Lista 2

Kamil Matuszewski

22 października 2015

1	2	3	4	5	6	7	8
✓	✓	✓	✓	✓	✓		

Zadanie 1

Pokaż, że każda niezerowa liczba x ma jednoznaczne przedstawienie w postaci znormalizowanej.

Dowód. Najpierw pokażemy, że każdą liczbę x można zapisać w postaci $sm2^c$. s to oczywiście znak. Teraz, $x = m2^c$ (z dokładnością do modułu, ale to nie jest istotne). Skoro tak, to $m = \frac{x}{2^c}$, innymi słowy przesuwamy binarną reprezentację x o c miejsc w lewo. c możemy dobrać tak, żeby nasze m było z przedziału $[\frac{1}{2}, 1)$. Oczywiście jest to możliwe, trzeba się tylko trochę zastanowić (przesuwamy przecinek tak, by przed przecinkiem było 0, za przecinkiem będzie 1 i dalej coś, czyli liczba z zakresu $[\frac{1}{2}, 1)$). Wtedy m mamy już obliczone. Czyli każdego x możemy przedstawić w tej postaci.

Teraz jednoznaczność.
Załóżmy nie wprost, że istnieją dwie różne reprezentacje x w postaci $sm2^c$. Oczywiście, znak jest stały. Mamy więc, że:

$$x = sm_1 2^{c_1} = sm_2 2^{c_2} \Rightarrow m_1 2^{c_1} = m_2 2^{c_2} \Rightarrow \log m_1 + c_1 = \log m_2 + c_2 \Rightarrow \log \frac{m_1}{m_2} = c_2 - c_1$$

- $c_1 = c_2$

  $$\log \frac{m_1}{m_2} = 0 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = 1 \Rightarrow m_1 = m_2$$

  Sprzeczność.

- $c_1 > c_2$

  $$\log \frac{m_1}{m_2} = c_2 - c_1 \Rightarrow \log \frac{m_1}{m_2} \leqslant -1 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow m_1 \leqslant \frac{1}{2} m_2$$

  Teraz musimy skorzystać z tego, że $m_1, m_2 \in [\frac{1}{2}, 1)$. Widać już, że mamy sprzeczność, bo żeby m_1 było w dobrym przedziale, to m_2 musiałoby być większe(bądź równe) 1, co jest niemożliwe.

- $c_1 < c_2$

  $$\log \frac{m_1}{m_2} = c_2 - c_1 \Rightarrow \log \frac{m_1}{m_2} \geqslant 1 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} \geqslant 2 \Rightarrow m_1 \geqslant 2m_2$$

  Ponownie korzystamy z tego, że $m_1, m_2 \in [\frac{1}{2}, 1)$. Żeby m_1 było w dobrym przedziale m_2 musiałoby być mniejsze od $\frac{1}{2}$, co jest niemożliwe.

□

Zadanie 2

To jest jakieś proste, sprawdzamy wszystkie opcje, pamiętamy o ujemnych, wyjdzie pewnie z 24 liczby, przedział jakoś $[-1.75, 1.75]$ no i im bliżej zera tym mniej wartości wpada. Zostawiam jako zadanie do pobawienia się.

Zadanie 3

Pokaż, że

$$\frac{|rd(x) - x|}{|x|} \leqslant 2^{-t}$$

Dowód.

$$\frac{|rd(x) - x|}{|x|} = \frac{|sm_t 2^c - sm2^c|}{|sm2^c|} = \frac{|(s2^c)(m_t - m)|}{|s2^c m|} = \frac{|m_t - m|}{|m|} \overset{(1)}{\leqslant} \frac{2^{-t}}{2m} \overset{(2)}{\leqslant} 2^{-t}$$

Gdzie:
(1) bo w treści mamy, że $|m_t - m| \leqslant \frac{1}{2}2^{-t}$
(2) bo maksymalizujemy ułamek. Skoro maksymalizujemy ułamek to minimalizujemy licznik. $m \in [\frac{1}{2}, 1)$. Czyli $2m$ może minimalnie wynieść 1. Jeśli ułamek byłby mniejszy, działałoby tym bardziej.

□

Zadanie 4

Wikipedia + to (click)

Zadanie 5

Załóżmy, że maksymalna wartość $X_{fl} = 2^{64}$ i weźmy $x = y = 2^{60}$.

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(2^{60})^2 + (2^{60})^2} = \sqrt{2^{120} + 2^{120}} = \sqrt{2^{120}(1 + 1)} = 2^{60}\sqrt{2}$$

$2^{60}\sqrt{2} \in X_{fl}$. No ale 2^{120} już się nie mieści. Jak moglibyśmy to naprawić?
Załóżmy, że $x \geqslant y$, jeśli nie to możemy podmienić.

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2(1 + \frac{y^2}{x^2})} = |x|\sqrt{1 + (\frac{y}{x})^2}$$

Skoro $x \geqslant y$ to pod pierwiastkiem mamy maksymalnie dwójkę, więc nie grozi nam nadmiar (bo $\sqrt{2}max(x, y) \in X_{fl}$). Przerabiamy to na algorytm, co zostawiam jako proste ćwiczenie.

Co do długości euklidesowej, to jeśli wiemy, że zapisuje się ją wzorem

$$||x_n|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

To już możemy łatwo znaleźć analogię do tego co robiliśmy przed chwilą. Wyciągamy największego x przed pierwiastek. Jeśli $\sqrt{n} \cdot max(|x_1|, |x_2|, /ldots, |x_n|) \in X_{fl}$

Zadanie 6

Wikipedia