

Московский авиационный институт (Национальный
исследовательский университет)

Институт №8 «Компьютерные науки и прикладная
математика» Кафедра вычислительной математики и
программирования

Лабораторные работы
по курсу «Численные методы»
Вариант 10

Выполнил: Билецкий А.О.

Группа: М8О-402Б-20

Преподаватель: доц. Пивоваров Д. Е.

Дата: _____

Оценка: _____

:

Москва, 2023

Лабораторная работа №5

Задание

Используя явную и неявную конечно-разностные схемы, а также схему Кранка-Николсона, решить начально-краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа. Осуществить реализацию трех вариантов аппроксимации граничных условий, содержащих производные: двухточечная аппроксимация с первым порядком, трехточечная аппроксимация со вторым порядком, двухточечная аппроксимация со вторым порядком. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial u}{\partial x} + cu, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c < 0.$$

$$u_x(0, t) + u(0, t) = \exp((c - a)t)(\cos(bt) + \sin(bt)),$$

$$u_x(\pi, t) + u(\pi, t) = -\exp((c - a)t)(\cos(bt) + \sin(bt)),$$

$$u(x, 0) = \sin x.$$

$$\text{Аналитическое решение: } U(x, t) = \exp((c - a)t) \sin(x + bt).$$

Теоретическая часть

Данное уравнение представляет собой уравнение теплопроводности с граничными условиями третьего рода.

Явная разностная схема для третьей начально-краевой

задачи имеет вид:

$$\alpha \frac{u_1^{k+1} - u_0^{k+1}}{h} + \beta u_0^{k+1} = \varphi_0(t^{k+1}),$$

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = a^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2}, \quad j = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{0, K-1},$$

$$\gamma \frac{u_N^{k+1} - u_{N-1}^{k+1}}{h} + \delta u_N^{k+1} = \varphi_l(t^{k+1}).$$

В результате алгоритм перехода на новый временной слой t^{k+1} с использованием явной схемы можно представить в следующем виде:

$$u_j^{k+1} = \sigma \cdot u_{j+1}^k + (1 - 2\sigma)u_j^k + \sigma \cdot u_{j-1}^k, \quad \sigma = \frac{a^2 \tau}{h^2}, \quad j = \overline{1, N-1},$$

$$u_0^{k+1} = -\frac{\alpha/h}{\beta - \alpha/h} u_1^{k+1} + \frac{\varphi_0(t^{k+1})}{\beta - \alpha/h},$$

$$u_N^{k+1} = \frac{\gamma/h}{\delta + \gamma/h} u_{N-1}^{k+1} + \frac{\varphi_l(t^{k+1})}{\delta + \gamma/h}.$$

При использовании неявной конечно-разностной схемы получаем следующий разностный аналог дифференциальной задачи:

$$b_0 u_0^{k+1} + c_0 u_1^{k+1} = d_0,$$

$$a_j u_{j-1}^{k+1} + b_j u_j^{k+1} + c_j u_{j+1}^{k+1} = d_j, \quad j = \overline{1, N-1},$$

$$a_N u_{N-1}^{k+1} + b_N u_N^{k+1} = d_N,$$

$$\text{где } b_0 = \beta - \alpha/h, \quad c_0 = \alpha/h, \quad d_0 = \frac{\varphi_0(t^{k+1})}{\beta - \alpha/h},$$

$$a_N = -\gamma/h, \quad b_N = \delta + \gamma/h, \quad d_N = \frac{\varphi_l(t^{k+1})}{\delta + \gamma/h},$$

$$a_j = \sigma, \quad b_j = -(1 + 2\sigma), \quad c_j = \sigma, \quad d_j = -u_j^k, \quad j = \overline{1, N-1}, \quad \sigma = \frac{a^2 \tau}{h^2}.$$

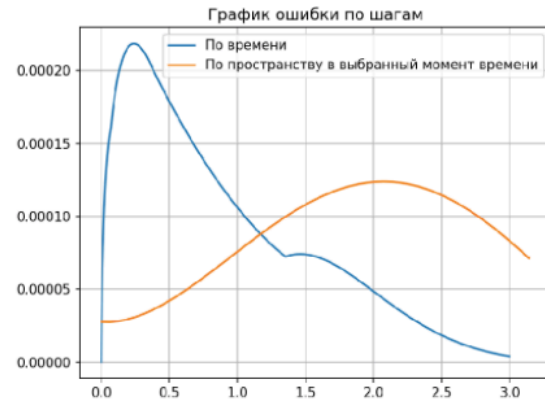
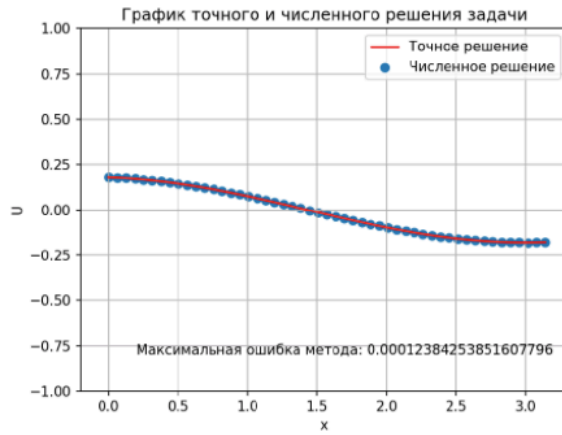
схема Кранка-Николсона:

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = \theta a^2 \frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + (1 - \theta) a^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2},$$

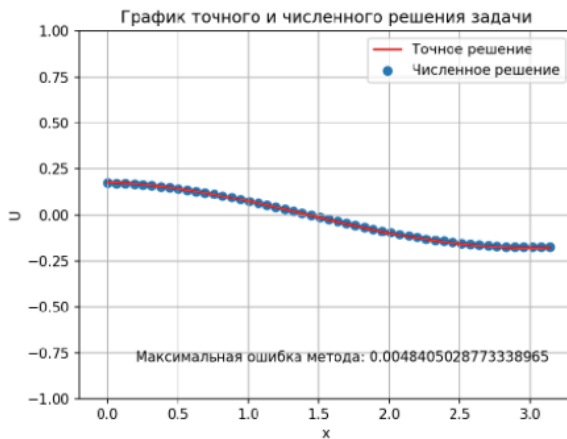
где θ – вес явной части конечно-разностной схемы. Для нахождения неявной части конечно-разностной схемы применялся метод прогонки трехдиагональной матрицы.

1) Явный метод:

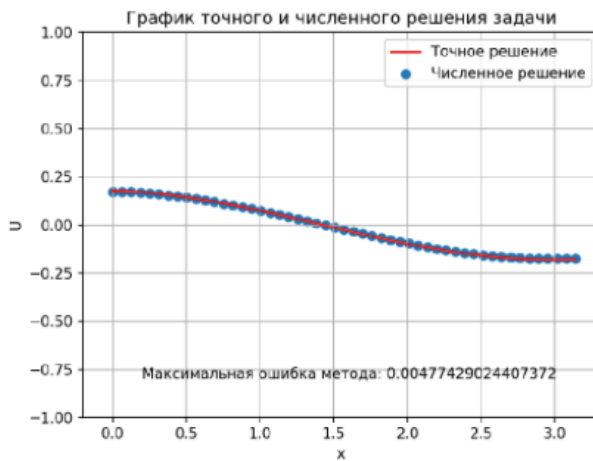
Двухточечная аппроксимация с первым порядком:



Трехточечная аппроксимация со вторым порядком:

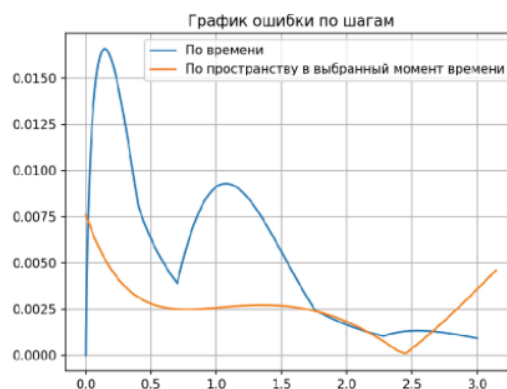
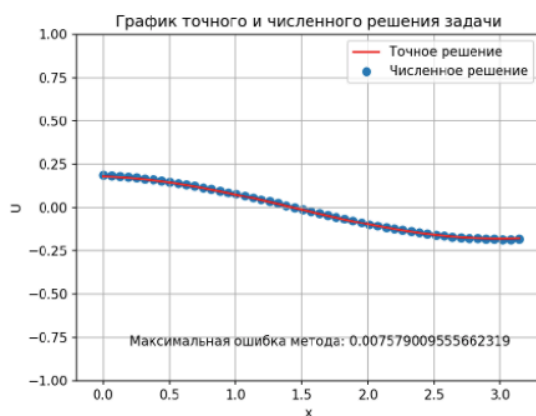


Двухточечная аппроксимация со вторым порядком:

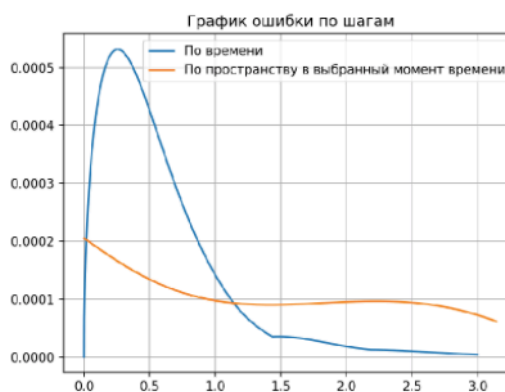
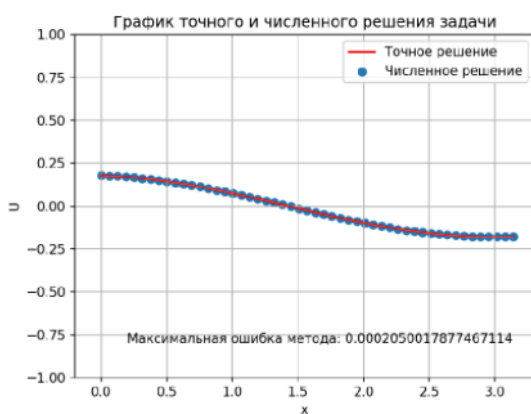


2) Неявный метод:

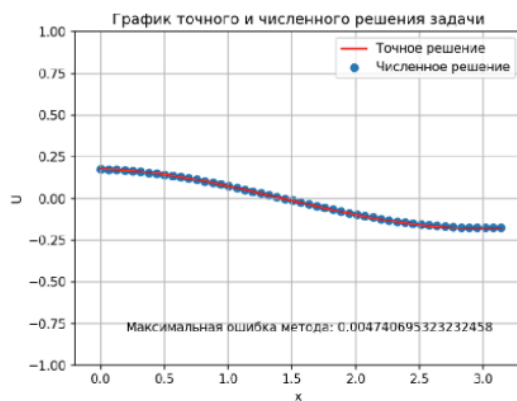
Двухточечная аппроксимация с первым порядком:



Трехточечная аппроксимация со вторым порядком:

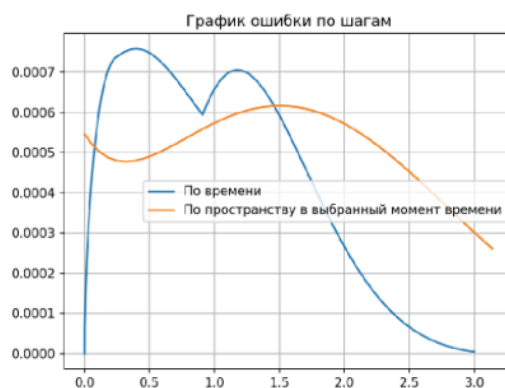
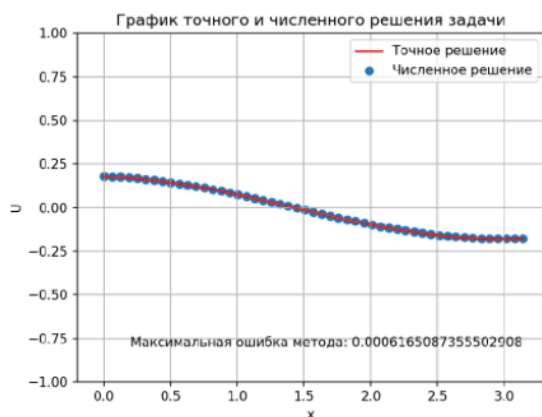


Двухточечная аппроксимация со вторым порядком:

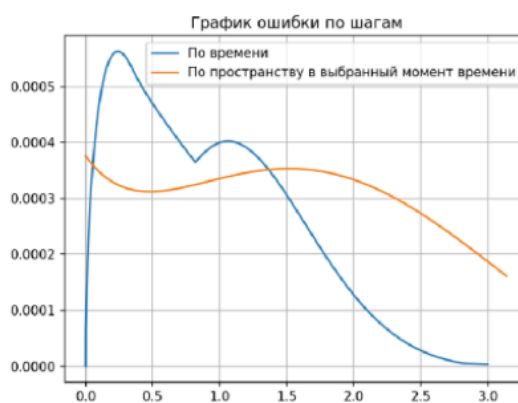
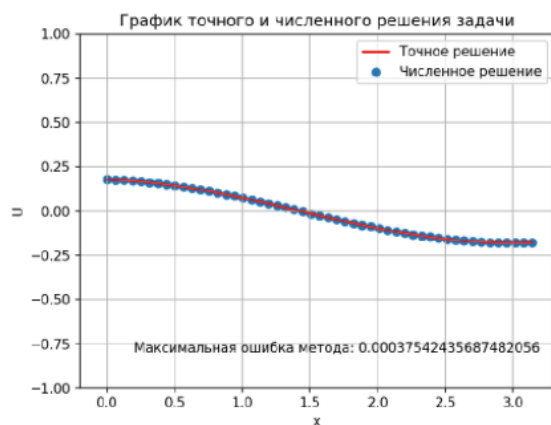


3) Метод Кранка-Никольсона:

Двухточечная аппроксимация с первым порядком:



Трехточечная аппроксимация со вторым порядком:



Вывод

Благодаря данной лабораторной работе, я приобрел знания в области численных методов для решения дифференциальных уравнений параболического типа: были исследованы различные методы решения начально-краевой задачи для дифференциального уравнения параболического типа, включая схему Кранка-Николсона, неявную и явную конечно-разностные методы, а также использование аналитического решения. Эксперименты позволили оценить точность и эффективность каждого метода.

Лабораторная работа 2

Используя явную схему крест и неявную схему, решить начально-краевую задачу для дифференциального уравнения гиперболического типа. Аппроксимацию второго начального условия произвести с первым и со вторым порядком. Осуществить реализацию трех вариантов аппроксимации граничных условий, содержащих производные: двухточечная аппроксимация с первым порядком, трехточечная аппроксимация со вторым порядком, двухточечная аппроксимация со вторым порядком. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров.

10.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 3 \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - u - \cos x \exp(-t),$$

$$u_x(0, t) = \exp(-t),$$

$$u_x(\pi, t) = -\exp(-t),$$

$$u(x, 0) = \sin x,$$

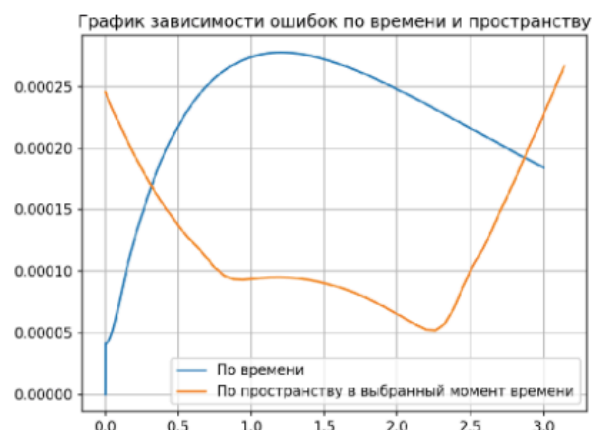
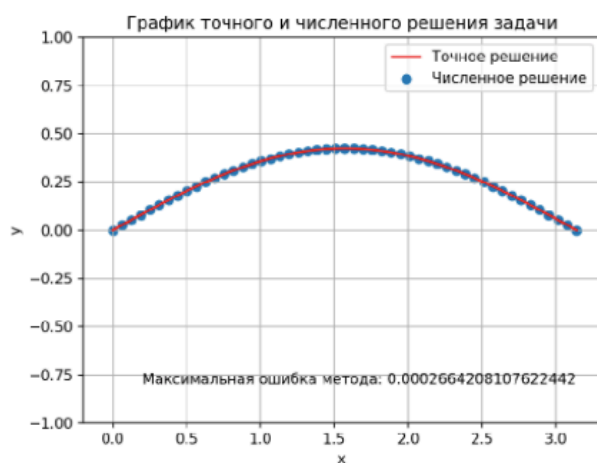
$$u_t(x, 0) = -\sin x.$$

Аналитическое решение: $U(x, t) = \exp(-t) \sin x$.

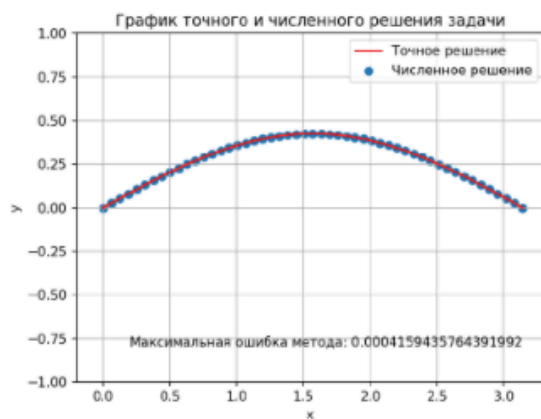
1. Явный метод

1) Двухточечная аппроксимация с первым порядком

1.1) Аппроксимация начальных условий с первым порядком

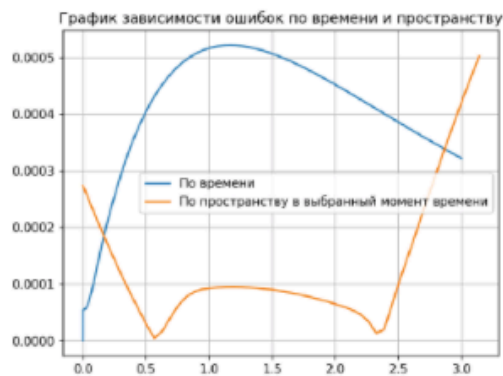
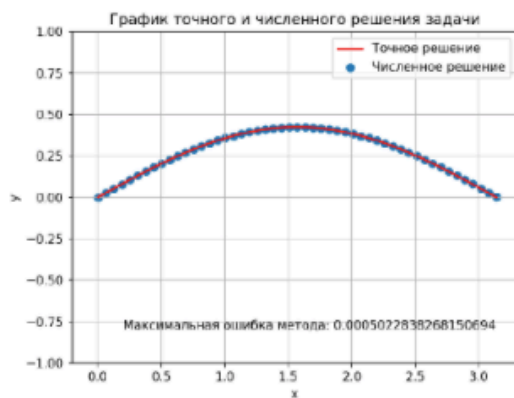


1.2) Аппроксимация начальных условий со вторым порядком

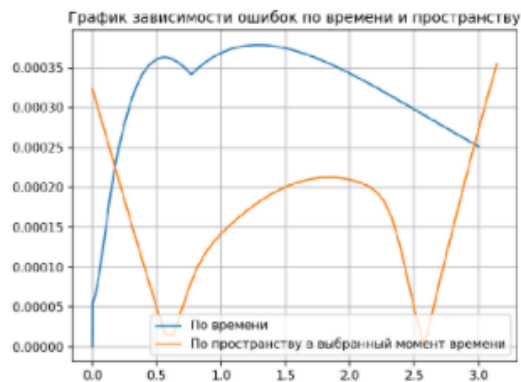
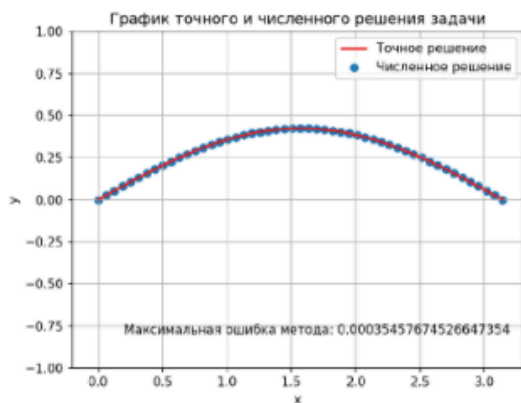


2) Трёхточечная аппроксимация со вторым порядком

2.1) Аппроксимация начальных условий с первым порядком

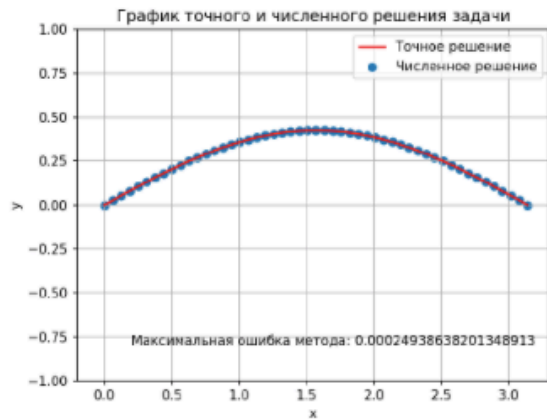


2.2) Аппроксимация начальных условий со вторым порядком

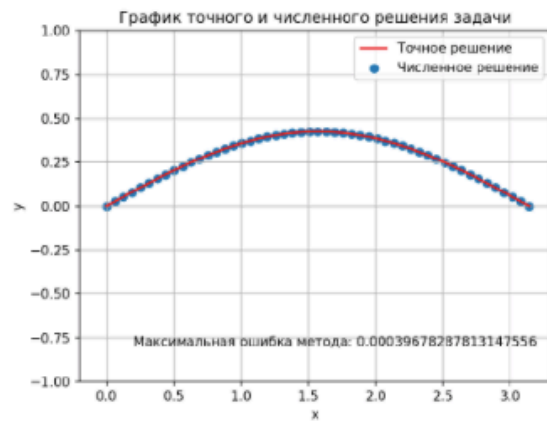


3) Двухточечная аппроксимация со вторым порядком

3.1) Аппроксимация начальных условий с первым порядком



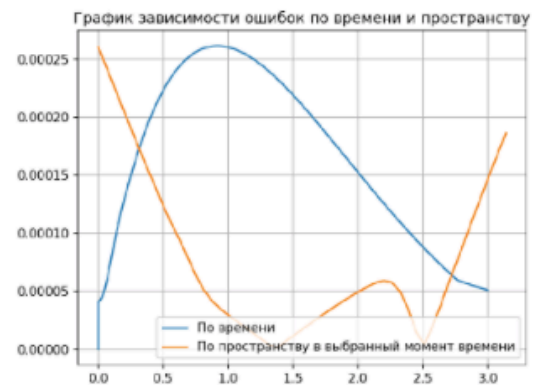
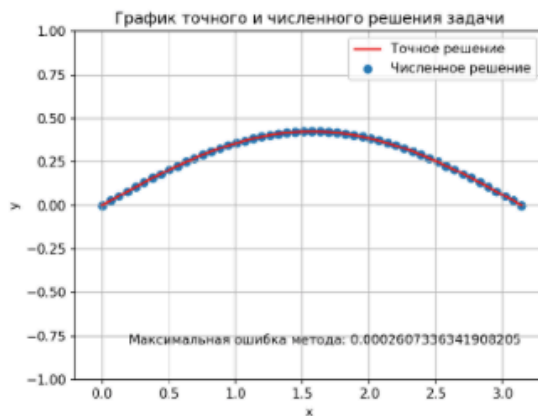
3.2) Аппроксимация начальных условий со вторым порядком



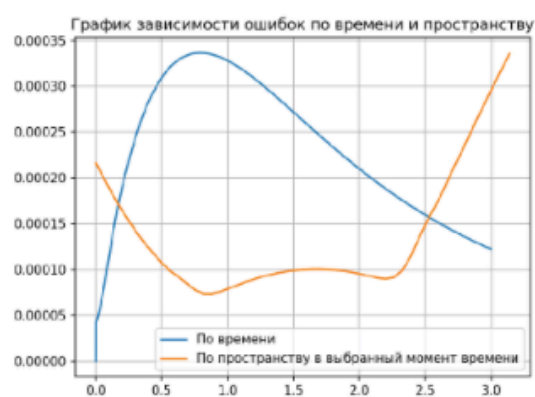
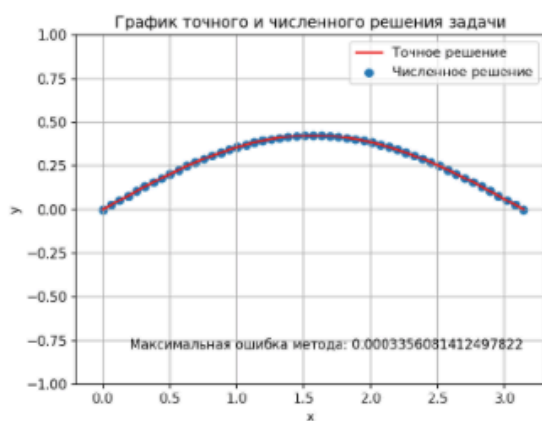
1) Неявный метод

1) Двухточечная аппроксимация с первым порядком

1.1) Аппроксимация начальных условий с первым порядком

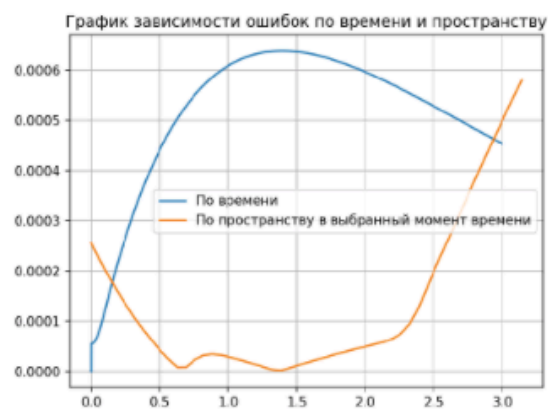
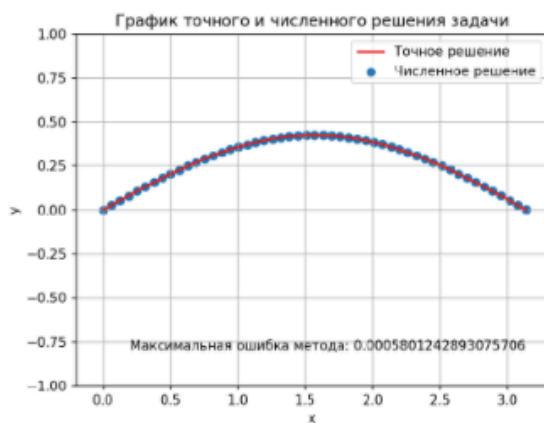


1.2) Аппроксимация начальных условий со вторым порядком

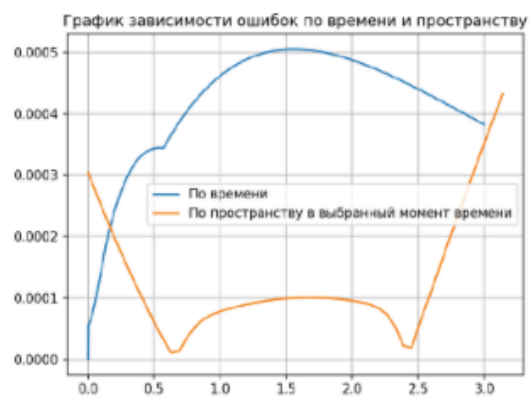
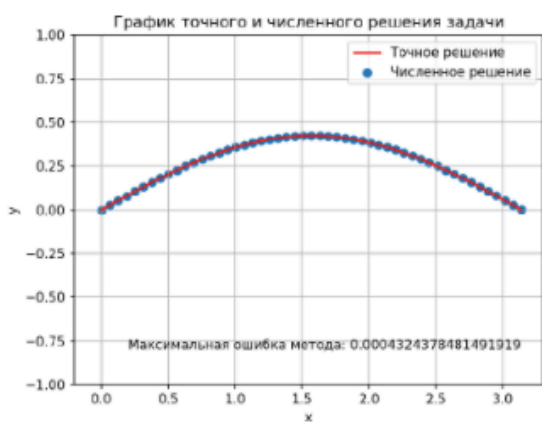


2) Трёхточечная аппроксимация со вторым порядком

2.1) Аппроксимация начальных условий с первым порядком

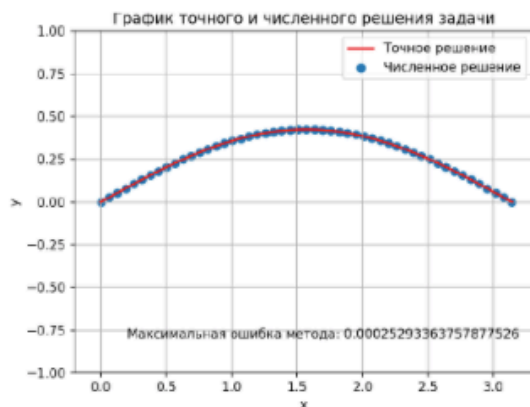


2.2) Аппроксимация начальных условий со вторым порядком

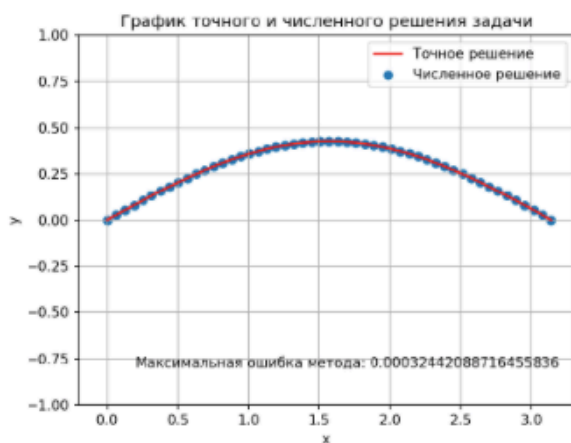


3) Двухточечная аппроксимация со вторым порядком

3.1) Аппроксимация начальных условий с первым порядком



3.2) Аппроксимация начальных условий со вторым порядком



Вывод

Благодаря данной лабораторной работе, я приобрел знания в области численных методов для решения дифференциальных уравнений гиперболического типа: были исследованы различные методы решения начально-краевой задачи для дифференциального уравнения гиперболического типа, а также была оценена точность и эффективность каждого метода, построен график зависимости ошибки от времени и график $U(x)$.

Лабораторная работа 3

Решить краевую задачу для дифференциального уравнения эллиптического типа. Аппроксимацию уравнения произвести с использованием центрально-разностной схемы. Для решения дискретного аналога применить следующие методы: метод простых итераций (метод Либмана), метод Зейделя, метод простых итераций с верхней релаксацией. Вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров.

10.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} - 4u,$$

$$u(0, y) = \exp(-y) \cos y,$$

$$u\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = 0,$$

$$u(x, 0) = \exp(-x) \cos x,$$

$$u\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Аналитическое решение: $U(x, y) = \exp(-x - y) \cos x \cos y$.

1. Метод Либмана

График точного и численного решения задачи

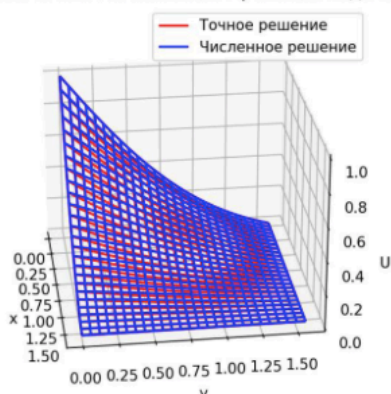
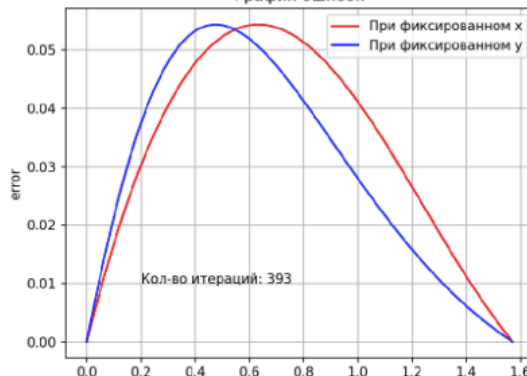


График ошибок



2. Метод Зейделя

График точного и численного решения задачи

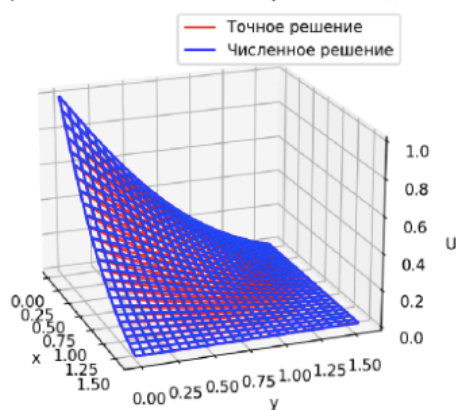
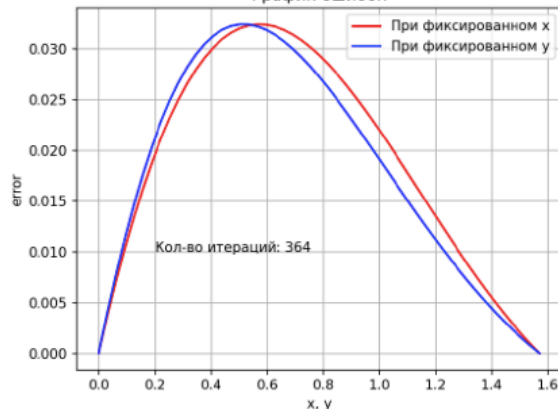


График ошибок



3. Метод простых итераций с верхней релаксацией

График точного и численного решения задачи

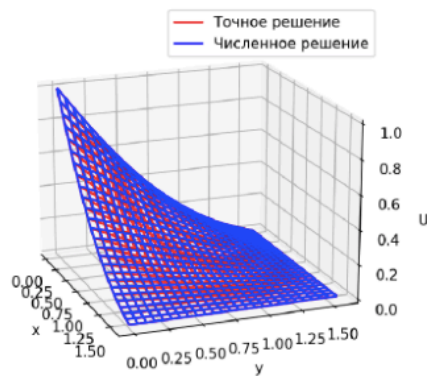
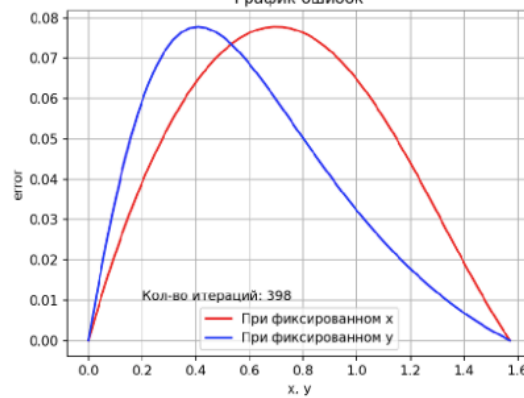


График ошибок



Вывод

Благодаря данной лабораторной работе, я приобрел знания в области численных методов для решения дифференциальных уравнений эллиптического типа: была применена центрально-разностная схема, реализованы три очень важных метода по заданию, а также была оценена точность и эффективность каждого метода, построен график зависимости ошибки от времени и график $U(x)$.

Лабораторная работа 4

Используя схемы переменных направлений и дробных шагов, решить двумерную начально-краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров.

10.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sin x \sin y (\mu \cos \mu t + (a+b) \sin \mu t),$$

$$u(0, y, t) = 0,$$

$$u_x(\pi, y, t) = -\sin y \sin(\mu t),$$

$$u(x, 0, t) = 0,$$

$$u_y(x, \pi, t) = -\sin x \sin(\mu t),$$

$$u(x, y, 0) = 0.$$

Аналитическое решение: $U(x, y, t) = \sin x \sin y \sin(\mu t)$.

1). $a = 1, b = 1, \mu = 1$.

2). $a = 2, b = 1, \mu = 1$.

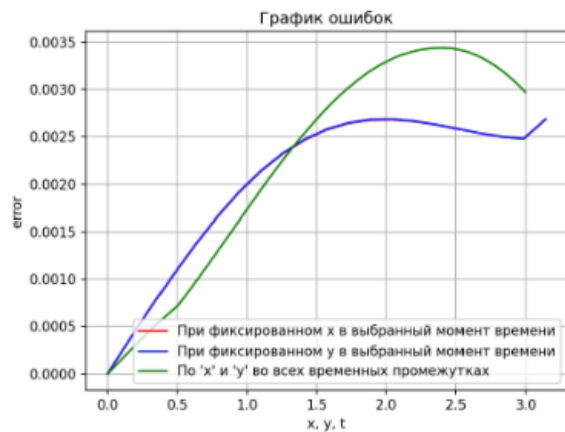
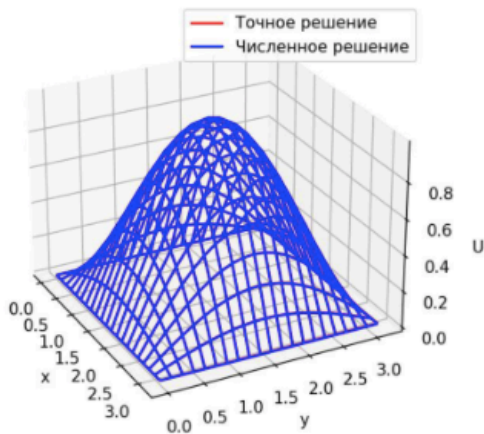
3). $a = 1, b = 2, \mu = 1$.

4). $a = 1, b = 1, \mu = 2$.

1. Метод переменных направлений

1) $a = 1, b = 1, \mu = 1$

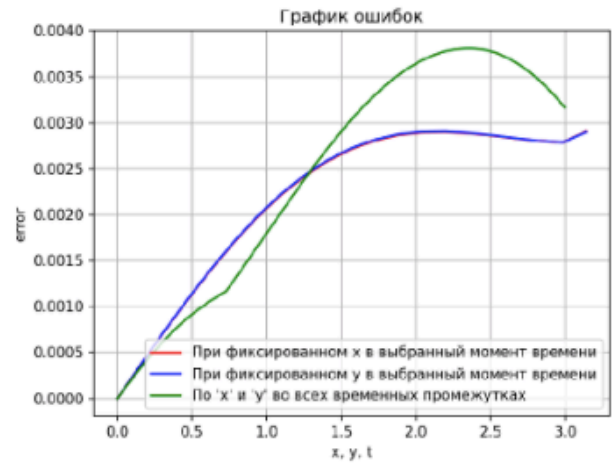
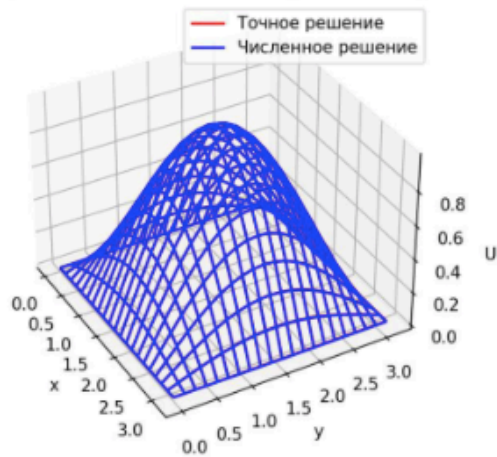
График точного и численного решения задачи



2) $a = 2, b = 1, \mu = 1$

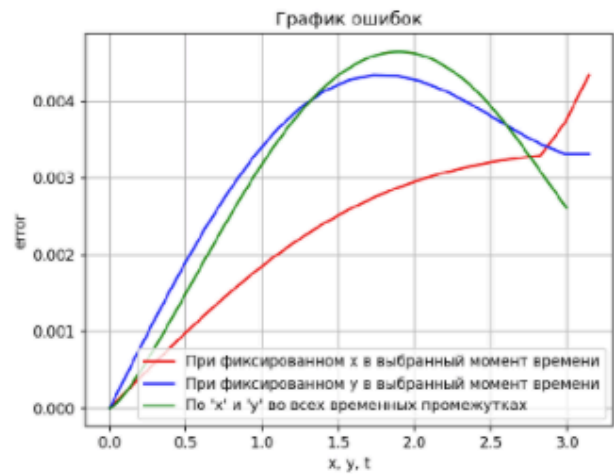
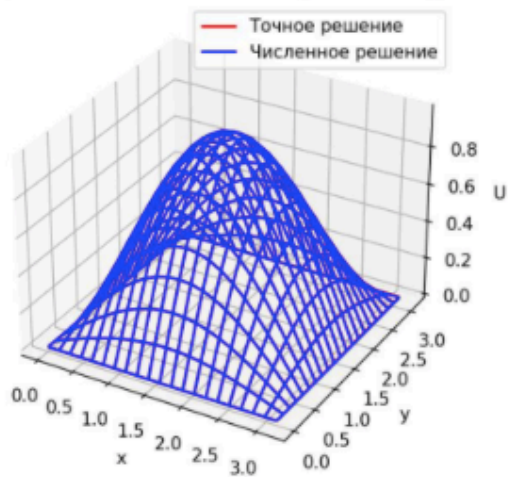
2) $a = 2, b = 1, \mu = 1$

График точного и численного решения задачи



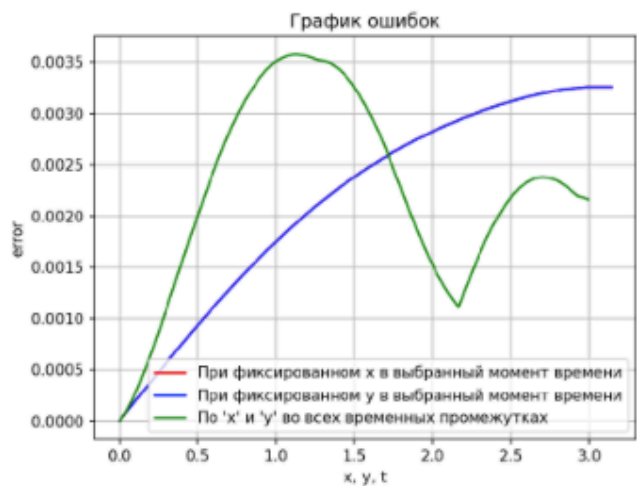
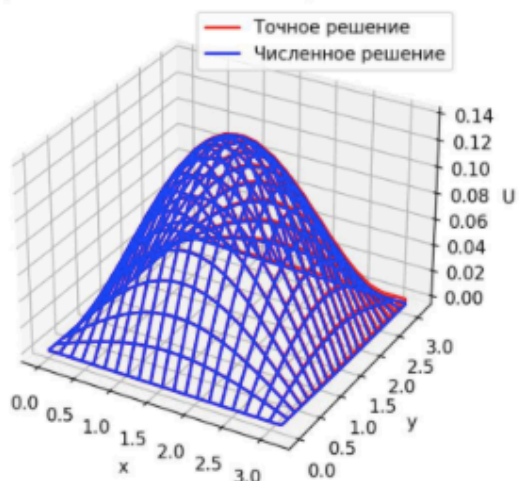
3) $a = 1, b = 2, \mu = 1$

График точного и численного решения задачи



4) $a = 1, b = 1, \mu = 2$

График точного и численного решения задачи



3) $a = 1, b = 2, \mu = 1$

График точного и численного решения задачи

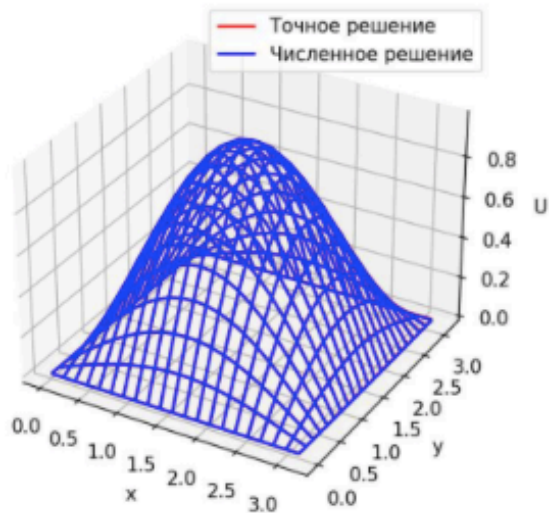
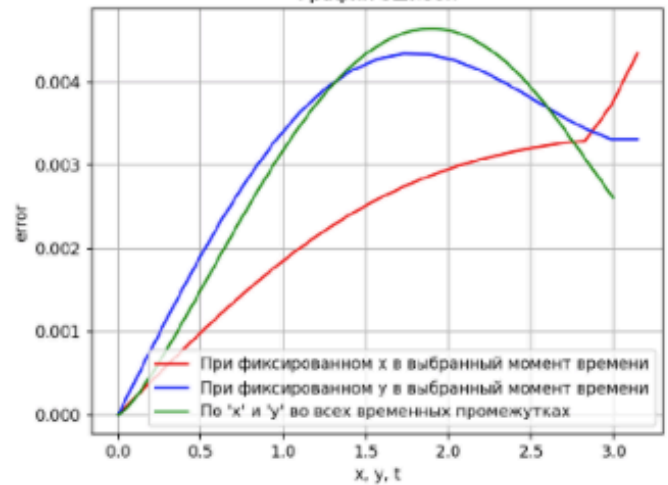


График ошибок



4) $a = 1, b = 1, \mu = 2$

График точного и численного решения задачи

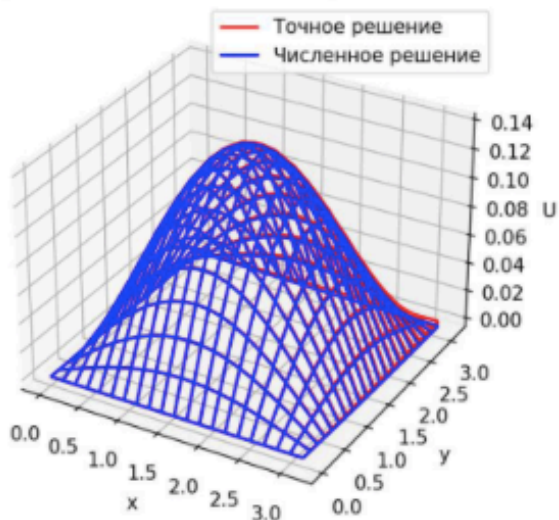
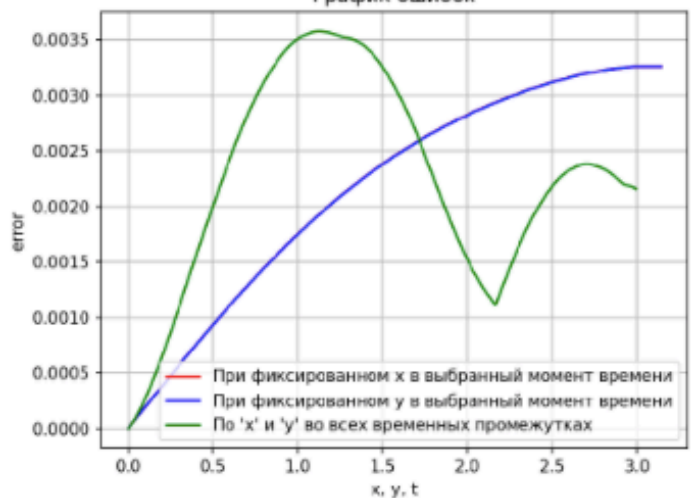


График ошибок



Вывод

Благодаря данной лабораторной работе, я приобрел знания в области численных методов для решения дифференциальных уравнений параболического типа: были реализованы необходимые численные методы, были измерены погрешности от шага и времени, построены графики зависимостей погрешностей по заданию, а также графики U от x .

