

# 1 Основные понятия

## 1.1 Событие. Вероятность события

При рассмотрении опытов в которых могут быть различные исходы, результаты опытов будем называть событиями. Отличаем составные (разложимые) и элементарные (неразложимые) события.

### Пример

Выпало 6 очков при броске двух игральных костей – составное разложение на (1, 5) или (2, 4) или (3, 3) или (4, 2) или (5, 1).

О том, что мы понимаем под элементарным событием надо предварительно условиться. Это неопределяемое понятие (как точка в геометрии). Они определяют идеализированный опыт. По определению, каждый неразложимый исход идеализированного опыта представляется одним и только одним элементарным событием. Совокупность всех элементарных событий называется пространством элементарных событий ( $\sigma$ ). Элементарное событие – точки этого пространства. Событие – множество точек.

Совокупность точек представляет все те исходы, при которых происходит событие  $A$ , полностью описывают это событие. Любое множество точек  $A$  нашего пространства можно назвать событием; оно происходит или нет в зависимости от того, принадлежит или нет множеству  $A$  точка, представляющая исходный опыт.

### Пример

Число курящих среди 100 человек. Пространство элементарных событий – множество чисел 0, 1, 2, . . . 100.

### Определение

Невозможное событие – это событие, которое в результате данного опыта не может произойти. Обозначим его  $\emptyset$ . То есть, запись  $A = \emptyset$  означает, что  $A$  не содержит элементарных событий.

### Пример

Рассмотрим систему, состоящую из 6 атомов Н. Выбираем один атом.

### Определение

Достоверное событие – то, которое в результате опыта обязательно произойдет. То есть  $A = (\sigma)$ .

### Пример

Достоверное событие – выпадение  $\leq 6$  очков при броске одной игральной кости.

### Определение

Событие, состоящее из всех точек, не содержащих событие  $A$ , называется собы-

тием противоположным  $A$  и обозначается  $\overline{A}$ .

$\overline{\sigma} = \emptyset$ .

$A$  – выпадение орла,  $\overline{A}$  – решки.

**Определение**

Суммой (объединением)  $A + B$  ( $A \cup B$ ) событий  $A$  и  $B$  назовем событие, которое состоит в том, что имеет место или  $A$ , или  $B$ , или (и  $A$ , и  $B$ ). То есть это объединение множеств точек  $A$  и  $B$ .

**Определение**

Произведением (пересечением)  $A \cdot B$  ( $A \cap B$ ) событий  $A$  и  $B$  называется событие, которое состоит в том, что имеет место и  $A$  и  $B$  (одновременно) – пересечение множества точек  $A$  и  $B$ .

**Определение**

События  $A$  и  $B$  несовместны если  $(A \cup B) = \emptyset$ .

(То есть не могут произойти одновременно)

**Пример**

Бросок кости  $A$  – не менее 3 очков,  $\overline{A}$  – менее 3 очков (1 или 2),  $A + B = \sigma$ ,  $A \cdot B = 3$  или 4 очка.

**Пример**

Выстрел по мишени.  $A$  – попадание,  $B$  – промах,  $A \cdot B = \emptyset$ .

$$A + B = B + A$$

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$A \cdot B = B \cdot A$$

**Определение**

Пространство элементарных событий называется дискретным, если оно состоит из конечного числа точек, или из бесконечного числа точек, которые могут быть занумерованы последовательно (Счетное число точек).

**Пример**

Предыдущий пример – конечное число точек.

Теперь попробуем ввести вероятность, то есть число, которое характеризует степень объективной возможности события.

**Определение**

Пусть дано дискретное пространство элементарных событий  $\sigma$  с точками  $E_1, E_2, E_3 \dots$ . Предполагаем, что с каждой точкой  $E_i$  (событием) связано число, называемое вероятностью  $E_i$  и обозначаемое  $P(E_i)$ , такое что:

$$1) P(E_i) \geq 0$$

$$2) P(E_1) + P(E_2) + \dots = 1$$

Вероятность любого события  $A$  есть сумма вероятностей элементарных событий из которых оно состоит.

- 1)  $P(\sigma) = 1$
- 2)  $P(\emptyset) = 0$
- 3)  $0 \leq P(A) \leq 1$

Как определить вероятность события в общей теории не постулируется. Об этом надо специально договариваться. Чаще всего встречается схема случаев.

Пусть пространство элементарных событий состоит из  $n$  точек, причем все они равновозможны, то есть по условиям симметрии есть основание считать, что ни одно из них не является объективно более возможным, чем другие. Напомним, кроме того, что элементарные события несовместны. Такие элементарные события обычно называют случаями.

### Пример

Орел и решка при броске монеты. Появляется для любой из карт тщательно перетасованной колоды.

Пусть событие состоит из  $m$  точек (эти  $m$  случаев называются благоприятными событию  $A$ ). Тогда вероятность  $P(A) = \frac{m}{n}$

### Пример

Бросок игральной кости.  $A$  – выпадение четного числа очков.

$n = 6$ ,  $m = 3$  (2, 4, 6), следовательно,  $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

В других ситуациях, не сводящихся к схеме случаев, вероятность определяется по другому (например плотник, землемер, штурман измеряют расстояния – одно и то же, но делают это по разному). При этом все способы с корнями уходят в опыт.

Пусть производится  $n$  опытов, в каждом из которых может появиться событие. Частотой события называется отношение числа опытов, в которых появилось к общему числу опытов. Частоту часто называют статистической вероятностью.  $0 \leq P^*(A) \leq 1$ ,  $P^*(A) = \frac{m}{n}$

Так определенная статистическая вероятность носит случайный характер. Но при росте  $n$  она стабильно около некоторого значения. При  $n \rightarrow \infty$  с практической достоверностью (то есть, вероятность ошибки сколь угодно мала) можно утверждать, что частота события будет сколько угодно мало отличаться от вероятности его в отдельном опыте. Более подробно это рассмотрим потом.

## Факты из комбинаторики

Число размещений с повторениями.  $\overline{A}_n^k = n^k$ , где  $n$  – количество типов элементов – группы по  $k$  элементов с учетом порядка (число трехзначных чисел в десятичной системе счисления равно  $10^3 - 10^2$ ).

Число размещений без повторений  $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

### Пример

12 человек участвует в соревновании. Сколько вариантов распределения медалей.  $\overline{A}_{12}^3 = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$

Число сочетаний без повторений  $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!(k)!}$

### Пример

12 команд. Сколько способов сформировать финальную группу из 3 команд без учета мест?

$$C_{12}^3 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{2 \cdot 3} = 220$$

Число перестановок из  $n$  различных элементов  $P_n = n! = A_n^n$

Число перестановок из  $n = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k$  элементов,  $n_1 - 1$  типа,  $n_2 - 2$  типа,  $\dots$   $n_k - k$ -го типа,

$$P(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

### Пример

8 ладей расставляют на доске. Какова вероятность, что никакие две не бьют друг – друга?

Сколько способов расположить ладей на шахматной доске что бы они не били друг друга? На каждой горизонтальной по одной. Пусть на первой горизонтальной она стоит на позиции  $a_1$ , на второй на позиции  $a_2$  и так далее.

$(a_1, a_2, \dots, a_8)$  – перестановка чисел  $1, 2, \dots, 8$

То есть благоприятных случаев  $P_8 = 8!$

$$P = \frac{8!}{8^2 \cdot (8^2 - 1) \cdot (8^2 - 2) \cdot \dots \cdot (8^2 - 7)} \approx 9 \cdot 10^{-6}$$

Как определить вероятность если пространство элементарных событий не является конечным? Часто здесь имеет смысл метод геометрической вероятности. Если пространство  $\sigma$  может быть изображено геометрической фигуры и по условию опыта вероятность попадания точки (элементарного события) в любую часть области  $\sigma$  пропорционально мере этой части (длине, площади, объему  $\dots$ ) и не зависит от ее расположения и формы, то вероятность события  $A$  определяется как  $P(A) = \frac{S_A}{S}$ , где  $S_A$  – мера части области, попадание в которую благоприятствует событию,  $S$  – мера всей области.

### Пример

Двое договорились встретиться в определенном месте между 17 и 18 часами. Пришедший первым ждет второго 15 минут, после чего уходит. Определить вероятность встречи, если время прихода каждого независимо и равномерно в

течении этого часа.

Благоприятные исходы :  $|x - y| \leq \frac{1}{4}$

$$\frac{1}{4} \leq x - y \leq \frac{1}{4}$$

$$S = 1 - \left(1 - \frac{1}{4}\right)^2$$

$$P = \frac{1 - \frac{9}{16}}{1} = \frac{7}{16}$$

### Парадокс де-Мере-Паскаля

Что вероятнее: при 3 бросках игральной кости получить в сумме: 11 или 12 очков?

Рассуждение де-Мере: Суммы 11 и 12 образуются при выпадении на костях следующих цифр:  $12 = 6 + 5 + 1 = 6 + 3 + 3 = 5 + 4 + 3 = 5 + 5 + 2 =$

$4 + 4 + 4$  (то есть 6 вариантов);

$11 = 6 + 4 + 1 = 6 + 3 + 2 = 5 + 5 + 1 = 5 + 4 + 2 = 5 + 3 + 3 =$

$4 + 4 + 2$  (то есть 6 вариантов);

То есть 11 и 12 должны быть равновероятны, но на опыте 11 появляется чаще. На ошибку указал Паскаль: необходимо учитывать все возможные комбинации цифр, дающие в сумме 11 или 12.

Например  $6 + 5 + 1 = 6 + 1 + 5 = 5 + 1 + 6 = 5 + 6 + 1 = 1 + 5 + 6 = 1 + 6 + 5$  (то есть 6 способов =  $3!$ ). Аналогично,  $6 + 4 + 2$  ( $6 = 3!$  способов),  $6 + 3 + 3$  (3 способа),  $5 + 4 + 3$  (6 способов),  $4 + 4 + 4$  (1 способ).

$$P_{11} = \frac{6+6+6+3+3+3}{6^3} > P_{12}.$$

### Сравнение статистик Больцмана, Бозе – Эйнштейна, Ферми – Дирака

Дано  $k$  частиц и  $l$  ячеек ( $l > k$ )

Найти вероятность того что:

1) в определенных  $k$  ячейках окажется по 1 частице

2) в каких то ячейках окажется по одной частице

#### Статистика Больцмана

Ей подчиняется обычный газ.

Условия:

а) частицы различны

б) в любой ячейке может находиться сколько угодно частиц

1) Общее число исходов  $l^k$  (Так как любую частицу можно положить в любую ячейку). Благоприятных исходов  $k!$ , так как частицы различны и их можно переставлять.

Значит  $P_1 = \frac{k!}{l^k}$

2) Теперь можно  $k$  ячеек выбирать из  $l$ . (То есть число сочетаний  $k$  из общего числа  $l$ ). То есть число благоприятных исходов равно  $C_l^k \cdot k!$

$$P_2 = \frac{C_l^k \cdot k!}{l^k}$$

### Статистика Бозе-Энштейна

Ей подчиняется обычный газ.

Условия:

- а) частицы различны
- б) в любой ячейке может находиться сколько угодно частиц

Общее число исходов.

Переставив ячейки в ряд, границы определим перегородками, которых  $l + 1$ . Если поменять местами две частицы, то нового распределения не получится, так как частицы неразличимы. Если поменять местами две перегородки, то тоже ничего нового не получится, так как все перегородки одинаковы. Если же поменять местами перегородку и частицу, то получится новое распределение. Две крайние перегородки закреплены, поэтому в перестановке участвует  $l - 1$  перегородок и  $k$  частиц, то есть  $k + l - 1$  элементов.

Число перестановок равно :  $\frac{(k+l-1)!}{k! \cdot (l-1)!}$

Число благоприятных исходов равно:

1) Так как перестановка частиц не дает нового распределения, то благоприятный исход один (при фиксированных ячейках).

То есть  $P_1 = \frac{1}{\frac{(k+l-1)!}{k! \cdot (l-1)!}} = \frac{k! \cdot (l-1)!}{(k+l-1)!}$

2) Число благоприятных исходов равно числу способов выбрать  $k$  ячеек из  $l$ , где будут частицы:  $C_l^k = \frac{l!}{k! \cdot (l-k)!}$

$$P_2 = \frac{l! \cdot (k+l-1)!}{k! \cdot (l-k)! \cdot k! \cdot (l-1)!}$$

### Статистика Ферми-Дирака

Ей подчинен, например, электронный газ.

- а) частицы неразличимы
- б) в ячейке может находиться не более одной частицы (принцип Паули).

Общее число исходов – это число способов выбрать из  $l$  ячеек  $k$ , где будут частицы, то есть  $C_l^k = \frac{l!}{k!(l-k)!}$

Число благополучных исходов

1) Так как  $k$  ячеек определены, а частицы неразличимы, то благополучный исход один.  
 $P_1 = \frac{1}{C_l^k} = \frac{k!(l-k)!}{l!}$

2) Число благополучных исходов равно числу способов выбрать  $k$  заполненных ячеек из  $l$  равно  $C_l^k$ , следовательно  $P_2 = \frac{C_l^k}{C_l^k} = 1$

## 1.2 Основные теоремы теории вероятностей

### Теорема сложения вероятностей

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Доказательство: (для дискретного пространства элементарных событий). Что бы получить  $P(A + B)$  надо сложить вероятности точек входящих в  $A$ , и точек, входящих в  $B$ , на каждую по одному разу. Точки из  $AB$  сосчитали дважды, поэтому их надо вычесть.

Если  $A$  и  $B$  несовместны то  $P(A + B) = P(A) + P(B)$ . Если  $A_1, A_2, \dots, A_n$  - попарно несовместны, то  $P(\sum_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$

### Определение:

Говорят, что события  $A_1, A_2, \dots, A_n$  образуют полную группу, если  $A_1 + A_2 + \dots + A_n = \sigma$ .

### Следствие 1

Если события  $A_1, A_2, \dots, A_n$  образуют полную группу попарно несовместных событий, то  $\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1$

### Следствие 2

Сумма вероятностей противоположных событий равна 1:  $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

Если событий три:

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

$$P(\sum_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i,j} P(A_i A_j) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1, A_2, \dots, A_n)$$

### Пример

Есть 100 карточек с числами 1, 2, 3, ..., 100. Случайно выбирается одно из них. Событие  $A$  – число делится на 2,  $B$  – делится на 3. Найти вероятность  $P(A + B)$ .

$$P(A) = \frac{50}{100}, P(B) = \frac{33}{100}.$$

$$AB - \text{ делится на 6: } P(AB) = \frac{16}{100}.$$

$$P(A + B) = \frac{50}{100} + \frac{33}{100} - \frac{16}{100} = \frac{67}{100}.$$

## Торема умножения вероятностей

### **Определение**

Событие  $A$  называется независимым от события  $B$ , если вероятность события  $A$  не зависит от того, произошло событие  $B$  или нет, и зависимым, если вероятности  $A$  меняются в зависимости от того, произошло событие  $B$  или нет.

### **Пример 1**

Бросание 2 монет.  $A$  – орел на первой монете,  $B$  – орел на второй монете. Эти события независимы.

### **Пример 2**

Охотник, имеющий один патрон попадает в цель (событие  $A$ ). Событие  $B$  – лев ловит добычу – зависимые, если добыча – охотник.

### **Определение**

Вероятность события  $A$ , вычисленная при условии, что имело место событие  $B$  – называется условной вероятностью события  $A$ , и обозначается  $P(A|B)$ , или  $P_B(A)$  (считается  $P(B) \neq 0$ ). Условие независимости события  $A$  от  $B$  это  $P(A|B) = P(A)$ .

### **Теорема**

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B|A).$$

Доказательство:

Для схемы случаев. Пусть в результате опыта возможно  $n$  исходов, событие  $A$  благоприятных  $m$  исходов, событие  $B$  –  $k$  исходов, и событие  $A$ , и событие  $B$  –  $l$  исходов.  $P(A \cdot B) = \frac{l}{n}$ ,  $P(A) = \frac{m}{n}$ . Если известно, что  $A$  происходит, то из  $n$  остальных возможных исходов, из них  $l$  блокируют событие  $B$ , то есть  $P(B|A) = \frac{l}{m}$ . То есть  $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B|A)$ .

Ясно, что  $P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A|B)$

### **Следствие 1**

Если событие  $A$  не зависит от события  $B$ , то и событие  $B$  не зависит от события  $A$ .

Известно, что  $P(A) = P(A|B)$ . Считаем, что  $P(A) \neq 0$ .

$$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B|A) \\ P(AB) = P(B)P(A|B) \end{cases}$$



Следовательно,  $P(A)P(B|A) = P(B)P(A)$ , следовательно  
(при условии  $P(A) \neq 0$ )  $P(B|A) = P(B)$

То есть, свойство зависимости или независимости взаимно.

### **Следствие 2**

Для независимых событий  $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$

Замечание: Эта формула может быть взята за определение независимых событий.

Умножение для  $n$  событий.

$$P(A_1, A_2, \dots, A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1A_2) \dots P(A_n|A_1, A_2, \dots, A_{n-1})$$

### **Определение**

События  $A_1, A_2, \dots, A_n$  называются независимыми в совокупности, если :

$$P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n)$$

Замечание: это определение эквивалентно следующему: события независимы в совокупности, если любое из них не зависит любой совокупности остальных.