بنام خدا

گزارش پروژه

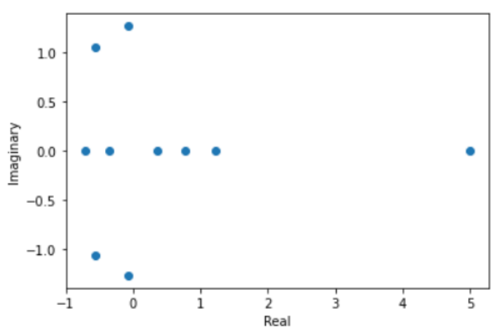
آرشام لولوهری

۹۹۱۰۲۱۵۶

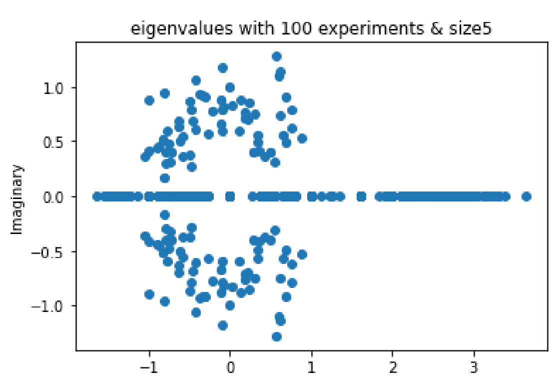
سوال ۱:

۱. توضیحات کد در کامنت آورده شده است. ابتدا تابع berMat را تعریف میکنیم که با گرفتن size,p، یک ماتریس تصادفی برنولی با پارامتر p و ابعاد size*size میسازد. سپس تابع eigenVal با گرفتن ماتریس M مقادیر ویژه آن را با استفاده از دستور eig محاسبه میکند. حال ماتریس تصادفی A را با سایز ۱۰*۱۰ و احتمال p=0.5 میسازیم و مقادیر ویژه را در eigval میریزیم. بخش حقیقی و موهومی را جدا کرده، در r,i میریزیم و سپس با scatter، این مقادیر ویژه را رسم میکنیم. ماتریس A و مقادیر ویژه را نیز پرینت میکنیم:

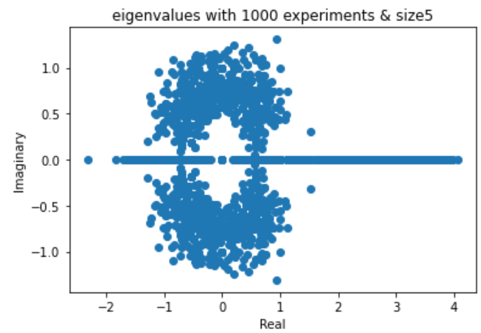
```
A= [[1 1 1 1 1 0 0 0 0 0]
 [0 1 1 0 1 0 0 1 0 0]
 [0 0 0 0 1 1 1 0 1 0]
 [1 1 0 1 1 0 1 1 0 1]
 [1 0 0 1 0 0 1 0 1 1]
 [0 0 1 0 1 1 1 1 1 0]
 [1 1 0 0 0 0 0 1 0 1]
 [0 0 1 1 0 0 0 0 1 0]
 [1 0 1 1 0 0 1 0 1 1]
 [0 0 1 1 0 1 1 1 1 0]]
Eigenvalues:
 [ 4.9991723 +0.j         -0.07509526+1.27020805j -0.07509526-1.27020805j
 -0.56207508+1.06105706j -0.56207508-1.06105706j  1.21889837+0.j
 -0.71764066+0.j          0.76630569+0.j         -0.35376386+0.j
  0.36136882+0.j        ]
```

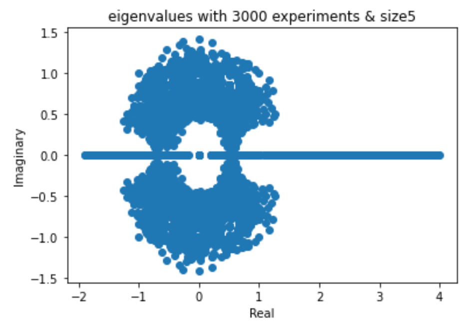


۲. در cell بعدی اینکار انجام شده است. توضیحات در کامنت ها آمده و ما با استفاده از یک for، کاری که در قسمت قبل انجام داده بودیم را به تعداد total تکرار میکنیم و تمام مقادیر حقیقی و موهومی را در بردارهای R و I میریزیم. سپس با scatter، آنها را به شکل زیر رسم میکنیم:

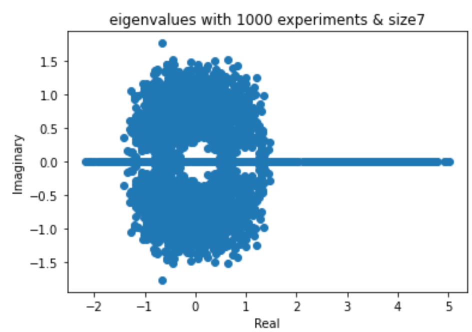


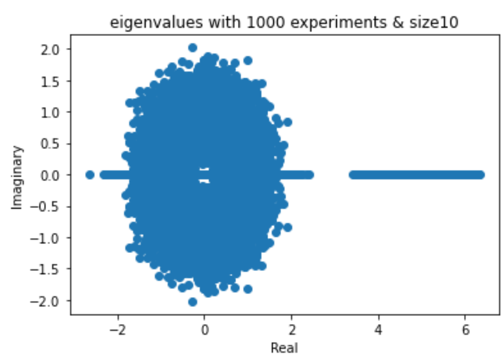
حال به تدریج تعداد آزمایش ها (total) را زیاد کرده و نتیجه را میبینیم:

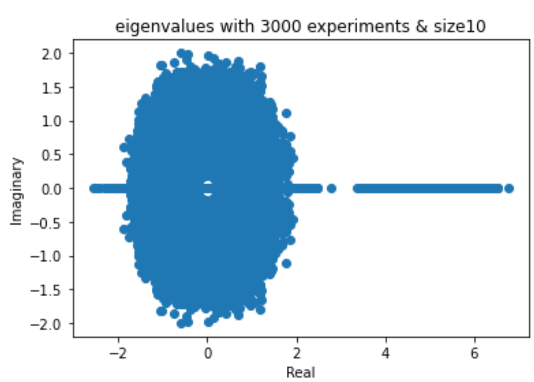


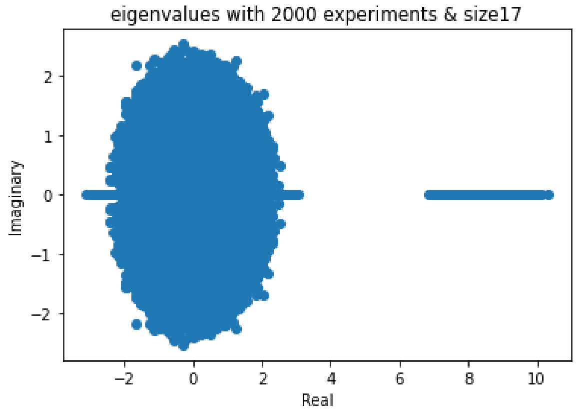


حال سایز ماتریس ها را نیز تغییر میدهیم:





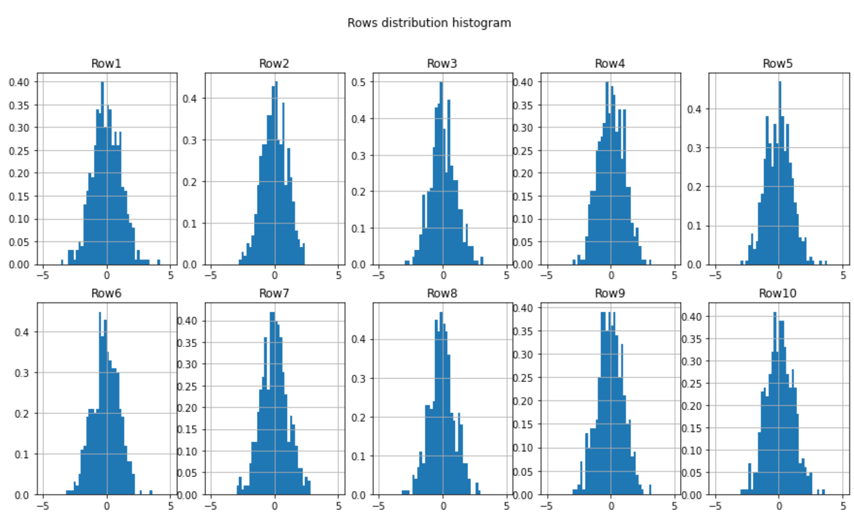




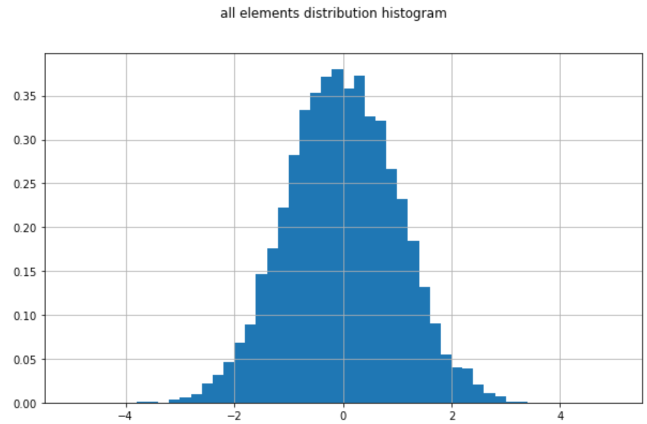
مشاهده میشود با افزایش تعداد آزمایش ها و سایز ماتریس هر آزمایش، شکل هندسی به یک دایره به مرکز مبدا مختصات، و شعاع حدودی ۲ میل میکند.

سوال ۳:

۱. در اولین cell از سوال ۳، کد بخش اول آمده است. در X ، اعداد تصادفی نرمال استاندارد را، سطر به سطر تولید میکنیم. در X_all نیز تمام درایه ها را به صورت یک بردار سطری نگه میداریم (برای رسم توزیع تمام درایه ها). برای رسم نمودار های هر سطر، تعداد دسته های هیستوگرام را در binsNum میریزیم. ماکزیمم مقداری که در نمودار نشان میدهیم نیز maxVal=5 است. باید به تعداد m نمودار رسم کینم و اینکار با یک حلقه انجام میشود. هیستوگرام ها نرمالیزه شده اند و مطابق انتظار، تمام سطر ها توزیعی مشابه نرمال استاندارد دارند:

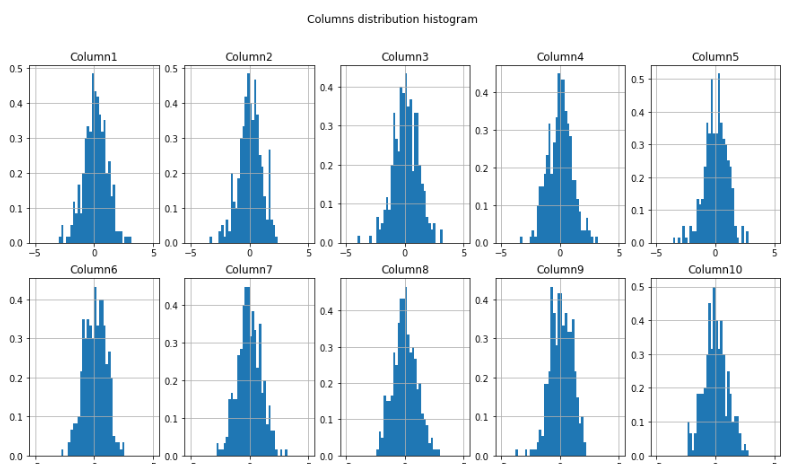


در انتها نیز با استفاده از X_all، توزیع تمام درایه ها را رسم میکنیم:



میبینیم که توزیع تمام درایه ها نیز تقریبا فرم نرمال استاندارد دارد. میانگین همچنان روی صفر است و میزان پراکندگی داده ها نیز تقریبا مشابه سطر هاست.

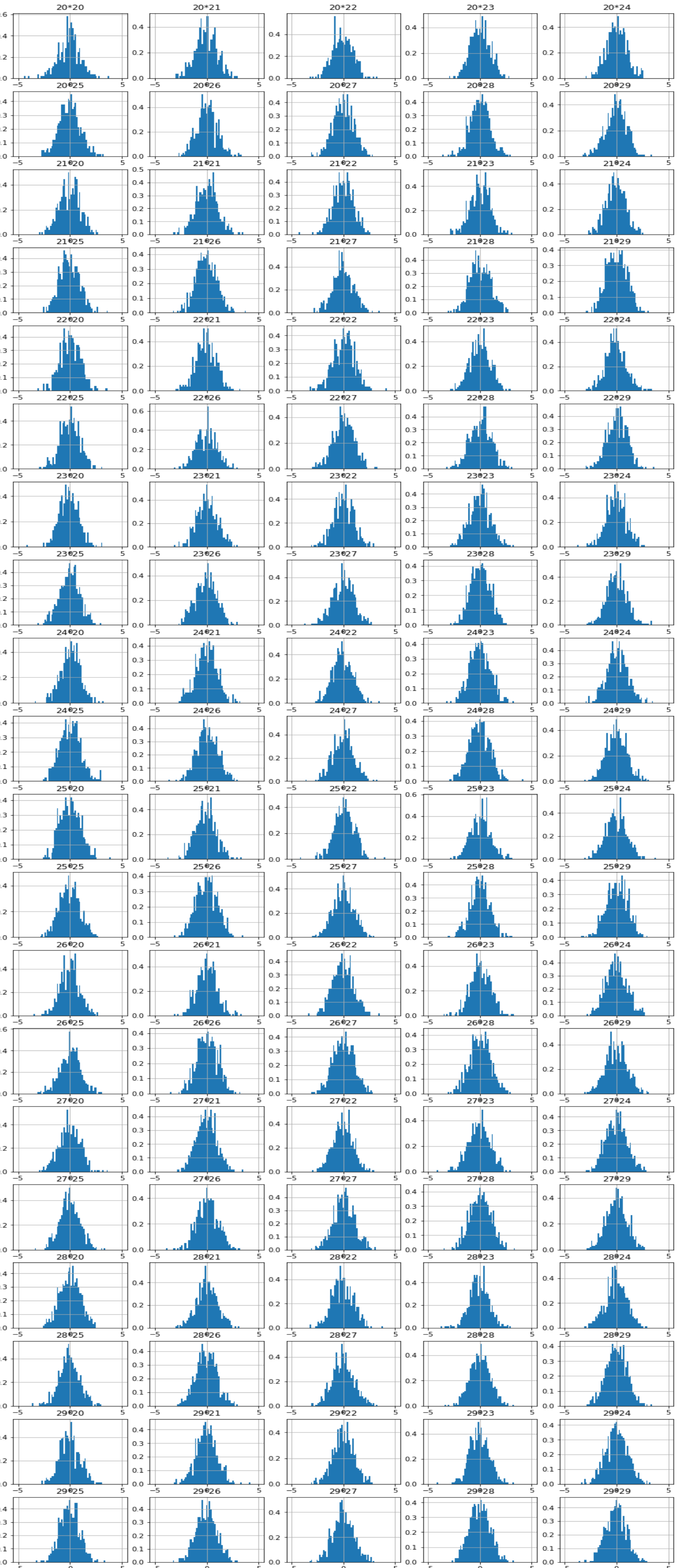
۲. در دومین cell، دوباره مشابه قبل، برای هر سطر یک توزیع نرمال در نظر گرفته ایم و اینبار با یک حلقه، به ازای هر ستون، یک نمودار رسم کرده ایم. تعداد ستون ها را ۱۰ و تعداد سطر ها را بیشتر گرفته ایم. نمودار ستونها به صورت زیر است:



میبینیم که ستونها نیز تقریبا همان توزیع نرمال استاندارد را دارند و مشابه سطر ها شده اند (میانگین روی صفر است و پراکندگی داده ها نیز تقریبا مشابه توزیع سطر هاست).

۳. اینبار توزیع تمام داده ها را با استفاده از X_all به ازای ابعاد مختلف رسم میکنیم. کد در کامنت ها توضیح داده شده است. در اینجا ما نقطه شروع و پایان تعداد سطر و ستون را با start,end مشخص میکنیم. سپس با سه تا for تودرتو، به ازای هر تعداد سطر و ستون، ماتریس جدید X_all را میسازیم و

سپس نمودار هیستوگرام آن را رسم میکنیم. نتیجه نهایی، زمانی که سطر و ستون ها از ۲۰ تا ۲۹ تغییر کنند به صورت زیر است (ابعاد ماتریس در عنوان نمودار آمده است):


20*20
20*21
20*22
20*23
20*24
20*25
20*26
20*27
20*28
20*29
21*20
21*21
21*22
21*23
21*24
21*25
21*26
21*27
21*28
21*29
22*20
22*21
22*22
22*23
22*24
22*25
22*26
22*27
22*28
22*29
23*20
23*21
23*22
23*23
23*24
23*25
23*26
23*27
23*28
23*29
24*20
24*21
24*22
24*23
24*24
24*25
24*26
24*27
24*28
24*29
25*20
25*21
25*22
25*23
25*24
25*25
25*26
25*27
25*28
25*29
26*20
26*21
26*22
26*23
26*24
26*25
26*26
26*27
26*28
26*29
27*20
27*21
27*22
27*23
27*24
27*25
27*26
27*27
27*28
27*29
28*20
28*21
28*22
28*23
28*24
28*25
28*26
28*27
28*28
28*29
29*20
29*21
29*22
29*23
29*24
29*25
29*26
29*27
29*28
29*29

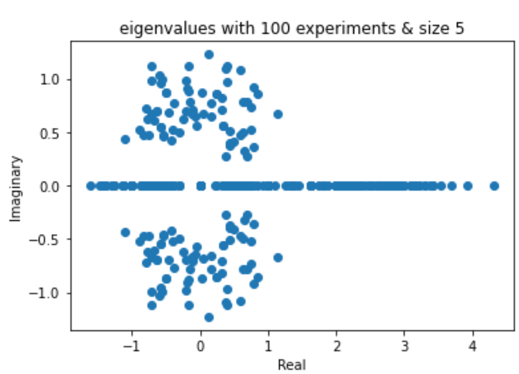
میبینیم در ابتدا، شباهت نمودار ها به توزیع نرمال کمتر است اما هرچه تعداد سطر و ستون را بیشتر میکنیم، شکل نمودار به نرمال استاندارد نزدیکتر شده و تقریب بهتری خواهیم داشت.

سوال ۴:

۱. کد این بخش در cell اول از کد سوال ۴ آمده است. توابع berMat, eigenVal همچنان باید همان کار های سوال ۱ را انجام دهند و در انتها نیز نحوه استفاده از آنها مشابه دومین cell از سوال ۱ است اما باید محاسبه eigenVal را دستی انجام دهیم. توضیحات کد در کامنت آمده است. برای تابع eigenVal ابتدا ماتریس همانی ای هم سایز با ماتریس ورودی M تعریف کرده و در I_M میریزیم. چون در این بخش میخواهیم با sympy کار کنیم، هردو ماتریس را به این فرم تبدیل میکنیم. سپس یک متغیر بنام landa (مقدار ویژه) تعریف میکنیم که هدف، پیدا کردن آن است. حال میدانیم بردار ویژه یک ماتریس، برداری است که اگر در ماتریس ضرب شود، بردار حاصل، ضریبی از بردار اولیه است و این ضریب مقدار ویژه نام دارد. بنابراین برای بدست آوردن مقدار ویژه باید داشته باشیم:

$$Av = \lambda v \rightarrow (A - \lambda I)v = 0 \xrightarrow{yields} \det(A - \lambda I) = 0$$

از این رابطه میتوان مقدار ویژه را بدست آورد. بنابراین M_landa را به صورت $M - \lambda I$ تعریف میکنیم. در نهایت با استفاده از solveset، معادله دترمینان را حل میکنیم و تا ۵ رقم اعشار را در ans میریزیم و به عنوان خروجی تابع برمیگردانیم. بقیه ی کد این بخش، مشابه سوال ۱ بوده و نمودار را به همان ترتیب رسم میکند:



واضح است که با افزایش تعداد و سایز ماتریس ها، به همان دایره سوال ۱ میرسیم.

توجه شود برای محاسبه دترمینان، از یک تابع بازگشتی به نام determinant استفاده شده که ماتریس با سایز دلخواه را میگیرد و با روش بسط برحسب سطر اول، دترمینان آن را حساب میکند:

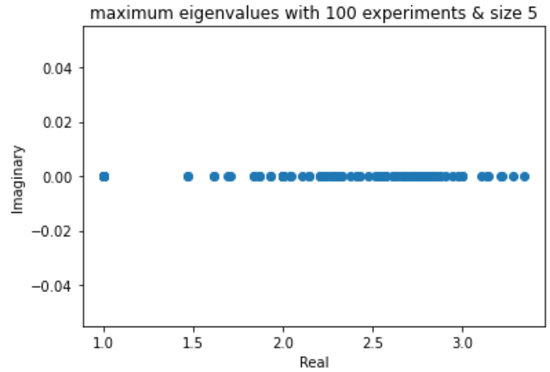
$$det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} = a_{11}det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}$$

$$-a_{12}det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} + a_{13}det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}$$

$$-a_{14}det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{55} \end{bmatrix} + a_{15}det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \end{bmatrix}$$

به همین روش میتوان دترمینان هریک از ماتریس های ۴*۴ را نیز حساب کرد. توضیحات کد این تابع در کامنت ها آمده است. در واقع با استفاده از بسط برحسب سطر اول، ماتریس ما به ماتریس های کوچکتر تجزیه میشود و این تجزیه تا زمانی ادامه می یابد که به ماتریس ۲*۲ برسیم. این ماتریس نیز دترمینان مشخصی دارد که از تفاضل حاصل ضرب قطرهای اصلی و فرعی بدست می آید.

۲. در دومین cell از کدهای این سوال، توابع را مشابه بخش قبل تعریف میکنیم اما در حلقه for، پس از ریختن مقادیر ویژه هر ماتریس در val، اندازه آنها را در absol میریزیم. ماکزیمم این بردار را پیدا میکنیم و اندیس متناظر با آن را در ind میریزیم. حال کافیست در بردار val ، تنها اندازه ی val[ind] را نگه داریم. این اندازه را بعنوان ماکزیمم اندازه در ماتریس i ام، در v ذخیره میکنیم. پس از حلقه نیز اندازه های ثبت شده در v را رسم میکنیم:



مشاهده میشود که تراکم نقاط در حوالی اندازه 2.5، به بیشترین مقدار میرسد و هرچه به سمت اطراف این نقطه حرکت کنیم، تراکم کمتر میشود. بنابراین میتوان حدسی در مورد توزیع این نقاط زد که احتمالا توزیعی مشابه توزیع نرمال با میانگین حدودا 2.5 دارند.