Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого
Институт прикладной математики и механики
Кафедра «Прикладная математика»

Отчёт
по лабораторной работе №2
по дисциплине
«Интервальный анализ»

Выполнил студент:
Величко Арсений Юрьевич

Проверил:
к.ф.-м.н., доцент
Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2022 г.

Содержание

1 Постановка задачи

1.1 Линейный случай

Оценить методом Кравчика внешнее множество решений следующей ИСЛАУ

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = [30, 31] \\ x_1 - [0.8, 1]x_2 = 0 \end{cases}$$

Также необходимо:

- определить спектральный радиус матрицы
- провести оценку начального бруса решения

Провести вычисления и привести иллюстрации:

- положения брусов при итерациях
- рабочих брусов
- расстояния от центров брусов при итерациях до конечной точки алгоритма

1.2 Нелинейный случай

Оценить методом Кравчика внешнее множество решений следующей ИСЛАУ

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = [30, 31] \\ \frac{x_1}{x_2} = [0.8, 1] \end{cases}$$

Провести вычисления и привести иллюстрации:

- положения брусов при итерациях
- графики радиусов рабочих брусов
- расстояния от центров брусов при итерациях до конечной точки алгоритма

Сравнить результаты с линейным случаем.

2 Теория

2.1 Внешнее множество решений

Внешним множеством решений называется объединенное множество решений, образованное решениями всех точечных систем $F(a, x) = b$

$$\Xi_{\text{uni}}(\mathbf{F}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists a \in \mathbf{a})(\exists b \in \mathbf{b})(F(a, x) = b)\} \tag{1}$$

2.2 Метод Кравчика

Метод Кравчика предназначен для уточнения двухсторонних границ решений систем уравнений, в общем случае нелинейных, заданных на некотором брусе $\mathbf{X} \subset \mathbb{IR}$, вида

$$F(x) = 0, \quad \text{где } F(x) = \{F_1(x), ..., F_n(x)\}^T,\ x = (x_1, ...x_n) \tag{2}$$

Также данный метод может быть использован для того, чтобы понять, что решений нет.
Отображение $\mathcal{K} : \mathbb{ID} \times \mathbb{R} \to \mathbb{IR}^n$, задаваемое выражением

$$\mathcal{K}(\mathbf{X}, \overline{x}) := \overline{x} - \Lambda * F(\overline{x}) - (I - \Lambda * \mathbf{L} * (\mathbf{X} - \overline{x}) \tag{3}$$

называеся оператором Кравчика на $\mathbb{ID}$ относительно точки $\overline{x}$.
Итерационная схема данного метода выглядит следующим образом

$$\mathbf{X}^{k+1} \leftarrow \mathbf{X}^k \cap \mathcal{K}(\mathbf{X}^k, \overline{x}^k), \ \ k = 0, 1, 2...,\ x^k \in \mathbf{X}^k \tag{4}$$

Сходимость данного метода гарантирована при выполнении условия

$$\rho(I - \Lambda * \mathbf{L}) < 1 - \text{спектральный радиус меньше единицы} \tag{5}$$

Частным случаем данного метода является линейный метод Кравчика, итерационная схема которого выглядит следующим образом:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \left(\Lambda * \mathbf{b} + (I - \Lambda * \mathbf{A}) * \mathbf{x}^k\right) \cap \mathbf{x}^k \tag{6}$$

$\mathbf{A}$ в данном случае является интервальной матрицей коэффициентов соответсвующей ИСЛАУ, а $\mathbf{b}$ - вектором свободных членов.
В случае линейности системы и выполнения условия $\eta = ||I - \Lambda * \mathbf{A}||_\infty \leq 1$ в качестве начального приближения можно взять брус

$$\mathbf{x}^0 = ([-\theta, \theta], ..., [-\theta, \theta])^T, \quad \text{где } \theta = \frac{||\Lambda \mathbf{b}||_\infty}{1 - \eta} \tag{7}$$

3 Реализация

Лабораторная работа выполнена при помощи пакета Matlab с использованием библиотек IntLab и IntLinInc2D.
Ссылка на репозиторий с исходный кодом:
`https://github.com/ArsenyVelichko/IntervalAnalysis`

4 Результаты

4.1 Линейный случай

В качестве матрицы предобуславливания, как это принято, возьмём $\Lambda = (\mathrm{mid}(\mathbf{A}))^{-1}$.

4.1.1 Спектральный радиус

Проверим условие сходимости метода

$$|I - \Lambda * A| \approx \begin{pmatrix} 0 & 0.0426 \\ 0 & 0.0638 \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$\rho(|I - \Lambda * A|) \approx 0.0638 \tag{9}$$

4.1.2 Начальное приближение

Так как условие $\eta = ||I - \Lambda * \mathbf{A}||_\infty = 0.0638 \leq 1$ выполняется, мы можем явно вычислить начальное приближение.

$$\theta = \frac{||\Lambda \mathbf{b}||_\infty}{1 - \eta} = 7.0455 \Rightarrow \mathbf{x}^0 = ([3.5227, 10.5682], [3.5227, 10.5682])^T \tag{10}$$

4.1.3 Внешнее множество решений

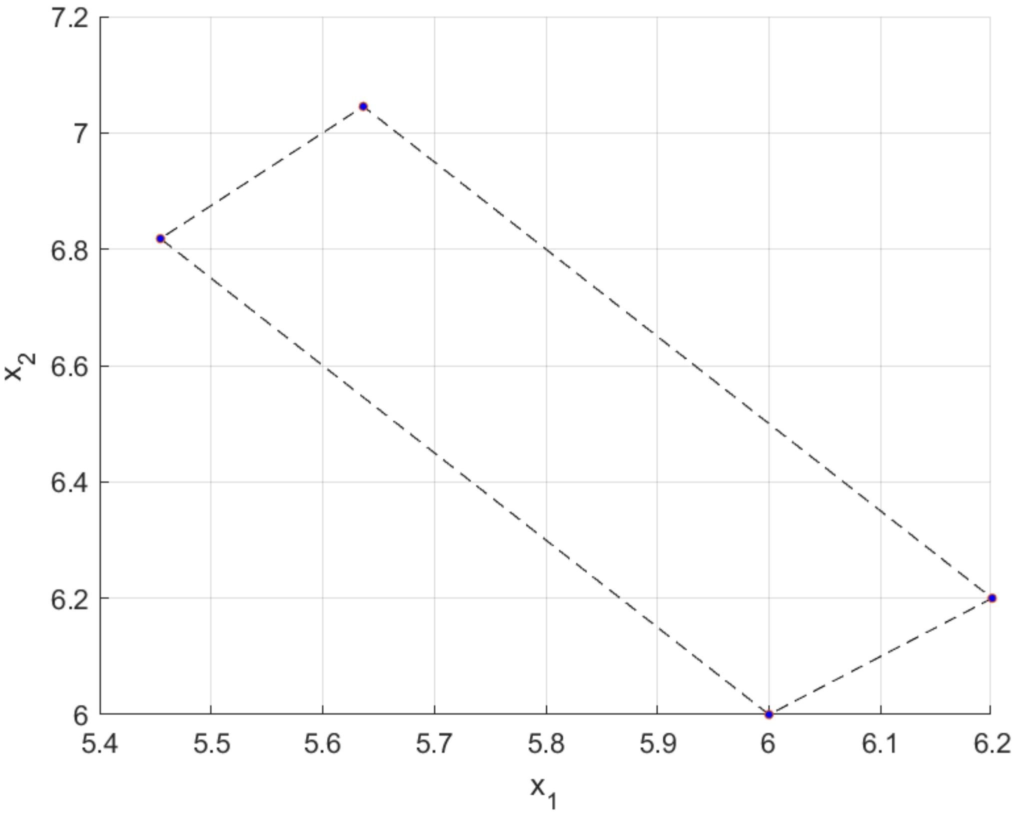

Рис. 1: Внешнее множество решений (1)

4.1.4 Результаты работы метода

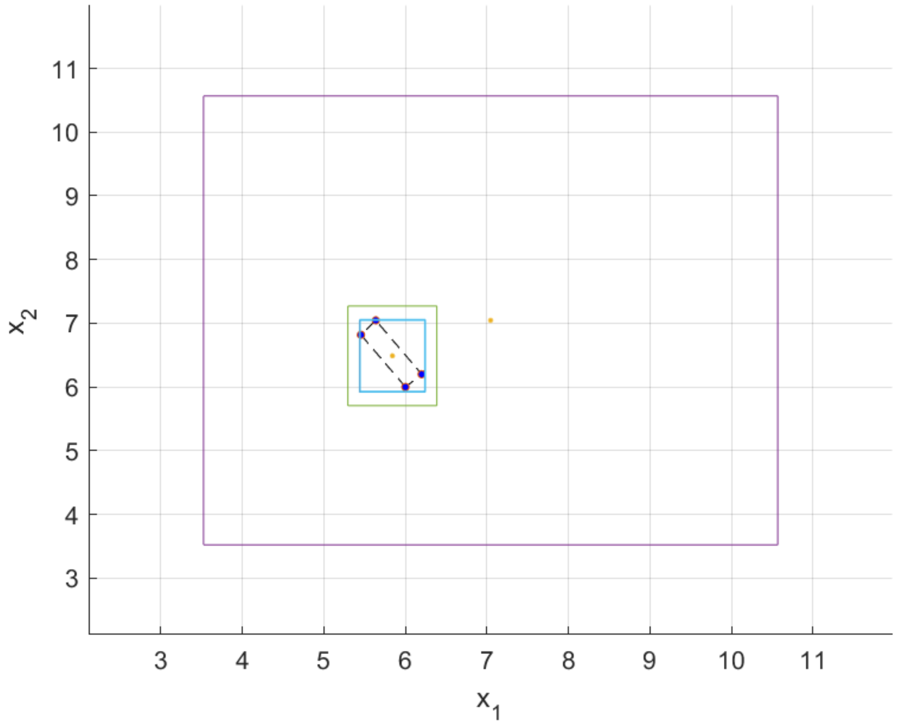

Рис. 2: Положения брусов в линейном методе Кравчика

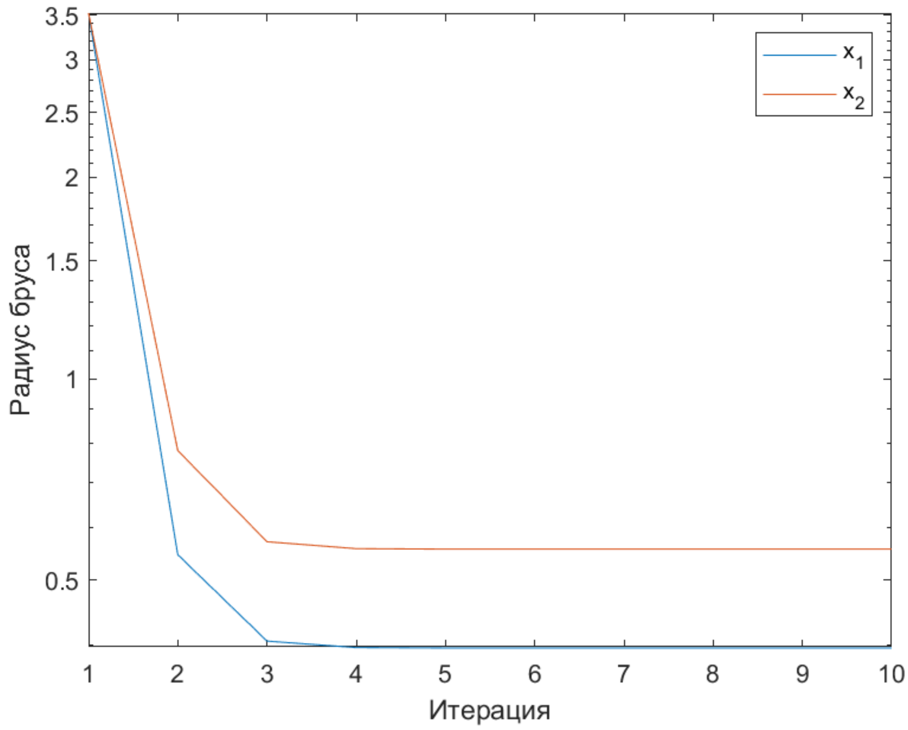

Рис. 3: Радиусы брусов в линейном методе Кравчика

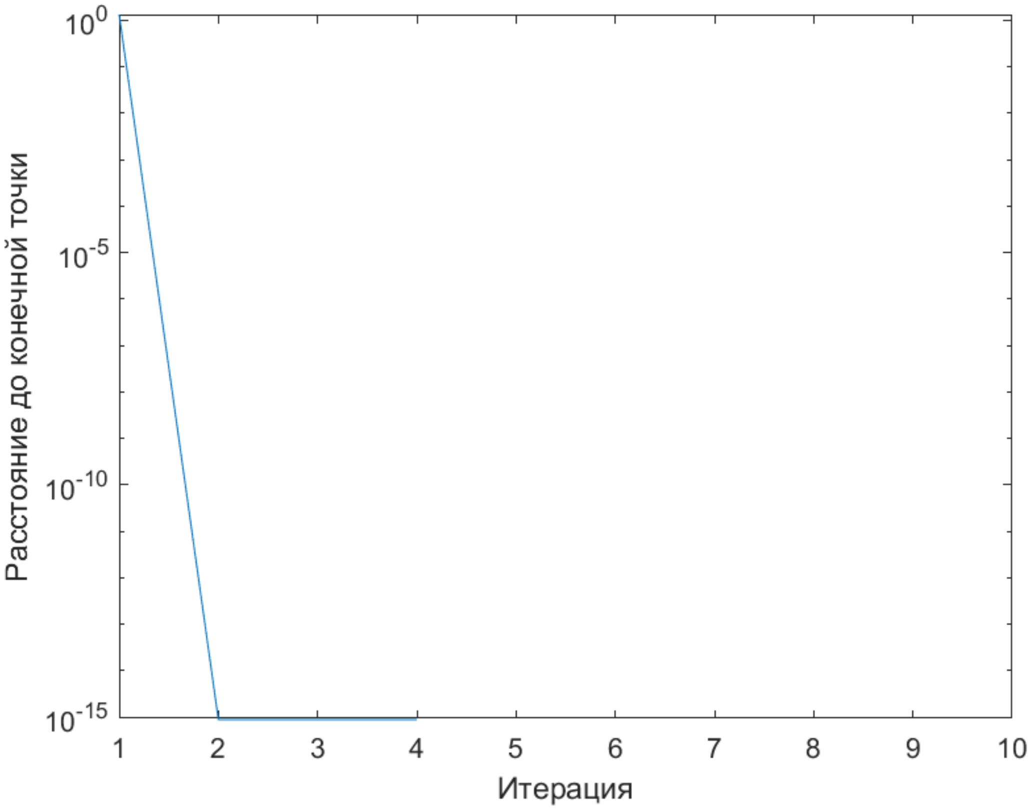

Рис. 4: Расстояние до конечного положения в линейном методе Кравчика

4.2 Нелинейный случай

Положим интервальную матрицу Липшица $\mathbf{L}$ равной якобиану на каждой итерации метода: $\mathbf{L} = \mathbf{J}(\mathbf{X})$.
В качестве $\overline{x}^k \in \mathbf{X}^k$ будем использовать $\text{mid}(\mathbf{X}^k)$.
В тоже время определим матрицу предобуславливания как

$$\Lambda(\mathbf{X}^k) = (J(\overline{x}^k))^{-1} \tag{11}$$

4.2.1 Спектральный радиус

Проверим условие сходимости метода

$$|I - \Lambda * J| \approx \begin{pmatrix} 0.0800 & 0.2720 \\ 0.1200 & 0.4080 \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$\rho(|I - \Lambda * A|) \approx 0.4880 \tag{13}$$

4.2.2 Начальное приближение

В качестве начального приближения возьмём

$$\mathbf{x}^0 = ([5, 8], [5, 8])^T \tag{14}$$

4.2.3 Результаты работы метода

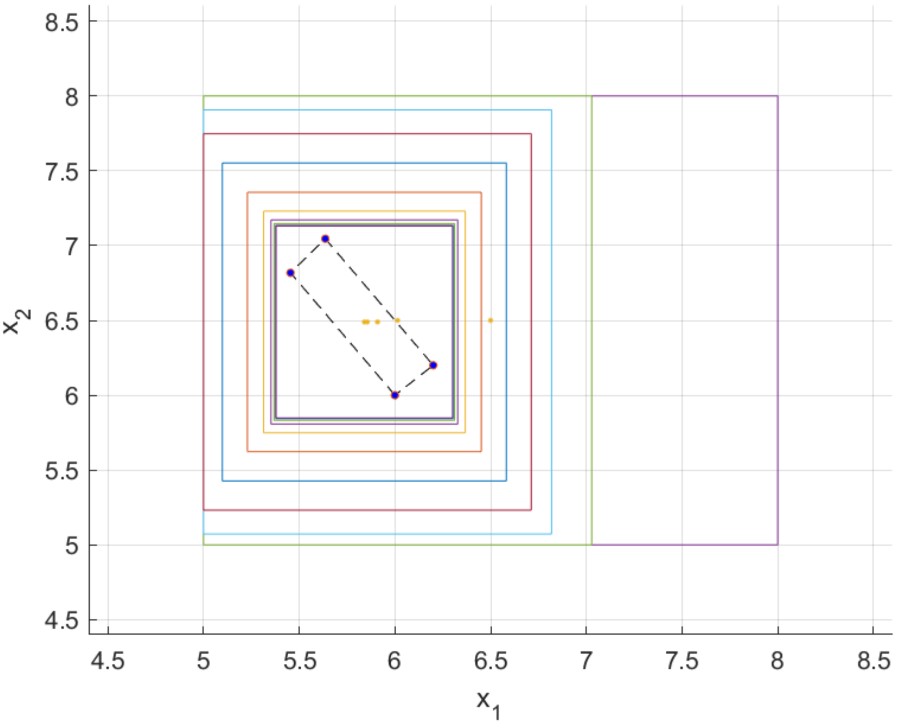

Рис. 5: Положения брусов в нелинейном методе Кравчика

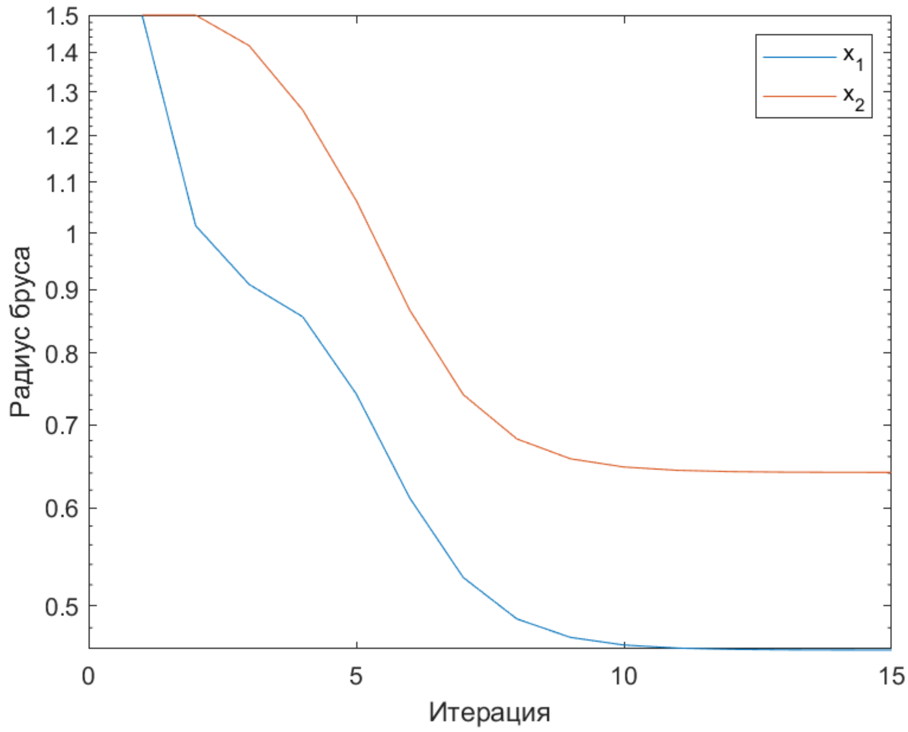

Рис. 6: Радиусы брусов в нелинейном методе Кравчика

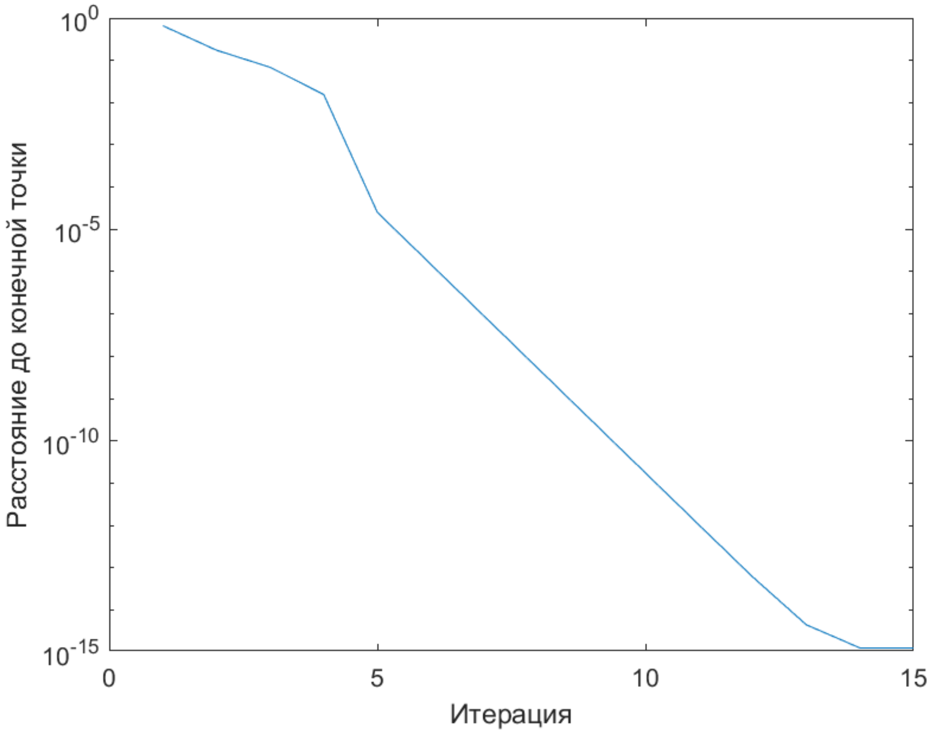

Рис. 7: Расстояние до конечного положения брусов в нелинейном методе Кравчика

5 Обсуждение

1. Метод Кравчика для линейной ИСЛАУ показал крайне быструю сходимость. Для достижения конечной точки ему потребовалось всего 2 итерации. Однако при этом достаточно точно достигается лишь верхняя часть интервальной оболочки Ξ_{uni}.

2. В случае нелинейной интерпретации метод Крачика демонстрирует куда более интересные рузельтаты. Достижение конечной точки занимает порядка 15 итераций. Уточнее ведётся по всем граням одновременно. Финальный брус же отличается от интервальной оболочки Ξ_{uni} приблизительно на 0.07 по каждой из граней.

3. Сравнивая две интерпретации между собой можно сказать, что общая точность, с которой они приблизили Ξ_{uni} оказалась примерно одинаковой. При этом в достоинства линейного случая можно записать то, что точность достижения одной из граней была достаточна велика, а также что сложность самого метода и поиска начального приближения меньше, чем в нелинейном случае.