Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого
Институт прикладной математики и механики
Кафедра «Прикладная математика»

Отчёт
по курсовому проекту
по дисциплине
«Интервальный анализ»
на тему
«Интервальный метод отжига»

Выполнил студент:
Величко Арсений Юрьевич

Проверил:
к.ф.-м.н., доцент
Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2022 г.

Содержание

1 Постановка задачи

Необходимо реализовать интервальный метод отжига и сравнить его результаты с простейшим интервальным алгоритмом дробления для следующих функций:

- функция МакКормика

$$f(x,y) = \sin(x+y) + (x-y)^2 - 1.5x + 2.5y + 1, \quad \begin{array}{l} -1.5 \le x \le 4 \\ -3 \le y \le 4 \end{array} \tag{1}$$

- функция Изома

$$f(x,y) = -\cos(x) * \cos(y) * \exp(-(x-\pi)^2 - (y-\pi)^2), \quad \begin{array}{l} 2 \le x \le 4 \\ 3 \le y \le 5 \end{array} \tag{2}$$

- функция «шестигорбый верблюд»

$$f(x,y) = 4x^2 - 2.1x^4 + \frac{1}{3}x^6 + xy - 4y^2 + 4y^4, \quad \begin{array}{l} -3 \le x \le 3 \\ -2 \le y \le 2 \end{array} \tag{3}$$

2 Теория

2.1 Естественное интервальное расширение

Интервальное расширение элементарного функционального выражения, которое получается в результате замены его аргументов на интервалы их изменения, а арифметических операций и элементарных функций на их интервальные аналоги и расширения называется *естественным интервальным расширением*.

2.2 Оценка расстояния между функцией и её естественным интервальным расширением

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является липшицевым по форме на $\mathbf{X} \in \mathbb{IR}^n$.
Пусть $\boldsymbol{f}_{\text{nat}}$ - естественное интервальное расширение f.
Пусть $f(\mathbf{x}) = \{f(x) \mid x \in \mathbf{x}\}$, тогда имеет место оценка

$$\text{dist}(\boldsymbol{f}_{\text{nat}}, f(\mathbf{x})) \le C||\text{wid}(\mathbf{x})|| \tag{4}$$

для любого бруса $\mathbf{x} \subset \mathbf{X}$ и некоторой константы C.

2.3 Задача глобальной отпимизации

Пусть $f : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$, где $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{IR}^n$ - прямоугольный брус с гранями параллельными осям.
Требуется найти величину $f^* \in \mathbb{R}$, такую что

$$||f^* - \inf_{x \in \mathbf{X}} f(x)|| < \varepsilon \tag{5}$$

для любого заранее заданного $\varepsilon > 0$.

2.4 Интервальный метод отжига

Алгоритм схема интервального метода обжига:

Вход
Брус $\mathbf{X} \in \mathbb{IR}^n$. Начальное T_0 и конечное T_{fin} значения «температуры». Интервальное расширение $\boldsymbol{F} : X \to \mathbb{IR}^n$.
Выход
Оценка F^* глобального минимума функции F на $\mathbf{X}$.
Алгоритм

Присваиваем $\mathbf{Y} \leftarrow \mathbf{X}$ и $T \leftarrow T_0$;
Назначаем целочисленную величину N_T -
«кол-во испытаний на один температурный уровень»;
Вычисляем $\boldsymbol{F}(\mathbf{Y})$ и инициализируем список $\mathcal{L}$ записью $\{(\mathbf{Y}, \underline{\boldsymbol{F}(\mathbf{Y})})\}$;
DO WHILE $(T > T_{\text{fin}})$
    DO FOR $j = 1$ **TO** N_T
        Случайно выбираем из $\mathcal{L}$ запись $\{(\mathbf{Z}, \underline{\boldsymbol{F}(\mathbf{Z})})\}$ по правилу $\mathcal{S}(\mathbf{Y})$
        DO (с вероятностью $P_T(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$)
            Рассекаем $\mathbf{Z}$ по самой длинной компоненте пополам
            на брусы-потомки $\mathbf{Z}'$ и $\mathbf{Z}''$;
            Вычисляем $\boldsymbol{F}(\mathbf{Z}')$ и $\boldsymbol{F}(\mathbf{Z}'')$;
            Удаляем запись $\{(\mathbf{Z}, \underline{\boldsymbol{F}(\mathbf{Z})})\}$ из списка $\mathcal{L}$;
            Помещаем записи $\{(\mathbf{Z}, \underline{\boldsymbol{F}(\mathbf{Z}')})\}$ и $\{(\mathbf{Z}, \underline{\boldsymbol{F}(\mathbf{Z}'')})\}$ в список $\mathcal{L}$;
            Обозначаем через $\{(\mathbf{Y}, \underline{\boldsymbol{F}(\mathbf{Y})})\}$ ту из записей $\{(\mathbf{Z}, \underline{\boldsymbol{F}(\mathbf{Z}')})\}$
            и $\{(\mathbf{Z}, \underline{\boldsymbol{F}(\mathbf{Z}'')})\}$, которая имеет меньшее значение
            второго поля;
        END DO
    END DO
    Уменьшаем значение температуры $T \leftarrow \alpha T$;
END DO
$F^* \leftarrow \underline{\boldsymbol{F}(\mathbf{Y})}$);

Таблица 1: Алгоритм интервального метода отжига

Вероятность дробления выбранного бруса $\mathbf{Z}$ задаётся формулой

$$P_T(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta \boldsymbol{F} < 0, \\ \exp(-\frac{\boldsymbol{F}}{kT}), & \text{если } \Delta \boldsymbol{F} \geq 0 \end{cases} \tag{6}$$

где $\Delta \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\mathbf{Z}) - \boldsymbol{F}(\mathbf{Y})$ - приращение оценки оптимума, обеспечиваемое новым брусом приближения.

Правило $\mathcal{S}(\mathbf{Y})$ в алгоритме (1) - это случайный выбор бруса $\mathbf{Z}$ из рабочего списка. Оно зависит от ведущего бруса $\mathbf{Y}$ (а также ведущей оценки) и может быть организовано самым различным образом в зависимости от наличия априорной информации о целевой функции.

3 Реализация

Лабораторная работа выполнена при помощи пакета Matlab с использованием библиотеки IntLab.
Ссылка на репозиторий с исходный кодом:
`https://github.com/ArsenyVelichko/IntervalAnalysis`

4 Результаты

4.1 Выбор параметров метода отжига

Важнейшим фактором в сходимости метода отжига является выбор его параметров. Часть параметров, такие как начальная и конечная температура, а также кол-во испытаний на один температурный уровень, мы будем подбирать для каждой функции отдельно. Здесь же зафиксируем правило перехода $\mathcal{S}(\mathbf{Y})$, а также параметр α для уменьшения температуры.
В представленном выше алгоритме (1) при приближении к минимуму мы постоянно будет уменьшать радиус ведущего бруса. Пусть ведущий брус всегда храниться последним в списке, тогда чтобы не обращаться к брусам из начала списка спустя множество итераций, определим правило перехода как

$$\mathcal{S}(\mathbf{Y}) = \frac{|L \cdot N(0, \sigma^2)|}{3\sigma}, \quad \sigma = ||\mathrm{wid}(\mathbf{Y})|| \tag{7}$$

где L - текущий размер рабочего списка, а $N(0, \sigma^2)$ - случайная величина, имеющая нормальное распределение с центром в нуле. Таким образом $\mathcal{S}(\mathbf{Y})$ будет отвечать у нас за смещение от ведущего бруса в рабочем в списке. Можно заметить, что таким образом мы можем выйти за границы рабочего списка, поэтому определим индекс нового бруса $\mathbf{Z}$ как

$$I_{\mathbf{Z}} = \max(1, L - \mathcal{S}(\mathbf{Y})) \tag{8}$$

Предполагается, что индексация рабочего списка, начинается с 1.

Эмпирическим путём было выявлено, что оптимальным значением коэффициента α является $\alpha = 0.8$, поэтому будем использовать его для всех функций.

4.2 Функция МакКормика

Для функции МакКормика положим $T_0 = 10^{-2}, T_{\text{fin}} = 10^{-16}$ и $N_T = 25$.

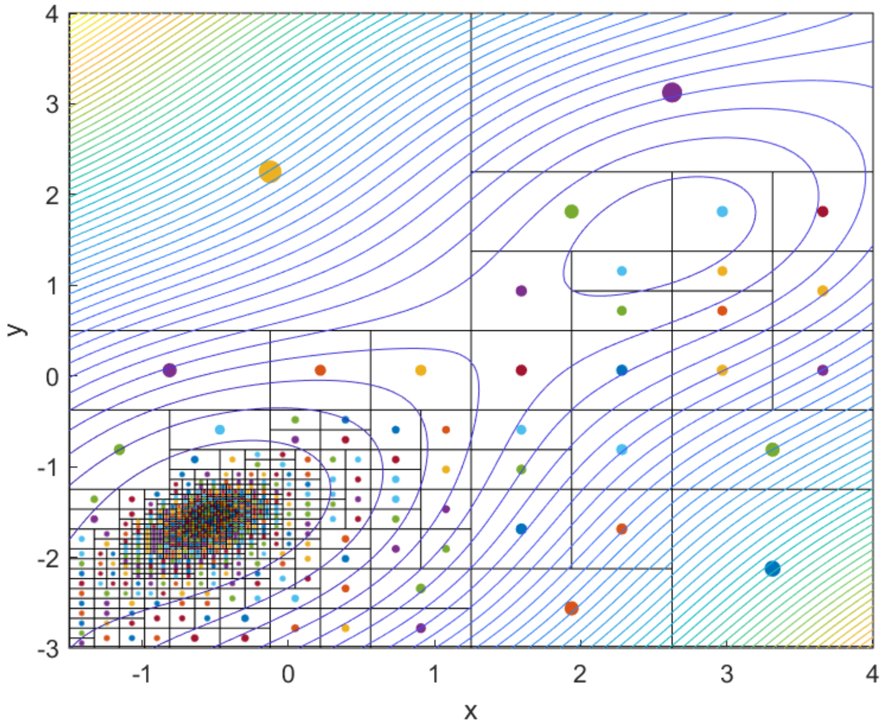

Рис. 1: Работа простейшего алгоритма дробления для функции МакКормика (1)

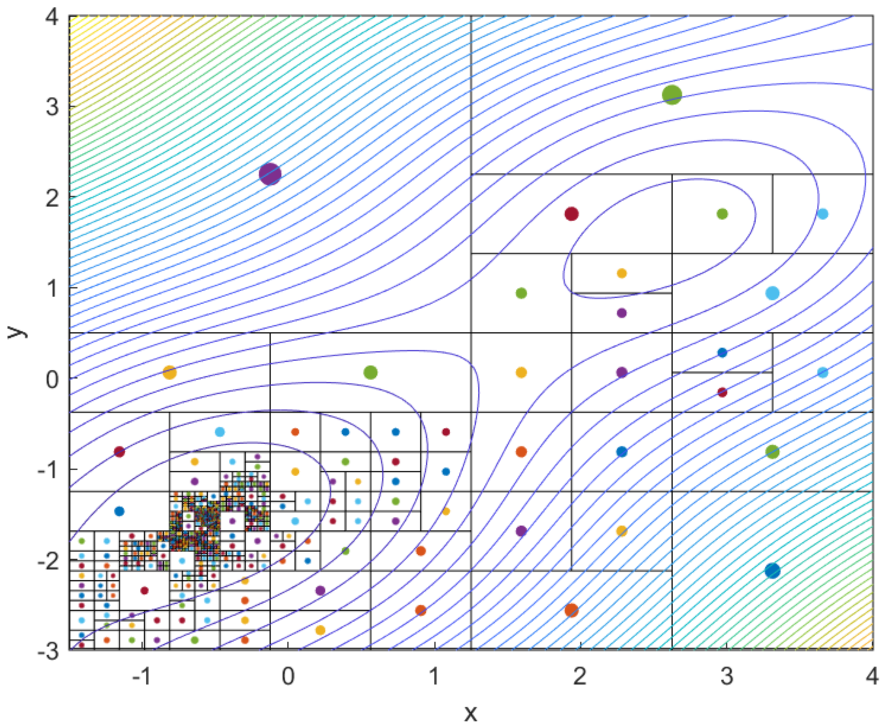

Рис. 2: Работа метода отжига для функции МакКормика (1)

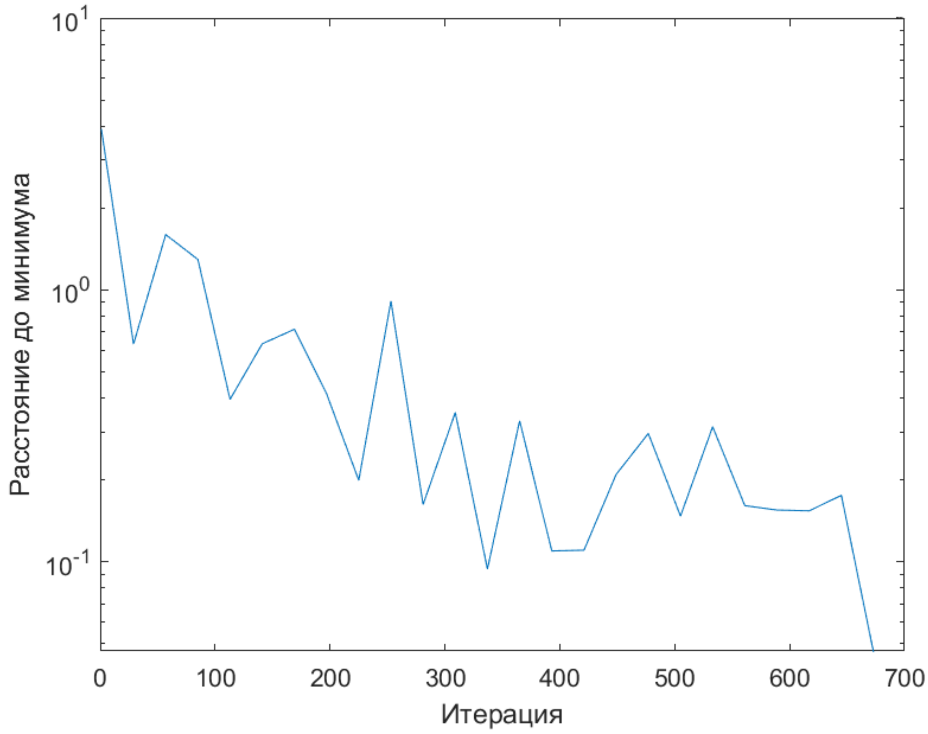

Рис. 3: Расстояния до минимума простейшего алгоритма дробления для функции МакКормика (1)

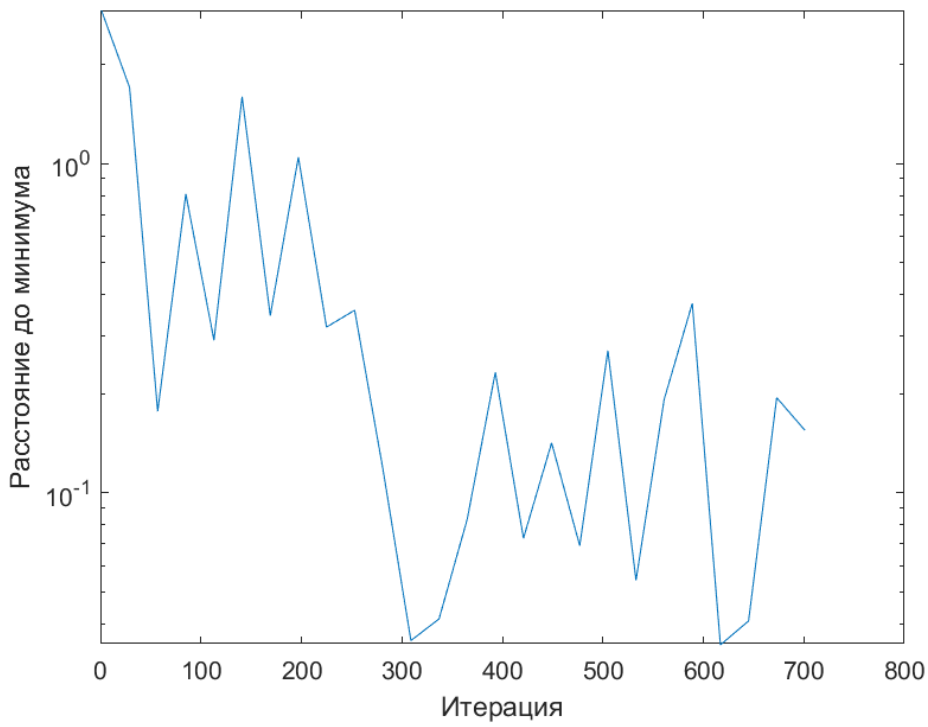

Рис. 4: Расстояния до минимума метода отжига для функции МакКормика (1)

4.3 Функция Изома

Для функции Изома положим $T_0 = 10^{-3}, T_{\text{fin}} = 10^{-10}$ и $N_T = 10$.

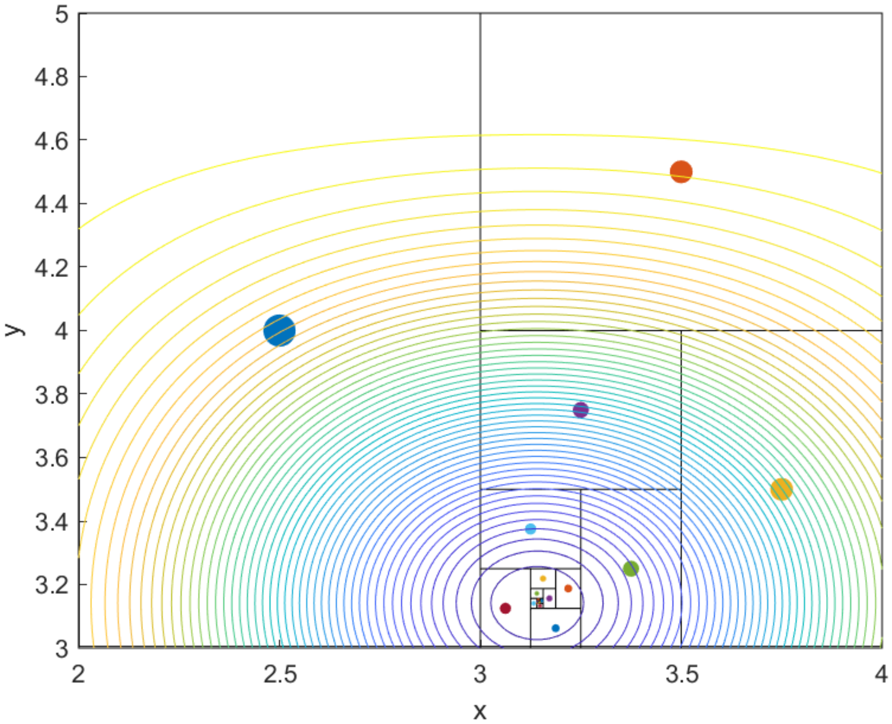

Рис. 5: Работа простейшего алгоритма дробления для функции Изома (2)

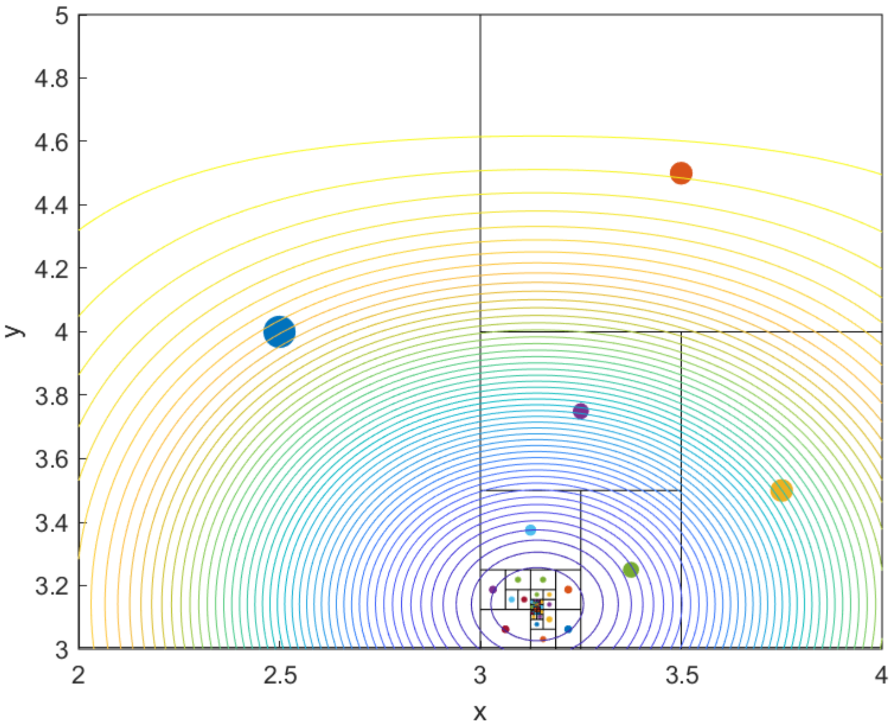

Рис. 6: Работа метода отжига для функции Изома (2)

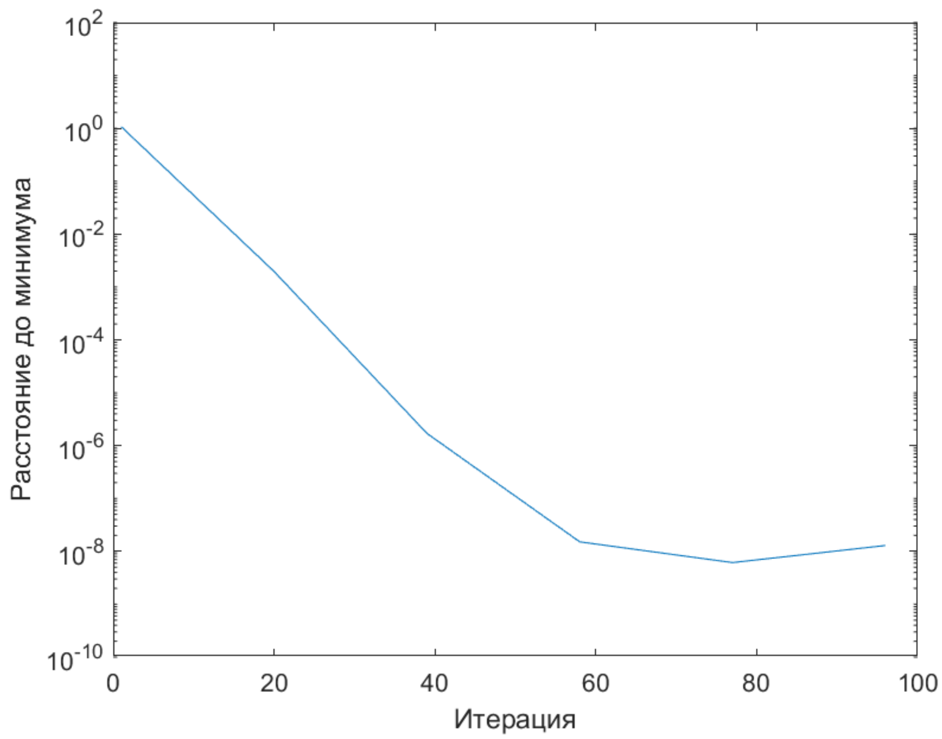

Рис. 7: Расстояния до минимума простейшего алгоритма дробления для функции Изома (2)

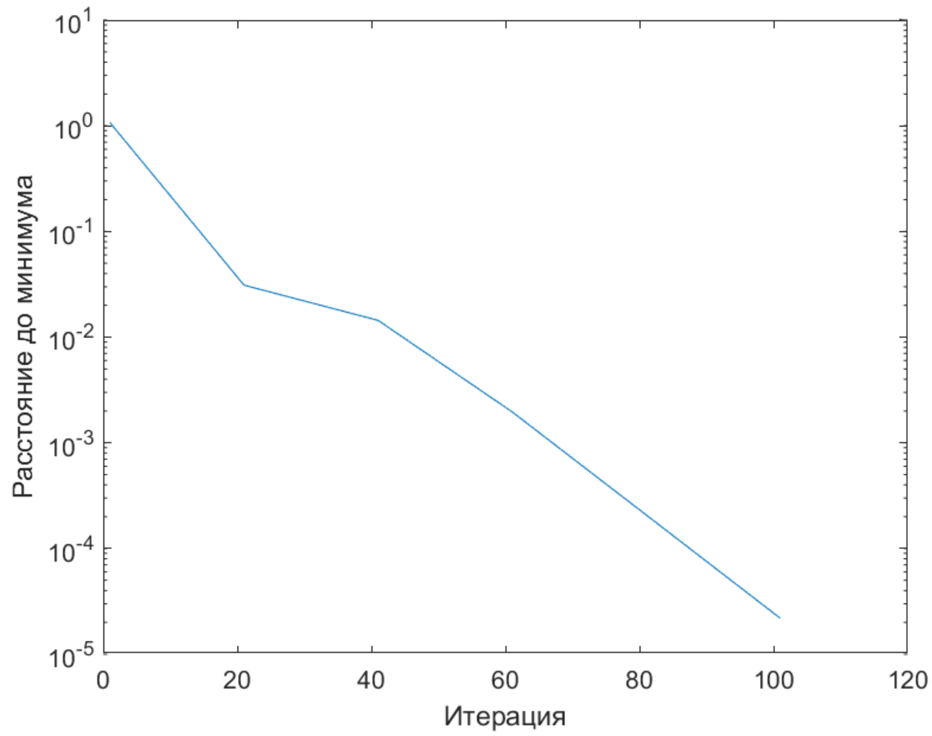

Рис. 8: Расстояния до минимума метода отжига для функции Изома (2)

4.4 Функция «шестигорбый верблюд»

Для функции «шестигорбый верблюд» положим $T_0 = 10, T_{\text{fin}} = 10^{-32}$ и $N_T = 500$.

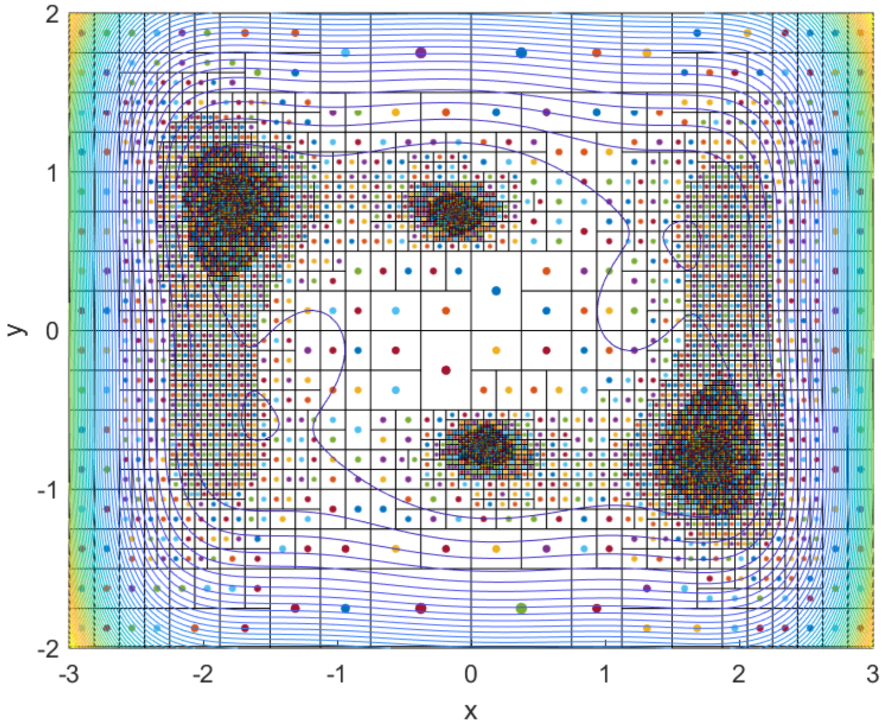

Рис. 9: Работа простейшего алгоритма дробления для функции «шестигорбый верблюд» (2)

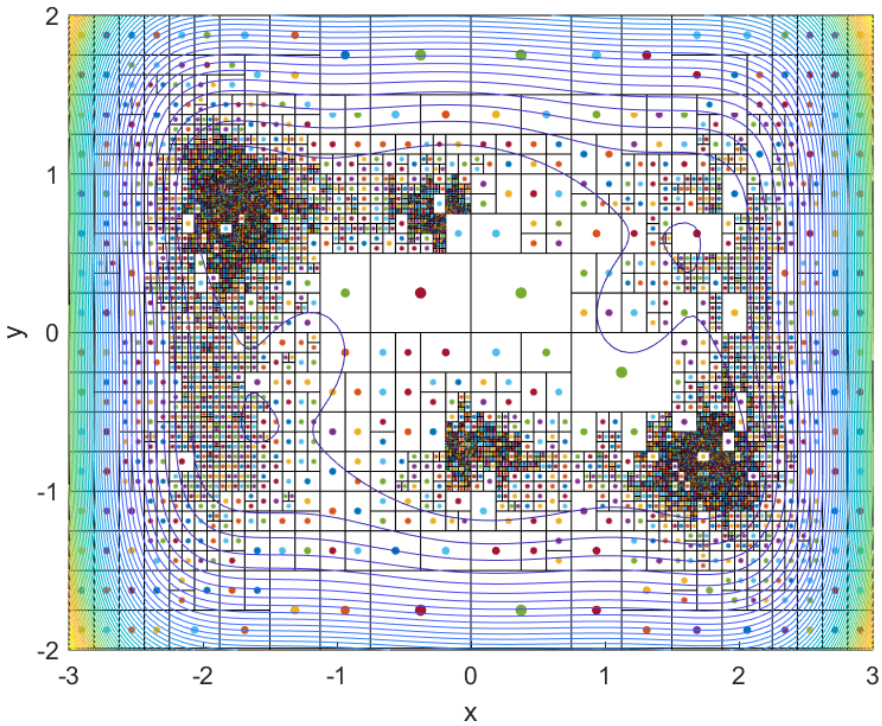

Рис. 10: Работа метода отжига для функции «шестигорбый верблюд» (2)

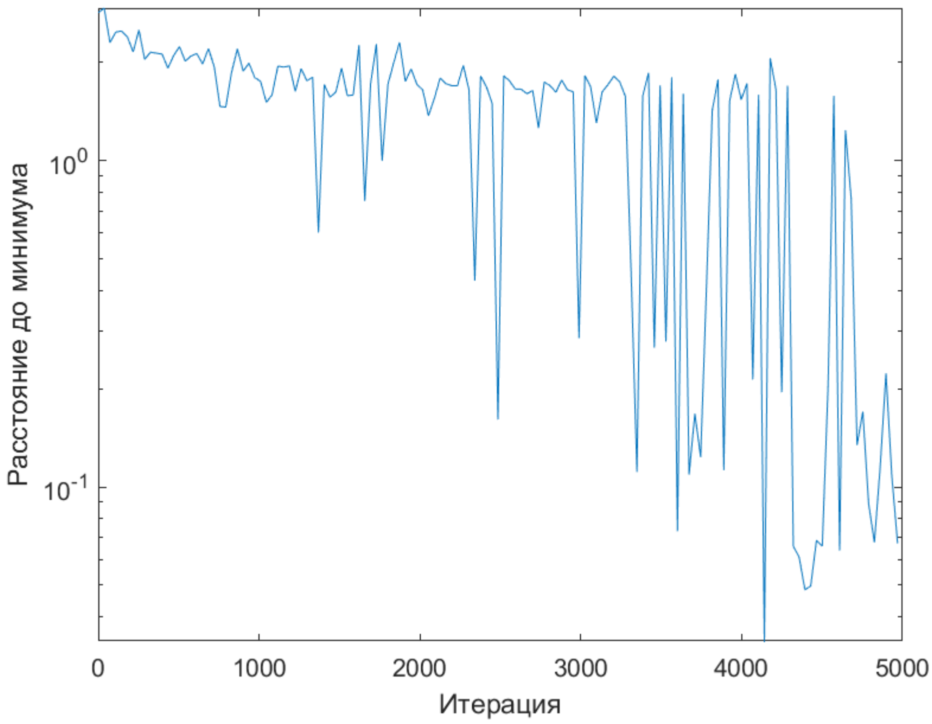

Рис. 11: Расстояния до минимума простейшего алгоритма дробления для функции «шестигорбый верблюд» (2)

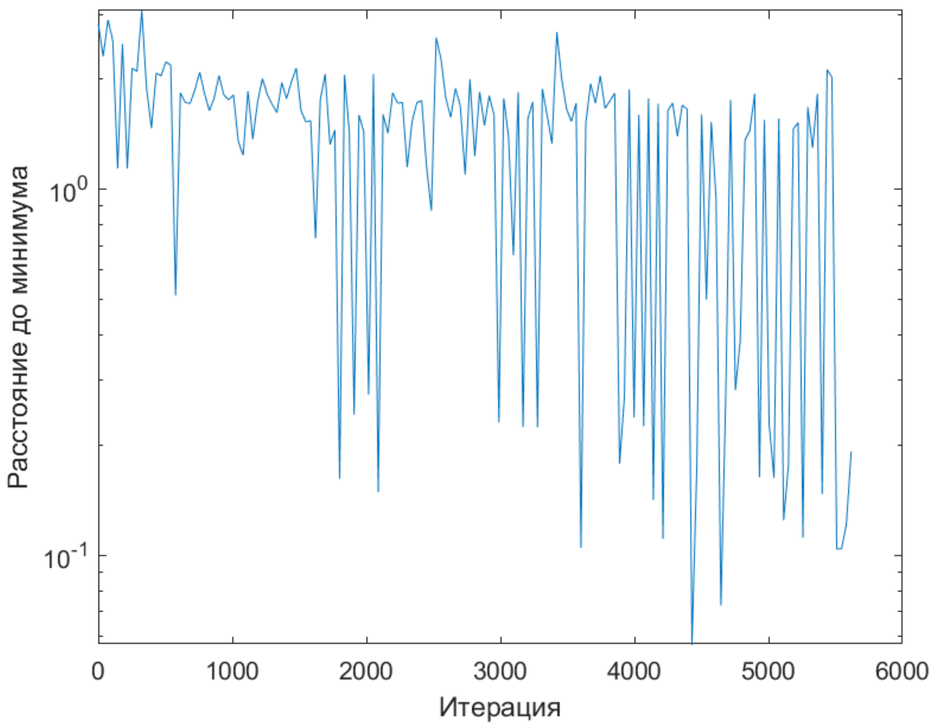

Рис. 12: Расстояния до минимума метода отжига для функции «шестигорбый верблюд» (2)

5 Обсуждение

1. У функции МакКормика имеется проблема в том, что вблизи минимума она убывает крайне медленно, в связи с чем тот же простейших алгоритм дробления после определённого числа итераций почти не приближает своего значения. В теории эту проблему мог бы решить метод отжига, однако мы видим, что его поведение при выбранных нами параметрах аналогично простейшему алгоритму дробления, и он также начинает «рыскать» по дну оврага вместо монотонного стремления к минимуму.
   На графике расстояния до минимума также видна одна из проблем метода отжига - он может остановить своё выполнение не в наилучшей точке рабочего списка. Причиной этого служит вероятность (6), из-за которой мы всегда имеем шанс сделать ведущим брус, чья оценка больше текущей.

2. Функция Изома является достаточно простой для оптимизации. Об этом свидетельствует и быстрая сходимость обоих методов. При этом мы видим, что простейший алгоритм дробления за 100 итераций успевает достигнуть точности порядка 10^{-8}, в то время как метод отжига лишь 10^{-4}. Это говорит нам о том, что метод отжига на тривиальных функциях является далеко не самым предпочтительным кандидатом.

3. Самой сложной из тестируемых функций является функция «шестигорбый верблюд». Она имеет 6 локальных минимумов, 2 из которых - глобальные. Глобальные минимумы мы наблюдаем ближе к центру, они имеют координаты $(0.08984, -0.71266)$ и $(-0.08984, 0.71266)$. Ключевая трудность данной функции заключается в том, что в первую очередь находятся локальные минимумы, а для перехода к глобальным тому же простейшему алгоритму дробления требуется порядка 4000 итераций. Мы видим, что оба метода проделали порядка 5000 итераций и приблизились на примерно одно расстояние к минимуму. Можно акцентировать внимание на том, что метод отжига достиг положения, относительно близкого к глобальному минимуму, ещё на отметке в 2000 итераций, однако после всё равно предпочёл перейти к более дальнему брусу. Опять же в теории подобного поведения можно избежать более точным подбором параметров.

4. Подводя итог по трём исследованным функциям стоит сказать, что применение метода отжига имеет наибольшее обоснование в случае сложных функций с несколькими локальными минимумами. Данный метод в процессе написания данной работы проявил себя крайне нестабильным образом и подбор описанных выше параметров проводился в первую очерель эмпирическим путём, однако в конечном итоге на функции МакКормика и функции «шестигорбый верблюд» он показал результаты, соизмеримые простейшему алгоритму дробления.

Список литературы

[1] Шарый С.П. Рандомизированные алгоритмы в интервальной глобальной оптимизации // Сиб. журн. вычисл. мат. 2008. Т. 11, № 4. С. 457–474.

[2] Панов Н.В. Объединение стохастических и интервальных подходов для решения задач глобальной оптимизации функций // Вычислительные технологии. 2009. Т. 14. № 5. С. 49-65

[3] Баженов. А.Н. Лекции по интервальному анализу. СПбПУ. 2021 `https://cloud.mail.ru/public/VSFh/gJgtFVynE`