Теорема 192. *Пусть* $n \geqslant 1$ *целое,*

$$\lim_{\omega=\xi} f^{(\gamma)}(x) = 0,$$

$$\lim_{\omega=\xi} g^{(\gamma)}(x) = 0$$

для всех целых γ с $0 \leqslant \gamma < n$,

$$f^{(n)}(\xi) \textit{ существует},$$
$$g^{(n)}(\xi) \neq 0.$$

Тогда

$$\lim_{\omega=\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{g^{(n)}(\xi)}.$$

Предварительное замечание. Очивидно, теорема 192 не содержится в теореме 191, рвно как и ,обратно, теорема 191 не содержится в теореме 192.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $n = 1$ это – теорема 187. Пусть поэтому $n > 1$. В силу теоремы 187, примененной к $f^{(n-1)}(x)$ вместо $f(x)$ и $g^{(n-1)}(x)$ вместо $g(x)$ имеем

$$\lim_{\omega=\xi} \frac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{g^{(n)}(\xi)}.$$

Следовательно, в силу теоремы 191 с заменой n на $n-1$

$$\lim_{\omega=\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{g^{(n)}(\xi)}.$$

Определение 43. *Если для каждого* ω *существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что*

$$f(x) > \omega \textit{ при } 0 < |x - \xi| < \varepsilon,$$

то говорят, что

$$\lim_{\omega=\xi} f(x) = \infty,$$

или, короче,

$$f(x) \to \infty$$

(„при $x \to \xi$“).

Пример.

$$\xi = 0,$$

$$f(x) = \tfrac{1}{|x|} \text{ при } x \neq 0.$$

Теорема 193. $$\lim_{\omega=\xi} |f(x)| = \infty$$

равносильно

$$\lim_{\omega=\xi} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

Доказательство. И то и другое означает: для каждого $\delta > 0$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\left|\tfrac{1}{f(x)}\right| < \delta \text{ при } 0 < |x - \xi| < \varepsilon.$$

Определение 44. *Если*

$$\lim_{\omega=\xi} (-f(x)) = \infty,$$

то говорят, что

$$\lim_{\omega=\xi} f(x) = -\infty,$$

или, короче,

$$f(x) \to -\infty$$

(„при $x \to \xi$“).

$-\infty$ читается: минус бесконеченость.

Пример.

$$\xi = 0,$$

$$f(x) = \log |x| \text{ при } x \neq 0.$$

Соотношение

$$\lim_{\omega=\xi} f(x) = -\infty$$

следует из того, что

$$-\log |x| > \omega \text{ при } 0 < |x| < e^{-\omega}.$$

Теорема 193. *Из*

$$\lim_{\omega=\xi} |g(x)| = \infty,$$

$$\lim_{\omega=\xi} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0$$

следует

$$\lim_{\omega=\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$