Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого
Институт прикладной математики и механики
Кафедра «Прикладная математика»

Отчёт
по лабораторной работе №1
по дисциплине
«Интервальный анализ»

Выполнил студент:
Величко Арсений Юрьевич

Проверил:
к.ф.-м.н., доцент
Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2022 г.

Содержание

1 Постановка задачи

1.1 Выяснение радиуса элементов матрицы, при котором она становится особенной

1.1.1 Линейная и полиномиальная регрессия

Задача регрессии может быть записана в следующем виде

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta \tag{1}$$

Пусть $\mathbf{X}$ - интервальная матрица и

$$\mathrm{mid}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1.1 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Необходимо рассмотреть матрицу вида

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} [1-\varepsilon, 1+\varepsilon] & 1 \\ [1.1-\varepsilon, 1.1+\varepsilon] & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

и определить при каком радиусе она содержит особенную матрицу.

1.1.2 Задачи томограции

При решении задач томографии, имеем уравнения типа

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b} \tag{4}$$

Необходимо рассмотреть интервальную матрицу 2×2

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [1-\varepsilon, 1+\varepsilon] & [1-\varepsilon, 1+\varepsilon] \\ [1.1-\varepsilon, 1.1+\varepsilon] & [1.1-\varepsilon, 1.1+\varepsilon] \end{pmatrix} \tag{5}$$

и определить при каком радиусе она содержит особенную матрицу.

1.2 Глобальная оптимизация

При помощи простейшего метода глобальной оптимизации найти точки глобального минимума для функции МакКормика

$$f(x,y) = \sin(x+y) + (x-y)^2 - 1.5x + 2.5y + 1, \quad \begin{aligned} -1.5 \le x \le 4 \\ -3 \le y \le 4 \end{aligned} \tag{6}$$

И функции Химмельблау

$$f(x,y) = (x^2 + y - 11)^2 + (x + y^2 - 7)^2, \quad -5 \le x, y \le 5 \tag{7}$$

Также необходимо привести иллюстрации:

- положения брусов из рабочего списка алгоритма и положения их центров
- графики радиусов рабочих брусов в логарифмическом масштабе
- расстояния до точки минимума в логарифмических координатах

2 Теория

2.1 Определения

- Середина матрицы $\mathrm{mid}(\mathbf{A}) = \{A \mid a_{ij} = \mathrm{mid}(\mathbf{a}_{ij})\}$
- Радиус матрицы $\mathrm{rad}(\mathbf{A}) = \{A \mid a_{ij} = \mathrm{rad}(\mathbf{a}_{ij})\}$
- Матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}$ называется особенной, если $\exists A \in \mathbf{A} : det(A) = 0$.
- Числа $\sigma_1 ... \sigma_k$, равные квадратным корням из собственных значений матрицы AA^T, называется сингулярными числами матрицы A.
- Множество вершин интревальной матрицы
  $\mathrm{vert}(\mathbf{A}) = \{A \in \mathbb{IR}^{m \times n} \mid A = (a_{ij})\, a_{ij} \in \{\underline{\mathbf{a}}_{ij}, \overline{\mathbf{a}}_{ij}\}\}$

2.2 Критерий Баумана

Интервальная матрица $\mathbf{A}$ неособенна тогда и только тогда, когда

$$(\det(A')) * (\det(A'')) > 0 \quad \forall A', A'' \in \mathrm{vert}(A) \tag{8}$$

2.3 Признак Румпа

Если для интервальной матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{m \times n}$ имеет место

$$\sigma_{\max}(\mathrm{rad}(\mathbf{A})) < \sigma_{\min}(\mathrm{mid}(\mathbf{A})) \tag{9}$$

Тогда $\mathbf{A}$ неособенна.

3 Реализация

Лабораторная работа выполнена при помощи пакета Matlab с использованием библиотеки IntLab.
Ссылка на репозиторий с исходный кодом:
`https://github.com/ArsenyVelichko/IntervalAnalysis`

4 Результаты

4.1 Линейная регрессия

4.1.1 Критерий Баумана

$$\Delta_1(\mathbf{X}) = \begin{vmatrix} 1-\varepsilon & 1 \\ 1.1-\varepsilon & 1 \end{vmatrix} = -0.1 \tag{10}$$

$$\Delta_2(\mathbf{X}) = \begin{vmatrix} 1+\varepsilon & 1 \\ 1.1-\varepsilon & 1 \end{vmatrix} = -0.1 + 2\varepsilon \tag{11}$$

$$\Delta_3(\mathbf{X}) = \begin{vmatrix} 1-\varepsilon & 1 \\ 1.1+\varepsilon & 1 \end{vmatrix} = -0.1 - 2\varepsilon \tag{12}$$

$$\Delta_4(\mathbf{X}) = \begin{vmatrix} 1+\varepsilon & 1 \\ 1.1+\varepsilon & 1 \end{vmatrix} = -0.1 \tag{13}$$

Все определители должны иметь отрицательный знак

$$\begin{cases} -0.1 + 2\varepsilon < 0 \\ -0.1 - 2\varepsilon < 0 \end{cases} \Rightarrow \varepsilon < 0.05$$

4.1.2 Признак Румпа

$$\mathrm{rad}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \quad \mathrm{mid}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1.1 & 1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

$$\sigma(\mathrm{rad}(\mathbf{X})) = \{0, \varepsilon\sqrt{2}\} \Rightarrow \sigma_{\max}(\mathrm{rad}(\mathbf{X})) = \varepsilon\sqrt{2} \tag{15}$$

$$\begin{gathered} \sigma(\mathrm{mid}(\mathbf{X})) = \left\{ \sqrt{\frac{421 + 21\sqrt{401}}{200}}, \sqrt{\frac{421 - 21\sqrt{401}}{200}} \right\} \approx \\ \approx \{2.0512, 0.0488\} \Rightarrow \sigma_{\min}(\mathrm{mid}(\mathbf{X})) = 0.0488 \end{gathered} \tag{16}$$

$$\varepsilon\sqrt{2} < 0.0488 \Rightarrow \varepsilon < 0.0345 \tag{17}$$

4.1.3 Пример особенной точечной матрицы

При $\varepsilon = 0.05$

$$X = \begin{pmatrix} 1.05 & 1 \\ 1.05 & 1 \end{pmatrix} \quad \det(X) = 0 \tag{18}$$

4.2 Задачи томографии

4.2.1 Критерий Баумана

$$\Delta_1(\mathbf{X}) = \begin{vmatrix} 1-\varepsilon & 1-\varepsilon \\ 1.1-\varepsilon & 1-\varepsilon \end{vmatrix} = -0.1+0.1\varepsilon \quad \Delta_2(\mathbf{X}) = \begin{vmatrix} 1+\varepsilon & 1-\varepsilon \\ 1.1-\varepsilon & 1-\varepsilon \end{vmatrix} = -0.1+2.1\varepsilon-2\varepsilon^2 \tag{19}$$

$$\Delta_3(\mathbf{X}) = \begin{vmatrix} 1-\varepsilon & 1+\varepsilon \\ 1.1-\varepsilon & 1-\varepsilon \end{vmatrix} = -0.1-2.1\varepsilon+2\varepsilon^2 \quad \Delta_4(\mathbf{X}) = \begin{vmatrix} 1-\varepsilon & 1-\varepsilon \\ 1.1+\varepsilon & 1-\varepsilon \end{vmatrix} = -0.1-1.9\varepsilon+2\varepsilon^2 \tag{20}$$

$$\Delta_5(\mathbf{X}) = \begin{vmatrix} 1-\varepsilon & 1-\varepsilon \\ 1.1-\varepsilon & 1+\varepsilon \end{vmatrix} = -0.1+2.1\varepsilon-2\varepsilon^2 \quad \Delta_6(\mathbf{X}) = \begin{vmatrix} 1+\varepsilon & 1+\varepsilon \\ 1.1-\varepsilon & 1-\varepsilon \end{vmatrix} = -0.1-0.1\varepsilon \tag{21}$$

$$\Delta_7(\mathbf{X}) = \begin{vmatrix} 1+\varepsilon & 1-\varepsilon \\ 1.1+\varepsilon & 1-\varepsilon \end{vmatrix} = -0.1+0.1\varepsilon \quad \Delta_8(\mathbf{X}) = \begin{vmatrix} 1+\varepsilon & 1-\varepsilon \\ 1.1-\varepsilon & 1+\varepsilon \end{vmatrix} = -0.1+4.1\varepsilon \tag{22}$$

$$\Delta_9(\mathbf{X}) = \begin{vmatrix} 1-\varepsilon & 1+\varepsilon \\ 1.1+\varepsilon & 1-\varepsilon \end{vmatrix} = -0.1 - 4.1\varepsilon \quad \Delta_{10}(\mathbf{X}) = \begin{vmatrix} 1-\varepsilon & 1+\varepsilon \\ 1.1-\varepsilon & 1+\varepsilon \end{vmatrix} = -0.1 - 0.1\varepsilon \tag{23}$$

$$\Delta_{11}(\mathbf{X}) = \begin{vmatrix} 1-\varepsilon & 1-\varepsilon \\ 1.1+\varepsilon & 1+\varepsilon \end{vmatrix} = -0.1+0.1\varepsilon \quad \Delta_{12}(\mathbf{X}) = \begin{vmatrix} 1+\varepsilon & 1+\varepsilon \\ 1.1+\varepsilon & 1-\varepsilon \end{vmatrix} = -0.1-2.1\varepsilon-2\varepsilon^2 \tag{24}$$

$$\Delta_{13}(\mathbf{X}) = \begin{vmatrix} 1+\varepsilon & 1+\varepsilon \\ 1.1-\varepsilon & 1+\varepsilon \end{vmatrix} = -0.1+1.9\varepsilon+2\varepsilon^2 \quad \Delta_{14}(\mathbf{X}) = \begin{vmatrix} 1+\varepsilon & 1-\varepsilon \\ 1.1+\varepsilon & 1+\varepsilon \end{vmatrix} = -0.1+2.1\varepsilon+2\varepsilon^2 \tag{25}$$

$$\Delta_{15}(\mathbf{X}) = \begin{vmatrix} 1-\varepsilon & 1+\varepsilon \\ 1.1+\varepsilon & 1+\varepsilon \end{vmatrix} = -0.1-2.1\varepsilon-2\varepsilon^2 \quad \Delta_{16}(\mathbf{X}) = \begin{vmatrix} 1+\varepsilon & 1+\varepsilon \\ 1.1+\varepsilon & 1+\varepsilon \end{vmatrix} = -0.1-0.1\varepsilon \tag{26}$$

Из $\Delta_6, \Delta_{10}, \Delta_{15}$ видим, что все определители должны быть отрицательными.
Из линейных функций быстрее всех возрастает Δ_8, а из квадратичных - Δ_{14}, таким образом

$$\begin{cases} -0.1 + 4.1\varepsilon < 0 \\ -0.1 + 2.1\varepsilon + 2\varepsilon^2 < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \varepsilon < \frac{1}{41}$$

4.2.2 Признак Румпа

$$\mathrm{rad}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \quad \mathrm{mid}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1.1 & 1 \end{pmatrix} \tag{27}$$

$$\sigma(\mathrm{rad}(\mathbf{A})) = \{0, 2\varepsilon\} \Rightarrow \sigma_{\max}(\mathrm{rad}(\mathbf{A})) = 2\varepsilon \tag{28}$$

$$\sigma(\mathrm{mid}(\mathbf{X})) = \left\{ \sqrt{\frac{421 + 21\sqrt{401}}{200}}, \sqrt{\frac{421 - 21\sqrt{401}}{200}} \right\} \approx \tag{29}$$

$$\approx \{2.0512, 0.0488\} \Rightarrow \sigma_{\min}(\mathrm{mid}(\mathbf{X})) = 0.0488$$

$$2\varepsilon < 0.0488 \Rightarrow \varepsilon < 0.0244 \tag{30}$$

4.2.3 Пример особенной точечной матрицы

При $\varepsilon = \frac{1}{41}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{41} & 1 - \frac{1}{41} \\ 1.1 - \frac{1}{41} & 1 + \frac{1}{41} \end{pmatrix} \quad \det(A) = 0 \tag{31}$$

4.3 Глобальная оптимизация

Функция МакКормика.

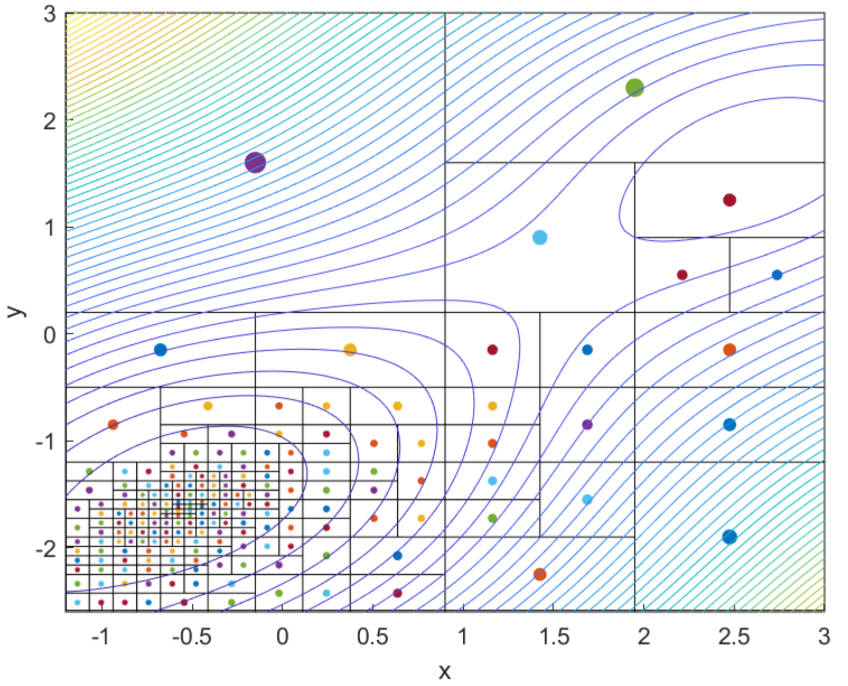

Рис. 1: Положения брусов и их центров для функции МакКормика (6)

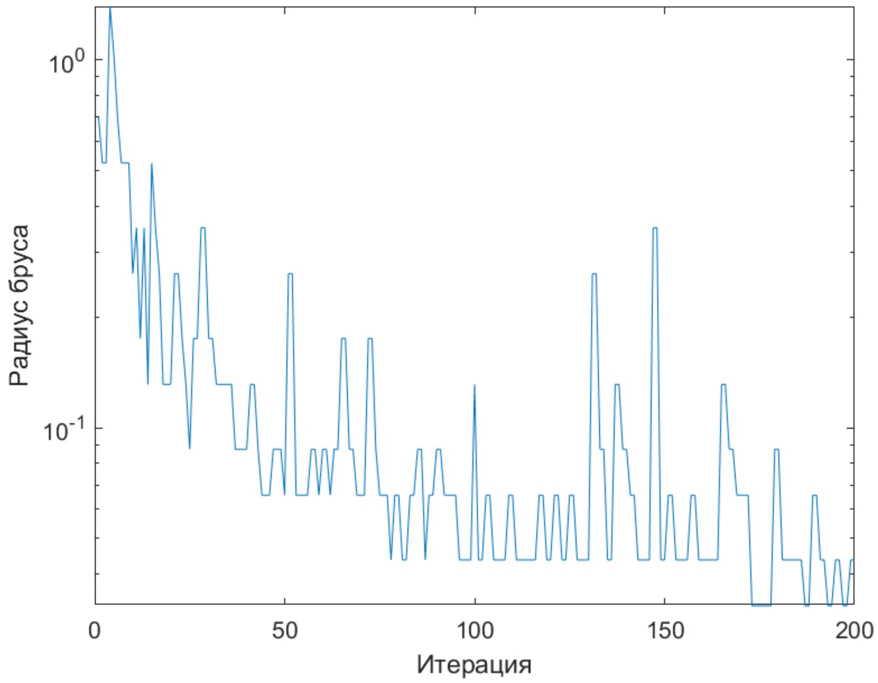

Рис. 2: Радиусы брусов для функции МакКормика (6)

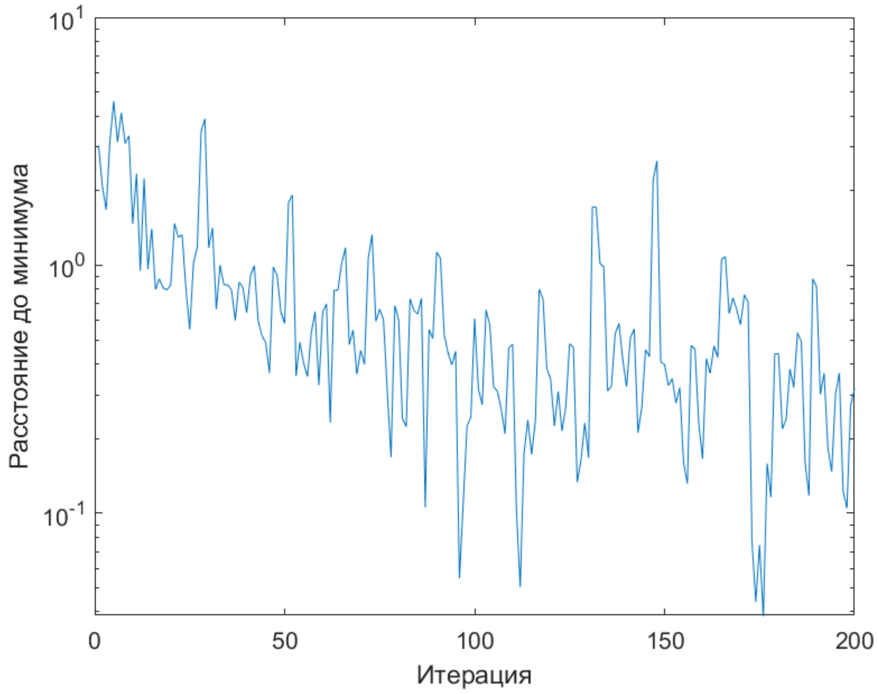

Рис. 3: Расстояние до точки минимума для функции МакКормика (6)

Функция Химмельблау.

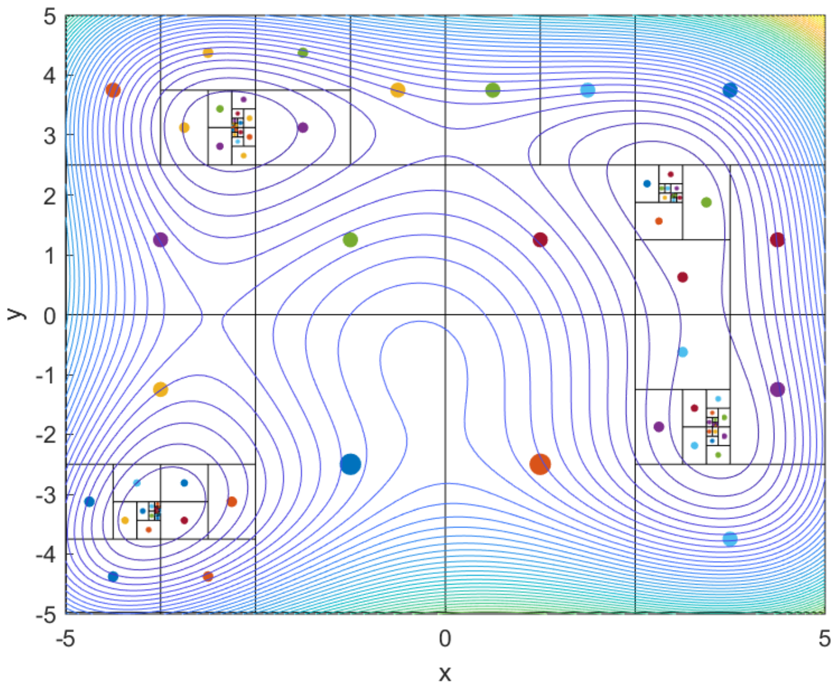

Рис. 4: Положения брусов и их центров для функции Химмельблау (7)

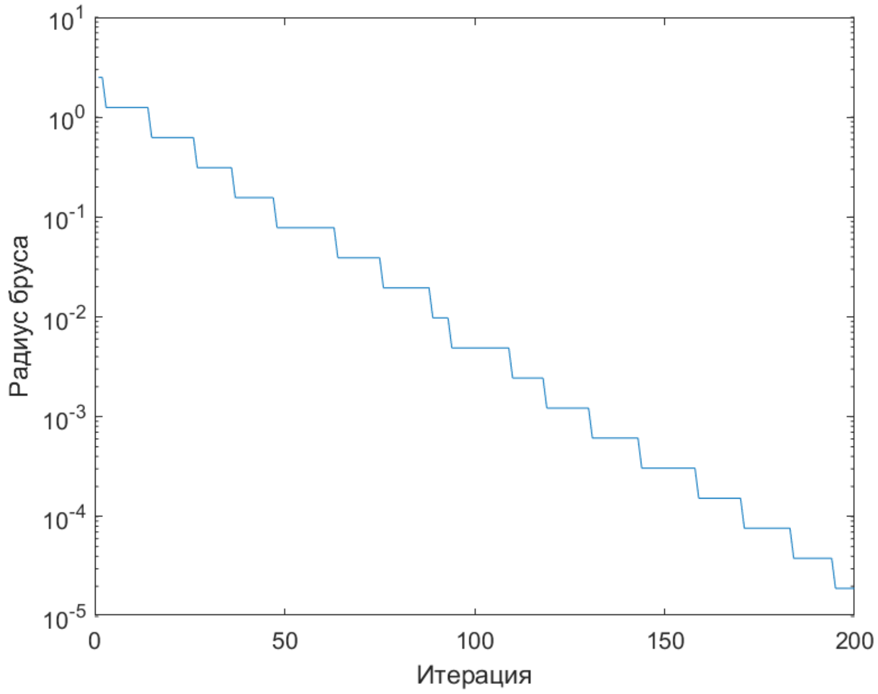

Рис. 5: Радиусы брусов для функции Химмельблау (7)

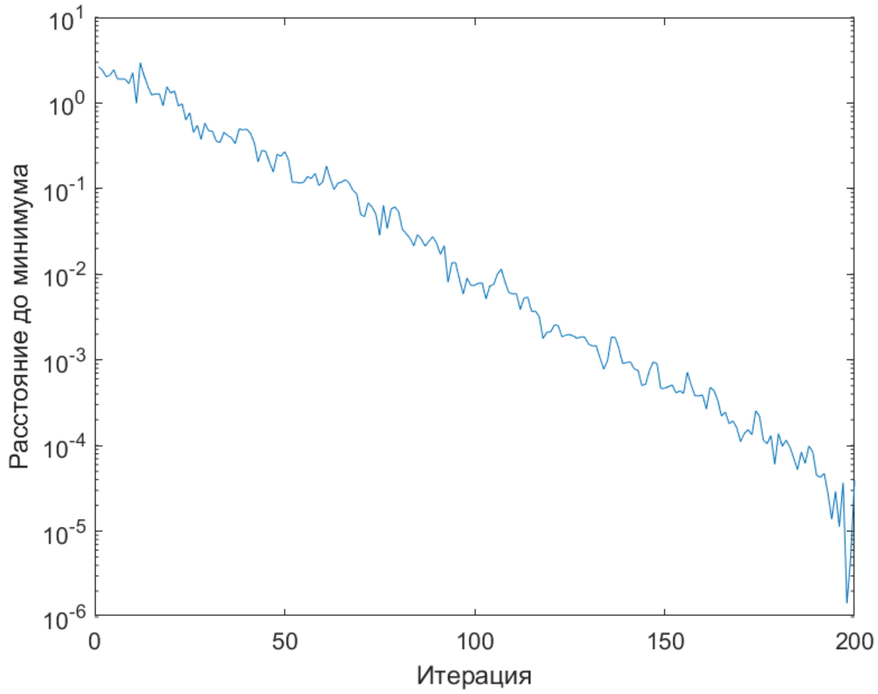

Рис. 6: Расстояние до точки минимума для функции Химмельблау (7)

5 Обсуждение

1. В обеих задачах значения критерия Баумана и признака Румпа согласуются между собой. В задаче регрессии признак Румпа даёт более узкий интервал

для ε, а в задаче томографии - почти идентичный, что и критерий Баумана.

2. На графике радиусов брусов для функции МакКормика мы видим, что монотонное убывание отсутствует. Это означает, что мы не всегда дробим брусы «вглубь», и периодически выбираем новый ведущий брус, не являющийся потомком предыдущего. Данное обстоятельство делает график расстояния до минимума куда менее релевантным, однако мы всё равно можем увидеть его убывание до порядка 10^{-1}.

3. На функции МакКормика скорость сходимости алгоритма сильно падает, в связи с чем увеличение кол-ва итераций больше 200 имеет малый смысл. Причиной этого является пункт обсуждения (2) и широкое «дно» в овражной структуре данной функции, внутри которого она крайне мало изменяет своё значение.

4. Для функции МакКормика алгоритм остановился на брусе $\begin{pmatrix}[-0.3469, -0.2812]\\ [-1.3750, -1.2874]\end{pmatrix}$, минимальное значение в котором равно -2.25, в то время как реальный минимум $f(-0.54719, -1.54719) = -1.9133$. Тот факт, что брус не содержит точку минимума вновь отсылает нас к пункту обсуждения (2), и означает лишь то, что мы в дальнейшем бы перешли к брусу, который бы содержал точку минимума.

5. Для функции Химмельблау радиусы брусов монотонно убывают, это означает, что для каждого из минимумов мы постоянно выбираем в качестве нового ведущего бруса потомка предыдущего.

6. Для функции Химмельблау алгоритм сошёлся к вырожденному брусу $[3.5844, -1.8481]$, который описывает соответствующий минимум с точностью порядка 10^{-5}.

7. Можно сделать вывод, что работа алгоритма сильно зависит от поведения функции в окрестности минимума, в связи с чем результат может сильно уступать в точности классическим численным методам. Безусловным плюсом данного алгоритма является возможность вычисления сразу нескольких локальных экстремумов.