МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Практическое задание по курсу лекций «Современные вычислительные технологии»
Задание №1
Отчет
о выполненном задании

студента 303 учебной группы факультета ВМК МГУ
Поздняков Арсений Константинович

Москва
2025

Содержание

1 Постановка задачи

Необходимо численно решить одномерную краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласса.

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x),\ x \in (0,\ 1) \\ u(0) = a,\ u(1) = b \end{cases}$$

Численно решать задачу будем на равномерной сетке $\{x_0, ..., x_N\}$, где $x_i = i \cdot h,\ x_N = 1$ После приближения кравнения Лапласса на трехточечном шаблоне получаем систему линейных уравнений

$$\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & & ... & & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ ... \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_1) + \frac{a}{h^2} \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ ... \\ f(x_{N-2}) \\ f(x_{N-1}) + \frac{b}{h^2} \end{bmatrix}$$

2 Метод численного решения

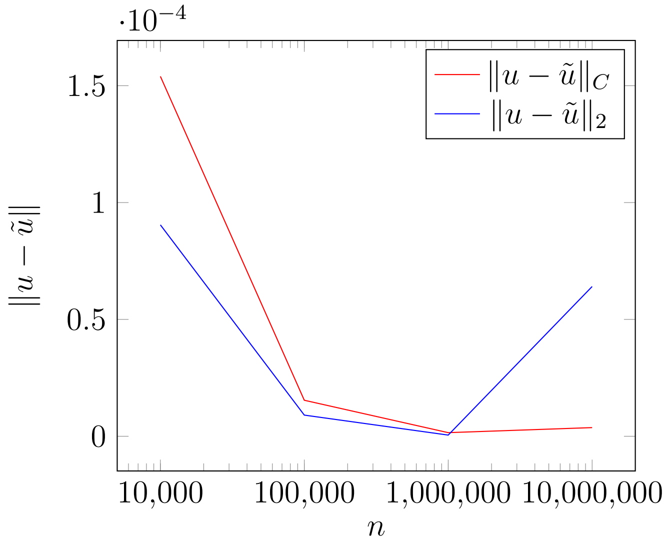
Мы будем решать данную систему линейных уравнений методом прогонки, то есть мы считаем, что $\forall i\ \ y_i = \alpha_i \cdot y_{i+1} + \beta_i$ тогда α_i и β_i задаются формулами

$$\alpha_i = \frac{1}{2 - \alpha_{i-1}},\ \ \alpha_1 = 0.5$$

$$\beta_i = \frac{h^2 f(x_i) + \beta_{i-1}}{2 - \alpha_{i-1}}$$

3 Результаты

Применив метод прогонки для матрицы приближающей уравнение Лапласса($f = x + sin(x)$) мы получили решатель, который при увелечении N сходится к точному решению по C норме и в дискретном аналоге l2 нормы. Что видно из графика. При очень большом количестве точек решение становится менее точным(оптимальное число точек - 10^6, а значение Чебышевской и евклидовой нормы имеют порядки 1e-6 и 1e-7). Это имеет место быть, так как $\kappa(triag(-1, 2, -1)) \xrightarrow{n \to 0} +\infty$


$\cdot 10^{-4}$
$\|u - \tilde{u}\|_C$
$\|u - \tilde{u}\|_2$
$\|u - \tilde{u}\|$
1.5
1
0.5
0
10,000
100,000
1,000,000
10,000,000
n