1 Основные понятия

1.1 Событие.Вероятность события

При рассмотрении опытов в которых могут быть различные исходы, результаты опытов будем называть событиями. Отличаем составные (разложимые) и элементарные (неразложимые) события.

Пример

Выпало 6 очков при броске двух игральных костей – составное разложение на (1, 5) или (2,4) или (3,3) или (4,2) или (5,1).

О том, что мы понимаем под элементарным событием надо предварительно условиться. Это неопределяемое понятие (как точка в геометрии). Они определяют идеализированный опыт. По определению, каждый неразложимый исход идеализированного опыта представляется одним и только одним элементарным событием. Совокупность всеъ элементарных событий называется пространством элементарных событий (σ). Элементарное событие – точки этого пространства. Событие – множество точек.

Совокупность точек представляет все те исходы, при которых происходит событие A, полностью описывают это событие. Любое множество точек A нашего пространства можно назвать событием; оно происходит или нет в зависимости от того, принадлежит или нет множеству A точка, представляющая исходный опыт.

Пример

Число курящих среди 100 человек. Пространство элементарных событий – множество чисел 0, 1, 2, . . . 100.

Определение

Невозможное событие – это событие, которое в результате данного опыта не может произойти. Обозначим его $\emptyset$. Тоесть, запись A = $\emptyset$ означает, что A не содержит элементарных событий.

Пример

Рассмотрим систему, состоящую из 6 атомов H. Выбираем один атом.

Определение

Достоверное событие – то, которое в результате опыта обязательно произойдет. То есть A = (σ).

Пример

Достоверное событие – выпадение ≤ 6 очков при броске одной игральной кости.

Определение

Событие, состоящее из всех точек, не содержащих событие A, называется собы-

тием противоположным А и обозначается $\overline{A}$.
$\overline{\sigma} = \emptyset$.
А – выпадение орла, $\overline{A}$ – решки.
Определение
Суммой (объединением) А + В ($A \cup B$) событий А и В назовем событие, которое состоит в том, что имеет место или А, или В, или (и А, и В). То есть это обьединение множеств точек А и В.
Определение
Произведением (пересечением) А · В ($A \cap B$) событий А и В называется событие, которое состоит в том, что имеет место и А и В(одновременно) – пересечение множества точек А и В.
Определение
События А и В несовместны если $(A \cup B) = \emptyset$.
(То есть не могут произойти одновременно)
Пример
Бросок кости А – не менее 3х очков, В – не более 4х очков,$\overline{A}$ – менее 3 очков(1 или 2), А + В = σ, А · В = 3 или 4 очка.
Пример
Выстрел по мишени. А – попадание, В – промах, А · В = $\emptyset$.
А + В = В + А
(А + В) + С = А + (В + С)
А · В = В · А
Определение
Пространство элементарных событий называется дискретным, если оно состоит из конечного числа точек, или из бесконечного числа точек, которые могут быть занумерованы последовательно(Счетное число точек).
Пример
Предыдущий пример – конечное число точек.
Теперь попробуем ввести вероятность, то есть число, которое характеризует степень обьективной возможности события.
Определение
Пусть дано дискретное пространство элементарных событий σ с точками E_1, E_2, E_3 . . . Предполагаем, что с каждой точкой E_i (событием) связано число, называемое вероятностью E_i и обозначаемое $\mathrm{P}(E_i)$, такое что:
1)$\mathrm{P}(E_i) \geq 0$
2)$\mathrm{P}(E_1) + \mathrm{P}(E_2) + \ldots = 1$
Вероятность любого события А есть сумма вероятностей элементарных событий из которых оно состоит.

1)P(σ) = 1
2)P($\emptyset$) = 0
3)0 $\leq$ P(A) $\leq$ 1
Как определить вероятность события в общей теории не постулируется. Об этом надо специально договариваться. Чаще всего встречается схема случаев.
Пусть пространство эментарных событий состоит из n точек, причем все они равновозможны, то есть по условиям симметрии есть основание считать, что ни одно из них не является обьективно более возможным, чем другие. Напомним, кроме того, что элементарные события несовместны. Такие элементарные события обычно называют случаями.
Пример
Орел и решка при броске монеты. Появляется для любой из карт тщательно перетасованной колоды.
Пусть событие A состоит из m точек (эти m случаев называются благоприятными событию A). Тогда вероятность P(A) =$\frac{m}{n}$
Пример
Бросок игральной кости. A – выпадение четного числа очков.
n = 6, m = 3 (2, 4, 6) , следовательно, P(A) = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
В других сиуациях, не сводящихся к схеме случаях, вероятность определяется по другому(например плотник, землемер, штурман измеряют расстояния – одно и тоже, но делают это по разному). При этом все способы с корнями уходят в опыт.
Пусть производится n опытов, в каждом из которых может появится событие A. Частотой события A называется отношение числа опытов, в которых появилось A к общему числу опытов. Частоту часто называют статистической вероятностью.
$0 \leq P^*(\mathrm{A}) \leq 1$, $P^*(\mathrm{A}) = \frac{m}{n}$
Так определенная статистическая вероятность носит случайный характер. Но при росте n она стабильно около некоторого значения. При n $\to \infty$ с практической достоверностью (то есть , вероятность ошибки сколь угодно мала) можно утверждать, что частота события будет сколько угодно мало отличаться от вероятности его в отдельном опыте. Более подробно это рассмотрим потом.

Факты из комбинаторики

Число размещений с повторениями. $\overline{A_n^k} = n^k$, где n – количество типов элементов – группы по k элементов с учетом порядка(число трехзначных чисел в десятичной системе счисления равно 10^3 - 10^2).
Число размещений без повторений $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
Пример
12 человек учавствует в соревновании. Сколько вариантов распределения медалей. $\overline{A_{12}^3} = 12{\cdot}11{\cdot}10 = 1320$
Число сочетаний без повторений $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!(k)!}$
Пример
12 команд. Сколько способов сформировать финальную группу из 3 команд без учета мест?
$C_{12}^3 = \frac{12\cdot11\cdot10}{2\cdot3} = 220$
Число перестановок из n различных элементов $P_n =$ n! $= A_n^n$
Число перестановок из n $= n_1 + n_2 + n_3 \ . \ . \ . + n_k$ элементов, n_1 – 1 типа, n_2 – 2 типа, . . . n_k – k–го типа,
P$(n_1,\, n_2,\, . \ . \ . \ n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$
Пример
8 ладей расстанавливаются на доске. Какова вероятность, что никакие две не бьют друг – друга?
Сколько способов расположить ладей на шахматной доске что бы они не били друг друга? На каждой горизонтальной по одной. Пусть на первой горихонтали она стоит на позиции a_1, на второй на позиции a_2 и так далее.
$(a_1,\, a_2,\, ...\, a_8)$ – перестановка чисел 1,2 . . . 8
То есть благоприятных случаев $P_8 = 8!$
P $= \frac{8!}{8^2\cdot(8^2-1)\cdot(8^2-2)\ .\ .\ .\ (8^2-7)} \approx 9 \cdot 10^{-6}$
Как определить вероятность если пространство элементарных собыий не является конечным? Часто здесь имеет смысл метод геометрической вероятности. Если пространство σ может быть изображено геометрической фигуры и по условию опыта вероятность попадания точки (элементарного события) в любую часть области σ пропорционально мере этой части (длинне, площади, обьему . . .) и не зависит от ее расположения и формы, то вероятность события A определяется как P(A) $= \frac{S_A}{S}$, где S_A – мера части области, попадание в которую благоприятствует событию A, S – мера всей области.
Пример
Двое договорились встретится в определенном месте между 17 и 18 часами. Пришедший первым ждет второго 15 минут, после чего уходит. Определить вероятность встречи, если время прихода каждого независимо и равновероятно в

течении этого часа.
Благоприятные исходы : $|x - y| \leq \frac{1}{4}$
$\frac{1}{4} \leq x - y \leq \frac{1}{4}$
$S = 1 - (1 - \frac{1}{4})^2$
$\text{P} = \frac{1 - \frac{9}{16}}{1} = \frac{7}{16}$

Парадокс де-Мере-Паскаля

Что вероятнее: при 3 бросках игральной кости получить в сумме: 11 или 12 очков?
Рассуждение де-Мере: Суммы 11 и 12 образуются при выпадении на костях следующих цифр: $12 = 6 + 5 + 1 = 6 + 3 + 3 = 5 + 4 + 3 = 5 + 5 + 2 = 4 + 4 + 4$ (то есть 6 вариантов);
$11 = 6 + 4 + 1 = 6 + 3 + 2 = 5 + 5 + 1 = 5 + 4 + 2 = 5 + 3 + 3 = 4 + 4 + 2$ (то есть 6 вариантов);
То есть 11 и 12 должны быть равновероятны, но на опыте 11 появляется чаще.
На ошибку указал Паскаль: необходимо учитывать все возможные комбинации цифр, дающие в сумме 11 или 12.
Например $6 + 5 + 1 = 6 + 1 + 5 = 5 + 1 + 6 = 5 + 6 + 1 = 1 + 5 + 6 = 1 + 6 + 5$ (то есть 6 способов = 3!). Аналогично, $6 + 4 + 2$ (6 = 3! способов), $6 + 3 + 3$ (3 способа), $5 + 4 + 3$ (6 способов), $4 + 4 + 4$ (1 способ).
$P_{11} = \frac{6+6+6+3+3+3}{6^3} > P_{12}$.

Сравнение статистик Больцмана, Бозе – Энштейна, Ферми – Дирака

Дано k частиц и l ячеек (l > k)
Найти вероятность того что:
1)в определенных k ячейках окажется по 1 частице
2)в каких то ячейках окажется по одной частице
Статистика Больцмана

Ей подчиняется обычный газ.
Условия:

а)частицы различны
б)в любой ячейке может находится сколько угодно частиц

1)Общее число исходов l^k(Так как любую частицу можно положить в любую ячейку).Благоприятных исходов k!, так как частицы различны и их можно переставлять.
Значит $P_1 = \frac{k!}{l^k}$
2)Теперь можно k ячеек выбирать из l.(То есть число сочетаний k из общего числа l).То есть число благоприятных исходов равно $C_l^k \cdot k!$
$P_2 = \frac{C_l^k \cdot k!}{l^k}$

Статистика Бозе-Энштейна

Ей подчиняется обычный газ.
Условия:

а)частицы различны

б)в любой ячейке может находится сколько угодно частиц

Общее число исходов.
Переставив ячейки в ряд, границы определим перегородками, которых l + 1.Если поменять местами две частицы, то нового распределения не получится, так как частицы неразличимы.Если поменять местами две перегородки, то тоже ничего нового не получится, так как все перегородки одинаковы.Если же поменять местами перегородку и частицу, то получится новое распределение.Две крайние перегородки закреплены, поэтому в перестановке учавствует l - 1 перегородок и к частиц, тоесть k + 1 - l элементов.
Число перестановок равно : $\frac{(k+l-1)!}{k! \cdot (l-1)!}$
Число благоприятных исходов равно:
1)Так как перестановка частиц не дает нового распределения, то благоприятный исход один(при фиксированных ячейках).
То есть $P_1 = \frac{1}{\frac{(k+l-1)!}{k! \cdot (l-1)!}} = \frac{k! \cdot (l-1)!}{(k+l-1)!}$
2)Число благоприятных исходов равно числу способов выбрать k ячеек из l, где будут частицы: $C_l^k = \frac{l!}{k!(l-k)!}$
$P_2 = \frac{l!(k+l-1)!}{k!(l-k)!k!(l-1)!}$

Статистика Ферми-Дирака

Ей подчинен, нарпример, электронный газ.

а)частицы неразличимы

б)в ячейке может находится не более одной частицы (принцип Паули).

Общее число исходов - это число способов выбать из l ячеек k, где будут частицы,

т.е. $C_l^k = \frac{l!}{k! \cdot (l-k)!}$
Число благополучных исходов

1)Так как k ячеек определены, а частицы неразличимы, то благополучный исход один. $P_1 = \frac{1}{C_l^k} = \frac{k!(l-k)!}{l!}$

2)Число благополучных исходов равно числу способов выбрать k заполненных ячеек из l равно C_l^k следовательно $P_2 = \frac{C_l^k}{C_l^k} = 1$