Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого
Институт прикладной математики и механики
Кафедра «Прикладная математика»

Отчёт
по лабораторной работе №3
по дисциплине
«Интервальный анализ»

Выполнил студент:
Величко Арсений Юрьевич

Проверил:
к.ф.-м.н., доцент
Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2022 г.

Содержание

1 Постановка задачи

Для следующей ИСЛАУ

$$\begin{cases} [1,2]x_1 + [1,2]x_2 = [2,4] \\ x_1 - [2,4]x_2 = 0 \\ [0,2]x_1 - 0 \cdot x_2 = [0,2] \end{cases}$$

необходимо провести вычисления и привести иллюстрации:

- максимума распознающего функционала
- достижения разрешимости ИСЛАУ за счёт коррекции правой части
- достижения разрешимости ИСЛАУ за счёт коррекции матрицы
- оценки вариабельности решения

Также требуется:

- провести исследование усправления положением решения за счёт радиусов элементов матрицы в целом
- провести исследование усправления положением решения за счёт радиусов элементов матрицы построчно

2 Теория

2.1 Распознающий функционал

Разпознающим функционалом называется функция

$$\operatorname{Tol}(x) = \operatorname{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{1 \le i \le m} \left\{ \operatorname{rad}(\mathbf{b}_i) - \left| \operatorname{mid}(\mathbf{b}_i) - \sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right\} \tag{1}$$

Пусть

$$T = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \operatorname{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \tag{2}$$

и это значение достигается распознающим функционалом в некоторой точке $\tau \in \mathbb{R}^n$. Тогда

- если $T \ge 0$, то $\tau \in \Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \ne \emptyset$, т.е. линейная задача о допусках для интервальной линейной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ совместна и точка τ лежит в допусковом множестве решений.
- если $T > 0$ то $\tau \in int\ \Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \ne \emptyset$, и принадлежность τ допусковому множеству решений устойчива к малым возмущениям данных - матрицы и правой части.
- если $T < 0$ то $\Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \emptyset$, т.е. линейная задача о допусках для интервальной линейной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ несовместна.

2.2 Достижение разрешимости ИСЛАУ путём изменения правой части

Если линейная задача о допусках с матрицей $\mathbf{A}$ и вектором правой части $\mathbf{b}$ первоначально не имела решений, то новая задача с той же матрицей $\mathbf{A}$ и уширенным вектором

$$(\mathbf{b}_i + K \cdot v_i \cdot [-1, 1])_{i=1}^{m} \tag{3}$$

в правой части становится разрешимой при $K \geq |T_v|$, где

$$T_v = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ v_i^{-1} \left(\operatorname{rad}(\mathbf{b}_i) - \left| \operatorname{mid}(\mathbf{b}_i) - \sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right) \right\} \tag{4}$$

2.3 Достижение разрешимости ИСЛАУ путём изменения матрицы

Линейная задача первоначально не имеет решение, и известно, что

$$\tau = \arg\max_{x \in \mathbb{R}^n} \operatorname{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \tag{5}$$

Выберем интервальную матрицу $\mathbf{E}^{m \times n} = (\mathbf{e}_{ij})$ с уравновешенными интервальными элементами $\mathbf{e}_{ij} = [-e_{ij}, e_{ij}]$ так, что

$$\sum_{j=1}^{n} e_{ij} \tau = K, \quad i = 1, 2, ..., m \tag{6}$$

где $K > 0$ и $\operatorname{rad}(\mathbf{a}_{\mathrm{ij}}) \geq e_{ij} \geq 0 \;\; \forall i, j$. Если $K \geq |T|$, то тогда линейная задача о допусках с матрицей $\mathbf{A} \ominus \mathbf{E} = ([\underline{\mathbf{a}}_{ij} - \underline{\mathbf{e}}_{ij}, \overline{\mathbf{a}}_{ij} + \overline{\mathbf{e}}_{ij}])$ и правой частью $\mathbf{b}$ становится разрешимой.

2.4 Оценки вариабельности решения

Абсолютной вариабельностью оценки называется величина

$$\operatorname{ive}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{A \in \mathbf{A}} \operatorname{cond} A \cdot ||\arg\max \operatorname{Tol}(x)|| \frac{\max\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \operatorname{Tol}(x)}{||\mathbf{b}||} \tag{7}$$

Относительной вариабельностью оценки называется величина

$$\operatorname{rve}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{A \in \mathbf{A}} \operatorname{cond} A \cdot \max_{x \in \mathbb{R}^n} \operatorname{Tol}(x) \tag{8}$$

3 Реализация

Лабораторная работа выполнена при помощи пакета Matlab с использованием библиотек IntLab и IntLinInc2D, а также функции tolsolvty.
Ссылка на репозиторий с исходный кодом:
`https://github.com/ArsenyVelichko/IntervalAnalysis`

4 Результаты

4.1 Максимум распознающего функционала

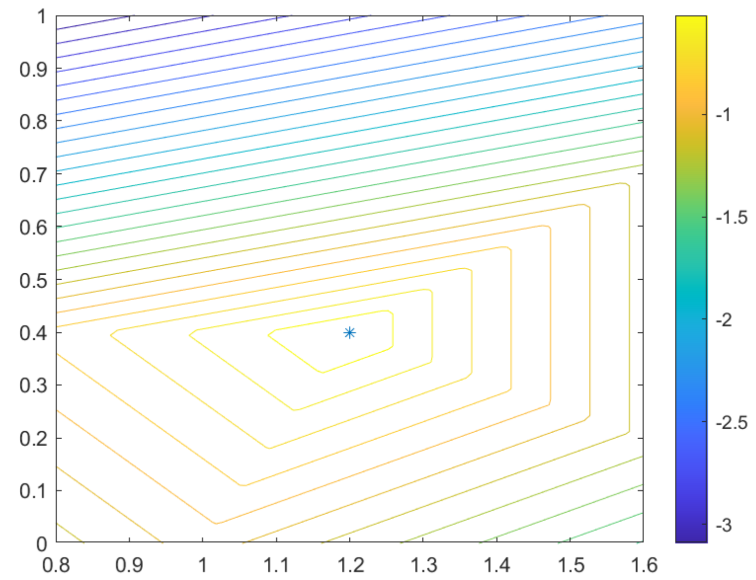

Рис. 1: Расположение максимума распознающего функционала

Максимум со значением $T = -0.4$ расположен в точке $\tau = (1.2, 0.4)$.

4.2 Достижение разрешимости за счёт коррекции правой части

Положим вектор весов v равным единичному вектору, а $K = 1.2 \cdot |T|$.

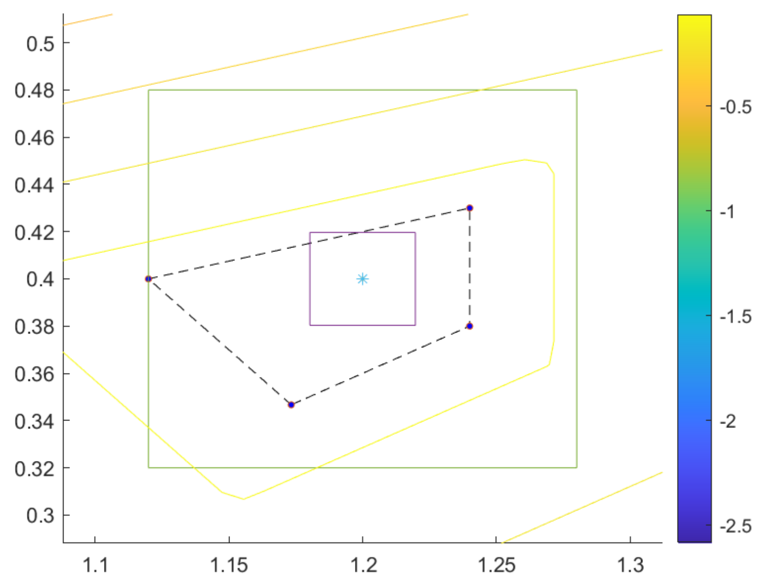

Рис. 2: Допусковое множество решений с скорректированной правой частью

На данном рисунке фиолетовый квадрат имеет сторону $2 \cdot \mathrm{ive}$, а зелёный - $2 \cdot \mathrm{rve}$

4.3 Достижение разрешимости за счёт коррекции матрицы

Положим

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} [-0.3, 0.3] & [-0.3, 0.3] \\ 0 & [-1, 1] \\ [-0.7, 0.7] & 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

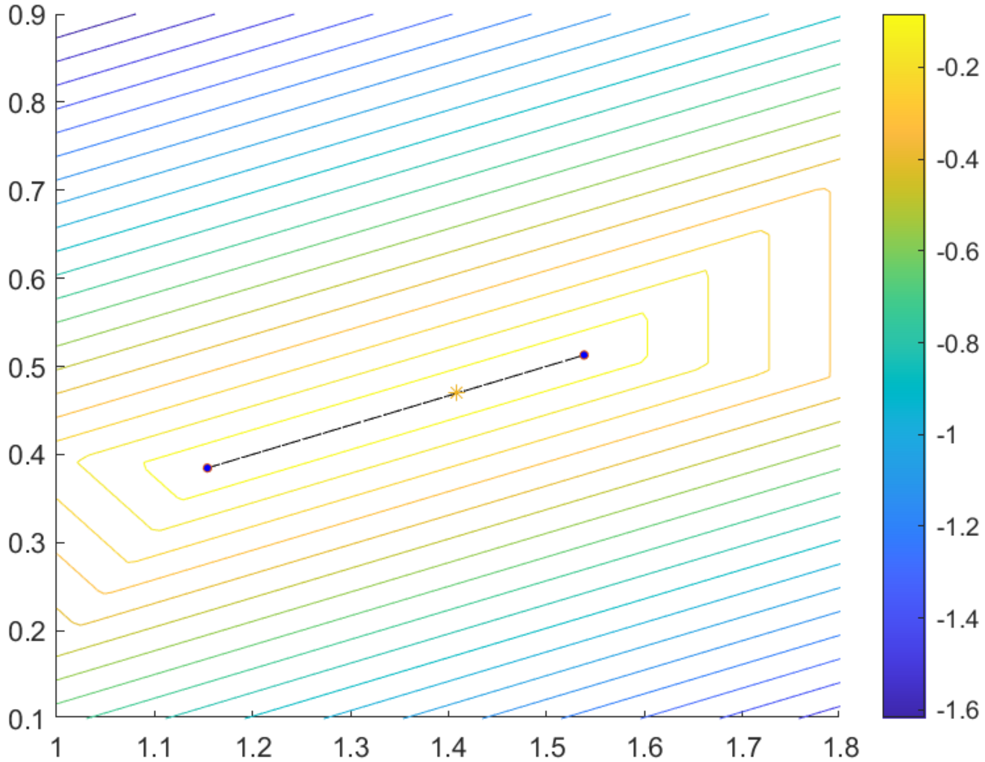

Рис. 3: Допусковое множество решений с скоректированной матрицей

4.4 Управление положением argmax

4.4.1 Путём корректировки матрицы в целом

Представим матрицу сужения как

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} [-e, e] & [-e, e] \\ 0 & [-1, 1] \\ [-2 * e, 2 * e] & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

и будем менять e в интервале $[0, 0.3]$ с шагом 0.05.

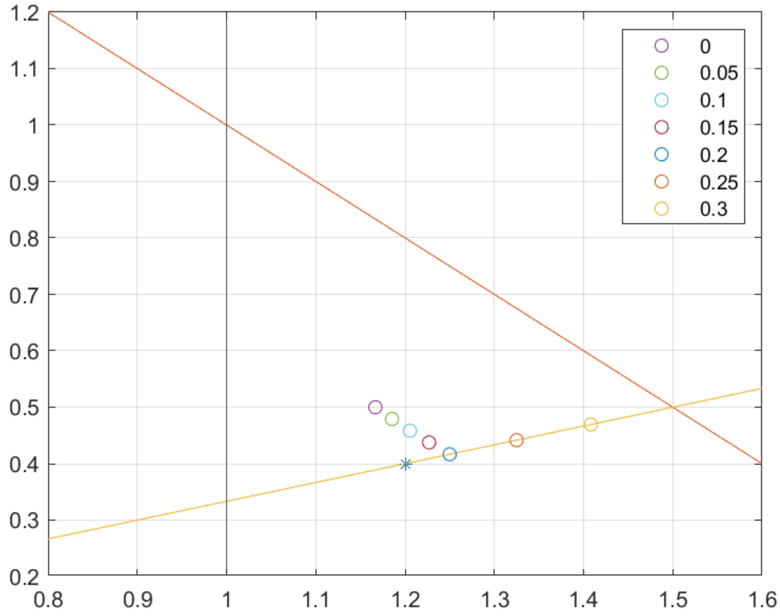

Рис. 4: Положение argmax при корректировке матрицы в целом

4.4.2 Путём корректировки первой строки

Представим матрицу сужения как

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} [-e, e] & [-e, e] \\ 0 & [-1, 1] \\ [-0.35, 0.35] & 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

и будем менять e в интервале $[0, 0.35]$ с шагом 0.07.

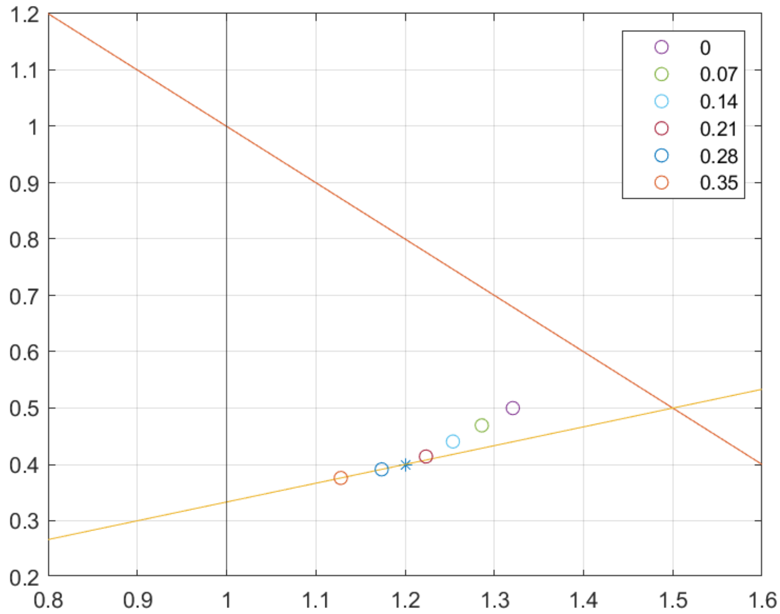

Рис. 5: Положение argmax при корректировке первой строки

4.4.3 Путём корректировки второй строки

Представим матрицу сужения как

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} [-0.25, 0.25] & [-0.25, 0.25] \\ 0 & [-e, e] \\ [-0.35, 0.35] & 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

и будем менять e в интервале $[0, 1]$ с шагом 0.2.

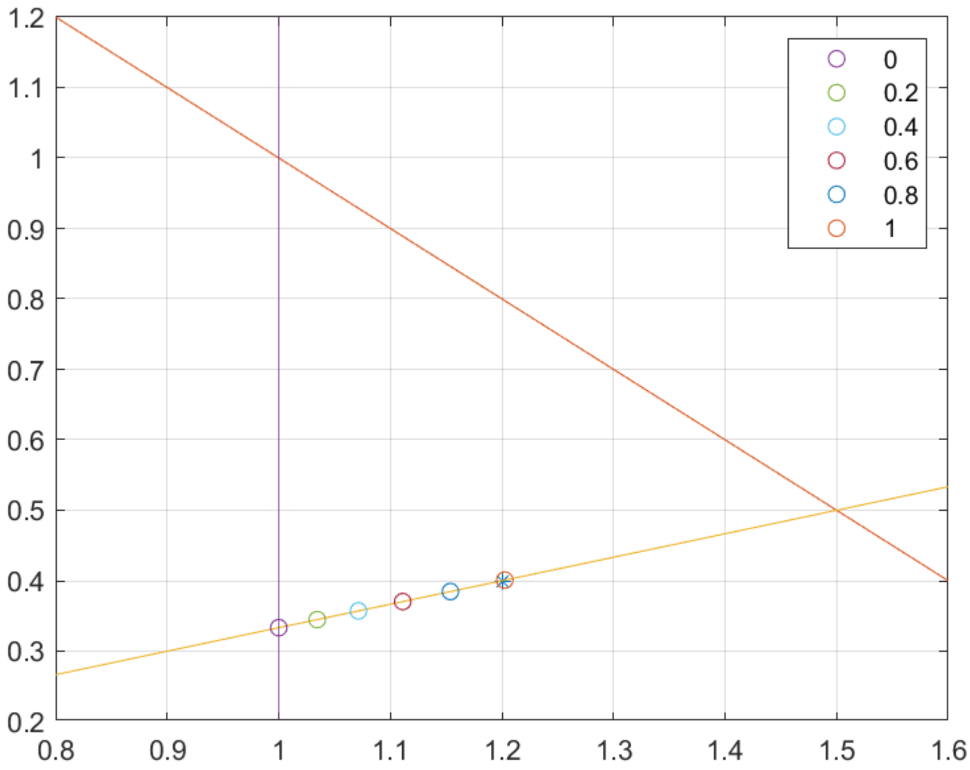

Рис. 6: Положение argmax при корректировке второй строки

4.4.4 Путём корректировки третьей строки

Представим матрицу сужения как

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} [-0.25, 0.25] & [-0.25, 0.25] \\ 0 & [-1, 1] \\ [-e, e] & 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

и будем менять e в интервале $[0, 0.6]$ с шагом 0.1.

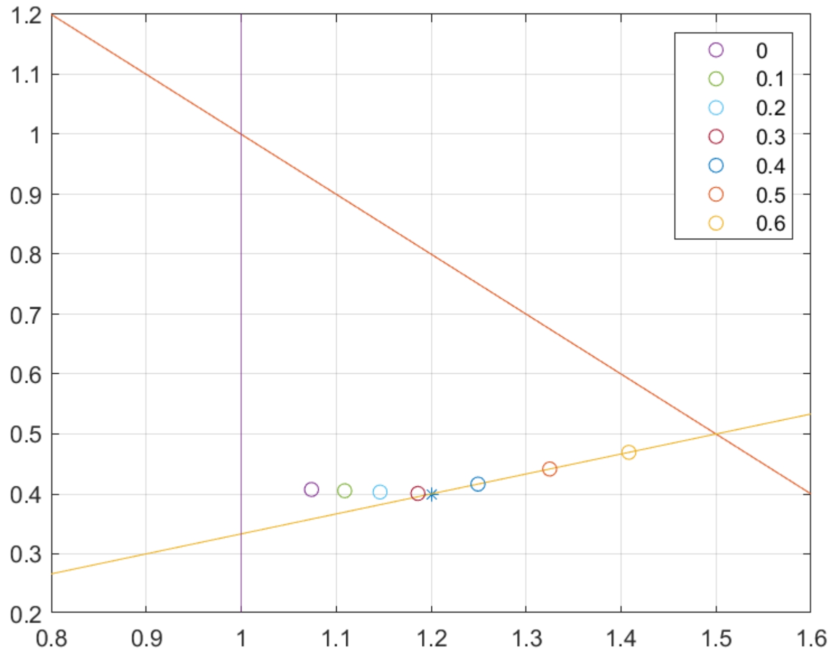

Рис. 7: Положение argmax при корректировке третьей строки

5 Обсуждение

1. После коррекции правой части расположение не изменилось. Квадрат rve достаточно хорошо приближает допусковое множество решений по левой границе на оси x_1. Квадрат ive почти полностью принадлежит Ξ_{tol}. Подобное расположение оценок и вид допускового множества решения подтсверждают хорошую обусловленность матрицы $(\text{cond}(\text{mid}\,\mathbf{A}) = 1.6482)$.

2. Достижение резрешимости рассматриваемой ИСЛАУ путём коррекции матрицы $\mathbf{A}$ возможно только при вырожденности интервала $\mathbf{a}_{22}$. В связи с этим показанное на рисунке (4.3) допусковое множество вырождается в отрезок прямой. Максимум распознающего функционала при этом смещается.

3. При коррекции матрицы в целом с увеличением параметра e argmax стремиться к правой вершине треугольника, составленного из центральных точечных уравнений ИСЛАУ. При $e \geq 0.25$ задача становится разрешимой. Начиная с этого момента argmax принадлежит нижней грани треугольника. При $e > 0.3$ положение argmax перестаёт меняться, несмотря на то, что радиус исходной ИСЛАУ позволяет изменять его до 0.5.

4. При коррекции первой строки матрицы с увеличением параметра e argmax стремиться к левой нижней вершине треугольника. Начиная с $e = 0.25$ задача становится разрешимой.

5. При коррекции второй строки матрицы с увеличением параметра e argmax стремиться от левой нижней вершины треугольника к своему положению из исходной задачи. Задача является разрешимой только при $e = 1$.

6. При коррекции третьей строки матрицы с увеличением параметра e argmax изменяется в ту же сторону, что и при коррекции матрицы в целом, однако с большей скоростью, а также его «траектория» имеет больший угол наклона. Начиная с $e = \frac{1}{3}$ задача становится разрешимой.