Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Lista zadań nr 6. 7 i 11 kwietnia

1. Wykazać, że $D_n = n$, gdzie

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Zmienna losowa X ma rozkład $Poisson(\lambda)$. Wykazać że $E\left[X^n\right] = \lambda E\left[(X+1)^{n-1}\right]$. Z pomocą tego związku obliczyć $E\left[X^3\right]$.

3. Zmienna losowa X ma rozkład Poissona z parametrem λ, gdzie $0 < \lambda < 1$. Znaleźć wartość $E[X!]$.

4. Niech $I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx$. Mamy $I^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{2}\right\} dy\, dx$. Stosując podstawienie $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, wykazać, że $I^2 = 2\pi$.

5. Dane są niezależne zmienne losowe X, Y o rozkładzie $U[0,1]$. Niech x, y będą wylosowanymi wartościami zmiennych X, Y. Odcinek $[0,1]$ podzielony jest zatem na trzy części (być może jedna część ma długość 0). Jakie jest prawdopodobieństwo, że z tych trzech części można utworzyć trójkąt?

6. Jak zadanie poprzednie, ale zmienne X, Y mają na $[0,1]$ gęstość $f(t) = 2t$.

[Do zadań 7–9] Niech (X_1, X_2) będzie dwuwymiarową zmienną losową o gęstości $f(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi}$, dla $0 < x_1^2 + x_2^2 < 1$.

7. Znaleźć gęstości brzegowe zmiennych X_1, X_2.

8. Wykazać że współczynnik korelacji zmiennych X_1, X_2 jest równy zero. Wykazać, że zmienne są zależne.

9. Niech $X_1 = Y_1 \cos Y_2$, $X_2 = Y_1 \sin Y_2$, gdzie $0 < Y_1 < 1$, $0 \leqslant Y_2 \leqslant 2\pi$. Znaleźć gęstość $g(y_1, y_2)$ zmiennej (Y_1, Y_2). Sprawdzić czy zmienne Y_1, Y_2 są niezależne.

Witold Karczewski