Динамическое программирование.

Лекция 7

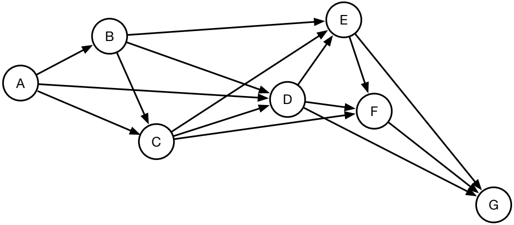
План лекции

- Задача о количестве маршрутов
- Задача о возрастающей подпоследовательности наибольшей длины
- Рекурсия как база динамического программирования
- Декомпозиция задач
- Восстановление решения
- Динамическое программирование и игры
- Уход от рекурсии. Восходящее решение
- Использование отображений для решения задач методом динамического программирования.
- Этапы решения задачи методом динамического программирования. Применимость динамического программирования
- Многомерные варианты

Задача о количестве маршрутов

Задача о количестве маршрутов

Найти количество маршрутов из пункта A в пункт G.



Если обозначить число маршрутов из A до i как $F(i)$, то:

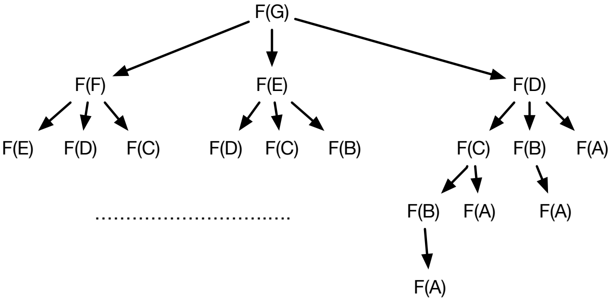
- $F(G) = F(F) + F(E) + F(D)$
- Аналогично:
- $F(F) = F(E) + F(D) + F(C)$
- $F(E) = F(D) + F(C) + F(B)$
- $F(D) = F(C) + F(B) + F(A)$
- $F(C) = D(B) + F(A)$
- $F(B) = F(A)$
- $F(A) = 1$

Задача о количестве маршрутов

- Это — рекурсивная задача.
- Каждая задача разбивается на подзадачи.
- Имеется операция консолидации результата.
- Каждая из подзадач решается аналогично основной, но несколько проще, чем главная.
- Имеются подзадачи, не требующие рекурсии.

Задача о количестве маршрутов

- Дерево рекурсии для такой задачи велико.



- Подзадачи частично совпадают.
- Это — задача динамического программирования.

Условия появления задачи *динамического программирования*:

- Задача может быть разбита на произвольное количество подзадач.
- Решение полной задачи зависит только от решения подзадач.
- Каждая из подзадач по какому-либо критерию *немного* проще основной задачи.
- Часть подзадач и подзадач у подзадач совпадает.

Два основных способа решения:

- Рекурсивное решение с запоминанием результатов.
- Восходящее решение в правильном порядке.

Условия применения метода *разделяй и властвуй*:

- Задача может быть разбита на произвольное количество b подзадач.
- Решение полной задачи зависит только от решения подзадач.
- Каждая из подзадач проще основной задачи не менее, чем в b раз.

Основной способ решения — рекурсия или эквивалентная ей итерация.

Принцип Беллмана

- Беллман, 1940-е годы, принцип оптимальности:
  «Каковы бы ни были первоначальное состояние и решение, последующие решения должны составлять оптимальное поведение относительно уже решённого состояния.»
- Арис:
  «Если вы не научились использовать наилучшим образом то, что у вас есть, вы не научитесь использовать то, что у вас будет»

Уравнение Беллмана

- Пусть имеется управляемая система.
- S — её текущее состояние.
- $W_i = f_i(S, x_i)$ — функция выигрыша(стоимости) при использовании управления x на $i-$м шаге.
- $S' = \varphi_i(S, x_i)$ — состояние, в которое переходит система при воздействии x
  Независимо от значения S нужно выбрать управление на этом шаге так, чтобы выигрыш на данном шаге плюс оптимальный выигрыш на всех последующих шагах был максимальным.

$$W_i(S) = \max_{x_i} \left\{ f_i(S, x_i) + W_{i+1}\left(\varphi_i(S, x_i)\right) \right\}$$

Уравнение Беллмана для задачи о количестве маршрутов

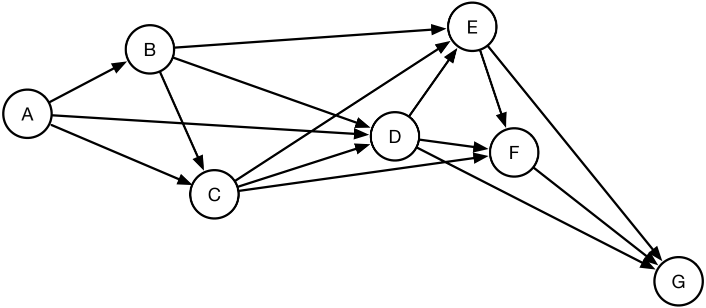
Пусть A — матрица смежности,

$$A[i,j] = \begin{cases} 1, & \text{если имеется прямой путь из } i \text{ в } j \\ 0, & \text{если не имеется прямого пути из } i \text{ в } j. \end{cases}$$

Тогда:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{k} F(i) \cdot A[i,x]$$

Дорожный граф



Его матрица смежности

$$
A = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} A & B & C & D & E & F & G \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Задача о возрастающей подпоследовательности наибольшей длины.

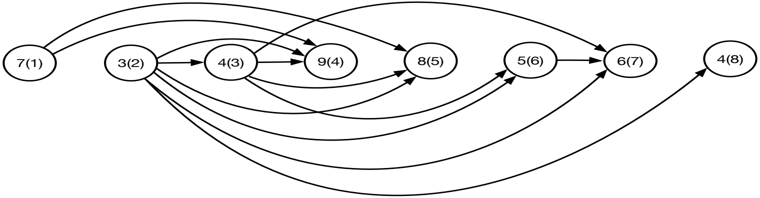
Задача о возрастающей подпоследовательности наибольшей длины

- Имеется последовательность чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$.
- Подпоследовательность $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$ называется возрастающей, если
$$1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$$
и
$$a_{i_1} < a_{i_2} < \cdots < a_{i_k}$$
- Требуется найти максимальную длину возрастающей подпоследовательности.

Пример: $a_i = \{7, 3, 4, 9, 8, 5, 6, 4\}$
Одна из возрастающих подпоследовательностей есть $\{7, 9\}$.
$\{3, 4, 5, 6\}$ есть возрастающая подпоследовательность наибольшей длины.

Задача о возрастающей подпоследовательности

- Соединим направленными рёбрами элементы, которые могут быть друг за другом в подпоследовательности.



- Задача — найти не количество путей, а длину наибольшего пути.

Задача о возрастающей последовательности

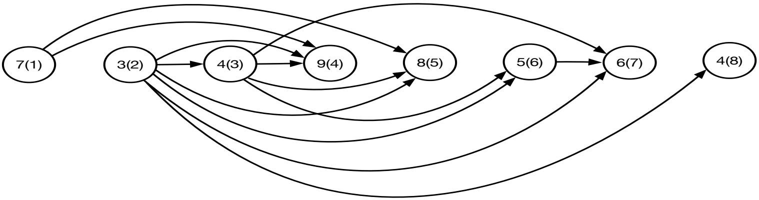
- В задаче на количество путей консолидация подзадач имела вид

$$R_i = \sum_{i=1}^{N_{R_{i-1}}} R_{i-1}$$

- В этой задаче длина наибольшего пути к вершине i есть максимум из наибольших путей к предыдущим вершинам плюс единица

$$L_i = 1 + \max(L_{i-1,j}, j = 1, N_{L_{i-1}})$$

Задача о возрастающей последовательности



$$
\begin{aligned}
L_8 &= 1 + \max(L_2) \\
L_7 &= 1 + \max(L_2, L_3, L_6) \\
L_6 &= 1 + \max(L_2, L_3) \\
L_5 &= 1 + \max(L_1, L_2, L_3) \\
&\dots \\
L_1 &= 1
\end{aligned}
$$

Задача о возрастающей последовательности

- Рекурсивно эта задача решается следующей программой:

```
int f(int a[], int N, int k) { // k - number of element
    int m = 0;
    for (int i = 0; i < k-1; i++) { // for lefts
        if (a[i] < a[k]) { // Is there a path?
            int p = f(a,N,i); // Its length
            if (p > m) m = p; // m = max(m,p)
        }
    }
    return m+1;
}
```

Задача о возрастающей последовательности

- Для последовательности $\{1, 4, 2, 5, 3\}$ решение будет таким:
  - $f_5 = 1 + \max(f_1, f_3)$
  - $f_4 = 1 + \max(f_1, f_2, f_3)$
  - $f_3 = 1 + \max(f_1)$
  - $f_2 = 1 + \max(f_1)$
  - $f_1 = 1$
  - Возвращаемся назад
  - $f_2 = 1 + \max(f_1) = 2$
  - $f_3 = 1 + \max(f_1) = 2$
  - $f_4 = 1 + \max(f_1, f_2, f_3) = 3$
  - $f_5 = 1 + \max(f_1, f_3) = 3$

  Решение есть $\max(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) = 3$

Задача о возрастающей последовательности

- Чтобы повторно не решать решённые подзадачи вводим массив c размером N, хранящий значения вычисленных функций. Начальные значения его равны нулю.

```
int f(int a[], int N, int k, int c[]) {
   if (c[k] != 0) return c[k]; // Already solved
   int m = 0;
   for (int i = 0; i < k-1; i++) {
      if (a[i] < a[k]) {
         int p = f(a,N,i);
         if (p > m) m = p; // m = max(m,p)
      }
   }
   return c[k] = m+1; // Put to cache and return
}
```

Рекурсия как база динамического программирования.

Рекурсия как база динамического программирования

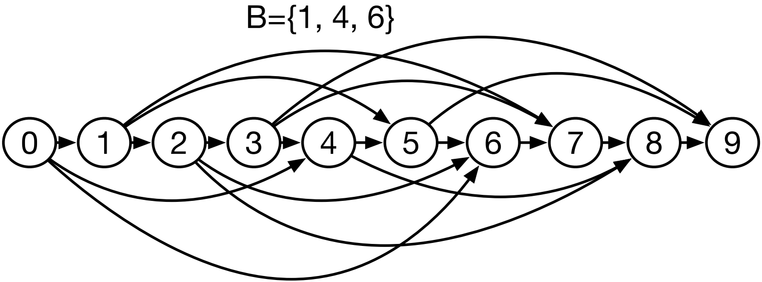
Вернёмся к задаче о банкомате.

- Пусть в банкомате имеется неограниченное количество банкнот $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ заданных номиналов.
- Задача заключается в том, чтобы выдать требуемую сумму денег наименьшим количеством банкнот.

Задача о банкомате

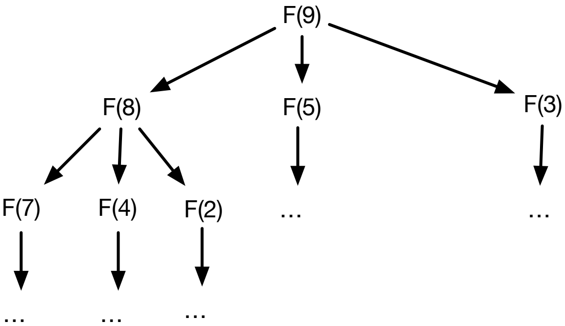
- Жадное решение имеется только для некоторого набора b_i.
- Например, при $b = \{1, 6, 10\}$ и $x = 12$ жадное решение даст ответ 3 $(10 + 1 + 1)$, хотя существует более оптимальное решение 2 $(6 + 6)$.
- Для набора $b = \{6, 10\}$ жадный алгоритм решения не найдёт.

Задача о банкомате: граф



Сведение задачи к задаче о количестве маршрутов.

Задача о банкомате: дерево рекурсии



Задача о банкомате: уравнение Беллмана

$$f(x) = \begin{cases} \min\limits_{i=\overline{1,n}} \{f(x - b_i)\} + 1, & \text{если } x > 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \\ \infty, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

Задача о банкомате: простая рекурсия

$$f(x) = \begin{cases} \min\limits_{i=1,n} \{f(x - b_i)\} + 1, & \text{если } x > 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \\ \infty, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

```
const int GOOGOL = 999999999;
int f(int x, int b[], int n) {
   if (x < 0) return GOOGOL;
   if (x == 0) return 0;
   int min = GOOGOL;
   for (int i = 0; i < n; i++) {
      int r = f(x - b[i], b, n);
      if (r < min) min = r;
   }
   return min + 1;
}
```

Задача о банкомате: борьба с излишней рекурсией

- Глубина рекурсии не превосходит $\dfrac{x}{\min\limits_{i=\overline{1,n}} b_i}$
- Количество рекурсивных вызовов растёт по экспоненте.
- Если при $b = \{1, 4, 6\}$ и $x = 30$ количество рекурсивных вызовов 285709, то для $x = 31$ оно уже 418729, а для $x = 40$ оно равно 597124768.

Задача о банкомате: борьба с излишней рекурсией

- Нам помогает сохранение промежуточных результатов.

```
const int GOOGOL = 999999999;
int f(int x, int b[], int n, int cache[]) {
   if (x < 0) return GOOGOL;
   if (x == 0) return 0;
   if (cache[x] >= 0) return cache[x];
   int min = GOOGOL;
   for (int i = 0; i < n; i++) {
      int r = f(x - b[i], b, n, cache);
      if (r < min) min = r;
   }
   return cache[x] = min + 1;
}
```

Задача о банкомате: борьба с излишней рекурсией

- Массив *cache*, передаваемый в функцию решения должен быть подготовлен.
- Мы должны узнать, решалась ли эта задача ранее.
- Инициализация массива проводится элементами, которые не могут быть результатом решения задачи.
- Размер массива должен соответствовать x.

Декомпозиция задачи

Декомпозиция задачи

- Для задачи о количестве путей до точки i подзадачей было определение количества путей до точек, находящихся в одном шаге от i.
  1. При условии отсутствия циклов размер подзадачи всегда был несколько меньше размера задачи.
  2. Подзадача решалась тем же методом, что и задача.
- Наличие таких условий — подозрение на то, что задачу можно решить методом динамического программирования.

Декомпозиция задачи

- Общая схема динамического программирования:
  1. Можно выделить множество подзадач.
  2. Имеется порядок на подзадачах.
  3. Имеется рекуррентное соотношение решения задачи через решения подзадач.
  4. Рекуррентное соотношение есть рекурсивная функция с целочисленными аргументами.

Декомпозиция задачи

При динамическом программировании:

1. принципиально исключаются повторные вычисления в любой рекурсивной функции если есть возможность запоминать значения функции для аргументов, меньших текущего;
2. снижает время выполнения рекурсивной функции до времени, порядок которого равен сумме времён выполнения всех функций с аргументом, меньших текущего, если затраты на рекурсивный вызов постоянны.

Декомпозиция задачи

- Правильная декомпозиция задачи — ключ к её решению.
- Вернёмся к задаче о рюкзаке.
- Имеется рюкзак объёма V и N предметов весом H_i и стоимостью C_i. Найти комбинацию предметов, имеющую наибольшую суммарную стоимость, которые можно унести.
- Что есть подзадача меньшего размера?

Декомпозиция задачи

- Правильная декомпозиция задачи — ключ к её решению.
- Вернёмся к задаче о рюкзаке.
- Имеется рюкзак объёма V и N предметов весом H_i и стоимостью C_i. Найти комбинацию предметов, имеющую наибольшую суммарную стоимость, которые можно унести.
- Что есть подзадача меньшего размера?
  - Наполнение рюкзака меньшего размера?

Декомпозиция задачи

- Правильная декомпозиция задачи — ключ к её решению.
- Вернёмся к задаче о рюкзаке.
- Имеется рюкзак объёма V и N предметов весом H_i и стоимостью C_i. Найти комбинацию предметов, имеющую наибольшую суммарную стоимость, которые можно унести.
- Что есть подзадача меньшего размера?
  - Наполнение рюкзака меньшего размера?
  - Наполнение рюкзака меньшим количеством предметов?

Декомпозиция задачи

- Требуется ответ на вопросы:
  1. какие ресурсы потребуются для запоминания результатов подзадач?
  2. если имеется решение подзадач, можно ли на основе этого получить решение задачи?
- Для подзадачи «рюкзак меньшего размера»
  1. размер памяти для результатов есть размер рюкзака
  2. если мы знаем результаты для всех меньших рюкзаков V_k, то поможет ли это решить задачу?
- Для подзадачи «рюкзак с меньшим количеством предметов»
  1. размер памяти для результатов есть количество предметов
  2. если мы знаем результаты для всех подзадач с меньшим количеством предметов, то поможет ли это решить задачу?

Декомпозиция задачи

- Задача про банкомат с неограниченным запасом купюр каждого номинала идентична задаче про рюкзак и магазин с неограниченным количеством товара каждой номенклатуры.
- Если количество предметов ограничено, то входные данные задачи — множество предметов, которые можно взять.
- Решение задачи про банкомат здесь не подходит — после выбора одного из предметов множество для выбора изменяется.

Декомпозиция задачи

Декомпозиция по размеру рюкзака.

1. Пусть аргументами подзадачи будут оставшееся множество предметов S и оставшееся место в рюкзаке L.
2. w — веса предметов, c — их стоимости.

$$f(S, L) = \begin{cases} \max\limits_{e \in S} \left(f(S - e, L - w(e)) + c(e) \right), & \text{если } L > 0 \\ 0, & \text{если } L = 0 \\ -\infty, & \text{если } L < 0 \end{cases}$$

Каков размер пространства аргументов этой задачи?

$$D = O(2^N \cdot L_0) = O(2^N)$$

Декомпозиция задачи

Декомпозиция по количеству предметов.
Пусть мы берёмся за решение задачи с $K+1$ предметами, зная решения всех задач с K предметами.

1. Аргументы подзадачи есть номер K и оставшееся место в рюкзаке L.
   Если у нас есть решение задачи для K предметов, то $(K+1)$-й предмет мы можем либо взять, либо его не брать.

$$f(K, L) = \begin{cases} \max\left(f\left(L - w_K, K-1\right) + c_K, f(L, K-1)\right) & \text{если } L > 0 \\ 0, & \text{если } L = 0 \\ -\infty, & \text{если } L < 0 \end{cases}$$

Каков размер пространства аргументов этой задачи?

$$D = O(N \cdot L_0)$$

Восстановление решения

Задача о банкомате: нахождение банкнот

- Мы искали решение задачи минимизации.
- До сих пор нас интересовал только ответ, значение минимума.
- Мы его получили.
- Мы не получили, какие именно банкноты требуется выдать.

Задача о банкомате: нахождение банкнот

- Мы искали решение задачи минимизации.
- До сих пор нас интересовал только ответ, значение минимума.
- Мы его получили.
- Мы не получили, какие именно банкноты требуется выдать.

- Имеется несколько подходов к получению детального решения:
  - Каждый раз при нахождении решения подзадачи мы сохраняем историю его получения.
  - Зная ответ, мы повторяем решение, воссоздавая историю получения.

Задача о банкомате: восстановление решения

Первый способ: сохранять цепочку вызовов.

- Потребуется: иметь список банкнот для каждого промежуточного решения.
- Всего промежуточных решений может быть N.
- Каждое из решений имеет различную длину (вектор).
- Потребуется N векторов.

Задача о банкомате: сохраняем список

```
const int GOOGOL = 999999999;
int f(int x, int b[], int n,
  int cache[], vector<vector<int>> &solution){
   if (x < 0) return GOOGOL;
   if (x == 0) return 0;
   if (cache[x] >= 0) return cache[x];
   int min = GOOGOL, best = -1;
   for (int i = 0; i < n; i++) {
      int r = f(x - b[i], b, n, cache, solution);
      if (r < min) {
         min = r; best = b[i];
      }
   }
   solution[x] = solution[x - best];
   solution[x].push_back(best);
   return cache[x] = min + 1;
}
```

Задача о банкомате: восстанавливаем решение

- Зная ответ и имея кэш-таблицу, можно восстановить решение.
- Предположим, что мы знаем, что точный ответ при заданных начальных значениях есть 7.
- Тогда возникает вопрос: какой предыдущий ход мы сделали, чтобы попасть в заключительную позицию?
- Введём термин *ранг* для обозначения наименьшего числа ходов, требуемого для достижения текущей позиции из начальной.
- Тогда каждый ход решения всегда переходит в позицию с рангом, большим строго на единицу.

Задача о банкомате: восстанавливаем решение

- Восстановление решения по таблице ответов:
  1. Заключительная позиция имеет ранг k.
  2. Делаем позицию текущей.
  3. Если текущая позиция имеет ранг 0, то это — начальная позиция и алгоритм завершён.
  4. Рассматриваем все позиции, ведущие в текущую и выбираем из них произвольную с рангом $k-1$.
  5. Запоминаем ход, приведший к из позиции ранга $k-1$ в ранг k.
  6. Понижаем ранг: $k \to k-1$ и переходим к 2.

Задача о банкомате: восстанавливаем решение

```
vector<int> buildSolution(int x, int b[], int n, int cache[]){
   vector<int> ret;
   for (int k = cache[x]; k >= 0; k--) {
      for (int i = 0; i < n; i++) {
         int r = x - b[i];
         if (r >= 0 && cache[r] == k-1) {
            x = r;
            ret.push_back(b[i]);
            break;
         }
      }
   }
   return ret;
}
```

Решение задачи о банкомате: восстанавливаем решение

Третья возможность восстановить решение — добавить ещё один кэш, сохраняющий номинал лучшей банкноты при лучшем решении.

```
const int GOOGOL = 999999999;
int f(int x, int *b, int n,
 int *cache, int *bestnote) {
  if (x < 0) return GOOGOL;
  if (x == 0) return 0;
  if (cache[x] >= 0) return cache[x];
  int min = GOOGOL, best = -1;
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    int r = f(x - b[i], b, n, cache, bestnote);
    if (r < min) {
      min = r;
      bestnote[x] = b[i];
    }
  }
  return cache[x] = min + 1;
}
```

Решение задачи о банкомате: восстанавливаем решение

Теперь для того, чтобы получить нужные для размена банкноты для суммы в `x`, достаточно пробежаться по кэшу банкнот:

```
while (x > 0) {
  // output bestcache[x];
  x -= bestcache[x];
}
```

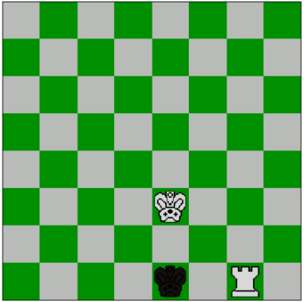
Динамическое программирование и игры.

Динамическое программирование и игры

- Шахматы — конечная игра с наличием цели.
- Деревья игры заканчиваются либо в позициях с оценкой $+\infty$, если выигрывают белые, либо с оценкой 0, если заключительная позиция — ничья, либо $-\infty$, если выигрывают чёрные.
- В конкретно заданной позиции результат обоюдно лучшей игры предопределён.
- Сложность лишь заключается в большом размере дерева игры.

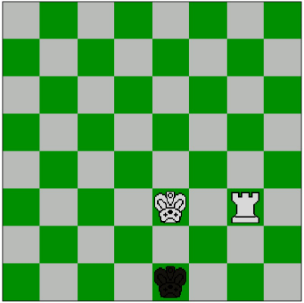
Динамическое программирование и игры

- Назовём позициями ранга 0 те позиции, в которых игра завершилась с каким-либо результатом.



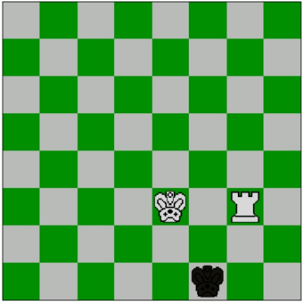
Динамическое программирование и игры

- Позиции ранга один — те позиции, которые при очередном ходе могут привести к позициям ранга 0.



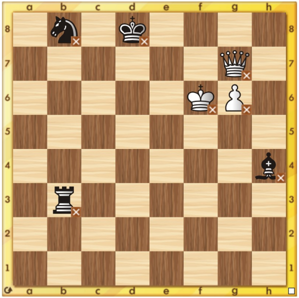
Динамическое программирование и игры

- Позиции ранга два — те позиции, которые при очередном ходе могут привести к позициям ранга 1.



Динамическое программирование и игры

- Шахматы — одна из игр, решаемых динамическим программированием.
- Существует большое множество позиций, особенно с небольшим количеством фигур, для которых известен их ранг.
- Для всех позиций до 7 фигур включительно известен их ранг.
- Например, известны позиции с рангом 1097.



- На 549-м ходу белые ставят мат.

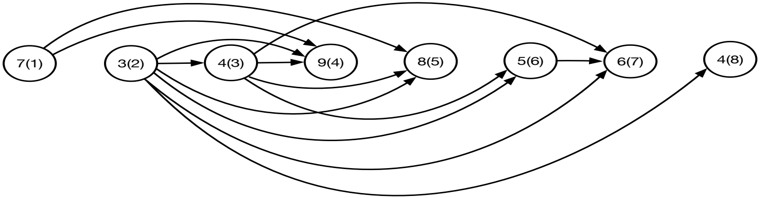
Динамическое программирование и игры

- Табличный подход изобрёл Кен Томпсон в 1970-х годах.
- Эффективную реализацию с помощью динамического программирования — новосибирский математик Евгений Налимов. Таблицы с рангом позиций называются таблицами Налимова.
- Размер таблиц с 7-ю фигурами составляет 140 тибибайт. Расчёт таблиц производился в 2012 году на компьютере «Ломоносов» ВМК МГУ.
- Наилучшая игра обоих сторон заключается в том, чтобы каждым очередным ходом переходить в позицию с тем же результатом и рангом, меньшим ровно на единицу.

Уход от рекурсии. Восходящее решение.

Восходящее решение

- Вернёмся к задаче о возрастающей подпоследовательности.

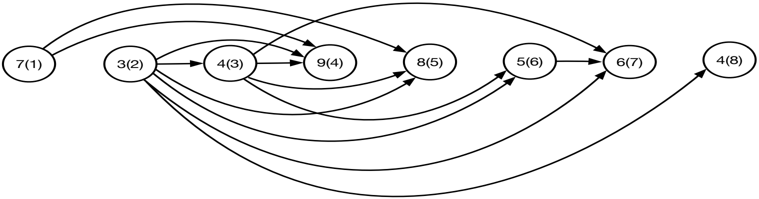


- При нисходящем решении нам требуется находить максимум из всех значений функций от $F(1)$ до $F(N)$, для чего рекурсивный вызов должен опуститься от $F(N)$ до $F(1)$.
- Для больших N уровень рекурсивных вызовов может превысить разумные рамки (размер стека в программах ограничен).

Восходящее решение

- При восходящем решении мы пробуем решать подзадачи *до того*, как они будут поставлены.
- Решая задачи в возрастающем порядке мы достигаем следующих целей:
  1. Гарантируется, что все задачи, решаемые позже, будут зависеть от ранее решённых.
  2. Не потребуются рекурсивные вызовы.
- Обязательное условие: монотонность аргументов при решении подзадач, если $f(k)$ — подзадача для $f(n)$, то $M(k) < M(n)$, где $M(x)$ есть некая метрика сложности решения.

Восходящее решение



- Для данной задачи порядок решения будет таким:
- F(1) = 1
- F(2) = 1
- F(3) = max(F(2)) + 1 = 2
- F(4) = max(F(1),F(2),F(3)) + 1 = 3
- ...
- F(8) = max(F(2))+1 = 2

После получения значений $F(i)$ не требуется вызывать функцию, можно использовать уже вычисленное значение.

Восходящее решение

- Восходящее решение не всегда оправдано.
- Пусть решение задачи определяется таким образом:

$$F(n) = \max(F((n+1)/2), F(n/3)) + 1$$

$$F(0) = F(1) = 1$$

- Это описывает какую-то последовательность.
- При нисходящем способе для $F(8)$ мы получаем:
- F(8) = max(F(4),F(2))+1
- F(4) = max(F(2),F(1))+1
- F(2) = max(F(1),F(0))+1=2
- F(4) = 3
- F(8) = 4

Восходящее решение

- При попытке решить задачу восходящим решением мы получим:
- F(0)=F(1)=1
- F(2)=max(F(1),F(0))+1=2
- F(3)=max(F(2),F(1))+1=3
- F(4)=max(F(2),F(1))+1=3
- F(5)=max(F(3),F(1))+1=3
- F(6)=max(F(3),F(2))+1=3
- F(7)=max(F(4),F(2))+1=4
- F(8)=max(F(4),F(3))+1=4
- Значения F(3),F(5),F(6),F(7) были вычислены зря.

Восходящее решение

- Поставленная задача более подходила под рекурсивный алгоритм с запоминанием промежуточных результатов (*memoizing*).
- Нисходящее решение $F(N)$ имеет сложность $O(\log N)$.
- Восходящее решение $F(N)$ имеет сложность $O(N)$.

Восходящее решение

- Рассмотрим задачу

$$F(0) = F(1) = F(2) = 1$$

$$F(n) = F(n-1) + F(n-3)$$

- При вычислении F(100000) в нисходящем порядке размер стека будет равен 100000, что, возможно, приведёт к аварийному завершению программы.
- Здесь мы различаем понятия «алгоритм», который корректен и «программа», которая исполняется «исполнителем».
- Для хранения аргументов и локальных переменных каждого рекурсивного вызова потребуется всё возрастающее количество памяти.

Восходящее решение

- Последовательность будет выглядеть так:
- $\{1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, 41, 60, 88, 129\}$
- $F(998) \approx 2.89273 \cdot 10^{165}$
- $F(999) \approx 4.23951 \cdot 10^{165}$
- $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{F(i+1)}{F(i)} \approx 1.46557$
- Для хранения 999-го элемента $F(999)$ потребуется по меньшей мере $\log_2 4.23951 \cdot 10^{165} \approx 559$ бит ≈ 69 байтов, не считая управляющей информации.

- Восходящее решение этой задачи обойдётся локальными переменными.

Восходящее решение vs нисходящее

- Восходящее решение по корректности эквивалентно нисходящему.
- Необходимо обеспечить вычисление в соответствующем порядке.
- При простом целочисленном аргументе вычисления можно проводить в порядке увеличения аргумента.
- Восходящее решение требует меньшего размера стека, но может решать задачи, ответ на которых не понадобится при решении главной задачи.

Использование отображений при решении задач методом динамического программирования.

Использование отображений

- Пока решались задачи, требующие одного или двух целочисленных аргументов.
- Увы, не все задачи такие.

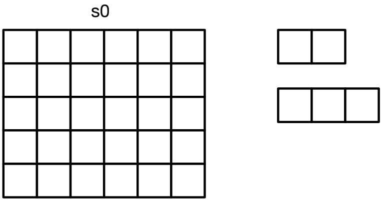
Использование отображений

Задача о покрытии.

- Имеется прямоугольник размером 5×6.
- Сколькими способами его можно замостить фигурами 1×2 и 1×3? Симметрии и повороты различаются.

Использование отображений

- Задача о разбиении прямоугольника.



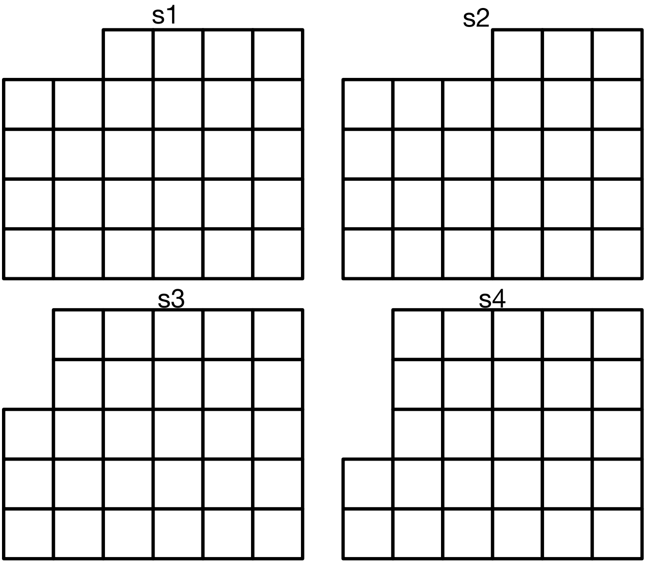
Использование отображений

Можно ли решить задачу методом динамического программирования?

- Обозначим через $f(s)$ количество разбиений фигуры s на требуемые фрагменты
- Тогда $f(s_0) = f(s_1) + f(s_2) + f(s_3) + f(s_4)$, где s_i - подфигуры, получающиеся вычитанием одного из фрагментов, содержащих крайнюю левую верхнюю точку.

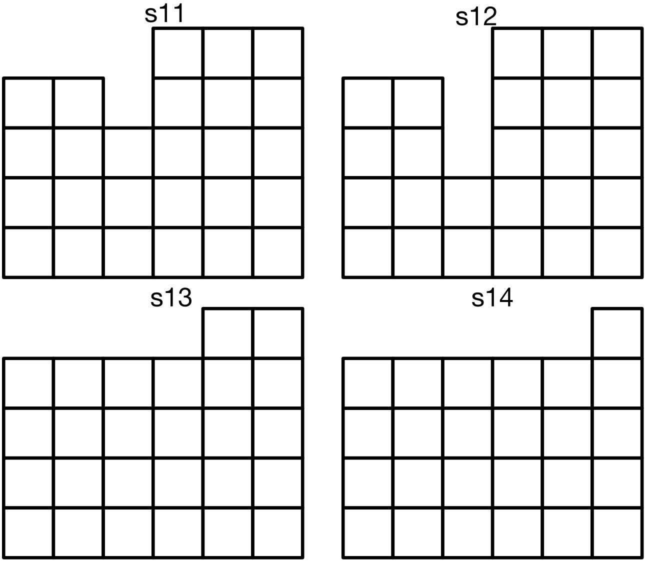
Использование отображений

- Возможные подзадачи.



Использование отображений

- $f(s_1) = f(s_{11}) + f(s_{12}) + f(s_{13}) + f(s_{14})$



Использование отображений

- При предложенном алгоритме решения одна подзадача может возникнуть при различных путях:

s’

1	1	2	2	3	3
4	4	5	5	6	6

s”

1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6

s’”

1	1	1	2	2	2
3	3	3	4	4	4

Использование отображений

- Решение таких подзадач не зависит от истории их получения.
- Если имеется отображение аргументов подзадачи (позиции) на результат, то задача может быть решена методом динамического программирования.

Использование отображений

- Что есть $f(s)$, если s не является числом?
- s есть объект, который мы должны использовать в виде ключа *key* в отображении.
- *value* в отображении есть значение, хранимое по этому ключу.
- Требуется создать *взаимно однозначное* соответствие объекта какому-то набору битов.
- В данной задаче можно пронумеровать все 30 элементов и каждому из номеров присвоить 1, если он присутствует и 0, если отсутствует.
- Размер множества возможных ключей есть 2^{30}, что слишком много для восходящего метода.

Использование отображений

- Воспользуемся изученной абстракцией отображения.
- Каждая из позиций является ключом в отображении.
- Задача решается нисходящим динамическим программированием с мемоизацией.
  1. При решении задачи из таблицы решений по ключу, соответствующему текущей позиции, извлекается значение.
  2. Если такого ключа нет, то производится полное решение и в отображение добавляется пара (ключ/полученное значение)
  3. Если ключ имеется, то результатом подзадачи будет значение по ключу.

Этапы решения задачи методом динамического программирования.

Этапы решения задачи

1. Определяется необходимость именно в динамическом программировании. При быстром уменьшении подзадач задача решается методом «разделяй и властвуй».
2. Определяется максимальный уровень рекурсии в главной задаче. Например, в задаче на покрытие прямоугольника максимальный уровень равен 15.
3. Для нетривиальных задач всегда разрабатывается рекурсивный метод решения задачи.
4. Разрабатывается метод отображения аргументов задачи в результат.
5. Реализуется процесс мемоизации в нисходящем методе.
6. Если максимальный уровень слишком большой, то нисходящий метод неприменим, но по результатам исследования реализуется восходящий метод.

Многомерные варианты.

Расстояние редактирования

- При исправлении слова в текстовом редакторе: три операции:
  - замена одной буквы на другую;
  - удаление лишней буквы;
  - вставка буквы.
- Больше операций редактирования — меньше похожи слова.
- Количество операций — *расстояние редактирования* или *расстояние Левенштейна*.
- Это — мера различия между двумя строками.

Расстояние редактирования

Сколько нужно операций, чтобы превратить слово `СЛОН` в слово `ОГОНЬ`?

Один из вариантов:
`СЛОН` $\to$ `СГОН` $\to$ `СГОНЬ` $\to$ `ОГОНЬ`

Расстояние редактирования: ищем рекурсию

Вопросы:

- Задача ли это динамического программирования?
- Что является рекурсивной функцией, решающей данную задачу?
- Что есть аргументы функции?

Расстояние редактирования: ищем рекурсию

Зафиксируем входные строки — исходную строку `s` и строку назначения `d` (образец). `s` должна превратиться в `d`.

- Как найти более простые подзадачи? Подзадач для более коротких строк-префиксов.
- Что является мерой простоты? Длина строки.

Расстояние редактирования

- Пусть `i` — длина префикса `s`, а `j` — длина префикса `d`.
- Три варианта:
  - Заменить последний символ строки `s` на последний символ строки `d`.
  - Добавить символ к концу строки `s`.
  - Удалить последний символ строки `s`.

Расстояние редактирования

Последовательность переходов `СЛОН` $\to$ `СГОН` $\to$ `СГОНЬ` $\to$ `ОГОНЬ` не обладает свойством порядка на подзадачах.

Имеется способ с сохранением порядка на подзадачах:

1. В префиксах строк длины 1 `С` и `О` меняем букву `С` на `О`. `СЛОН` $\to$ `ОЛОН`.
2. В префиксах длины 2 меняем `Л` на `Г`. `ОЛОН` $\to$ `ОГОН`.
3. В префиксах длины 4 добавляем букву `Ь`. `ОГОН` $\to$ `ОГОНЬ`.

Расстояние редактирования: уравнение Беллмана

Введём функцию $F(i, j)$ как решение задачи для префиксов строк `s` и `d` длинами `i` и `j`.

$$F(i,j) = \min \left(\begin{array}{l} F(i-1, j-1), \text{ если } s_i = t_i \text{ или } F(i-1, j-1) + 1, \text{ если } s_i \neq t_i \\ F(i-1, j) + 1 \\ F(i, j-1) + 1 \end{array} \right).$$

1. Различает случай совпадения последних символов.
2. Мы должны дописать символ в конец `s`.
3. Мы должны удалить последний символ из `s`.

Расстояние редактирования: мемоизация

- Аргументы — дискретные.
- Значений аргументов — плотные.
- Множество пар аргументов конечно и равно $|s| \times |d|$.
- Допускается восходящее решение без рекурсии заполнением таблицы по строкам.

Расстояние редактирования: пример решения

A	R	R	O	G	A	N	T

S	U	R	R	O	G	A	T	E

Расстояние редактирования: пример решения

- Добавим один лишний левый столбец и одну лишнюю верхнюю строку к таблице результатов.
- Заполним их последовательно возрастающими числами.
- Пустая строка может превратиться в образец за число операций, равное длине образца.
- Непустая строка превращается в пустой образец за число операций, равное длине строки.

		S	U	R	R	O	G	A	T	E
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1									
R	2									
R	3									
O	4									
G	5									
A	6									
N	7									
T	8									

Расстояние редактирования: пример решения

Заполнение таблицы ведём по строкам. Значение в первой свободной ячейке зависит от трёх элементов таблицы:

		S	U	R	R	O	G	A	T	E
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	1								
R	2									
R	3									
O	4									
G	5									
A	6									
N	7									
T	8									

Буквы S столбца и A строки, не совпадают → значение, полученное по диагональное стрелке, увеличивается на 1. По горизонтальной и вертикальной стрелке в ячейку приходят увеличенные на 1 числа из тех ячеек.

Расстояние редактирования: пример решения

А вот при совпадении букв штраф за замену отсутствует и в клеточку записывается число 6, значение, полученное по диагональной стрелке.

		S	U	R	R	O	G	A	T	E
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	1	2	3	4	5	6	6		
R	2									
R	3									
O	4									
G	5									
A	6									
N	7									
T	8									

Расстояние редактирования: пример решения

Решение задачи — правый нижний элемент таблицы.

		S	U	R	R	O	G	A	T	E
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	1	2	3	4	5	6	6	7	8
R	2	2	2	2	3	4	5	6	7	8
R	3	3	3	2	2	3	4	5	6	7
O	4	4	4	3	3	2	3	4	5	6
G	5	5	5	4	4	3	2	2	3	5
A	6	6	6	5	5	4	3	2	3	4
N	7	7	7	6	6	5	4	3	3	4
T	8	8	8	7	7	6	5	4	3	4

Расстояние редактирования

- Сложность по времени — $O(|s| \times |d|)$.
- Сложность по памяти — $O(|d|)$.

Многомерные варианты

Задача о счастливых билетах

Билет состоит из N цифр от 0 до 9 и является счастливым, если сумма первой половины его цифр равна сумме второй половины. Найти количество счастливых билетов.

Задача о счастливых билетах

- Причём здесь динамическое программирование? Это ведь комбинаторная задача.
- Сведём задачу к другой. Пусть $N = 6$.

3	3	5	6	4	1

3	3	5	3	5	8

- Заменим во второй половине числа все цифры на их дополнение до девяти.
- Количество таких чисел в точности равно количеству счастливых, так как отображение биективное.
- Исходный инвариант: $x_1 + x_2 + x_3 = x_4 + x_5 + x_6$.
- Инвариант после отображения:
  $x_1 + x_2 + x_3 + (9 - x_1) + (9 - x_2) + (9 - x_3) = 3 \cdot 9$.
- Требуется найти количество $N-$значных чисел, сумма которых равна $9 \cdot \frac{N}{2}$.

Задача о счастливых билетах

- Привычное решение задачи наталкивается на проблему: нам нужно найти не просто количество любых чисел от 0 до 9, сумма которых 27, нужно, чтобы таких чисел было именно 6.
- Количество таких чисел есть сумма количеств чисел:
  - первая цифра которых 0 и сумма пяти остальных равна 27;
  - первая цифра которых равна 1 и сумма пяти остальных равна 26;
  - ...
  - первая цифра которых равна 9 и сумма остальных пяти равна 18

Задача о счастливых билетах

- Нам удалось разбить задачу подзадачи меньшего ранга.
- Обозначим за $f(n, left)$ количество чисел, имеющих n знаков, сумма которых $left$.
- Тогда $f(6,27) = f(5,27) + f(5,26) + f(5,25) + f(5,24) + f(5,23) + f(5,22) + f(5,21) + f(5,20) + f(5,19) + f(5,18)$.
- Доопределим функцию f(n,left) таким образом, что при $n > 0$ и $left < 0$ она возвращала 0 и $f(1, left) = 1$, если $0 \leqslant left \leqslant 9$ и $f(1, left) = 0$ в противном случае.
- Тогда $f(n, left) = \sum\limits_{i=0}^{9} f(n-1, left - i)$.
- Мы свели задачу к задаче динамического программирования, но двухмерной.

Задача о счастливых билетах

- Если задача двухмерная, то можно использовать двухмерную таблицу решений.
- Первый размер определяется размерностью задачи n
- Второй размер определяется максимальным значением $left = 9 \cdot \frac{n}{2}$.
- Нерешённые подзадачи в таблице помечаются числом -1, так как ни одна из подзадач не может возвратить отрицательной число.

- Значения в таблице решений занимают последовательные ячейки, она не разрежена.
- Следовательно, задача допускает восходящее решение.
- Таблица заполняется, начиная от значения $n = 1$ и всех возможных *left* от 0 до 9.
- Максимальный уровень рекурсии равен n, это немного и восходящее решение, хотя и возможно, но не требуется.

Задача о вторичной структуре РНК

Задача из вычислительной биологии:
Имеется последовательность *оснований*

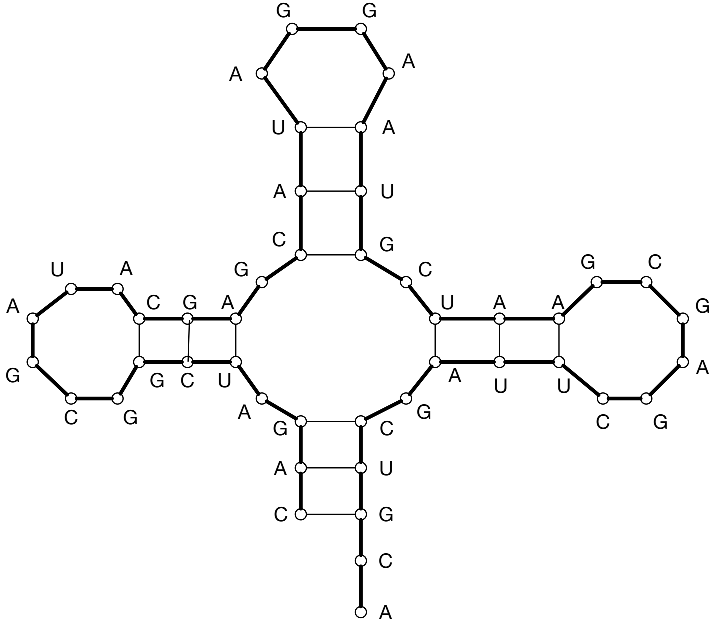
$$B = b_1 b_2 \dots b_n, b_i \in \{A, C, G, U\}.$$

Каждое основание может образовывать пару не более, чем одним другим основанием.

$$\begin{aligned} A \leftrightarrow & \quad U \\ C \leftrightarrow & \quad G. \end{aligned}$$

Образуется *вторичная структура*.

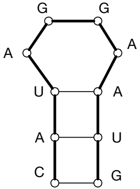
Задача о вторичной структуре РНК

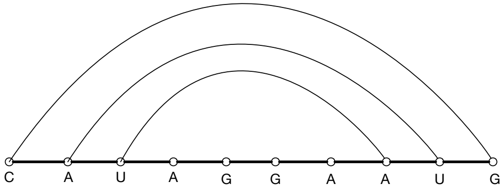


Задача о вторичной структуре РНК

Условия, накладываемые на вторичную структуру.

1. **Отсутствие резких поворотов** Не существует пар (b_i, b_j) для которых $|i - j| \leqslant 4$.
2. **Состав пар** Возможны только пары (A, U) и (C, G).
3. **Вхождение основание** Каждое основание входит не более, чем в одну пару.
4. **Отсутствие пересечений** Для двух произвольных пар (b_i, b_j) и (b_k, b_l) невозможно условие $i < k < j < l$





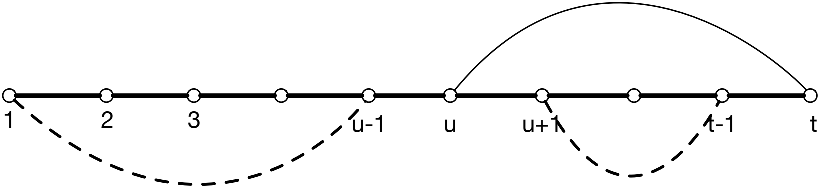
Задача о вторичной структуре РНК

- Задача ли это динамического программирования?
- Если да, то что есть «подзадача»?
- Если да, то что есть «консолидация»?

Задача о вторичной структуре РНК: попытка 1

- Пусть $F(k)$ — максимальное количество пар для вторичной структуры $b_1, b_2, \dots, b_k$
- Тогда $F(1) = F(2) = F(3) = F(4) = F(5) = 0$
- Пусть решены задачи для $F(1), F(2), \dots, F(t-1)$,. Как решить задачу для $F(t)$?
- Возможны два варианта:
  - во вторичной структуре $b_1, b_2, \dots, b_t$ t не участвует в паре.
  - t образует пару с каким-то элементов u, $u < t - 4$.
- Первый случай порождает подзадачу $F(t-1)$.
- А что во втором случае?

Задача о вторичной структуре РНК:попытка 1



Имеется запрет на пересечения $\to$ нет пар, левый конец которых меньше u, а правый — больше u.

Возникает две подзадачи, первую мы решить можем, а вторую — нет.

Задача о вторичной структуре РНК: вторая попытка

Необходимость решения задач второго рода подсказывает: за целую задачу взять $F(k, l)$, то есть два параметра.

$$F(k,l) = \begin{cases} 0, & \text{если } k+4 \leqslant l \\ \max(F(k,l-1), 1+\max_u(F(k,u-1)+F(u+1,l-1)) & \text{иначе} \end{cases}$$

Восходящее решение: замечание: сначала решаются более *короткие* задачи.

Спасибо за внимание.

Следующая лекция — Алгоритмы на графах.