

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования

«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Учебно-исследовательская работа №2 (УИР2)

“Марковские модели систем массового обслуживания”

по дисциплине «Моделирование»

Вариант: 15 / 31 / 16

Выполнил:

Векшин Арсений Р3316

Преподаватель:

Алиев Т.И

Содержание

Цель работы.....	3
Постановка задачи и исходные данные.....	3
Система 1.....	4
Описание исследуемой системы	4
Графическое представление	4
Перечень состояний марковского процесса.....	4
Граф переходов марковского процесса	5
Матрица интенсивности переходов	5
Характеристики системы	6
Система 2.....	7
Описание исследуемой системы	7
Графическое представление	7
Перечень состояний марковского процесса.....	8
Граф переходов марковского процесса	8
Матрица интенсивности переходов	8
Характеристики системы	9
Сравнение систем.....	10
Вывод.....	11

Цель работы

Изучение метода марковских случайных процессов и его применение для исследования простейших моделей – систем массового обслуживания (СМО) с однородным потоком заявок.

Постановка задачи и исходные данные

Разработать и рассчитать марковские модели одно- и многоканальных СМО с однородным потоком заявок и выбрать наилучший вариант построения СМО в соответствии с заданным критерием эффективности.

В процессе исследований для расчета характеристик функционирования СМО использовать программу MARK.

Вариант: 15 / 31 / 16

Таблица 1 - Параметры структурной и функциональной организации систем.

Вариант	Система 1		Система 2		Критерий эффективности
	П	ЕН	П	ЕН	
15 / 31	3	3	2(H ₂)	2	максимальная производительность системы

Емкость накопителя, представленная одним числом, означает общий накопитель перед всеми приборами

Обозначения:

П – число обслуживающих приборов в системе

П (H_v) – в одном из Приборов (любом) длительность обслуживания распределена по гиперэкспоненциальному закону с коэффициентом вариации, равным v

ЕН – Емкости Накопителей: X/Y/Z (X – перед первым прибором, Y – перед вторым прибором и Z – перед третьим прибором)

Таблица 2 - Параметры нагрузки.

Вариант	Интенс. потока	Ср. длит. обслуж.	Вероятности занятия прибора		
	$\lambda, 1/\text{с}$	b, с	П1	П2	П3
16	0,1	40	0,7	0,05	0,25

в случае трехканальной СМО выбираются из таблицы 2 (см. вероятности занятия приборов П1, П2 и П3)

в случае двухканальной СМО вероятность занятия прибора П1 выбирается из табл.2, а вероятность занятия прибора П2 принимается равной сумме вероятностей занятия приборов П2 и П3

Система 1

Описание исследуемой системы

Интенсивность обслуживания – 0,1 1/с, время обслуживания – 40 с.

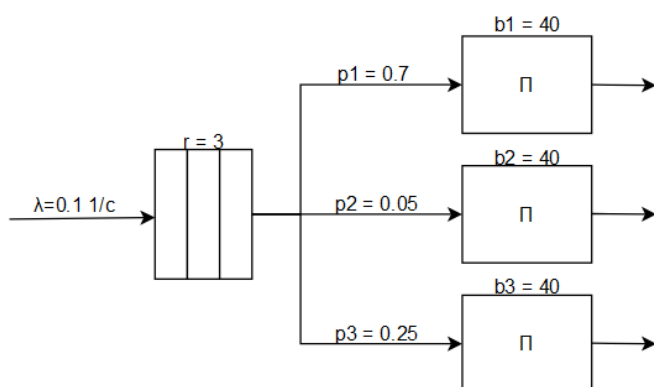
Система обладает 3 приборами. В обоих приборах время обслуживания распределено по экспоненциальному распределению. Система имеет накопитель емкостью 3 перед приборами. При поступлении заявки, она направляется в накопитель или отбрасывается, в случае если очередь заполнена. Как только какой-то из приборов освобождается заявка из накопителя направляется по принципу:

0,7 на первый прибор

0,05 на второй прибор

0,25 на третий прибор

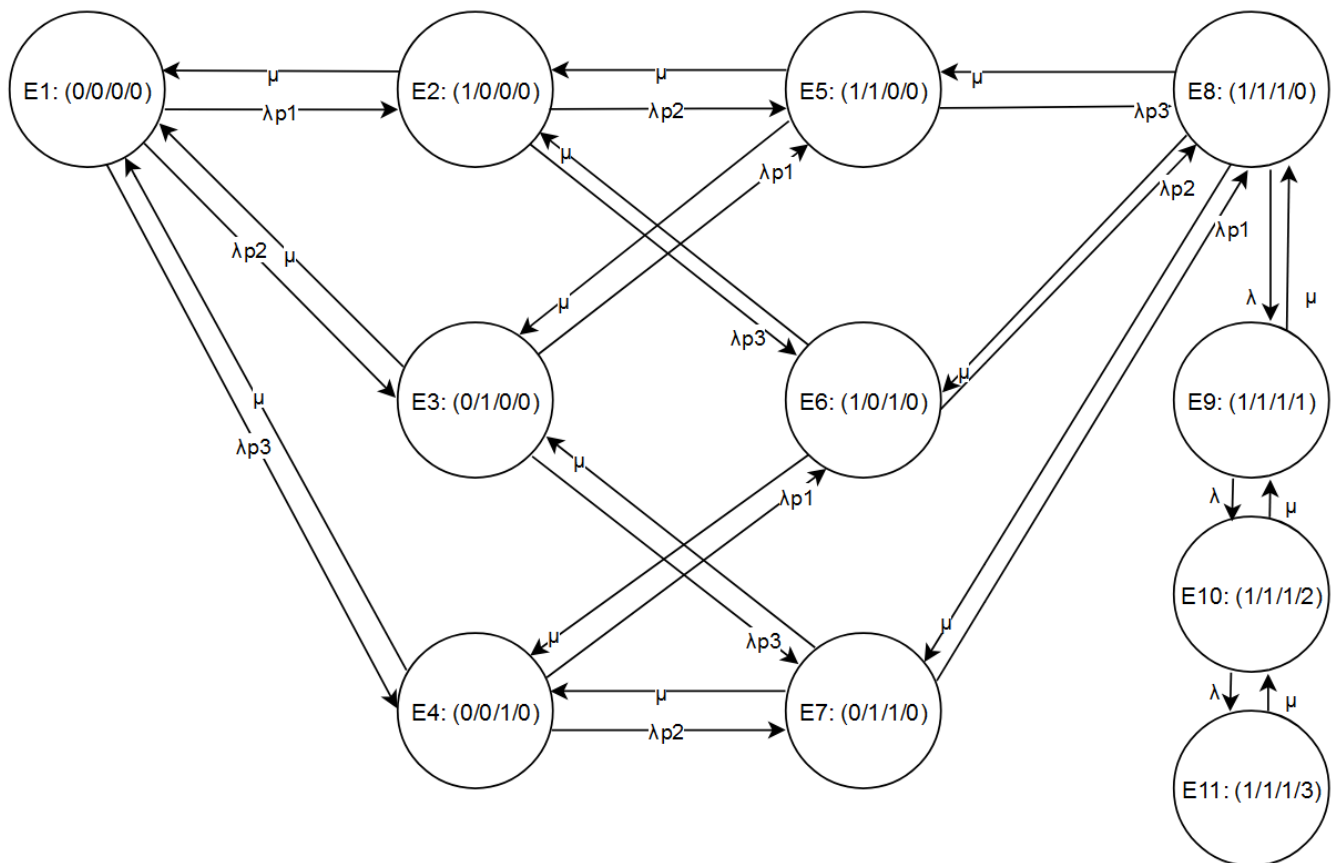
Графическое представление



Перечень состояний марковского процесса

Номер состояния	Система 1	Вероятность
	$\Pi_1 / \Pi_2 / \Pi_3 / O_1$	
1	0 / 0 / 0 / 0	0,0178
2	1 / 0 / 0 / 0	0,0499
3	0 / 1 / 0 / 0	0,0036
4	0 / 0 / 1 / 0	0,0178
5	1 / 1 / 0 / 0	0,0100
6	1 / 0 / 1 / 0	0,0499
7	0 / 1 / 1 / 0	0,0036
8	1 / 1 / 1 / 0	0,0100
9	1 / 1 / 1 / 1	0,0399
10	1 / 1 / 1 / 2	0,1595
11	1 / 1 / 1 / 3	0,6383

Граф переходов марковского процесса



Матрица интенсивности переходов

$$\mu = \frac{1}{b} = \frac{1}{40} = 0,025 \quad \lambda = 0,1$$

$$\lambda_1 = p_1 * \lambda = 0,07 \quad \lambda_2 = p_2 * \lambda = 0,005 \quad \lambda_3 = p_3 * \lambda = 0,025$$

[illegible]

Характеристики системы

Характеристика	Прибор	Формула	Значение
Нагрузка	П1	$y = \lambda_1 * b$	2,8
	П2	$y = \lambda_2 * b$	0,2
	П3	$y = \lambda_3 * b$	1
	Сумм	$y = \lambda * b$	4
Загрузка	П1	$\rho_1 = 1 - (p_1 + p_3 + p_4 + p_7)$	0,9572
	П2	$\rho_2 = 1 - (p_1 + p_2 + p_4 + p_6)$	0,8646
	П3	$\rho_3 = 1 - (p_1 + p_2 + p_3 + p_5)$	0,9187
	Сумм	$\rho = \frac{\rho_1 + \rho_2 + \rho_3}{3}$	0,9135
Длина очереди	П1-3	Нет личных накопителей	
	Сумм	$L = p_9 + 2p_{10} + 3p_{11}$	2,2738
Вероятность потери	П1-3	Нет личных накопителей	
	Сумм	$\pi = p_{11}$	0.6383
Число заявок в системе	П1-3	Нет личных накопителей	
	Сумм	$m = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + 2(p_5 + p_6 + p_7) + 3p_8 + 4p_9 + 5p_{10} + 6p_{11}$	5,033
Производительность	П1-3	Нет личных накопителей	
	Сумм	$\lambda' = \lambda * (1 - \pi)$	0,03617
Время ожидания	П1-3	Нет личных накопителей	
	Сумм	$w = L / \lambda$	22,738
Время пребывания	П1-3	Нет личных накопителей	
	Сумм	$u = m / \lambda$	50,33

Система 2

Описание исследуемой системы

Интенсивность обслуживания – 0,1 1/с, время обслуживания – 40 с.

Интенсивность обслуживания прибора: $\mu = \frac{1}{b} = \frac{1}{40} = 0.025$

$q \leq \frac{2}{1+v^2} = 0.4$, Выберем $q=0.3$. (при $q=0.4$ $b_2=0$)

$$b_1 = \left[1 + \sqrt{\frac{1-q}{2q}} (v^2 - 1) \right] b \approx 114.83 \rightarrow \mu_1 = \frac{1}{114.83} = 0.0087$$

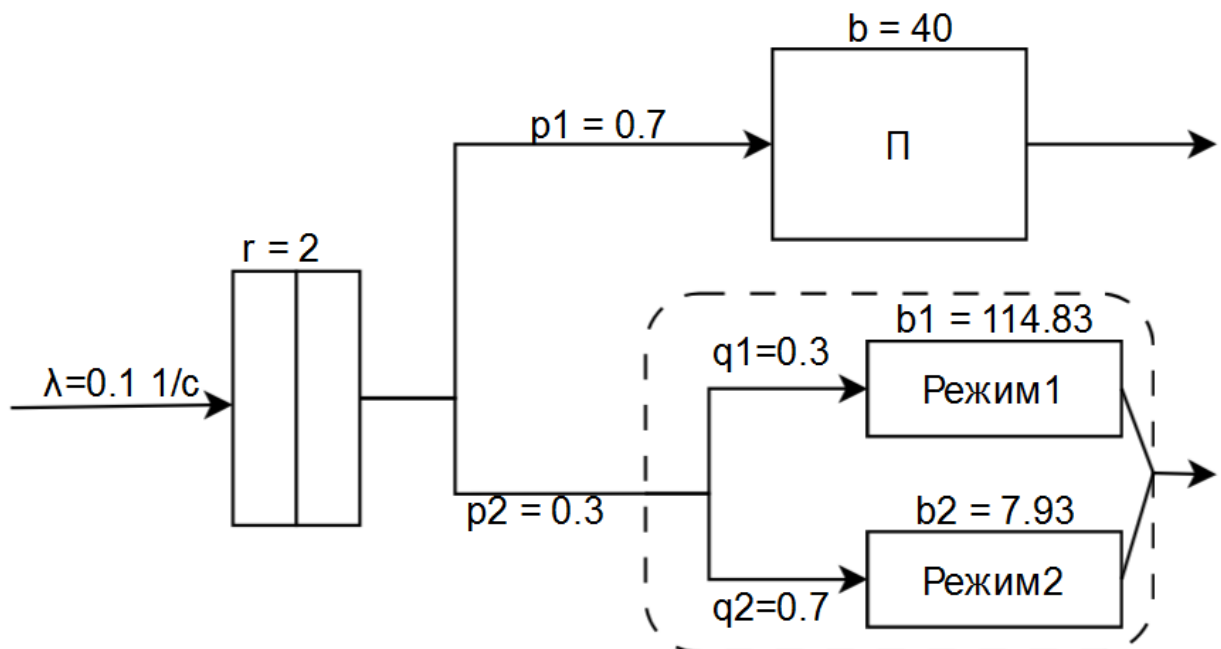
$$b_2 = \left[1 - \sqrt{\frac{q}{2(1-q)}} (v^2 - 1) \right] b = 7.93 \rightarrow \mu_2 = \frac{1}{7.93} = 0.126$$

Система обладает 2 приборами. Время обслуживания **прибора 2** распределено по гиперэкспоненциальному закону с коэффициентом вариации, равным 2. Система имеет накопитель емкостью 2 перед приборами. При поступлении заявки, она направляется в накопитель или отбрасывается, в случае если очередь заполнена. Как только какой-то из приборов освобождается заявка из накопителя направляется по принципу:

0,7 на первый прибор

0,3 на второй прибор

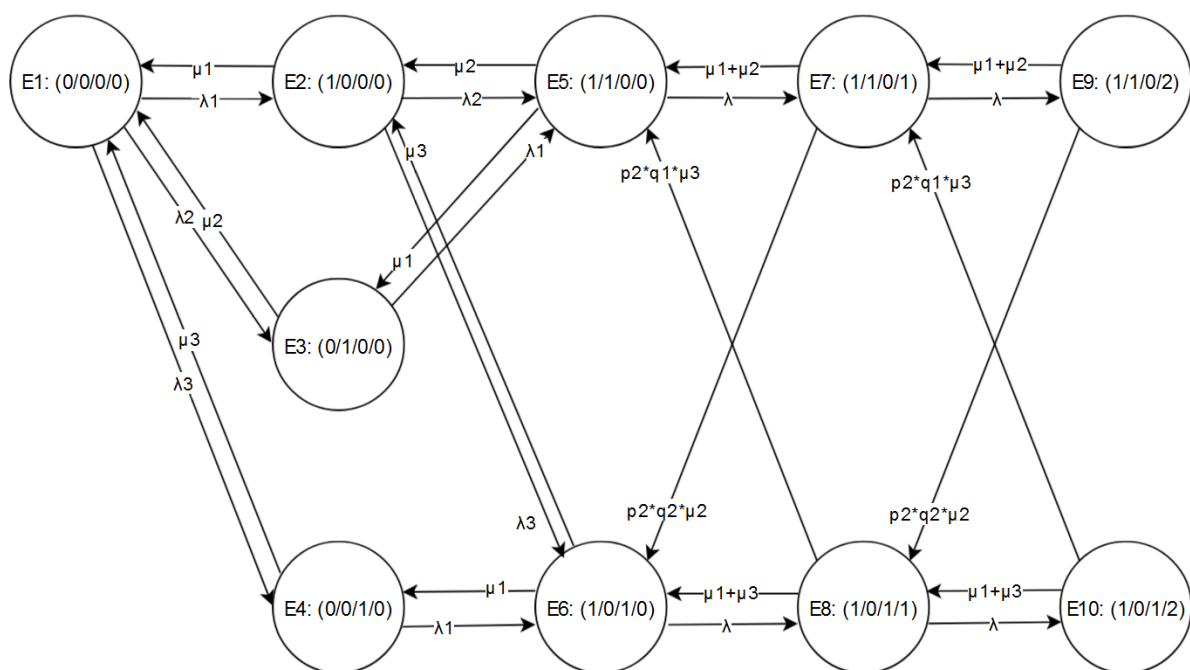
Графическое представление



Перечень состояний марковского процесса

Номер состояния	Система 2	Вероятность
	$\Pi_1 / \Pi_{2,1} / \Pi_{2,2} / O_1$	
1	0 / 0 / 0 / 0	0,0304
2	1 / 0 / 0 / 0	0,0878
3	0 / 1 / 0 / 0	0,0146
4	0 / 0 / 1 / 0	0,0057
5	1 / 1 / 0 / 0	0,0351
6	1 / 0 / 1 / 0	0,0190
7	1 / 1 / 0 / 1	0,2036
8	1 / 0 / 1 / 1	0,0186
9	1 / 1 / 0 / 2	0,5736
10	1 / 0 / 1 / 2	0,0115

Граф переходов марковского процесса



Матрица интенсивности переходов

$$\mu_1 = \mu = \frac{1}{b} = \frac{1}{40} = 0,025 \quad \mu_2 = \frac{1}{b_2} = 0,0087 \quad \mu_3 = \frac{1}{b_3} = 0,126 \quad \lambda = 0,1$$

$$a_1 = p_2 \cdot q_1 \cdot \mu_3 = 0,011 \quad a_2 = p_2 \cdot q_2 \cdot \mu_2 = 0,0018$$

$$\lambda_1 = p_1 \cdot \lambda = 0,07 \quad \lambda_2 = p_2 \cdot q_1 \cdot \lambda = 0,009 \quad \lambda_3 = p_2 \cdot q_2 \cdot \lambda = 0,021$$

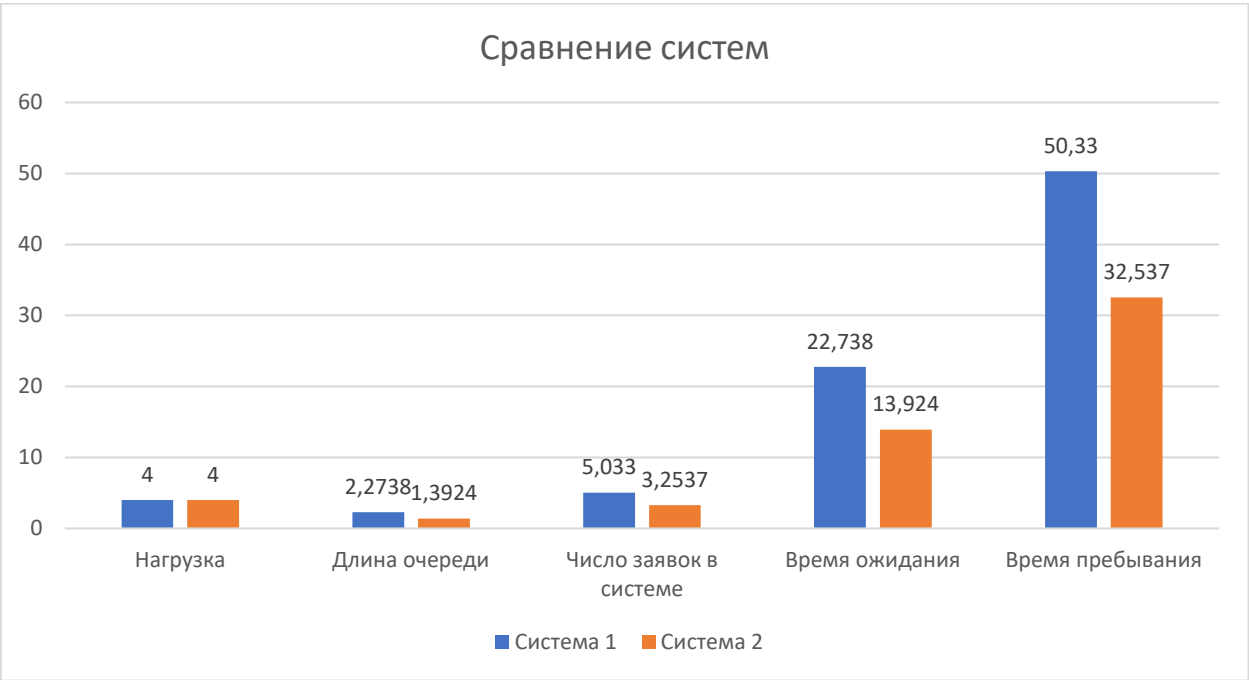
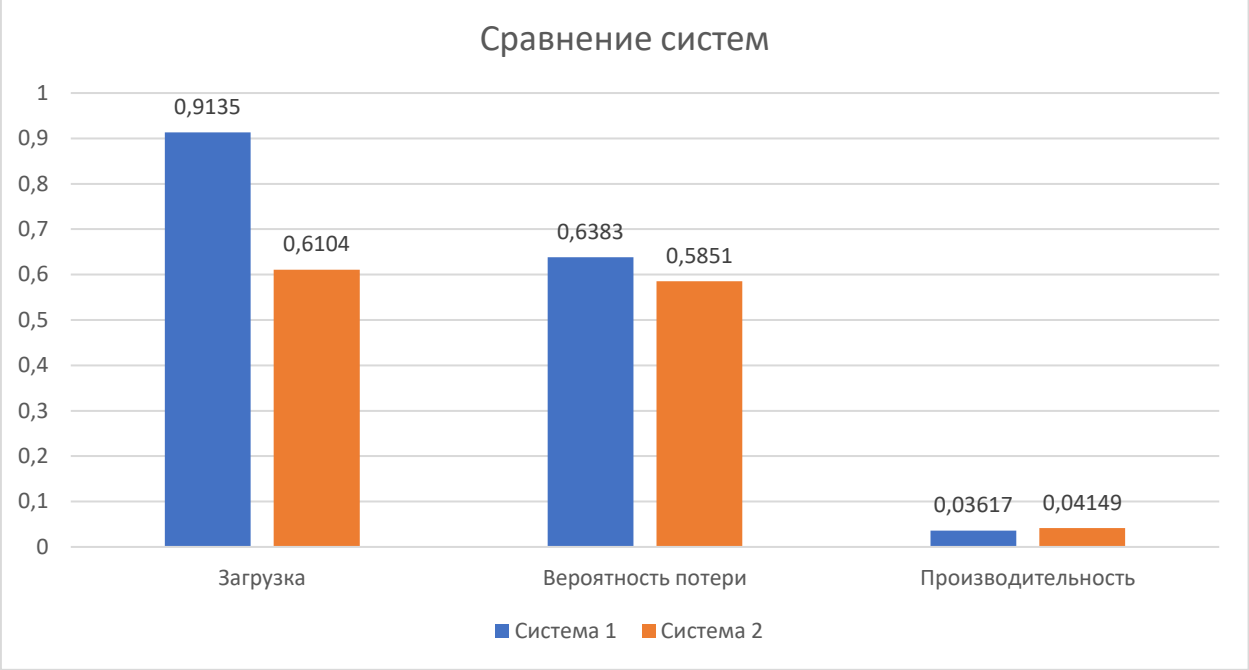
	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10
E1		λ_1	λ_2	λ_3						
E2	μ_1				λ_2	λ_3				
E3	μ_2				λ_1					
E4	μ_3					λ_1				
E5		μ_2	μ_1				λ			
E6		μ_3		μ_1	$\mu_1 + \mu_2$			λ		
E7					a_1	a_2			λ	
E8						$\mu_1 + \mu_3$				λ
E9							$\mu_1 + \mu_2$	a_2		
E10							a_1	$\mu_1 + \mu_3$		

Характеристики системы

Характеристика	Прибор	Формула	Значение
Нагрузка	П1	$y_1 = \lambda_1 * b$	2,8
	П2.1	$y_2 = \lambda_2 * b_1$	1,03347
	П2.2	$y_3 = \lambda_3 * b_2$	0,16653
	Сумм	$y = y_1 + y_2 + y_3$	4
Загрузка	П1	$\rho_1 = 1 - (p_1 + p_3 + p_4)$	0,9493
	П2.1	$\rho_2 = 1 - (p_1 + p_2 + p_4 + p_6 + p_8 + p_{10})$	0,827
	П2.2	$\rho_3 = 1 - (p_1 + p_2 + p_3 + p_5 + p_7 + p_9)$	0,0549
	Сумм	$\rho = \frac{\rho_1 + \rho_2 + \rho_3}{3}$	0,6104
Длина очереди	П1-2	Нет личных накопителей	
	Сумм	$L = p_7 + p_8 + 2(p_9 + p_{10})$	1,3924
Вероятность потери	П1-2	Нет личных накопителей	
	Сумм	$\pi = p_9 + p_{10}$	0,5851
Число заявок в системе	П1-2	Нет личных накопителей	
	Сумм	$m = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + 2(p_5 + p_6) + 3(p_7 + p_8) + 4(p_9 + p_{10})$	3,2537
Производительность	П1-2	Нет личных накопителей	
	Сумм	$\lambda' = \lambda * (1 - \pi)$	0,04149
Время ожидания	П1-2	Нет личных накопителей	
	Сумм	$w = L / \lambda$	13,924
Время пребывания	П1-2	Нет личных накопителей	
	Сумм	$u = m / \lambda$	32,537

Сравнение систем

Характеристика	Система 1	Система 2
Нагрузка	4	4
Загрузка	0,9135	0,6104
Длина очереди	2,2738	1,3924
Вероятность потери	0,6383	0,5851
Число заявок в системе	5,033	3,2537
Производительность	0,03617	0,04149
Время ожидания	22,738	13,924
Время пребывания	50,33	32,537



При сравнении двух систем, мы можем сделать вывод, что система 2 более производительна. Она превосходит систему 1 по производительности, и прочим метрикам.

Вывод

В процессе выполнения данной работы мы изучили метод марковских процессов для случайных процессов, разработали и рассчитали марковские модели многоканальных СМО с однородным потоком заявок, а также сравнили полученные результаты. Система 2 оказалась более релевантной, так как она превосходит систему 1 по всем рассчитанным метрикам