Теорема 192. *Пусть* $n \geqslant 1$ *целое,*

$$\lim_{\omega=\xi} f^{(\gamma)}(x) = 0,$$

$$\lim_{\omega=\xi} g^{(\gamma)}(x) = 0$$

для всех целых γ с $0 \leqslant \gamma < n$,

$$f^{(n)}(\xi) \text{ существует},$$
$$g^{(n)}(\xi) \neq 0.$$

Тогда

$$\lim_{\omega=\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{g^{(n)}(\xi)}.$$

Предварительное замечание. Очивидно, теорема 192 не содержится в теореме 191, рвно как и ,обратно, теорема 191 не содержится в теореме 192.

Доказательство. При $n = 1$ это – теорема 187. Пусть поэтому $n > 1$. В силу теоремы 187, примененной к $f^{(n-1)}(x)$ вместо $f(x)$ и $g^{(n-1)}(x)$ вместо $g(x)$ имеем

$$\lim_{\omega=\xi} \frac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{g^{(n)}(\xi)}.$$

Следовательно, в силу теоремы 191 с заменой n на $n - 1$

$$\lim_{\omega=\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{g^{(n)}(\xi)}.$$

Определение 43. *Если для каждого* ω *существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что*

$$f(x) > \omega \text{ при } 0 < |x - \xi| < \varepsilon,$$

то говорят, что

$$\lim_{\omega=\xi} f(x) = \infty,$$

или, короче,

$$f(x) \to \infty$$

(„при $x \to \xi$“).

Пример.

$$\xi = 0,$$

$$f(x) = \tfrac{1}{|x|} \text{ при } x \neq 0.$$

Теорема 193. $$\lim_{\omega=\xi}|f(x)|=\infty$$
равносильно
$$\lim_{\omega=\xi}\frac{1}{f(x)}=0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. И то и другое означает: для каждого $\delta>0$ существует $\varepsilon>0$ такое, что
$$\left|\tfrac{1}{f(x)}\right|<\delta \text{ при } 0<|x-\xi|<\varepsilon.$$

Определение 44. *Если*
$$\lim_{\omega=\xi}(-f(x))=\infty,$$
то говорят, что
$$\lim_{\omega=\xi}f(x)=-\infty,$$
или, короче,
$$f(x)\to-\infty$$
(„при $x\to\xi$“).

$-\infty$ читается: минус бесконеченость. **Пример.**
$$\xi=0,$$
$$f(x)=\log|x| \text{ при } x\neq 0.$$
Соотношение
$$\lim_{\omega=\xi}f(x)=-\infty$$
следует из того, что
$$-\log|x|>\omega \text{ при } 0<|x|<e^{-\omega}.$$

Теорема 193. *Из*
$$\lim_{\omega=\xi}|g(x)|=\infty,$$
$$\lim_{\omega=\xi}\frac{f'(x)}{g'(x)}=0$$
следует
$$\lim_{\omega=\xi}\frac{f(x)}{g(x)}=0.$$