to $\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$. Po drugie, MFG $M(t) = E(e^{tX})$. Podstawiamy i mamy:

$$E(e^{tX}) = \sum_{k=0}^{n} e^{tk}\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(pe^t)^k q^{n-k} = (pe^t+q)^n = (pe^t+1-p)^n$$

Zadanie 2

Znajdź MFG dla zmiennej $X \sim Poisson(\lambda)$.

To samo co wyżej. Gęstość $X \sim Poisson(\lambda)$ to $f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$. Podstawiamy i mamy:

$$M(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(e^t\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda+\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t-1)}$$

Zadanie 3

Znajdź MGF dla zmiennej $X \sim Gamma(b,p)$

To samo. Gęstość $X \sim Gamma(b,p)$ to $f(x) = \frac{b^p}{\Gamma(p)}x^{p-1}e^{-bx}$. Podstawiamy, i mamy:

$$M(t) = \int_0^\infty e^{tx}\frac{b^p}{\Gamma(p)}x^{p-1}e^{-bx}dx = \int_0^\infty \frac{b^p}{\Gamma(p)}x^{p-1}e^{(t-b)x}dx = \begin{cases} y = (b-t)x & x = \frac{y}{b-t} \\ dx = \frac{1}{b-t}dy \end{cases}$$

$$M(t) = \int_0^\infty \frac{b^p}{\Gamma(p)}x^{p-1}e^{-y}\frac{1}{\lambda - t}dy = \frac{b^p}{\Gamma(p)(b-t)^p}\int_0^\infty y^{p-1}e^{-y}dy = \frac{b^p}{\Gamma(p)(b-t)^p}\Gamma(p) = \left(\frac{b}{b-t}\right)^p$$

Zadanie 4

Mamy zmienną $Z = \sum\limits_{k=1}^{\infty} X_k$. Podać rozkład Z dla $X_k \sim N(\mu_k, \sigma_k^2)$

Po pierwsze, wyznaczmy MFG rozkładu normalnego. Gęstość rozkładu normalnego to $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2/\sigma^2}$

$$M(t) = \int e^{xt} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2/\sigma^2} dx = \begin{cases} z = \frac{x-\mu}{\sigma} & x = z\sigma + \mu \\ dx = \sigma dz \end{cases}$$

$$M(t) = e^{\mu t} \int e^{z\sigma t} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \sigma dz = e^{\mu t} \int e^{z\sigma t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = *$$

Teraz:

$$\int e^{zt} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$e^{zt} e^{-\frac{1}{2}z^2} = e^{-\frac{1}{2}z^2 + zt} = e^{-\frac{1}{2}(z-t)^2} e^{\frac{1}{2}t^2}$$

$$e^{\frac{1}{2}t^2} \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z-t)^2} dz = e^{\frac{1}{2}t^2} \int_{\mathbb{R}} N(t,1) = e^{\frac{1}{2}t^2}$$

Ostatnia równość stąd, że to całka po gęstości która zawsze jest 1 (z definicji).

$$* = e^{\mu t} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

Wróćmy do zadania. Wiemy, że dla $Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ jeśli zmienne są niezależne, to zachodzi $M_Z(t) = M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) \ldots M_{X_n}(t)$. Stąd, mamy:

$$M_Z(t) = M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) \ldots M_{X_n}(t) = e^{\mu_1 t} e^{\frac{1}{2}\sigma_1^2 t^2} e^{\mu_2 t} e^{\frac{1}{2}\sigma_2^2 t^2} \ldots e^{\mu_n t} e^{\frac{1}{2}\sigma_n^2 t^2} = exp\{t \sum_{k=1}^{n} \mu_k\}\{\frac{1}{2} t^2 \sum_{k=1}^{n} \sigma_n^2\}$$

Oznaczając $a = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu_k$ i $b = \sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_n^2$ otrzymujemy funkcję generującą momenty dla rozkładu $N(a, b)$

Zadanie 5

Mamy zmienną $Z = \sum\limits_{k=1}^{\infty} X_k$. Podać rozkład Z dla $X_k \sim Gamma(b, p_k)$

Tu już mamy funkcję generującą momenty. Liczyliśmy ją z w zadaniu 3. Podobnie jak w poprzednim:

$$M_Z(t) = M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) \ldots M_{X_n}(t) = \left(\frac{b}{b-t}\right)_1^p \left(\frac{b}{b-t}\right)_2^p \ldots \left(\frac{b}{b-t}\right)_k^p$$

Więc, dla $a = \sum_{k=1}^{n} p_k$ mamy:

$$M_Z(t) = \left(\frac{b}{b-t}\right)^a$$

Stąd otrzymujemy funkcję generującą momenty dla rozkładu $Gamma(b, a)$

Zadanie 6

Mamy zmienną $Z = \sum\limits_{k=1}^{\infty} X_k$. Podać rozkład Z dla $X_k \sim B(m_k, p)$

Mamy już funkcję generującą momenty z zad 1. Podobnie jak w poprzednich:

$$M_Z(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)\dots M_{X_n}(t) = (pe^t + 1 - p)^{m_1}(pe^t + 1 - p)^{m_2}\dots(pe^t + 1 - p)^{m_n}$$

Więc, dla $a = \sum_{k=1}^{n} m_k$ mamy:

$$M_Z(t) = (pe^t + 1 - p)^a$$

Stąd otrzymujemy funkcję generującą momenty dla rozkładu $B(a, p)$.

Zadanie 10

Mamy MGF $M_U(t) = \frac{2}{2-3t}$. Wyznacz:

a) Wartość oczekiwaną:
To po prostu pochodna - $M'_U(t) = \left(\frac{2}{2-3t}\right)' = \frac{6}{(2-3t)^2}$, $M'_U(0) = \frac{6}{4}$.

b) Wariancje:
Druga pochodna w punkcie 0 - $E(X^2) = \frac{36}{8}$ odjąć $(E(X))^2 = \frac{36}{16}$, stąd $V(X) = \frac{36}{8} - \frac{36}{16} = \frac{9}{4}$

c) MGF podatku od zysku, przy założeniu stopy podatkowej liniowej, 90%
Niech $Y = 0,9U$. Wiemy, że $M_{aX}(t) = M_X(at)$. Stąd, wynik to $\frac{2}{2-2,7t}$

Zadanie 11

Mamy MFG zmiennej losowej X. Co można powiedzieć o Y, gdy:

a) $M_Y(t) = M(2t)M(4t)$
$M_{2X_1+4X_2}(t) = M_{2X_1}(t)M_{4X_2}(t) = M(2t)M(4t)$ jeśli X_1 i X_2 są niezależne.

b) $M_Y(t) = e^{2t}M(t)$
$M_{X+2} = E(e^{(X+2)t}) = E(e^{Xt}e^{2t}) = \int e^{xt}e^{2t}f(x) = e^{2t}\int e^{xt}f(x) = e^{2t}E(e^{Xt}) = e^{2t}M(t)$

c) $M_Y(t) = 4M(t)$
Tu można coś pomachać, że dla dowolnej funkcji $M(0) = 1$, więc $4M(0) = 4$