

Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого
Институт прикладной математики и механики
Кафедра «Прикладная математика»

Отчёт
по лабораторной работе №4
по дисциплине
«Интервальный анализ»

Выполнил студент:
Величко Арсений Юрьевич

Проверил:
к.ф.-м.н., доцент
Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2022 г.

Содержание

1	Постановка задачи	3
1.1	Получение решения по теореме Зюзина	3
1.2	Получение решения субдифференциальным методом Ньютона . .	3
2	Теория	3
2.1	Теорема Зюзина	3
2.2	Субдифференциальный метод Ньютона	4
3	Реализация	4
4	Результаты	5
4.1	Получение решения по теореме Зюзина	5
4.2	Субдифференциальный метод Ньютона	6
5	Обсуждение	7

1 Постановка задачи

1.1 Получение решения по теореме Зюзина

Построить итерационную схему с разложением на матрицы диагональную и недиагональную части для следующей ИСЛАУ

$$\begin{cases} [2, 4]x_1 + [-2, 1]x_2 = [-2, 2] \\ [-2, 1]x_1 + [2, 4]x_2 = [-2, 2] \end{cases}$$

Провести вычисления и привести иллюстрации:

- брусков итерационного процесса
- радиусов решения в зависимости от номера итерации

1.2 Получение решения субдифференциальным методом Ньютона

Для ИСЛАУ

$$\begin{cases} [3, 4]x_1 + [5, 6]x_2 = [-3, 3] \\ [-1, 1]x_1 + [-3, 1]x_2 = [-1, 2] \end{cases} \quad (1)$$

построить итерационную схему субдифференциального метода Ньютона.
Провести вычисления и привести иллюстрации:

- брусков итерационного процесса

Аналогично поступить с ИСЛАУ

$$\begin{cases} [3, 4]x_1 + [5, 6]x_2 = [-3, 4] \\ [-1, 1]x_1 + [-3, 1]x_2 = [-1, 2] \end{cases} \quad (2)$$

Сравнить результаты для двух ИСЛАУ.

2 Теория

2.1 Теорема Зюзина

Пусть в интервальной линейной системе уравнений

$$\mathbf{C}x = \mathbf{d} \quad (3)$$

с $\mathbf{C} \in \mathbb{KR}^{n \times n}$ и $\mathbf{d} \in \mathbb{KR}^n$ правильная проекция матрицы \mathbf{C} имеет диагональное преобладание. Тогда формальное решение существует и единственно.

Итерационная схема

Пусть

\mathbf{D} — диагональная матрица $\text{diag}\{\mathbf{c}_{11}, \mathbf{c}_{22}, \dots, \mathbf{c}_{nn}\}$,

\mathbf{E} — матрица, полученная из \mathbf{C} занулением её диагональных элементов.

Таким образом, $\mathbf{C} = \mathbf{D} + \mathbf{E}$, а формальные решения исходной системы очевидно совпадают с формальными решениями системы

$$\mathbf{D}x + \mathbf{E}x = \mathbf{d} \quad (4)$$

которая, в свою очередь равносильна

$$\mathbf{D}x = \mathbf{d} \ominus \mathbf{E}x \quad (5)$$

Взяв далее какой-нибудь вектор $\mathbf{x}^{(0)}$, мы можем организовать итерационный процесс

$$\mathbf{x}^{(k+1)} \leftarrow (\text{inv } \mathbf{D}) (\mathbf{d} \ominus \mathbf{E}\mathbf{x}^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

с $(\text{inv } \mathbf{D}) := \text{diag}\{\text{inv } \mathbf{c}_{11}, \text{inv } \mathbf{c}_{22}, \dots, \text{inv } \mathbf{c}_{nn}\}$ и по теореме Шрёдера о неподвижной точке, он будет сходиться к единственной неподвижной точке отображения

$$\mathbf{x} \mapsto (\text{inv } \mathbf{D}) (\mathbf{d} \ominus \mathbf{E}\mathbf{x}) \quad (7)$$

в силу диагонального преобладания в \mathbf{C} .

2.2 Субдифференциальный метод Ньютона

Пусть

$$\mathcal{F}(y) = \text{sti}(\mathbf{C} \text{ sti}^{-1}(y)) - y + \text{sti}(\mathbf{d}) \quad (8)$$

Тогда итерационная схема метода выглядит следующим образом

$$\mathbf{x}^{(k+1)} \leftarrow x^{(k)} - \tau (D^{(k)})^{-1} \mathcal{F}(x^{(k)}) \quad (9)$$

где $\tau \in [0, 1]$, а $D^{(k)}$ - некоторый субградиент отображения \mathcal{F} в точке $x^{(k)}$.

3 Реализация

Лабораторная работа выполнена при помощи пакета Octave с использованием библиотек IntLab и IntLinInc2D и kinterval.

Ссылка на репозиторий с исходный кодом:

<https://github.com/ArsenyVelichko/IntervalAnalysis>

4 Результаты

4.1 Получение решения по теореме Зюзина

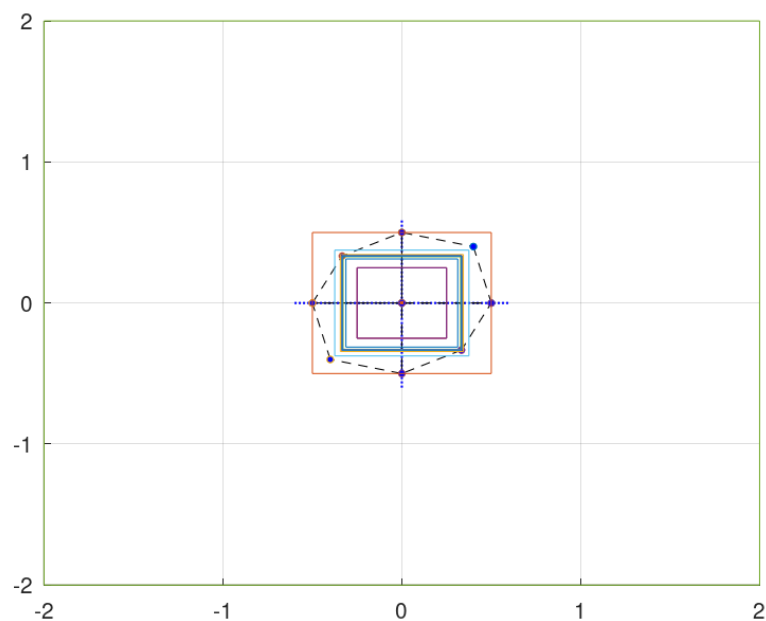


Рис. 1: Работа схемы, основанной на теореме Зюзина

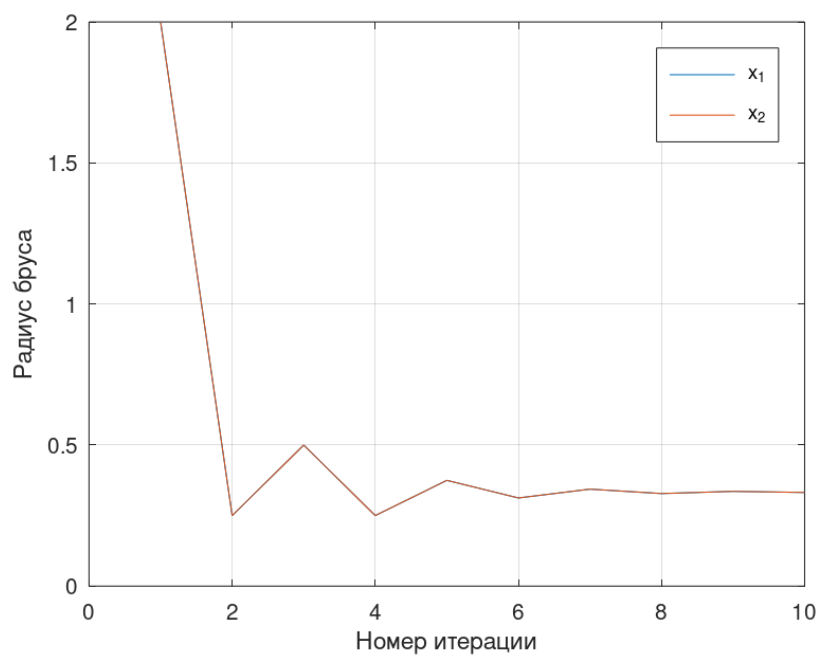


Рис. 2: Радиусы брусков при работе схемы, основанной на теореме Зюзина

4.2 Субдифференциальный метод Ньютона

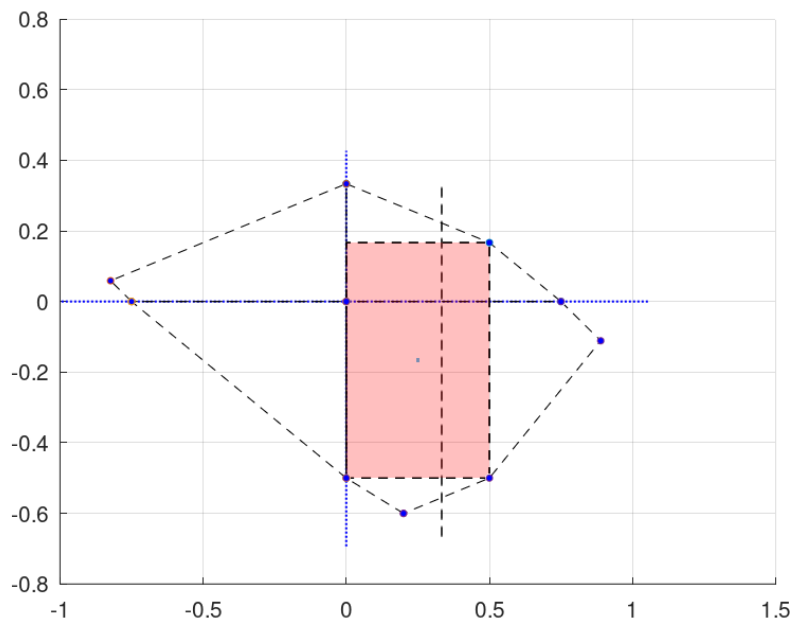


Рис. 3: Работа субдифференциального метода Ньютона для (1)

Алгоритм закончил свою работу на брусе $\begin{pmatrix} [0, 0.5] \\ [-0.5, 0.16] \end{pmatrix}$, который обозначен на рисунке красным цветом.

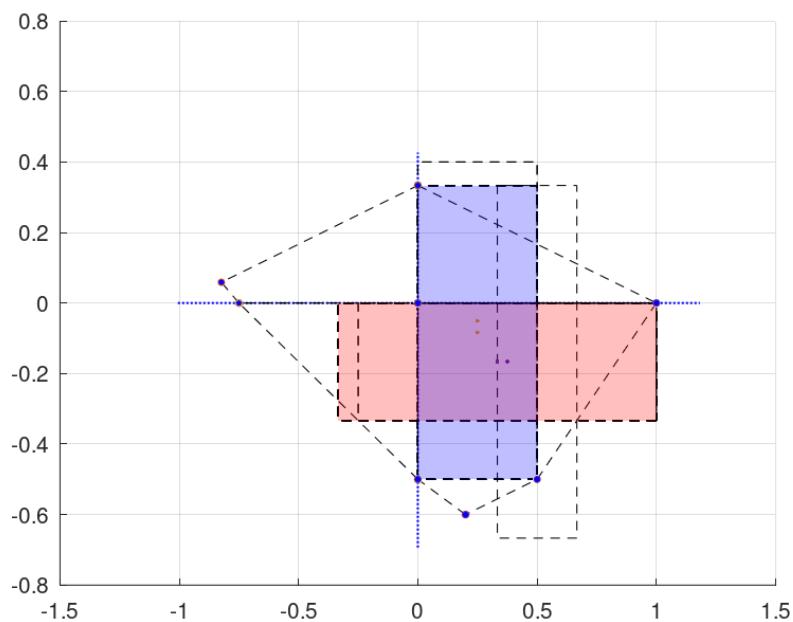


Рис. 4: Работа субдифференциального метода Ньютона для (2)

Алгоритм заиклился между двумя брусками — $\begin{pmatrix} [-0.3333, 1] \\ [-0.3333, 0] \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} [0, 0.5] \\ [-0.5, 0.3333] \end{pmatrix}$, которые обозначены на рисунке красным и синим цветом соответственно.

5 Обсуждение

1. Решение полученное по теореме Зюзина достаточно точно описывает допусковое множество решений - радиус конечного бруса равен минимальной диагонали между его вершинами. По графику радиусов брусов (4.1) мы видим, что сходимость к конечному брусу происходит с двух сторон, одна итерация полностью лежит в Ξ_{tol} , а последующая выходит за его границы. Сходимость данного процесса занимает порядка 10 итераций.
2. При решении задачи (1) субдифференциальный метод Ньютона хорошо описывает Ξ_{tol} в той его части, где $x_1 > 0$. При этом конечный брус достигается всего за 3 итерации.
3. При решении задачи (2) субдифференциальный метод Ньютона заикливается между двумя брусьями, которые обозначены на рисунке (4.2) синим и красным цветом. Оба они выходят за границы допускового множества. Однако границы Ξ_{tol} лучше приближает синий брус, так как две его нижние вершины лежат на гранях данного множества. Для достижения цикла требуется порядка 10 итераций.
4. Сравнивая результаты для задач (1) и (2) можно сказать, что даже малые изменения правой части могут сильно повлиять на результаты субдифференциального метода Ньютона, что не лучшим образом характеризует его устойчивость.