Lista 5

Kamil Matuszewski

18 listopada 2015

Zadanie 1

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})} = \frac{x_n \cdot (f(x_n)-f(x_{n-1}))}{f(x_n)-f(x_{n-1})} - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})} =$$
$$= \frac{f(x_n)x_n - f(x_{n-1})x_n - f(x_n)x_n + f(x_n)x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})} = \frac{f(x_n)x_{n-1} - f(x_{n-1})x_n}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$$

A to jest to do czego chcieliśmy dojść. Teraz który wzór jest lepszy? Drugi wzór ma mniejszą liczbę odejmowań, a jak wiemy z poprzednich list odejmowanie jest niebezpieczne. ALE w momencie zbliżania się do miejsca zerowego $f(x_n) \rightarrow f(x_{n-1})$, czyli wartości te są sobie bardzo bliskie, podczas gdy w pierwszym wzorze nie mamy takiego problemu, więc, mimo wszystko, drugi wzór jest gorszy, a pierwszy lepszy.

Zadanie 2

Niech:

$F(x_k) = x_{k+1}$, oraz

$F(\alpha) = \alpha$, $F'(\alpha) = F''(\alpha) = ... = F^{(i)}(\alpha) = ... = F^{(p-1)}(\alpha) = 0$, $F^{(p)}(\alpha) \neq 0$

Wtedy:

$F(x_k) = x_{k+1} \qquad \backslash - \alpha$

$F(x_k) - \alpha = x_{k+1} - \alpha$

Ale nasze $x_{k+1} - \alpha$ to jakiś błąd, nazwijmy go e_{k+1} mamy więc:

$F(e_k + \alpha) - \alpha = e_{k+1}$

Rozpiszmy teraz $F(e_k + \alpha)$ w szereg Taylora

$$F(e_k + \alpha) = F(\alpha) + \frac{F'(\alpha)}{1!} \cdot e_k + ... + \frac{F^{(p-1)}(\alpha)}{(p-1)!} \cdot e_k^{p-1} + \frac{F^{(p)}(\eta)}{p!} \cdot e_k^p$$

ALE $F(\alpha) = \alpha$ a wszystkie $F^{(i)}$ dla $1 \leqslant i < p$ jest równe 0, dlatego mamy:

$\alpha + \frac{F^{(p)}(\eta)}{p!} \cdot e_k^p - \alpha = \frac{F^{(p)}(\eta)}{p!} \cdot e_k^p$,

ale $\frac{F^{(p)}(\eta)}{p!} = C$

czyli to jest jakaś stała, czyli

$e_{n+1} = C \cdot e_k^p$

czyli rząd zbieżności to p, a wzór na C to $\frac{F^{(p)}(\eta)}{p!}$

Zadanie 3

Mamy $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$.

Sprawdźmy to daną w poprzednim zadaniu metodą:

$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x_0)}$

$F(\alpha) = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(x_0)}$, ale α to pierwiastek, mamy więc:

$F(\alpha) = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(x_0)} = \alpha - 0 = \alpha$, więc się zgadza.

$F'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x0)}{(f'(x0))^2}$

$F'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{f'(x0)}$

$F'(\alpha) = 1 - \frac{f'(\alpha)}{f'(x0)}$

Wnioski:

Jeśli $\frac{f'(x)}{f'(x0)} = 1$ to rząd zbieżności $\geqslant 2$

W przeciwnym wypadku rząd zbieżności to 1.

Zadanie 4

Mamy $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, i

$f(\alpha) = f'(\alpha) = 0 \neq f''(\alpha)$

Podobnie jak w zadaniu 2, odejmijmy obustronnie α i sprawdźmy jak zachowują się błędy.

$e_{n+1} = e_n - \frac{f(e_n+\alpha)}{f'(e_n+\alpha)}$, rozpiszmy teraz górę w szereg Taylora:

$e_{n+1} = e_n - \frac{f(\alpha)+\frac{e_n \cdot f'(\alpha)}{1!}+\frac{e_n^2 \cdot f''(\eta_1)}{2!}}{f'(e_n+\alpha)}$, ale $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$, więc:

$e_{n+1} = e_n - \frac{0+0+\frac{e_n^2 \cdot f''(\eta_1)}{2!}}{f'(e_n+\alpha)} = e_n - \frac{e_n^2 \cdot f''(\eta)}{2! \cdot f'(e_n+\alpha)}$, i rozpiszmy teraz dół z szeregu Taylora:

$e_{n+1} = e_n - \frac{e_n^2 \cdot f''(\eta_1)}{2! \cdot f'(e_n+\alpha)} = e_n - \frac{e_n^2 \cdot f''(\eta_1)}{2! \cdot (f'(\alpha)+\frac{f''(\eta_2)}{1!} \cdot e_n)} = e_n - \frac{1}{2} \cdot \frac{e_n \cdot f''(\eta_1)}{0+f''(\eta_2)} = e_n(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(\eta_1)}{f''(\eta_2)})$.

W przedostatnim przejściu ponownie skorzystaliśmy z tego, że $f'(\alpha) = 0$.Otrzymaliśmy coś dziwnego, ale w rzeczywistości $\frac{f''(\eta_1)}{f''(\eta_2)}$ to jakaś (niewielka, tu pomachaj rękoma) stała, co oznacza, że:

$e_{n+1} = e_n^1 \cdot C$, a to oznacza, że ta metoda jest zbieżna liniowo.

Zadanie 5

Wiemy, że $\lim_{n \to \inf} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} = C$, i, że możemy to zapisać, jako

$\lim_{n \to \inf} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = C$

$\log \lim_{n \to \inf} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = \log C \leftrightarrow \lim_{n \to \inf} \log \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = \log C,$

Ale również, wiemy, że możemy to zapisać jako:

$\lim_{n \to \inf} \log \frac{|e_{n+2}|}{|e_{n+1}|^p} = \log C$

Czyli, że:

$\lim_{n \to \inf} \log \frac{|e_{n+2}|}{|e_{n+1}|^p} = \lim_{n \to \inf} \log \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p}$

$\lim_{n \to \inf} \log \frac{|e_{n+2}|}{|e_{n+1}|^p} - \lim_{n \to \inf} \log \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = 0$

$\lim_{n \to \inf} (\log \frac{|e_{n+2}|}{|e_{n+1}|^p} - \log \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p}) = 0$

$\lim_{n \to \inf} (\log |e_{n+2}| - \log |e_{n+1}|^p - \log |e_{n+1}| + \log |e_n|^p) = 0$

$\lim_{n \to \inf} (\log |e_{n+2}| - p \cdot \log |e_{n+1}| - \log |e_{n+1}| + p \cdot \log |e_n|) = 0$

$\lim_{n \to \inf} (\log |e_{n+2}| - \log |e_{n+1}| - p \cdot (\log |e_{n+1}| - \log |e_n|)) = 0$

$\lim_{n \to \inf} (\log |e_{n+2}| - \log |e_{n+1}|) - \lim_{n \to \inf} p \cdot (\log |e_{n+1}| - \log |e_n|) = 0$

$p \cdot \lim_{n \to \inf} (\log |e_{n+1}| - \log |e_n|) = \lim_{n \to \inf} (\log |e_{n+2}| - \log |e_{n+1}|)$

$p = \lim_{n \to \inf} \frac{(\log |e_{n+2}| - \log |e_{n+1}|)}{(\log |e_{n+1}| - \log |e_n|)}$

Zadanie 6

Co się dzieje w 6? Program ma kilka komentarzy, odkomentowanie komentarzy oznaczonych odpowiednim (i) i zakomentowanie pozostałych da ci inną funkcję. Zmieniając x od którego zaczynasz i zmieniając wartość a, otrzymujemy różne wyniki, jednak możemy zauważyć, ze dla pierwiastków pojedynczych zbieżność jest sześcienna a dla pierwiastków podwójnych już liniowa.