# Lista 10

Kamil Matuszewski

16 grudnia 2015

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|  | ✓ | ✓ | ✓ |  | ✓ |  |  |  |  | ✓ |  |  |  |  |

## Zadanie 2

(a) Nie istnieje, bo z lematu o uściskach dłoni, suma stopni wierzchołków musi być podzielna przez 2.

(b) Nie istnieje. Weźmy wierzchołek o stopniu 4, wszystkich wierzchołków jest 5, więc ten musi się łączyć z każdym innym. Teraz weźmy wierzchołek o stopniu 3, łączy się on z wierzchołkiem o stopniu 4, i musi łączyć się jeszcze z dwoma innymi wierzchołkami. Ale wszystkie pozostałe łączą się z wierzchołkiem o stopniu 4, i mają stopień 1, więc nie mogą mieć więcej krawędzi, stąd taki graf nie ma prawa istnieć.

(c) Weźmy dowolny graf dwudzielny o 5 wierzchołkach. Każdy wierzchołek musi mieć stopień 2, czyli łączyć się dokładnie z dwoma wierzchołkami z drugiej podgrupy. Skoro tak to jedynym sposobem podzielenia wierzchołków jest stosunek $3-2$(lub $2-3$) (bo inaczej nie możemy poprowadzić dwóch krawędzi do drugiej podgrupy). Ale w takim razie dla jednego z wierzchołków z podgrupy 3-elementowej nie wystarczy elementów z podgrupy 2 elementowej, a skoro tak, to mamy sprzeczność z tym, że stopień każdego z wierzchołków to 2.

## Zadanie 3

*Dowód.* Weźmy dowolne dwie krawędzie z grafu $G$ i nazwijmy je odpowiednio $a$ oraz $b$. Załóżmy też, że $d(G) > 3$. Rozpatrzmy dwa przypadki.

$1^\circ$ $d(a,b) > 1$

To oznacza, że w grafie G nie istnieje krawędź między a i b. Wtedy w grafie $\hat{G}$ ta krawędź istnieje, więc $d'(a,b) = 1$.

$2^\circ$ $d(a,b) = 1$

Wtedy między $a$ i $b$ w $G$ istnieje krawędź, więc w $\hat{G}$ tej krawędzi nie będzie. Pokażę, że w $G$ istnieje wierzchołek $w$ taki, że $d(a,w) > 1 \cap d(b,w) > 1$. To oznacza, że:

$$\exists_w (a,w) \notin E \wedge (b,w) \notin E$$

Załóżmy, że nie ma takiego wierzchołka. Wtedy:

$$\neg \left(\exists_w (a,w) \notin E \wedge (b,w) \notin E\right)$$

$$\forall_w (a,w) \in E \vee (b,w) \in E$$

To by oznaczało, że wierzchołki $a$ i $b$ w sumie łączą się z każdym innym wierzchołkiem. Ale to by oznaczało, że dla dowolnych wierzchołków $x$ i $y$ w grafie $G$, z $x$ mogę dotrzeć do $y$ w maksymalnie trzech krokach (zależnie od tego w których miejscach leżą $x$ i $y$):

$$(x - a - b - y)/(x - b - a - y)/(x - a - y)/(x - b - y)/(x - y)$$

Czyli dla dowolnych $x$ i $y$ $d(x,y) \leqslant 3$, ale wiemy, że $d(G) > 3$, więc mamy sprzeczność.
Stąd istnieje wierzchołek $w$ taki, że $d(a,w) > 1 \wedge d(b,w) > 1$, a skoro tak, to dla $\hat{G}$ mamy $d(a,b) = 2$

$$(a - w - b)$$

Pokazaliśmy,że dla dowolnych $a$ i $b$, w $\hat{G}$ $d'(a,b) = 1$ lub $d(a,b) = 2$, czyli $d(\hat{G}) < 3$

□

## Zadanie 4

*Dowód.* Weźmy wierzchołek $v$ o stopniu $n - 2$ i poprowadźmy $n - 2$ krawędzie. Wtedy ten wierzchołek jest połączony z $n - 2$ innymi wierzchołkami. Zostaje nam jeden wierzchołek. Musi być on odległy od $v$ o 2. Nazwijmy ten wierzchołek $w$. Połączmy go z dowolnym sąsiadem $v$. Teraz, od wszystkich pozostałych sąsiadów $v$, $w$ jest odległy o 3. A $d(G) = 2$. Skoro tak, to musimy stworzyć dodatkowe krawędzie do pozostałych $n - 3$ sąsiadów $v$. Możemy te krawędzie prowadzić bezpośrednio z $w$, bądź z wierzchołka który jest już sąsiadem $w$. Tak czy inaczej, dodajemy $(n-3)$ krawędzie. Stąd, sumaryczna liczba krawędzi to $(n-2)+1+(n-3) = 2n-4$. Oczywiście, możemy dołożyć więcej krawędzi pomiędzy sąsiadami $v$, ale nie wpłynie nam to na nierówność

$$m \geqslant 2n - 4$$

A to jest to co mieliśmy pokazać.

□

## Zadanie 6

*Dowód.* Weźmy dowolne drzewo i załóżmy, że istnieją w nim drogi rozłączne $a \rightsquigarrow b$ i $c \rightsquigarrow d$, oraz $a \rightsquigarrow c$ i $b \rightsquigarrow d$. Skoro tak, to z wierzchołka $a$ możemy dotrzeć dwiema drogami do $c$:

$$a \rightsquigarrow c$$

oraz

$$a \rightsquigarrow b \rightsquigarrow d \rightsquigarrow c$$

Skoro droga $b - d$ jest rozłączna z drogą $a \rightsquigarrow c$ to na drodze $a \rightsquigarrow c$ nie ma ani $b$ ani $d$. Skoro tak, to te dwie drogi są rozłączne, więc w tym grafie istnieje cykl - skoro tak, to graf nie jest drzewem, mamy więc sprzeczność.

$\square$

## Zadanie 11

*Dowód.* Z tw. Cayleya (z wykładu) wiemy, że drzew na zbiorze wierzchołków $\{1, \ldots, n\}$ jest $n^{n-2}$. Skoro tak, to na zbiorze $\{2, \ldots, n\}$ jest ich $(n-1)^{n-3}$. Teraz weźmy drzewo o $n$ wierzchołkach, i zabierzmy z niego liść o indeksie 1. Powstało nam $n-1$ wierzchołkowe drzewo. Wiemy, że wszystkich takich drzew jest $(n-1)^{n-3}$. Teraz dostawmy liść z powrotem. Wiemy, że musiał on być połączony z którymś z $n-1$ wierzchołków. Skoro tak, to ogólna liczba sposobów stworzenia $n$ wierzchołkowego drzewa z liściem o indeksie 1 to $(n-1) \cdot (n-1)^{n-3} = (n-1)^{n-2}$. Skoro tak, to prawdopodobieństwo to:

$$\frac{(n-1)^{n-2}}{n^{n-2}} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-2} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{-n}\right)^{n-2} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{-n}\right)^{-n}\right)^{\frac{n-2}{-n}} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{n-2}{-n}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$\square$