# Евклидовы и унитарные пространства. Неравенство Коши-Буняковского (Шварца)

Фурунджи Арсений, ФН1-21Б

МГТУ им.Н.Э.Баумана

23 мая 2023 г.

# Цели:

1. Ознакомиться с созданием презентации в LaTeX.
2. Исследовать тему «Евклидовы и унитарные пространства». Дополнить ее примерами.
3. Изучить тему «Неравенство Коши-Буняковского».
4. Закрепить материал, найдя примеры использования полученных знаний по выше указанным темам на практике.

# Задачи:

1. Практическое использование математических дисциплин.
2. Изучение устройства LaTeX, правил работы с программой.
3. Развитие навыков, нужных для создания презентаций в LaTeX.

# Индивидуальное задание:

Евклидовы и унитарные пространства. Неравенство Коши-Буняковского (Шварца).

# Евклидово пространство

**Определение.** Вещественное линейное пространство E называется **евклидовым пространством**, если выполнены следующие два требования.

1. Имеется правило, посредством которого любым двум элементам x, y E ставится в соответствие вещественное число, называемое **скалярным произведением** этих элементов и обозначаемое символом (x,y).

2. Указанное правило подчинено следующим четырем аксиомам:

1) (x,y) = (y,x) $\forall x, y \in E$;

2) (x + y,z) = (x,z) + (y,z) . $\forall x, y, z \in E$;

3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y) \, \forall x, y \in E, \forall \in R$;

4) (x,x) $\geq 0 \quad \forall x \in E$; $(x, x) = 0 \Longleftrightarrow x = \vec{0}$.

Из аксиом 1) – 4) можно получить простейшие свойства скалярного произведения:

1) (x,y+z) = (x,y) + (x,z) $\forall x, y, z \in E$;

2) (x,y) = **(y,x)** $\forall x, y \in E, \forall \in R$;

3) (x, $\overrightarrow{0}$) $= 0$ $\forall x \in E$.

Приведем примеры евклидовых пространств.

1. В линейных пространствах $\mathrm{V}_2 V_3$ всех свободных векторов на плоскости и в пространстве в курсе аналитической геометрии вводится скалярное произведение по следующему правилу: (x,y) = $|$x$| \cdot |y| \cdot cos\varphi$,

где $\varphi$ — угол между векторами x и y , а |x| и |y| — их длины.

2. В арифметическом линейном пространстве $\mathrm{R}^n : (x, y) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$.

3. В линейном пространстве C[a,b] всех функций, непрерывных на отрезке [a,b], скалярное произведение можно задать по формуле:

$$\Big(\mathrm{x(t),y(t)}\Big) = \int_a^b x(t)y(t)dx.$$

# Унитарное пространство

Пусть теперь дано векторное пространство V над полем комплексных чисел C, и задано отображение V $\times$ V $\to$ C, значение которого на векторах v, u $\in V$ также обозначается через (v,u).
Это отображение снова называется скалярным произведением, если выполняются следующие свойства:
1. $(\lambda_1 \upsilon_1 + \lambda_2 \upsilon_2,\ \nu) = \lambda_1(\upsilon_1, \nu) + \lambda_2(\upsilon_2, \nu)$
$\forall \upsilon_1, \upsilon_2, \nu \in V, \lambda_1, \lambda_2 \in R$;
2. $(\upsilon, \lambda_1\nu_1 + \lambda_2\nu_2) = \overline{\lambda_1}(\upsilon, \nu_1) + \overline{\lambda_2}(\upsilon, \nu_2)$
$\forall \upsilon, \nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2 \in R$;
3. $(\upsilon, \nu) = \overline{(\nu, \upsilon)}\ \forall \upsilon, \nu \in V$;
4. $(\upsilon, \upsilon) > 0\ \forall \upsilon \neq 0$. Из первых двух свойств следует, что
$(0,\ \upsilon) = (\upsilon, 0) = 0\ \forall \upsilon \in V$.

Здесь черта наверху означает взятие сопряженного к комплексному числу ($\overline{a+ib} = a - ib$).

Векторное пространство V вместе с заданным на нем скалярным произведением с описанными выше свойствами называется **унитарным пространством (или эрмитовым пространством)**. Мы будем предполагать, что все встречающиеся в дальнейшем такие пространства конечномерны.

# Примеры унитарных пространств

1. Многомерное векторное пространство со скалярным произведением

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n; \quad ||\vec{x}|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

2. Пространство функций (в общем случае комплексных) L[a,b] со скалярным произведением

$$(f,\ g) = \int\limits_a^b f(x) \cdot g^*(x) dx, \quad ||f||_L^2 = (f, f) = \int\limits_a^b f(x) \cdot f^*(x) dx$$

$g^* = \overline{g}$ — *сопряжение.*

# Неравенство Коши-Буняковского (Шварца)

Для любых векторов x, y евклидова пространства справедливо неравенство Коши-Буняковского:

$$(\mathrm{x,y})^2 \leq (x,x)(y,y).$$

**Доказательство:** При $\mathrm{x} = 0$ обе части неравенства равны нулю, согласно свойствам скалярного произведения, значит, неравенство выполняется.
Предположим, что $\mathrm{x} \neq 0$. Для любого действительного числа $\lambda$ выполняется неравенство $(\lambda x - y,\ \lambda x - y) \geq 0$.
Преобразуем левую часть неравенства, используя аксиомы и свойства скалярного произведения:
$(\lambda x - y,\ \lambda x - y) = \lambda(x, \lambda x - y) - (y, \lambda x - y) = \lambda^2(x,x) - 2\lambda(x,y) + (y,y).$

Мы получили квадратичный трехчлен относительно параметра $\lambda$, неотрицательный при всех действительных значениях параметра. Следовательно, его дискриминант равен нулю или отрицательный, т.е.

$$(\mathrm{x,y})^2 - (x,x)(y,y) \leq 0.$$

# Неравенство Коши-Буняковского для унитарного пр-ва

Для любых векторов u, v унитарного пространства V имеет место неравенство

$$|(\mathrm{u,v})|^2 \leq |u|^2 |v|^2.$$

**Доказательство:** Если v $= 0$, то u и v линейно зависимы и неравенство превращается в равенство.

Пусть v $\neq 0$. Для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ имеет место неравенство
$(\mathrm{u} + \lambda v, u + \lambda v) = |u|^2 + \overline{\lambda}(v, u) + \lambda(u, v) + |\lambda|^2 |v|^2 \geq 0.$
Если (u,v) $= 0$, то неравенство очевидно. В противном случае положим $\lambda = \dfrac{(v, u)}{|(u, v)|} t$, где t $\in \mathbb{R}$.

$|\mathrm{u}|^2 + 2|(u, v)|t + |v|^2 t^2 \geq 0,$
верное для любого t $\in \mathbb{R}$. Значит, дискриминант квадратичного трехчлена неотрицателен, что равносильно искомому неравенству.

# Источники информации


1. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Линейная алгебра: Учеб. для вузов. 3-е изд., стереотип. / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. - 78 с.

2. Ершов А.В., Унитарные пространства. Добавление к лекциям - Изд-во МФТИ, 2016. - 7 с.