Пример 1.4. Решить систему уравнений:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 &= -2, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 &= 2, \\ 8x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= 11, \\ x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= -7 \end{aligned}$$

методом Гаусса единственного деления.

□1. Прямой ход.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 1 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & -5 & 1 & 2 \\ 8 & -1 & -1 & 2 & 11 \\ 1 & 6 & -2 & -2 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{k=1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & \boxed{3} & -7 & 9 & 6 \\ 0 & 7 & -9 & 34 & 27 \\ 0 & 7 & -3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{k=2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{\frac{22}{3}} & 13 & 13 \\ 0 & 0 & \frac{40}{3} & -\frac{57}{3} & -19 \end{pmatrix} \xrightarrow{k=3}$$

$$\xrightarrow{k=3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{39}{22} & \frac{39}{22} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-\frac{2814}{66}} & -\frac{2814}{66} \end{pmatrix} \xrightarrow{k=4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{39}{22} & \frac{39}{22} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Обратный ход.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{39}{22} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ \frac{39}{22} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 &= -2 \\ x_2 - \frac{7}{3}x_3 + 3x_4 &= 2, \\ x_3 + \frac{39}{22}x_4 &= \frac{39}{22}, \\ x_4 &= 1. \end{aligned}$$

Отсюда $x_4 = 1$, $x_3 = \frac{39}{22} - \frac{39}{22}x_4 = 0$, $x_2 = 2 + \frac{7}{3}x_3 - 3x_4 = -1$, $x_1 = -2 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 1$.

В результате получено решение: $x_* = (1; -1; 0; 1)^T$.■

1.2.2. МЕТОД ПРОГОНКИ

Метод применим в случае, когда матрица A — трехдиагональная. Общая постановка задачи имеет следующий вид.

Дана система линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей A. Развернутая запись этой системы имеет вид

$$\alpha_i x_{i-1} - \beta_i x_i + \gamma_i x_{i+1} = \delta_i, \quad \alpha_1 = \gamma_n = 0, \quad i = \overline{1,n}, \tag{1.4}$$

которому соответствует расширенная матрица

$$A_1 = \begin{pmatrix} -\beta_1 & \gamma_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \delta_1 \\ \alpha_2 & -\beta_2 & \gamma_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \delta_2 \\ 0 & \alpha_3 & -\beta_3 & \gamma_3 & \cdots & 0 & 0 & \delta_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_n & -\beta_n & \delta_n \end{pmatrix}.$$

Здесь первое и последнее уравнения, содержащие по два слагаемых, могут рассматриваться как краевые условия. Знак «−» при коэффициенте β_i взят для более удобного представления расчетных формул метода.

Требуется найти решение $x_* = (x_{*1}, \ldots, x_{*n})^T$ системы (1.4) методом исключения Гаусса.

Если к (1.4) применить алгоритм прямого хода метода Гаусса, то вместо A_1 получится $\hat{A}_1$:

$$\hat{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -P_1 & 0 & 0 & \cdots & Q_1 \\ 0 & 1 & -P_2 & 0 & \cdots & Q_2 \\ 0 & 0 & 1 & -P_3 & \cdots & Q_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & Q_n \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что последний столбец в этой матрице соответствует правой части, и переходя к системе, включающей неизвестные, получаем рекуррентную формулу:

$$x_i = P_i x_{i+1} + Q_i, \quad i = \overline{1, n-1}. \tag{1.5}$$

Соотношение (1.5) есть формула для обратного хода, а формулы для коэффициентов P_i, Q_i, которые называются *прогоночными*, определяются из (1.4), (1.5). Запишем (1.5) для индекса $i-1$:

$$x_{i-1} = P_{i-1}x_i + Q_{i-1}$$

и подставим в (1.4). Получим

$$\alpha_i(P_{i-1}x_i + Q_{i-1}) - \beta_i x_i + \gamma_i x_{i+1} = \delta_i.$$

Приводя эту формулу к виду (1.5) и сравнивая полученное выражение с (1.5), получаем рекуррентные соотношения для P_i, Q_i:

$$P_i = \frac{\gamma_i}{\beta_i - \alpha_i P_{i-1}}, \quad Q_i = \frac{\alpha_i Q_{i-1} - \delta_i}{\beta_i - \alpha_i P_{i-1}}, \quad i = \overline{1, n-1}. \tag{1.6}$$

Определение прогоночных коэффициентов по формулам (1.6) соответствует *прямому ходу* метода прогонки.

Обратный ход метода прогонки начинается с вычисления x_n. Для этого используется последнее уравнение, коэффициенты которого определены в прямом ходе, и последнее уравнение исходной системы:

$$x_{n-1} = P_{n-1}x_n + Q_{n-1},$$
$$\alpha_n x_{n-1} - \beta_n x_n + 0 \cdot x_{n+1} = \delta_n.$$

Тогда определяется x_n:

$$x_n = \frac{\alpha_n Q_{n-1} - \delta_n}{\beta_n - \alpha_n P_{n-1}} = Q_n, \text{ т.е. } x_n = Q_n. \qquad (1.7)$$

Остальные значения неизвестных находятся рекуррентно по формуле (1.5). Все соотношения для выполнения вычислений получены. Тогда можно провести расчеты по методу Гаусса, используя прямой и обратный ход.

Методика решения задачи

Прямой ход.

1. Вычислить $P_1 = \frac{\gamma_1}{\beta_1}$; $Q_1 = -\frac{\delta_1}{\beta_1}$ (в (1.6) подставить $\alpha_1 = 0$).

2. Вычислить прогоночные коэффициенты $P_2, Q_2; P_3, Q_3; \ldots; P_{n-1}, Q_{n-1}$ по формулам (1.6).

Обратный ход.

1. Найти $x_n = \frac{\alpha_n Q_{n-1} - \delta_n}{\beta_n - \alpha_n P_{n-1}}$.

2. Значения $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1$ определить по формуле (1.5):

$$x_{n-1} = P_{n-1}x_n + Q_{n-1},\ x_{n-2} = P_{n-2}x_{n-1} + Q_{n-2},\ \ldots,\ x_1 = P_1 x_2 + Q_1.$$

Замечания

1. Данный метод называется методом скалярной прогонки, так как при решении задачи на каждом i-м шаге определяется скалярная величина x_i $\left(i = \overline{1,n}\right)$.

2. Аналогичный подход используется для решения систем линейных алгебраических уравнений с пятидиагональными матрицами.

3. Алгоритм метода прогонки называется *корректным*, если для всех $i = \overline{1,n}$ $\beta_i - \alpha_i P_{i-1} \neq 0$, и устойчивым, если $|P_i| < 1$, $i = \overline{1,n-1}$.

4. Достаточным условием *корректности* и *устойчивости* прогонки является *условие преобладания диагональных элементов* в матрице A, в которой $\alpha_i \neq 0$ и $\gamma_i \neq 0$ $\left(i = \overline{2,n-1}\right)$:

$$|\beta_i| \geq |\alpha_i| + |\gamma_i| \qquad (1.8)$$

и в (1.8) имеет место строгое неравенство хотя бы при одном i.

5. Алгоритм метода прогонки является очень экономичным и требует для своей реализации количество операций, пропорциональное n.

Пример 1.5. Дана система линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей A ($n = 4$):

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 &= 8, \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 &= 10, \\ x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 3, \\ x_3 - 3x_4 &= -2 \end{aligned}$$

($\alpha_1 = 0$, $\gamma_4 = 0$). Решить эту систему методом прогонки.