№1.

Без перестановок предметов: $C_{12}^3 = 220$

С учетом перестановок: $C_{12}^3 \cdot 3! = 1320$

С учетом повторов: $A_{12}^3 = 12^3 = 1728$

Векшин Арсений
367133 Р3216
Вариант 3
ИДЗ 18.1

№2.

30 втулок в партии

$C_{30}^{10} = \frac{30!}{20! \cdot 10!} = 30045015$ способов выбрать 10 из 30 для контроля

$C_5^2 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$ способов выбрать 2 бракованных

$C_{25}^8 = \frac{25!}{17! \cdot 8!} = 1081575$ способов выбрать 8 хороших

Тогда $p = \frac{C_5^2 \cdot C_{25}^8}{C_{30}^{10}} \approx 0{,}36$ – искомая вероятность

№3.

$P_1 = 0.3$ $q_1 = 0.7$ $P_2 = 0.2$ $q_2 = 0.8$ $P_3 = 0.4$ $q_3 = 0.6$

а) $p(m \geq 2) = P_1P_2q_3 + P_1q_2P_3 + q_1P_2P_3 + P_1P_2P_3 = 0{,}036 + 0{,}096 + 0{,}056 + 0{,}024 = 0{,}212$

б) $q = q_1q_2q_3 = 0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}336$

в) $P = 1 - q = 0{,}664$

№4

$P_1 = 0{,}3$ $P_2 = 0{,}7$ $\tilde{P}_1 = 0{,}98$ $\tilde{P}_2 = 0{,}97$ ($\tilde{P}_i$ – вероятность изготовления стандартной детали)

а) $P = P_1\tilde{P}_1 + P_2 \cdot \tilde{P}_2 = 0{,}294 + 0{,}679 = 0{,}973$

б) $P_1' = \frac{P_1\tilde{P}_1}{P} = \frac{0{,}294}{0{,}973} \approx 0{,}302$

№5.

$P = 0{,}04$ $q = 0{,}96$ $n = 6$

а) $P(m \geq 5) = P_6^5 + P_6^6 = C_6^5 \cdot P^5 \cdot q + C_6^6 \cdot p^6 \cdot \cancel{q} = 0{,}000000593$

б) $P(m \leq 5) = 1 - P_6^6 = 1 - 0{,}000000004 \approx 1$

в) $P_6^2 = C_6^2 \cdot P^2 q^4 = \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot (0{,}04)^2 \cdot 0{,}96^4 \approx 0{,}204$

№6

$P = 0{,}2$ $q = 0{,}8$ $n = 100$ $m = 25$

$$P_{100}(25) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi\left(\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right) \approx \frac{1}{4} \cdot \varphi\left(\frac{25-20}{4}\right) = \frac{1}{4} \cdot \varphi\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{4} \cdot 0{,}18265 = 0{,}046$$

Векшин Арсений
367133 P3216
Вариант 3
ИДЗ 18.2

№1

$P_1 = 0{,}9 \quad P_2 = 0{,}7 \quad P_3 = 0{,}8$

x	0	1	2	3
P(i)	0,006	0,092	0,398	0,504

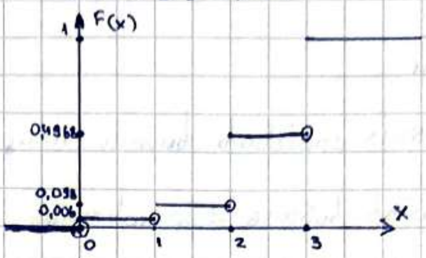
$P(0) = q_1 q_2 q_3 = 0{,}006$

$P(1) = P_1 q_2 q_3 + q_1 P_2 q_3 + q_1 q_2 P_3 = 0{,}092$

$P(2) = P_1 P_2 q_3 + P_1 q_2 P_3 + q_1 P_2 P_3 = 0{,}398$

$P(3) = P_1 P_2 P_3 = 0{,}504$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 0{,}006, & 0 < x \le 1 \\ 0{,}098, & 1 < x \le 2 \\ 0{,}4968, & 2 < x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

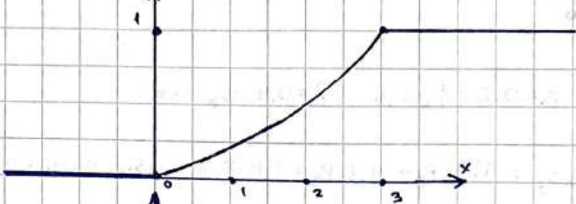


$M(x) = \sum x_i p_i = 2{,}4$

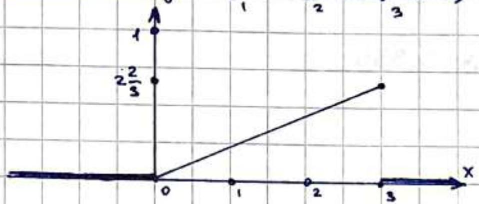
$D(x) = \sum x_i^2 \cdot p_i - M(x) = 0{,}46 \quad \sigma(x) = \sqrt{D(x)} \approx 0{,}68$

№2.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{9}x^2, & 0 \le x \le 3 \\ 1, & x \ge 3 \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{2x}{9}, & 0 \le x \le 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$$



$$M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \frac{2}{9}\int_0^3 x^2 dx = \frac{1}{27} \cdot x^3 \Big|_0^3 = 2$$

$$D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx - (M(x))^2 = \frac{2}{36} \cdot x^4 \Big|_0^3 - 4 = \frac{1}{2}$$

$P(0 \le x \le 1) = F(1) - F(0) = \frac{1}{9} \approx 0{,}1111$ – искомая вероятность

№3.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ \frac{1}{6}, & 2 \le x \le 8 \\ 0, & x > 8 \end{cases}$$

$$P(3 < x < 5) = \int_3^5 f(x)\,dx = \frac{1}{6}\int_3^5 dx = \frac{1}{6} \cdot x \Big|_3^5 = \frac{1}{3} \approx 0{,}333$$

№4.

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum X_i - a\right| < \varepsilon\right) \approx 2\varphi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) \quad \varepsilon_1 = 3{,}075 - 3 = 0{,}075 \quad \varepsilon_2 = 2{,}95 - 3 = 0{,}05$$

$$P(2{,}95 < X < 3{,}075) \approx \varphi\left(\frac{\varepsilon_1\sqrt{n}}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{\varepsilon_2\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \varphi\left(\frac{0{,}075 \cdot \sqrt{3200}}{\sqrt{2}}\right) - \varphi\left(\frac{-0{,}05\sqrt{3200}}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$\approx \varphi(3) + \varphi(2) = 0{,}4987 + 0{,}4772 = 0{,}9759$$

Векшин Арсений
367133 P3216
Задачник Чистякова

Глава 2

№2.12.

$P = \frac{12!}{12^{12}} \approx 0{,}000054$ Прим: не думаю, что необходимо считать по дням.

№2.1

$A = \frac{1}{6}$, $B = 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{11}{36}$ (обратное от "ни одна 6")

$\tilde{A} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$, $\tilde{B} = 1 - \frac{11}{36} = \frac{25}{36}$, $A\tilde{B} = \frac{1}{6} \cdot \frac{25}{36} = \frac{25}{216}$

№2.2

Для $n-2$ позиций 1-го тома - 2 позиции для 2-го

Для $2-n$ позиций 1-го тома - 1 позиция для 2-го

$$P = \frac{\frac{2(n-2)+2}{n-1}}{n} = \frac{\frac{2n-2}{n-1}}{n} = \frac{2}{n}$$

№2.4

$A = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot 10 = 0{,}01$ $B = \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{10} \cdot 1 = \frac{72}{100} = 0{,}72$

$C = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot C_3^2 \cdot 10 = \frac{270}{1000} = 0{,}27$

№2.5

$A = \frac{1}{2}$ $B = \left(\frac{4}{10}\right)^m \cdot \left(\frac{6}{10}\right)^{n-m} \cdot C_n^m$ (4 из 10 чисел кратны 3м)

$C = \left(\frac{4}{10}\right)^{m+2} \cdot \left(\frac{6}{10}\right)^{n-m-2} \cdot C_{n-2}^m$

Глава 3

№3.1

Всего вариантов 36, из них сумма делится на 3 в 12 случаях. Если выпала "3", то есть 4 варианта такого события.

$P = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

№3.2

$P_0 = \frac{1 \cdot 10 \cdot 5^9}{6^{10} - 5^{10}} \approx 0{,}385$ (вероятность выпадения 1 единицы) $\to P = 1 - P_0 = 0{,}615$

№3.5

$\tilde{A} = 1 - A$ $\tilde{B} = 1 - B$ Так как A и B независимы, следовательно их обратные вероятности независимы.

№3.13.

Возможные состояния 2й урны после перекладывания: 4б/2ч, 5б/1ч и 3б/3ч.

Значит $P = \frac{2}{4} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \approx 0{,}666$

№3.15

$$P = \frac{P(\text{мужч.}) \cdot P(\text{м-дальт.})}{P(\text{дальт.})} = \frac{0.5 \cdot 0{,}05}{0{,}5(0{,}05 + 0{,}0025)} = 0{,}953.$$

Глава 4

№4.1

$$\frac{2}{6} + \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} = \frac{1}{3} + \frac{3}{15} + \frac{1}{15} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

Векшин Арсений
367133 P3216
Задачник Чистякова

№4.2

$A_1 = \frac{2}{7} + \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5} + \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{44}{105}$ – выиграет начавший игру

$A_2 = \frac{4}{7}\cdot\frac{2}{6} + \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{4} = \frac{26}{105}$ – выиграет второй игрок

$B = 1 - \left(\frac{44}{105} + \frac{26}{105}\right) = \frac{35}{105}$ – ничья

№4.4

$P_0 = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot C_3^2 = \frac{5}{72}$ – вероятность выпадения 2х шестерок в испытании

$P = \left(\frac{5}{72}\right)^4\cdot\left(\frac{67}{72}\right)^6\cdot C_{10}^4 = \frac{5^4\cdot 67^6}{72^{10}}\cdot\frac{10!}{4!\cdot 6!} \approx 0{,}00317$

№4.5

а) $\left(\frac{99}{100}\right)^5 \approx 0{,}951$

б) $\left(\frac{99}{100}\right)^4\cdot\frac{1}{100}\cdot C_5^4 = \frac{99^4}{100^5}\cdot 5 \approx 0{,}048$

в) $1 - \left(\left(\frac{99}{100}\right)^5 + \frac{99^4}{100^5}\cdot 5\right) \approx 0{,}00098$

№4.12

$P_{02} = \frac{1}{5}$ $P_{23} = \frac{1}{10}$ $P_{310} = \frac{7}{10}$ – вероятность попадания точки по отрезкам.

$P = \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{10} + \left(\frac{7}{10}\right)^2 \approx 0{,}63$

Глава 5

№5.1

$f(x) = \begin{cases} \frac{C}{x^4}, & x \geq 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$ $\int_1^{+\infty} \frac{C}{x^4}dx + \int_{-\infty}^1 0\,dx = 1;$ $C\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^4}dx = 1;$ $C\cdot\lim_{a\to\infty}\left(\frac{-1}{3n^3}\Big|_1^a\right) = 1$

$C\cdot\lim_{a\to\infty}\left(\frac{-1}{3a^3} + \frac{1}{3}\right) = 1;$ $C = 3.$

№5.2.

а) $F(n) = P(2\varepsilon + 1 < n) = P\left(\varepsilon < \frac{n-1}{2}\right)$ $F(n) = \begin{cases} 0, & n<1 \\ \frac{n-1}{2} & 1\leq n\leq 3 \\ 1, & n>3 \end{cases} \to f(n) = \frac{1}{2}$

$\frac{n-1}{2} = 0 \to n=1,$ $\frac{n-1}{2} = 1 \to n = 3$

б) $F(n) = P(-\ln(1-\varepsilon) < n) = P(\varepsilon < 1 - e^{-n})$

$1 - e^{-n} = 0 \to n = 0,$ $1 - e^{-n} = 1 \to n =$ неопр. $F(n) = \begin{cases} 0, & n\leq 0 \\ 1-e^{-n} & > 0 \end{cases} \to f(n) = e^{-n}$

№5.14

$P(\tau = k) = P\cdot(1-P)^{k-1}$, где P - вероятность попадания и k - номер испытания

Первое успешное испытание на τ значит формула корректна и соответствует геом. распределению

№5.16

$P = p^m q^{k-m}\cdot C_{k-1}^{m-1}$

Так как на последней позиции гарантирован успех, значит ее можно не учитывать в C_k^m

№5.20

$M(c) = 1000\cdot 0{,}0003 + 2000\cdot 0{,}0005 + 7000\cdot 0{,}0001 = 2$

По т. Пуансона: $P(0) = \frac{2^0\cdot e^{-2}}{1} \approx 0{,}135$, $P(1) = \frac{2\cdot e^{-2}}{2} \approx 0{,}271$

$P(2 \ldots 1000) = 1 - (P(0) + P(1)) = 0{,}594$

Глава 6.

Векшин Арсений
367133 P3216
Задачник Чистякова

№ 6.1

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} P(1-P)^{k-1} \cdot z^k = Pz \cdot \sum_{k=1} z(1-P)^{k-1} \xrightarrow[\text{г. прогр.}]{} = \frac{Pz}{1-(1-P)z}$$

$$MN = \varphi'(z) = \frac{P}{(1-1+P)^2} = \frac{1}{P}$$

№ 6.2

Вероятность извлечь нужный ключ: $\frac{1}{n}$

$$M\xi = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

№ 6.4

$$P(A) = \sum_{k=1}^{\infty} P(B_k) \cdot P(A|B_k) \text{ - полная вероятность} \quad PA = M\xi$$

$$\frac{1}{P} = \sum_{k=1}^{\infty} P(B_k) \cdot P(A|B_k) = \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} P(A|B_k) \; ; \; \frac{m}{P} = \sum_{k=1}^{\infty} P(A|B_k) = M\left(\frac{n}{\xi}\right)$$

№ 6.8

Для сложения:

$$MX_1 = \frac{1}{100} \sum_{i=0}^{9} \sum_{j=0}^{9} (j+i) = \frac{1}{100} \cdot 900 = 9 \quad DX_1 = \frac{1}{100} \cdot \sum_{i=0}^{9} \sum_{j=0}^{9} (j+i)^2 \overset{-9^2}{=} \frac{1}{100} \cdot 9750 - 8^2 = 16{,}5$$

Для умножения:

$$MX_2 = \frac{1}{100} \sum_{i=0}^{9} \sum_{j=0}^{9} i \cdot j = \frac{1}{100} \cdot 2025 = 20{,}25 \quad DX_2 = \frac{1}{100} \cdot \sum_{i=0}^{9} \sum_{j=0}^{9} i^2 j^2 - MX_2^2 = \frac{1}{100} \cdot 81225 - 410{,}0625 =$$

$$= 402{,}1875$$

№ 6.16.

$P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$ - вероятность попадания письма в свой конверт.

$$\text{Тогда } P(A) = n \cdot \frac{1}{n} - C_n^2 \cdot \frac{1}{n(n-1)} + C_n^3 \cdot \frac{1}{n(n-1)(n-2)} - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n!} = 1 - e^{-1}$$