به نام خدا

گزارش تمرین کامپیوتری دوم

آرشام لولوهری

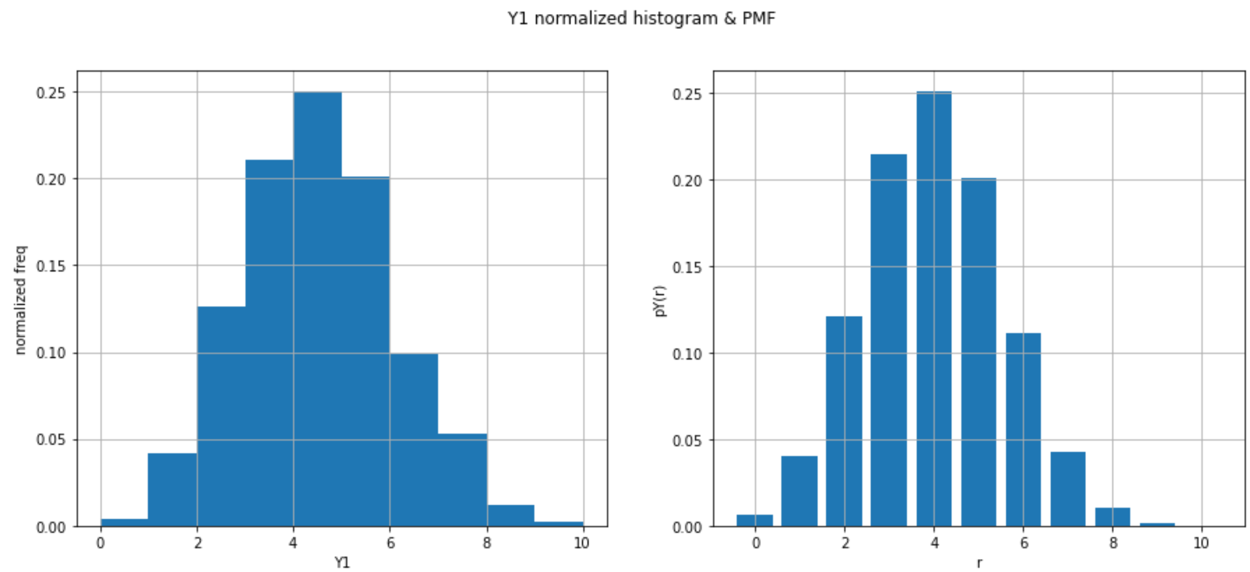
۹۹۱۰۲۱۵۶

۱)

۱- اکثر توضیحات کد در قالب کامنت نوشته شده است. متغیر های x1 تا x10 ، توسط تابع Bernoulli.rvs ، به صورت متغیر های تصادفی برنولی با p=0.4 مقداردهی شده اند. تعداد نمونه های این دستور هم مطابق گفته سوال برابر با total=1000 است. پس هر Xi ، یک بردار ۱۰۰۰ تایی است. در Y1 ، مجموع این بردار ها ریخته شده است و در نتیجه Y هم یک بردار ۱۰۰۰ تایی است. هر عضو این بردار، یک عدد از صفر تا ۱۰ است چون از جمع مقدار متناظر متغیر های برنولی x1 تا x10 بدست آمده است. بعد از تعیین عنوان نمودار ها، توسط hist، نمودار هیستوگرام را رسم کرده ایم. محدوده مقادیر نمودار را از صفر تا total_vars=10 گرفته ایم. عرض هر مستطیل را با rwidth به اندازه ی واحد کرده ایم و سپس با density=True، همه مقادیر بر کل تعداد داده ها تقسیم میشوند تا نمودار نرمالیزه شود. سپس به محور ها لیبل داده و خط کشی نیز کرده ایم.

میدانیم جمع ۱۰ تا متغیر برنولی، معادل یک متغیر دوجمله ای Binomial(10,p) است که p در اینجا همان ۰/۴ است. در ادامه، متغیر Y1_2 را یک متغیر دوجمله ای به صورت مذکور تعریف کرده ایم. با دستور pmf. میتوان pmf را به ازای رنج ورودی داده شده به آن بدست آورد و با bar نمودار گسسته رسم میشود. رنج ورودی با توجه به رنج توزیع دو جمله ای تعریف شده، از صفر تا ۱۰ است.

میبینیم که نتیجه دو نمودار، بسیار به هم شبیه است و با توجه به p=0.4، بیشترین مقدار تکرر داده ها و بیشترین احتمال در pmf، در ۰/۴ و اطراف آن است.

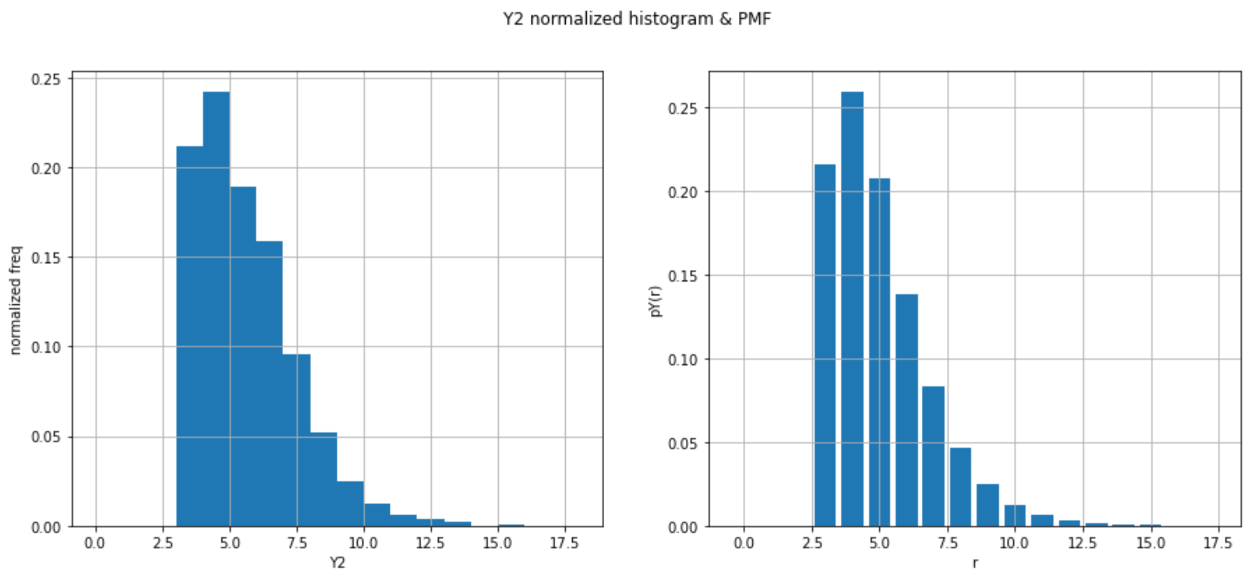


۲- ساختار کلی کد مشابه بخش قبل است. Z1,z2,z3 ، این بار به صورت geometric(0.6) انتخاب شده و از هرکدام ۱۰۰۰ نمونه برداشته میشود. جمع این سه بردار در Y2 ریخته میشود. برای رسم نمودار ها، یک max_num=18 تعیین شده تا کریان بالایی برای رسم نمودارها تعیین کند. مقدار ۱۸ به این دلیل است که احتمال موفقیت در هر آزمایش، ۰/۶ است و اگر بخواهیم در رسم نمودار ها به ۳ موفقیت برسیم، احتمال بسیار بالا این اتفاق در کمتر از حدود ۱۸ تا آزمایش رخ خواهد داد و مقدار نمودارها در جلوتر بسیار ناچیز است.

مشابه قبل دوتا subplot استفاده میکنیم. اول مربوط به هیستوگرام است. تعداد دسته ها، و ماکزیمم نمایش را تا ۱۸ قرار داده و rwidth را مثل قبل ۱ میکنیم تا عرض هر مستطیل برابر با ۱ شود. حال با density=True به نمودار نرمالیزه میرسیم.

میدانیم جمع ۳ متغیر geometric ، برابر با متغیر پاسکال pascal(3,p) است. در Y2_2 ، متغیر پاسکال را توسط nbinom ایجاد میکنیم. ورودی loc=3 بدین دلیل وارد شده که در این دستور، متغیر

تصادفی، تعداد شکست ها در نظر گرفته شده است، نه تعداد کل آزمایش ها. چون تعداد موفقیت ها، ۳ تا است، تعداد کل آزمایش ها، ۳ تا بیشتر از تعداد شکست هاست و میتوان این ۳ واحد شیفت را با دادن این ورودی، ایجاد کرد. مشابه قبل، pmf را توسط bar رسم میکنیم و مشاهده میشود که حاصل، با نمودار تجربی بدست آمده در نمودار سمت چپ، تا حد زیادی تطابق دارد.



۲)

۱- حاصل جمع متغیرهای برنولی با پارامتر landa/n ، متغیر Y را تشکیل میدهند که میدانیم از جمع این متغیر های برنولی، داریم:

$$Y = binomial(n, \frac{landa}{n})$$

مطابق اثبات زیر(از کتاب) میدانیم اگر در این متغیر، n به بینهایت میل کند، متغیر تصادفی برابر با متغیر تصادفی پواسون با میانگین landa میشود:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P_X(k) &= \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \lambda^k \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{1}{n^k}\right) \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\left[\frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{n^k}\right] \left[\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\right] \left[\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}\right] \right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{n^k} = 1, \\
&\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = 1, \\
&\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n} = e^{-\lambda}.
\end{aligned}
$$

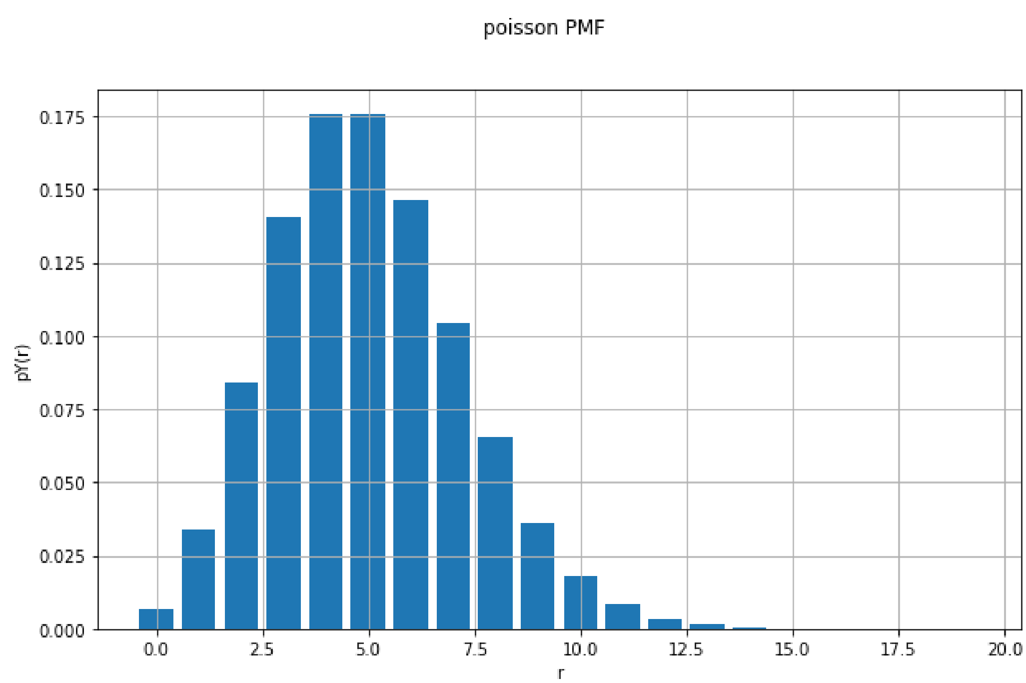
$$
\lim_{n\to\infty} P_X(k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}.
$$

در ابتدای کد، تابع poissonLim با گرفتن مقدار n و landa و تعداد کل نمونه ها یا همان ۱۰۰۰۰ ، متغیر Y را ایجاد کرده و برمیگرداند. هر سطرماتریس X ، یکی از متغیر های برنولی و هر ستون آن، یکی از ۱۰۰۰۰ نمونه ی گرفته شده است. این ماتریس در یک حلقه ایجاد شده است. به ازای هر i ، یکی از متغیر های برنولی تعریف شده و ۱۰۰۰۰ نمونه در خود ذخیره میکند. سپس این متغیر برداری به صورت کامل به Y اضافه میشود تا گام به گام، بردار ۱۰۰۰۰ عضوی Y ساخته شود.

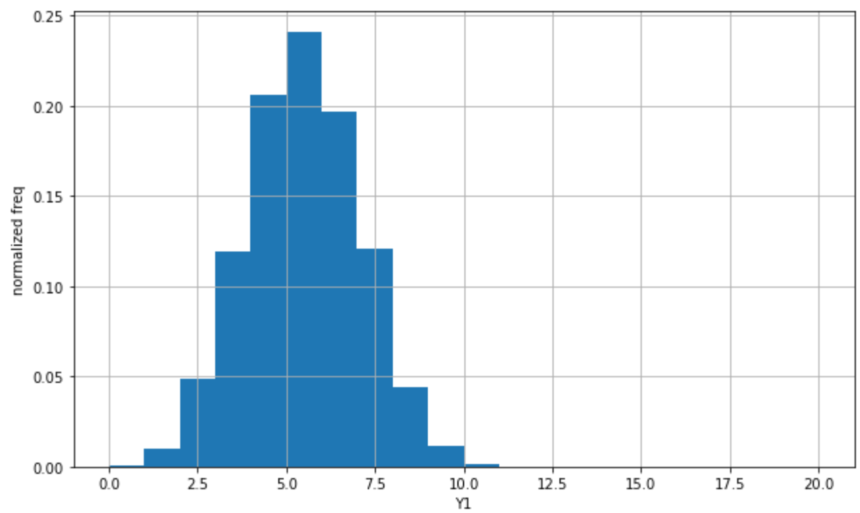
خارج این تابع، مقادیر مختلف n در n1 تا n5 ریخته شده اند. در این cell نمودار PMF پواسون واقعی ترسیم شده است و رنج ورودی از

صفر تا ۲۰ قرار داده شده است چون در مقادیر بالاتر، PMF بسیار کم است.

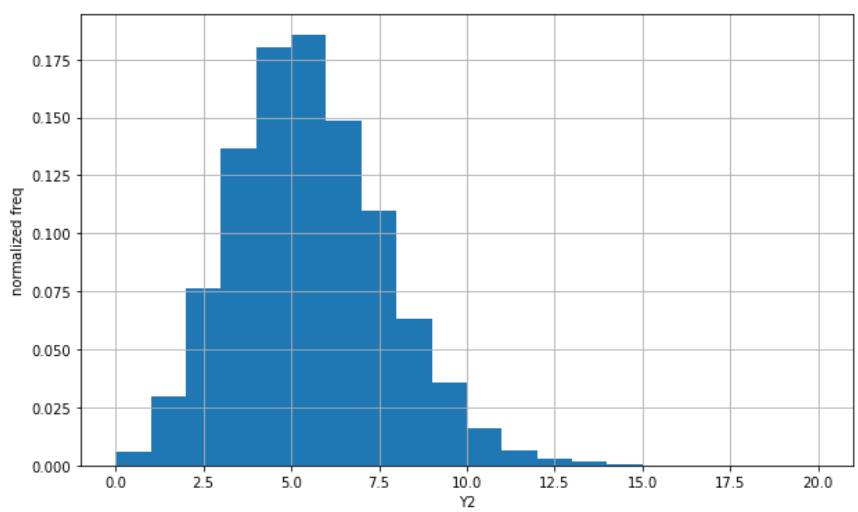
در پنج cell بعدی، به ترتیب به ازای مقادیر n1 تا n5 ، تابع مذکور فراخوانده میشود و Y1 تا Y5 ساخته میشود. برای رسم نمودارها با hist هم محدوده نمایش از صفر تا max1,2,3,4,5=20 قرار داده میشود، تعداد bin ها نیز برابر با ۲۰ و نسبت عرضی rwidth برابر با ۱ است تا عرض هر مستطیل برابر با واحد شود. Density=True نیز هیستوگرام ها را نرمالیزه میکند. نمودار های cell ها به ترتیب از cell1 که توزیع پواسون را نشان میدهد، تا cell6 که توزیع تجربی بدست آمده به ازای n5 است، در زیر آمده اند و میبینیم هرچه n بزرگتر شده و به بینهایت نزدیکتر میشود، شباهت فرم هیستوگرام حاصل به توزیع پواسون(نمودار اول) بیشتر میشود.



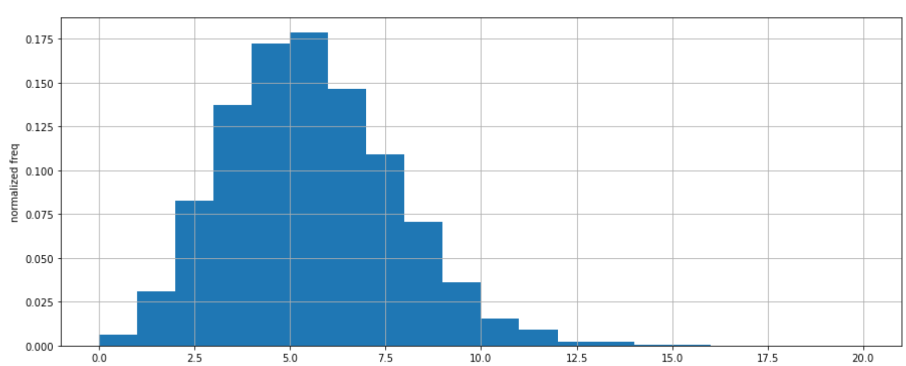
Y1 normalized histograms & PMF

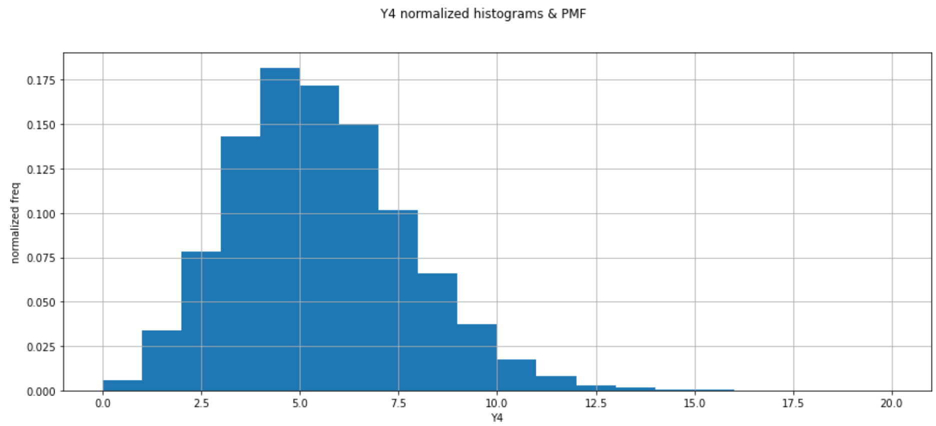


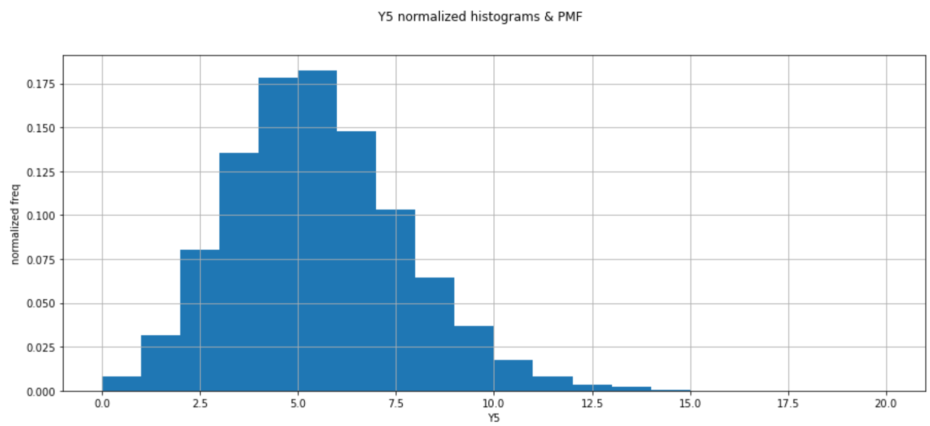
Y2 normalized histograms & PMF



Y3 normalized histograms & PMF







۲- ابتدا امید ریاضی متغیر برنولی:

$$EX = 1 * p + 0 * (1 - p) = p$$

پس در این سوال برای هر برنولی، امید ریاضی برابر با landa/n است. طبق ویژگی خطی بودن امید ریاضی، برای Y داریم:

$$EY = n * EXi = n * \frac{\lambda}{n} = \lambda$$

پس امید ریاضی، صرف نظر از n ثابت و برابر λ است.

برای واریانس متغیر برنولی نیز داریم:

$$Var(Xi) = E[Xi^2] - E[Xi]^2$$

$$Var(Xi) = 1 * p - p^2 = \frac{\lambda}{n} * \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)$$

چون واریانس جمع متغیرهای تصادفی، با جمع واریانس آنها برابر است، داریم:

$$Var(Y) = n * Var(Xi) = \lambda * (1 - \frac{\lambda}{n})$$

پس اگر n افزایش یابد و به بینهایت نزدیک شود، واریانس به تدریج افزایش یافته و به λ همگرا میشود.

این نتایج با واقعیت نیز سازگار است چون توزیع پواسون، خمانطور که از پارامتر ورودی اش مشخص است، میانگین یا امید ریاضی برابر با λ دارد. ضمنا طبق روند زیر و مشابه کتاب میتوان نشان داد که واریانس متغیر پواسون نیز برابر با λ میشود:

$$\begin{aligned}
E[X(X-1)] &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)P_X(k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} \\
&= e^{-\lambda}\lambda^2\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} \\
&= e^{-\lambda}\lambda^2 e^{\lambda} = \lambda^2.
\end{aligned}$$

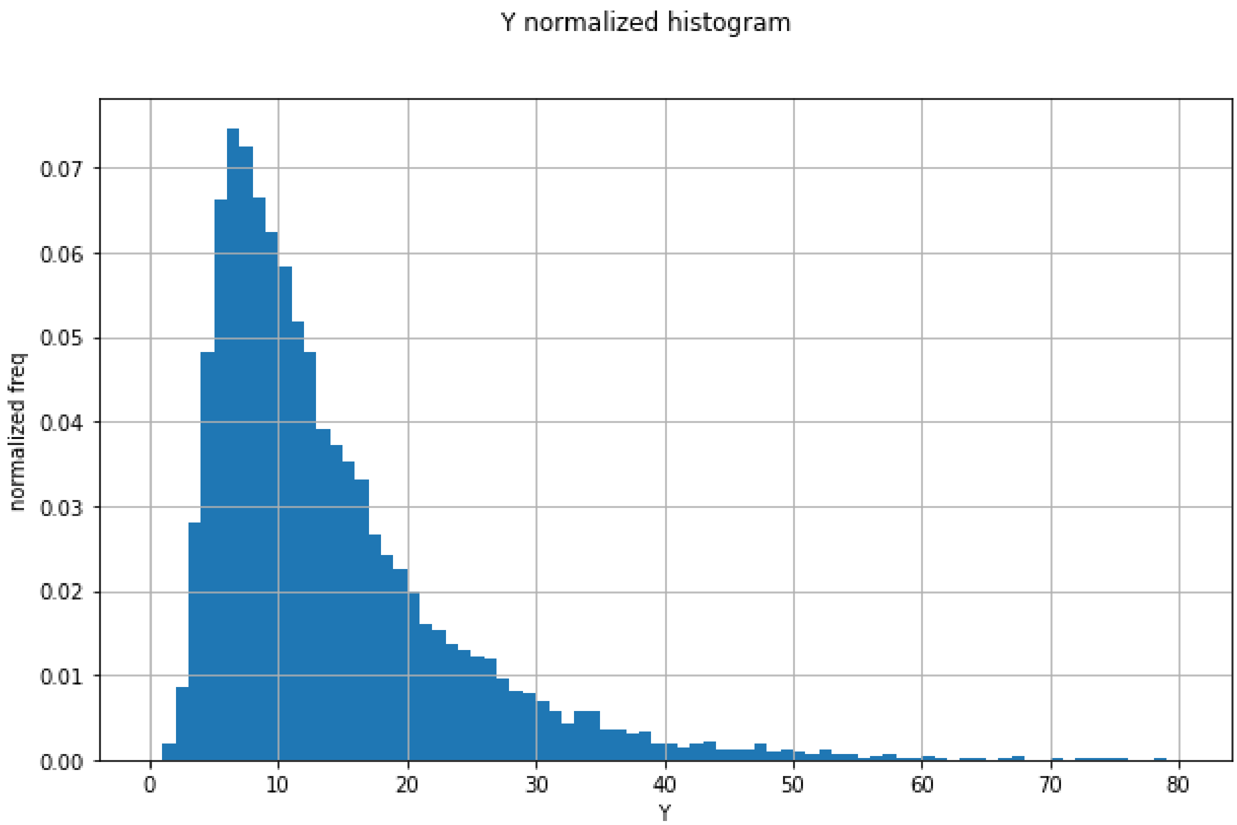
$$\lambda^2 = E[X(X-1)] = EX^2 - EX = EX^2 - \lambda.$$

$$EX^2 = \lambda^2 + \lambda$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= EX^2 - (EX)^2 \\ &= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 \\ &= \lambda.\end{aligned}$$

۳)

۱- توضیح هر بخش کد در کامنت ها آورده شده است. مشابه سوالات قبل، هیستوگرام را به صورت نرمالیزه شده ترسیم میکنیم:



چون Y=X1+X2+X3 ، میانگین(امید ریاضی) و واریانس Y برابر با مجموع همین کمیت ها در X1,X2,X3 است. پس این کمیت ها را برای این سه متغیر حساب میکنیم:

$$EX1 = n * p = 5 * 0.4 = 2$$

$$EX2 = \lambda = 1.6$$

$$EX3 = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.1} = 10$$

$$EY = EX1 + EX2 + EX3 = 13.6$$

واریانس متغیر چندجمله ای، مشابه سوال قبل است. در سوال قبل دیدیم که واریانس برنولی به صورت p(1-p) است. متغیر چندجمله ای نیز جمع متغیرهای برنولی است. واریانس پواسون هم در سوال قبل محاسبه شد. پس:

$$Var(X1) = n * p * (1 - p) = 5 * 0.4 * 0.6 = 1.2$$

$$Var(X2) = \lambda = 1.6$$

برای متغیر geometric نیز محاسبه میکنیم:

$$Var(X3) = E[X3^2] - E[X3]^2$$

در ادامه واریانس X3 را حساب میکنیم:

$$Var(X_3) = E[X_3^2] - (E[X_3])^2 = E[X_3^2] - 100$$

$$E[X_3^2] = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p q^{k-1} = pq \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \xrightarrow{\frac{d}{dq}} \sum_{k=0}^{\infty} k q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1}$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dq}} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3} = \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} k^2 q^{k-2}}_{A} - \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} k q^{k-2}}_{B}$$

$$B = q^{-1} \sum_{k=2}^{\infty} k q^{k-1} = q^{-1}\left(\frac{1}{(1-q)^2} - 1\right) = \frac{1}{qp^2} - \frac{1}{q}$$

$$\Rightarrow A = \frac{2}{(1-q)^3} + B = \frac{2}{p^3} + q^{-1}\left(\frac{1-p^2}{p^2}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-2} = q^{-1} + A$$

$$\Rightarrow E[X_3^2] = pq\left(q^{-1} + \frac{2}{p^3} + q^{-1}\left(\frac{1-p^2}{p^2}\right)\right) = p + 2qp^{-2} + \frac{1-p^2}{p}$$

$$p = 0.1,\ q = 1-p = 0.9 \Rightarrow E[X_3^2] = 190 \Rightarrow Var(X_3) = 190 - 100$$

$$\Rightarrow Var(X_3) = 90$$

پس واریانس Y برابر است با:

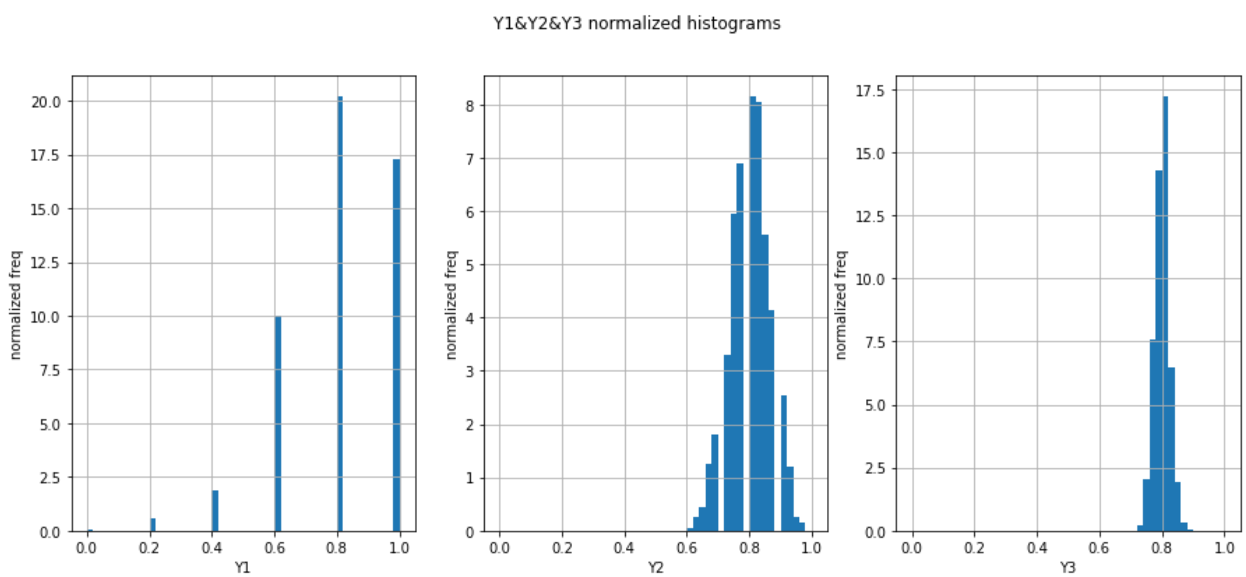
$$Var(Y) = Var(X1) + Var(X2) + Var(X3) = 92.8$$

در انتهای کد نیز میانگین داده ها از جمع مقادیر Y ، تقسیم بر کل داده ها حساب شده است و واریانس نیز از محاسبه ی میانگین مربع اختلاف هر عضو Y از mean ، بدست آمده است که میبینیم بسیار نزدیک به مقادیر محاسبه شده در بالا هستند. این نزدیکی تایید میکند که میانگین(امید ریاضی) و واریانس یک متغیر که مجموع چند متغیر تصادفی دیگر است، از مجموع میانگین/واریانس آن متغیرهای تصادفی بدست می آید:

```
Mean:13.4689
Var:92.91443279
```

۲- تابع create با گرفتن N و تعداد کل نمونه ها و p=0.8 ، متغیر تصادفی Y را برمیگرداند. هر سطر ماتریس X ، یکی از Xi هاست و هر ستون آن، یکی از ۱۰۰۰ نمونه را نشان میدهد. هر بار در حلقه، یک Xi جدید توسط برنولی با سایز ۱۰۰۰ تولید میشود و با بردار ۱۰۰۰ تایی Y جمع میشود. در نهایت خروجی که متغیرتصادفی مورد نظر ماست، Y/n خواهد بود.

حال Y1,Y2,Y3 را توسط این تابع و به ازای n های گفته شده در سوال، میسازیم. نحوه تشکیل هیستوگرام تقریبا مشابه بخش قبل و سوالات قبل است.برای دقیقتر شدن نمودار، تعداد دسته های عددی از صفر تا ۱ را ۵۰ تا میگیریم و در نتیجه طول هر bin برابر ۰/۰۲ میشود. در این شرایط با استفاده از density=true ، نمودار نرمالیزه شده و مساحت آن ۱ میشود (با rwidth=1 ، عرض هر مستطیل نیز برابر ۰/۰۲ میشود و مقیاسنمودار برای یک شدن مساحت، با توجه به این موضوع انجام میشود). نمودار های حاصله به صورت زیر هستند:



میانگین و واریانس را برای Yi ها مشابه بخش قبل حساب میکنیم و میبینیم با افزایش n ، میانگین در حدود ۰/۸ است و واریانس به صفر نزدیک میشود:

```
Mean:[0.8064000000000001, 0.8016749999999999, 0.7988866666666667]
Var:[0.03267903999999999, 0.0038328193750000006, 0.0005701604888888889]
```

توضیح این موضوع این است که میانگین توزیع برنولی p است و در نتیجه طبق خطی بودن میانگین داریم:

$$EY = \frac{1}{n} * n * p = p = 0.8$$

پس صرف نظر از مقدار n باید در حدود ۰/۸ باشد. برای واریانس نیز داریم:

$$Var(Y) = \frac{1}{n^2} * n * Var(Xi)$$

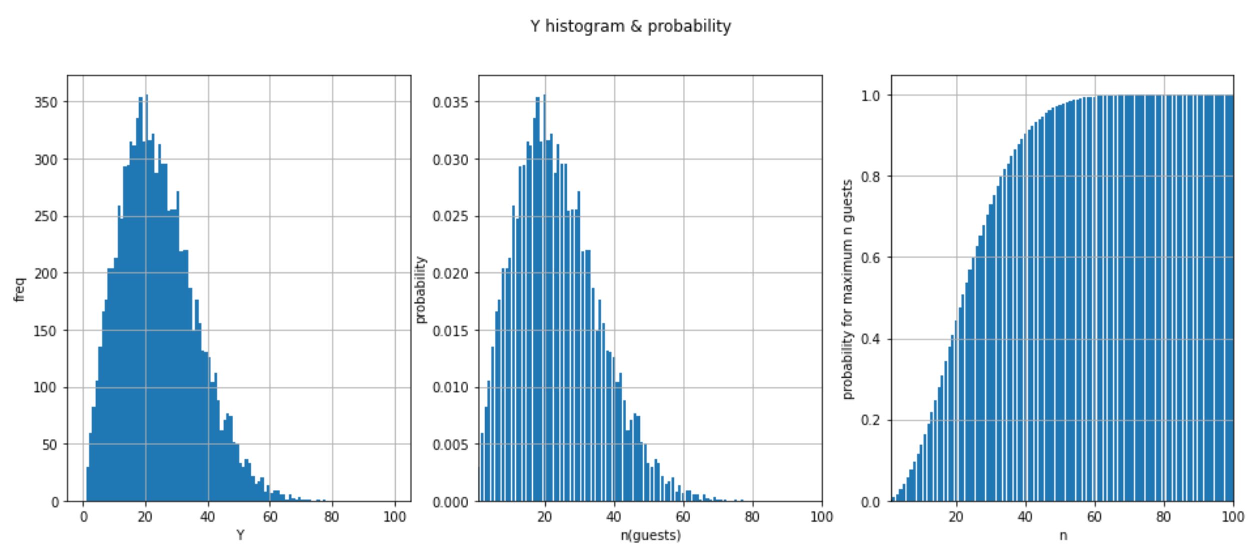
که در سوال های قبل دیدیم واریانس برنولی برابر p(1-p) است:

$$Var(Y) = \frac{1}{n} * p(1 - P) = 0.8 * \frac{0.2}{n} = \frac{0.16}{n}$$

طبیعتا با افزایش n ، مقدار واریانس پیوسته کوچک و به صفر همگرا میشود.

۴)

۱- اکثر توضیحات کد در کامنت ها آمده است. یک تابع تعریف شده که با هربار فراخوانی، روز های رندوم از ۱ تا ۳۶۵ را در هر مرحله در i میریزد و این i را به بردار days اضافه میکند. اگر یک i جدید قبلا هم در بردار days بود، از حلقه خارج میشویم و تعداد مراحل طی شده یا stages را برمیگردانیم. این آزمایش را توسط یک for به اندازه ۱۰۰۰۰ باز تکرار کرده و نتایج را در Y میریزیم و مشابه بخش های قبل هیستوگرام نرمالیزه شده ی Y را رسم میکنیم. طول هر دسته ۱ است و به دلیل اینکه تعداد مراحل stages ، به ندرت از ۱۰۰ بیشتر میشود، نمایش را تا maxVal=100 انجام میدهیم. با density=True و با توجه به اینکه عرض هر مستطیل یک واحد است، تکرر هر Y بر کل وزن یا همان ۱۰۰۰۰ تقسیم میشود و در نتیجه آنچه روی محور عمودی میبینیم، احتمال انتخاب شدن هر تعداد مهمان از ۱ تا ۱۰۰ است. از روند نمودار هم مشخص است که در تعداد مهمان بالاتر از ۱۰۰، احتمال بسیار کم میشود و تقریبا در نمودار دیده نخواهد شد. این نمودار، نمودار سمت چپ در زیر است:



میبینیم که حدودا وقتی به ۱۷ تا ۲۰ مهمان میرسیم، بیشترین دفعات اتمام آزمایش، و بیشترین احتمال پیدا شدن دو روز یکسان وجود دارد. پس اگر میخواهیم **با کمترین تعداد میهمان، بیشترین احتمال برنده شدن** و یافتن دو روز مشترک را داشته باشیم، **دعوت حدود ۱۹ میهمان بهینه خواهد بود.**

در پایینِ حلقه ای که Y را مقداردهی کرده است، حلقه دیگری هست که بردار احتمال را برای هرتعداد مهمان تشکیل میدهد. بدین شکل که عضو i ام آن، احتمال اینکه n=i+1 باشد است(i از صفر تا ۳۶۴ متغیر است)

این بردار از تقسیم تعداد عضو i+1 در بردار Y ، بر کل داده ها یا ۱۰۰۰۰ بدست می آید. در انتهای کد این بردار احتمال به ازای n های مختلف پرینت شده و نمودار آن نیز به صورت گسسته و bar ترسیم شده است(نمودار وسط در بالا). این بردار، در اصل احتمال این را نشان میدهد که دقیقا n امین مهمان، همان کسی باشد که روز تولدش با نفرات قبلتر یکسان باشد. برای یافتن بیشترین احتمال پیروزی به همراه کمترین تعداد میهمانان، از این نمودار استفاده میشود.

حال اگر n مهمان داشته باشیم، احتمال پیروزی، معادل است با احتمال اینکه با **حداکثر** n مهمان بتوان به روزی تکراری در تولد ها رسید. پس با وجود n مهمان، احتمال پیروزی برابر مجموع اعضای prob از prob[0] تا prob[n-1] است که اگر این مجموع از ۰/۵ بیشتر شود، احتمال بالای ½ حاصل میشود. این نمودار نیز در عکس های بالا،همان نمودار سمت راستی است که نمودار max_prob است. Max_prob[i] از جمع کردن prob[0] تا prob[i] بدست آمده است و در اصل احتمال پیروزی را با دعوت کردن n مهمان نشان میدهد. حال با یک حلقه for مشخص میکنیم که مقدار n برای اینکه از احتمال ۰/۵ عبور کنیم چقدر

است.هربار که max_prob[i] از ۰/۵ کمتر باشد، یک واحد به nForHalfProb افزوده میشود و در نهایت این متغیر، تعداد میهمانان برای داشتن احتمال بالای ۰/۵ را نشان میدهد. در مثال زیر این عدد، ۲۲ مهمان است:

```
prob=  [0.0029, 0.0059, 0.0082, 0.0105, 0.0135, 0.0166, 0.0176, 0.0204,
0.0204, 0.0213, 0.0259, 0.0247, 0.0293, 0.0294, 0.0315, 0.0311, 0.0335,
0.0354, 0.0315, 0.0356, 0.0316, 0.0322, 0.0287, 0.0313, 0.0296, 0.0295,
0.0254, 0.0255, 0.0255, 0.0271, 0.0219, 0.022, 0.022, 0.0187, 0.0149, 0.0176,
0.0156, 0.0132, 0.013, 0.0126, 0.0104, 0.0112, 0.0088, 0.0062, 0.0071,
0.0077, 0.0074, 0.0051, 0.005, 0.0033, 0.003, 0.0036, 0.0033, 0.0022, 0.0015,
0.0017, 0.002, 0.0008, 0.0013, 0.0007, 0.0009, 0.0009, 0.0005, 0.0005,
0.0001, 0.0006, 0.0002, 0.0001, 0.0003, 0.0001, 0.0001, 0.0001, 0.0, 0.0,
0.0001, 0.0, 0.0001, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0,
0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0,
0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0,
0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0,
0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0,
0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0,
0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0,
0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0,
0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0,
0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0,
0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0,
0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0,
0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0,
0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0,
0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0,
0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0,
0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0,
0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0,
0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0,
0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0]
minimum n for half prob=  22
```