کنترل ماهواره با پنل‌های خورشیدی منعطف

اطلاعات مقاله

پروژه و مقاله **سیستم‌های کنترل خطی**
استاد راهنما: جناب آقای دکتر طالبی
دی ۱۳۹۹

گردآورندگان:

محمدعرشیا ثمودی
دانشجو کارشناسی برق دانشگاه امیرکبیر - arshia-s۷۹@aut.ac.ir
مصطفی حمیدی‌فرد
دانشجو کارشناسی برق دانشگاه امیرکبیر - mhamidifard۱@aut.ac.ir
سارا حیدری
دانشجو کارشناسی برق دانشگاه امیرکبیر - Sara-heidari@aut.ac.ir
ستاره علاقه‌بند
دانشجو کارشناسی برق دانشگاه امیرکبیر - S.alaghehband@aut.ac.ir

چکیده

در طی یک مانور توسط ماهواره، صفحات خورشیدی انعطاف پذیر آن تحریک شده و شروع به نوسان می‌کنند.این ارتعاشات باعث بوجود آمدن نیروی اغتشتاشی نوسانی می‌گردند که به بدنه صلب ماهواره وارد می‌شوند. ارتعاشات ایجادشده علاوه بر امکان بوجود آمدن ترک و در نتیجه شکست در صفحات خورشیدی بر اثر پدیده خستگی، بر روی بدنه صلب که در حال انجام کارهای دقیقی نظیر عکس برداری از سطح زمین و یا ارسال اطلاعات به پایگاه‌هایی در سطح زمین است،اخلال ایجاد می‌کند.پس لازم است تا از آن جلوگیری شود.در این مقاله ابتدا معادلات دینامیکی صفحات خورشیدی ماهواره استخراج و سپس با ابزارهای شبیه‌سازی مانند نرم‌افزار متلب MATLAB تلاش می‌شود تا یک کنترلر برای تعیین و اصلاح حرکت ماهواره طراحی کرد.

فهرست مطالب

۱ مقدمه

ماهواره‌های مخابراتی به دقت بسیار بالا در آنتن‌های خود به جهت ارتباط و پوشش منطقه بیشتری از سطح زمین، نیازمند هستند.ازاین جهت،این نیاز توسط کنترل رفتار حرکتی ماهواره که در سفینه‌های فضایی برای کنترل گرایشات سفینه استفاده می‌شود، تامین می‌شود. مقاله‌ای تحت عنوان "طراحی ماهواره‌های مخابراتی" توسط آگراوال [۱] در ۱۹۸۶، در مورد ای مسئله منتشر شده است و راه‌حل محاسباتی آن نیز در ۱۹۸۳، توسط مورو [۲] توسعه یافت.
پنل‌های خورشیدی به صورت گسترده، کاربرد فضایی دارند و در ماهواره‌ها و همچنین ساختارهای بزرگ‌تر مانند ایستگاه فضایی بین‌المللی استفاده می‌شوند.کنترل ارتعاش این پنل‌ها همواره یک مسئله ضروری بوده چرا که این صفحات می‌توانند کل بدنه ماهواره را دچار لرزش کنند که ممکن است باعث ایجاد ترک در بدنه شود و کل ماموریت فضایی را با شکست مواجه کند.
هدف این مقاله،طراحی کنترلری است که بتواند زاویه و حرکت پنل‌های خورشیدی را در حین انجام یک مانور کامل ماهواره،کنترل کند. مدل ریاضی آن توسط فرمول‌های لاگرانژ به دست خواهد آمد و کنترل طراحی خواهد شد.

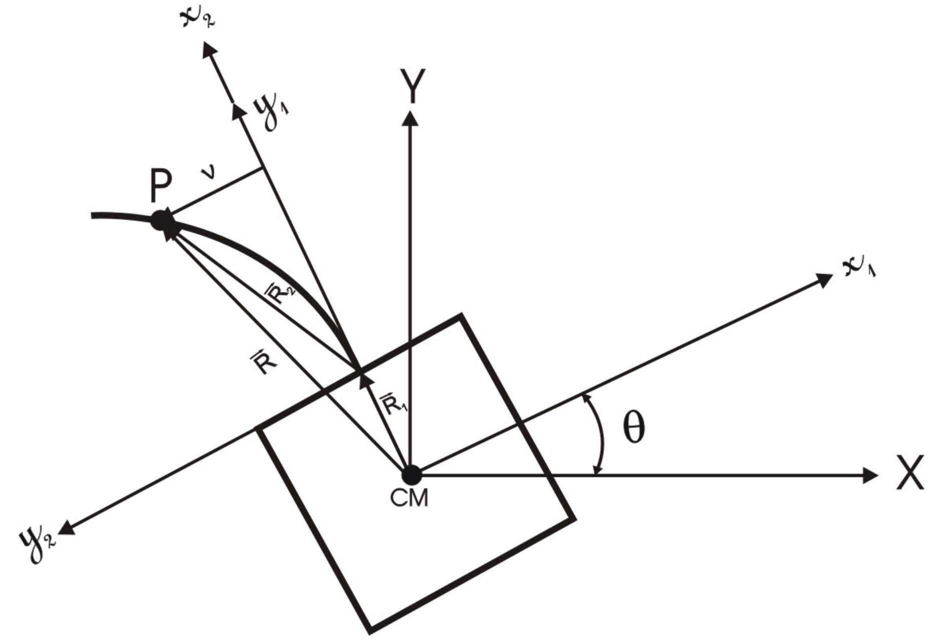
شکل ۱: تصویری از یک ماهواره با پنل‌های خورشیدی

[1]Brij N. Agrawal , Design of Geosynchronous Spacecraft
[2]Moro , 1983

۲ معادلات حاکم بر سیستم حرکتی

۱.۲ مدل‌سازی هندسی

تحلیل‌های صورت گرفته در این قسمت مسطح هستند. قسمت اصلی ماهواره در قالب یک جعبه مدل‌سازی شده و تنها صفحات XY در نظر گرفته شده‌اند. همانطور که در شکل۲ مشخص است، این جعبه مانند یک گیره، یک تیر منعطف خمیده را که پنل خورشیدی است را نگه داشته است. این تیر به عنوان یک تیر خمیده اویلر-برنولی مدل‌سازی شده تا به صورت یک خمیدگی خطی در نظر گرفته شود.
در شکل۱، محورهای XY به عنوان محورهای اینرسی هستند اما دو محور x_1y_1 و x_2y_2 را نیز به عنوان محورهای موضعی در نظر می‌گیریم که مرکز جرم آن در وسط بدنه اصلی قرار دارد.



شکل ۲: مدل هندسی ماهواره با پنل‌های منعطف

۲.۲ مدل‌سازی ریاضیاتی

مدل‌سازی ریاضی حرکت ماهواره و پنل‌های آن از فرمول سازی لاگرانژ بدست آمده است. در این روش، موقعیت هر نقطه از خط مرکزی پنل منعطف، بر حسب تابعی از زمان و فاصله آن تا تیرک ابتدایی پنل که ثابت فرض شده است، نوشته می‌شود. با استفاده از تئوری تیر خمیده اویلر - برنولی [۳] و سپس معادلات لاگرانژ می‌توان نوشت:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial V}\right) + V\left(\frac{\partial L}{\partial V}\right) = M_c \qquad (۱)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{V}}\right) - \frac{\partial L}{\partial V} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{V}'}\right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{V}}\right) = 0 \qquad (۲)$$

در روابط بالا، $L = T - V$ است که لاگرانژین سیستم می‌باشد و $V = V(x,t)$ است که معادله موقعیت تیرک است. با استفاده از روش جداسازی متغیرها، می‌توانیم تابع $V(x,t)$ را به صورت ضرب دو تابع $\Phi_i(x)$ و $q_i(t)$ نوشت:

$$V(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(x) q_i(t) \qquad (۳)$$

که تابع $\Phi_i(x)$ می‌تواند به شکل زیر نوشته شود:

$$\Phi_i(x) = cosh(\lambda_q x) - cos(\lambda_q x) - R_q(sinh(\lambda_q x) - sin(\lambda_q x)) \qquad (۴)$$

که R_q در آن، از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$R_q = \frac{cosh(\lambda_q L_p) + cos(\lambda_q L_p)}{sinh(\lambda_q L_p) + sin(\lambda_q L_p)} \qquad (۵)$$

مقدار ویژه‌های λ_q از معادله مشخصه زیر که از معادله شماره(۴) با اعمال شرایط مرزی($V(0,t) = 0$و$V'(0,t) = 0$) گرفته شده، محاسبه می‌شوند:

$$cosh(\lambda_q L_p) cos(\lambda_q L_p) = -1 \qquad (۶)$$

[3] Euler–Bernoulli beam theory

با در نظر گرفتن ویژگی‌های تعامد ارتعاشات تیر،می‌توان درنظر گرفت که به ازای ($i = j$) داریم:

$$\int_0^L \phi_i(x)\phi_j(x)dx = 1 \tag{۷}$$

و به ازای ($i \neq j$) داریم:

$$\int_0^L \phi_i(x)\phi_j(x)dx = 0 \tag{۸}$$

با استفاده از معادلات لاگرانژ در این مرحله داریم:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = T_\theta \tag{۹}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}} = 0 \tag{۱۰}$$

در معادلات بالا T_θ گشتاوری است که وظیفخ کنترل حرکت ماهواره را بر عهده دارد و رابطه $L = T - V$ لاگرانژین سیستم می‌باشد. در اینجا ($i = 1$) است. یعنی طبق معادله شماره(۳)، تنها یک مد ارتعاشی برای سیستم درنظر گرفته شده است. برای یک سیستم کامل، انرژی جنبشی از رابطه $T_{Satellite} + T_{Panel}$ بدست میاید که به شرح زیر است:

$$T = \frac{1}{2}I_{cube}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\int_0^L \rho A \left|\vec{\dot{R}}\right|^2 dx \tag{۱۱}$$

$$\vec{R} = (x + L_0)\vec{i} + y\vec{j} \tag{۱۲}$$

در اینجا L_0 فاصله بین مرکز جرم بدنه اصلی ماهواره تا محل اتصال به تیر است. سرعت زاویه‌ای بدنه اصلی به شکل زیر است:

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{k} \tag{۱۳}$$

و در نهایت، $\vec{\dot{R}}$ به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$\vec{\dot{R}} = \dot{y}\vec{j} + \dot{\theta}\vec{k} \times ((x + L0)\vec{i} + y\vec{j}) \tag{۱۴}$$

و اندازه آن برابر است با:

$$\left|\vec{\dot{R}}^2\right| = \left[(x + L_0)\dot{\theta} + \dot{y}\right]^2 + \left[y\dot{\theta}\right]^2 \tag{۱۵}$$

انرژی پتانسیل سیستم از نوع پتانسیل کشسانی است و از اثرات جاذبه نیز صرفه‌نظر شده است و از رابطه پایین بدست میاید:

$$V = \frac{1}{2}\int_0^L EI_{beam} v''^2 dx \tag{۱۶}$$

در نهایت طبق رابطه لاگرانژین معادله، داریم:

$$L = \frac{1}{2}I_{cube}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\rho\int_0^L \left[\phi^2 q^2\dot{\theta}^2 + (x+L_0)^2\dot{\theta}^2 + \phi^2\dot{q}^2 + 2(x+L_0)\dot{\theta}\phi\dot{q}\right] dx - \frac{1}{2}\int_0^L EI_{beam}(\phi'')^2 q^2 dx$$

که می‌توان آن را به شکل زیر ساده کرد:

$$L = \frac{1}{2}I_t\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_q q^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_q\dot{q}^2 + m_{\theta q}\dot{\theta}\dot{q} - \frac{1}{2}kq^2 \tag{۱۷}$$

و ضرایب آن به شرح زیر هستند:

$m_q = \rho\int_0^L \phi^2 dx$

$m_{\theta q} = \rho\int_0^L (x+L_0)\phi dx$

$k = EI_{beam}\int_0^L (\phi'')^2 dx$

$I_t = I_{cube} + \frac{\rho}{3}\left[(L+L_0)^3 - L_0^3\right]$

در روابط بالا، میرایی ساختار، تابع توزیع ریلی [۴] در نظر گرفته شده که با رابطه زیر قابل نمایش است:

$$R = \frac{1}{2}c\dot{q}^2 \tag{۱۸}$$

با توجه به روابط بالا و لاگرانژین معادله، معادلات حاکم بر سیستم حرکتی به صورت زیر در خواهند آمد:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[I_t\dot{\theta} + m_q q^2\dot{\theta} + m_{\theta q}\dot{\theta}\right] = T_\theta \tag{۱۹}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[m_q\dot{q} + m_{\theta q}\dot{\theta}\right] - m_q q\dot{\theta}^2 + kq + c\dot{q} = 0 \tag{۲۰}$$

در روابط (۱۳) و (۱۴) متغیر θ بیانگر جابجایی زاویه‌ای بدنه اصلی ماهواره، q بیانگر انحراف زمانی پنل خورشیدی، I_{cube} بیانگر ممان اینرسی بدنه اصلی ماهواره حول مرکز جرم آن و I_{beam} بیانگر ممان اینرسی تیر می‌باشد.

[4] Rayleigh distribution

که می‌توان معادلات را به شکل زیر ساده کرد:

$$(I_t + m_q q^2)\ddot{\theta} + 2m_q\dot{q}q\dot{\theta} + m_{\theta q}\ddot{q} = T_\theta \tag{۲۱}$$

$$m_q\ddot{q} + m_{\theta}q\ddot{\theta} - m_q q\dot{\theta}^2 + kq + c\dot{q} = 0 \tag{۲۲}$$

با خطی‌کردن این دو معادله به روش مشتق جزئی [5] خواهیم داشت:

$$\ddot{\theta} = u \tag{۲۳}$$

$$\ddot{q} + 2\xi\omega_n\dot{q} + \omega_n^2 q = -\alpha u + q\dot{\theta}^2 \tag{۲۴}$$

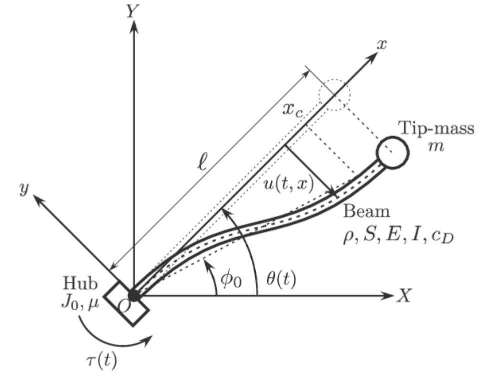
$$u = \frac{T_\theta - m_{\theta q}q\dot{\theta}^2 + \alpha kq + \alpha c\dot{q} - 2m_q q\dot{q}\dot{\theta}}{I_t + m_q q^2 - \alpha m_{\theta q}} \tag{۲۵}$$

$$\alpha = \frac{m_{\theta q}}{m_q} \tag{۲۶}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m_q}} \tag{۲۷}$$

$$\xi = \frac{c}{2\sqrt{m_q k}} \tag{۲۸}$$

در اینجا، u ورودی کنترلی جدید، α ثابت اتصال، ω_n فرکانس طبیعی و ξ ضریب میرایی دستگاه است.



شکل ۳: مدل ساده از ماهواره با پنل منعطف

[5] Feedback and Partial Feedback Linearization

۳ فضای حالت

در ادامه مقاله، قبل از پرداختن به فضای حالت و معادلات حالت، مفاهیم کاربردی که در ادامه به آن‌ها نیاز خواهیم داشت را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱.۳ بررسی پایداری و کنترل‌پذیری سیستم

برای نوشتن معادلات یک سیستم غیر خطی به فرم فضای حالت، ابتدا باید معادلات آن را خطی کرد. با فرض $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ به عنوان بردار حالت سیستم غیر خطی، معادله دینامیکی یک سیستم غیرخطی به شکل زیر خواهد بود:

$$\dot{x} = f(x)$$

حال با فرض اینکه $f(x)$ همه‌جا مشتق‌پذیر است، باید نقاط تعادل این سیستم را بدست آورد. نقاط تعادل یک سیستم نقاطی هستند که مشتق در نقاط، صفر باشد.

$$\dot{x_e} = 0 \Rightarrow f(x_e) = 0$$

برای راحتی در امر خطی کردن معادلات سیستم، می‌توان ماتریس ژاکوبین [۶] آن را محاسبه کرد.

۲.۳ Linear–Quadratic Regulator

یکی از روشهای کنترلی بهینه رگولاتور درجه دوم خطی Linear–Quadratic Regulator است که به اختصار LQR خوانده می‌شود.
این روش برای سیستمهای خطی بهینه بوده و با توجه به روند طراحی و سادگی ساختار آن در کاربردهای فراوانی با موفقیت مورد استفاده قرار گرفته است. با اینکه روش LQR تنها برای سیستمهای خطی بهینه بوده و پایداری سیستم را تضمین می‌کند، با استفاده از خطی‌سازی ژاکوپی، می‌توان آنرا به سیستمهای غیرخطی نیز اعمال کرد؛ هرچند در اینصورت کنترل‌کننده دیگر بهینه نیست اما در بسیاری از کاربردها عملکرد خوبی از خود نشان می‌دهد.
برای سیستم با یک ورودی، فضای حالت مطابق شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{۲۹}$$

LQR برای دستیابی به مقدار گین بهینه K طبق رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$u = -Kx \tag{۳۰}$$

$$J(u) = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \tag{۳۱}$$

در MATLAB دستور $lqr()$ را برای بدست آوردن مقدار بهینه K است.

[6] Jacobian matrix and determinant

۳.۳ معادلات حالت با استفاده از روش LQR

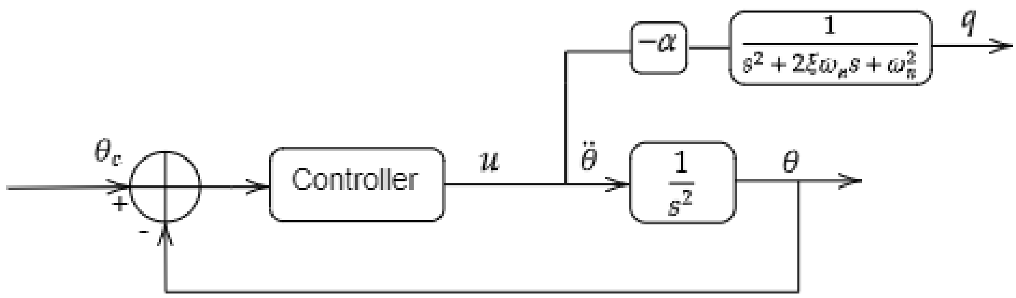
با استفاده از روش LQR، معادلات (۲۳) و (۲۴) خطی شده و طبق رابطه معادلات حالت، خواهیم داشت:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{۳۲}$$

که $x = (\theta, \dot{\theta}, q, \dot{q})^T$ بردار حالت و u ورودی است:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\omega_n^2 & -2\xi\omega_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\alpha \end{bmatrix} \tag{۳۳}$$

ذکر این نکته لازم است که بنا بر کاربردهای روش LQR، ترم غیرخطی در نظر گرفته نمی‌شود. برای درک بهتر از خروجی، بلوک دیاگرام زیر رسم شده است:



شکل ۴: مدل بلوک دیاگرام سیستم ماهواره

۴.۳ معادلات حالت با استفاده از روش ژاکوبین

$$J_F(x_1,\ldots,x_n) := \frac{\partial(y_1,\ldots,y_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)} := \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

شکل ۵: تعریف ماتریس ژاکوبین

با استفاده از مفهوم نقطه تعادل و مفاهیم تدریس‌شده در کلاس کنترل خطی و با ساده‌سازی روابط (۲۱) و (۲۲) و تعریف $x = (\theta, \dot\theta, q, \dot q)^T$ به عنوان بردار فضای حالت، خواهیم داشت:

$$\dot{x_1} = x_2$$

$$\dot{x_2} = \frac{m_q\tau - 2m_q^2x_2x_3x_4 - m_qm_{\theta q}x_2^2x_3 + km_{\theta q}x_3 + m_{\theta q}cx_4}{m_{\theta q}^2x_3^2 + Itm_{\theta q} - m_{\theta q}^2}$$

$$\dot{x_3} = x_4$$

$$\dot{x_2} = \frac{m_{\theta q}I_tx_2^2x_3 + m_q^2x_2^2x_3^3 - I_tkx_3 - m_qkx_3^3 - I_tcx_4 - m_qcx_3^2x_4 - m_{\theta q}\tau + 2m_{\theta q}m_qx_2x_3x_4}{m_q^2x_3^2 + m_qI_t - m_{\theta q}^2}$$

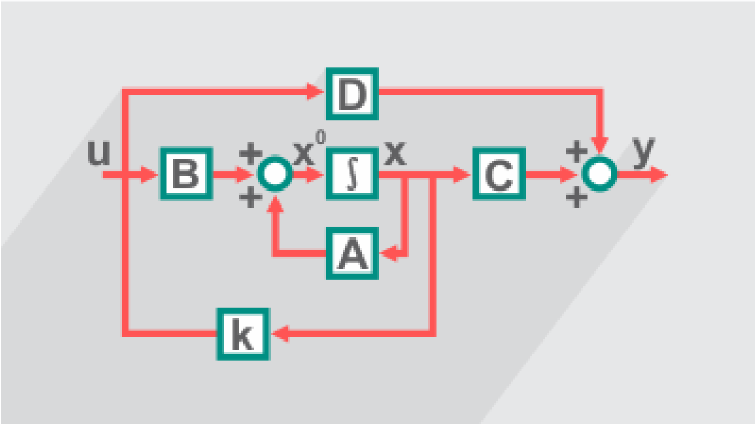
با استفاده از داده‌های محاسبه شده در بخش ۱.۴، ماتریس‌های ژاکوبی A و B محاسبه می‌شوند که به دلیل حجم‌های محاسباتی فراوان در مقاله آورده نمی‌شوند و کد نرم‌افزار MATLAB مربوط به این بخش در پیوست مقاله قابل مشاهده است و تنها نتایج حاصل از ژاوکوبین ماتریس‌های A و B در زیر آورده شده‌اند.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.4516\times 10^3 & 0.7195 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1.9122\times 10^3 & -0.9478 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2417 \\ 0 \\ -0.0472 \end{bmatrix} \tag{۳۴}$$

و خواسته ما، کنترل θ است که ماتریس C به شکل زیر درمیاید:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{۳۵}$$

۵.۳ فیدبک حالت



شکل ۶: بلوک دیاگرام فیدبک حالت

با استفاده از این روش می‌توان قطب‌ها را در مکان‌های مطلوب قرار داد. برای اینکار، $u = r - Kx$ قرار می‌دهیم و معادلات ما به شکل زیر در خواهند آمد:

$$\dot{x} = Ax + Bu \rightarrow \dot{x} = (A - BK)x + Br$$
$$y = Cx + Du \rightarrow y = (C - DK)x + Dr$$

در معادله اول، مقادیر ویژه از ریشه های دترمینان ماتریس $sI - A$ بدست می‌آمدند این در حالی است که در معادله دوم این مقادیر ریشه‌های دترمینان $sI - A + BK$ هستند که قطب‌های مطلوب ما هستند. می‌توانیم با حل معادلات و بدست آوردن گین k، به این هدف برسیم.
اما شرط لازم برای وجود داشتن K، این است که زوج(A،B) خود کنترل‌پذیر باشند که کنترل‌پذیری آن‌ها با چک کردن عدم صفر بودن دترمینان ماتریس Cr امکان‌پذیر است و داریم:

$$Cr = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix} = 344.8677 \neq 0 \tag{۳۶}$$

همچنین برای روئت‌پذیر بودن ان نیز باید از صفر نبودن دترمینان ماتریس زیر اطمینان حاصل کرد.

$$Ob = \begin{bmatrix} C & CA & CA^2 & CA^3 \end{bmatrix}^T = 2.0177 \times 10^6 \neq 0 \tag{۳۷}$$

در این مقاله ۴ متغیر حات داریم و برای کنترل سیستم، ۴ گین متفاوت محاسبه می‌شوند که در ادامه به آن‌ها خواهیم پرداخت.

۴ داده‌های تجربی

در این قسمت برای محاسبه تمامی پارامترهای سیستم، ماهواره پیام امیرکبیر را در نظر گرفتیم که ابعاد و ویژگی‌های آن را در جدول پایین مشاهده می‌کنید.

Variable	Definition	Value	Units
l_0	Distance attach pt. to center of rotation	0.275	m
l	Length of Panel	0.8	m
m	Mass of beam	-	kg
ρ_l	Beam mass per unit length	2.025	kg/m
E	Modulus of elasticity of beam	$69G$	N/m^2
I	Beam area moment of inertia	-	m^4
EI	Beam uniform flexural rigidity	-	$N.m^2$
k	Stiffness coefficient	-	$N.m/rad$
c	Mechanical dissipative constant	1.525	$N.m/rad/s$
ξ	Damping ratio of beam	0.01	N/A

جدول ۱: مشخصات تجربی ماهواره پیام

۱.۴ محاسبات پارامترهای سیستم

با توجه به داده‌های بالا، می‌توان ضرایب معادلات (۱۷) و (۱۸) را محاسبه کرد. به این ترتیب، ضرایب m_q ، $m_{\theta q}$ ، I_{beam} و I_{cube} به شکل زیر محاسبه می‌شوند:

$$m_q = L\rho_l \times \frac{3\pi^4+20\pi^2+210}{60} = 11.660 \times (0.8m) \times (2.025kg/m) = 18.8892$$

$$m_{\theta q} = \rho_l L(L(\frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2}) + L_0(1 + \frac{\pi^2}{6})) = 3.6877$$

$$I_{beam} = b\frac{h^3}{12} = (15cm)\frac{(5mm)^3}{12} = 1.5625 \times 10^{-9}$$

$$I_{cube} = \frac{1}{6}mb^2 = \frac{1}{6}(80kg)(0.55m)^2 = 4.033$$

و ضرایب I_t ، k ، ω_n و α به شکل زیر محاسبه می‌گردند:

$$I_t = I_{cube} + \frac{\rho_l}{3}((L + L_0)^3 - L_0^3) = 4.858$$

$$k = \frac{3\pi^4}{2}\frac{EI_{beam}}{L^3} = 30767.41$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m_q}} = 40.36$$

$$\alpha = \frac{m_{\theta q}}{m_q} = 0.1952$$

۵ تابع تبدیل

۱.۵ تابع تبدیل حلقه باز

با داشتن معادلات حالت و پارامترهای سیستم که از قسمت‌های قبل بدست آوردیم، با توجه به رابطه زیر می‌توان تابع تبدیل این سیستم را محاسبه کرد و خواهیم داشت:

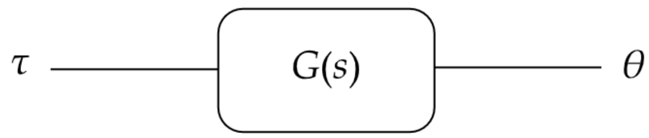
$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D \tag{۳۸}$$

$$G(s) = \frac{0.242s^2 + 0.01956s + 394.5}{s^2(s^2 + 0.0948s + 1912)} \tag{۳۹}$$

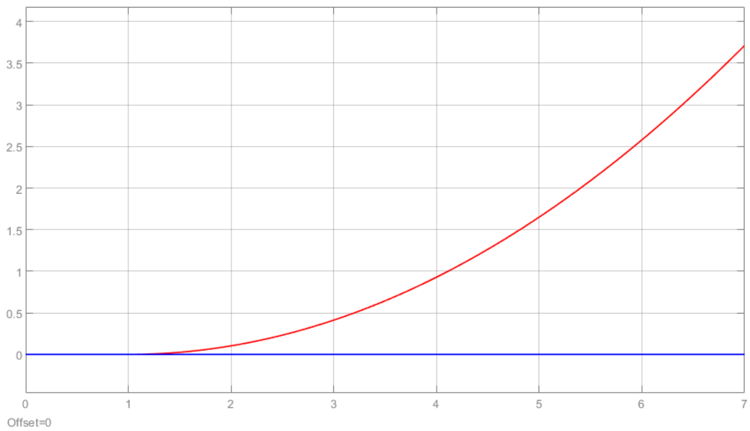
$$\boxed{\begin{gathered} Zero's = -0.04042 \pm 40.377j \\ Pole's = 0, 0, -0.0474 \pm 43.726j \end{gathered}}$$



شکل ۷: مدل بلوک دیاگرام تابع تبدیل حلقه باز

۲.۵ خطای حالت دائم به ورودی پله

همانطور که از تابع تبدیل مشخص است، به ازای ورودی پله، پاسخ ما به سمت ∞ میل میکند.



شکل ۸: نمودار پاسخ به ورودی پله تابع تبدیل $G(s)$

برای حل این مشکل، از **فیدبک واحد** استفاده می‌کنیم. چون تابع تبدیل $G(s)$ دو قطب در مبدا دارد، پس سیستم، نوع ۲ است و می‌دانیم:

$G(s) = K\frac{(1+T_{z1})(1+T_{z2})...(1+T_{zm})}{s^N(1+T_{p1})(1+T_{p2})...(1+T_{pn})}, N = 2$

$$E(s) = \frac{R(s)}{1+G(s)} \Rightarrow e_{ss} = \lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G(s)} = \frac{1}{1+G(0)}$$

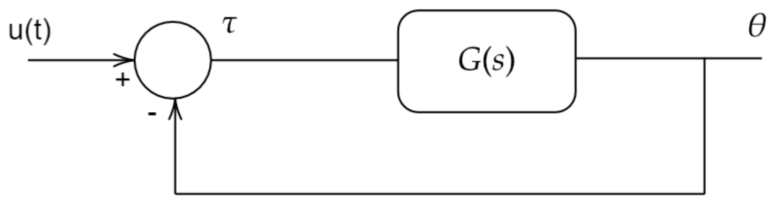
$\lim_{s\to 0} G(s) = \infty \Rightarrow e_{ss} = 0$

حال خطای دائم به ورودی پله برابر با صفر می‌شود.

۶ طراحی کنترلر

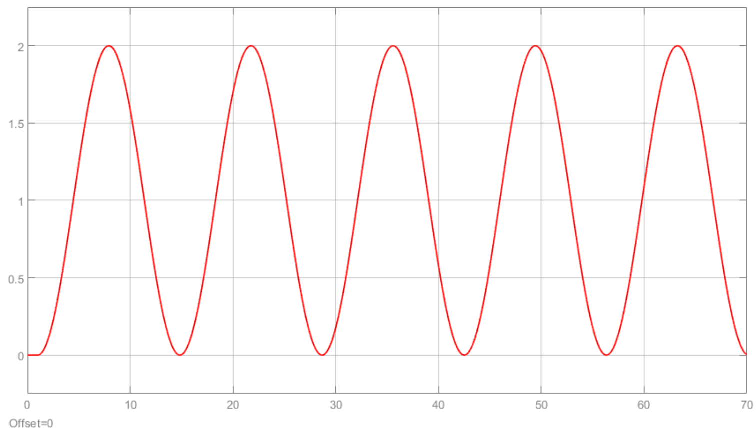
۱.۶ دلیل طراحی کنترلر

حال با داشتن تابع تبدیل سیستم می‌بایست پاسخ آن را به ازای ورودی پله بررسی و از کنترلرها برای بهبود رفتار سیستم استفاده کنیم. در ابتدا، خروجی سیستم زیر را در نظر می‌گیریم:



شکل ۹: بلوک دیاگرام پاسخ به ورودی پله تابع تبدیل $G(s)$ با فیدبک واحد

خروجی به شکل زیر در خواهد آمد:

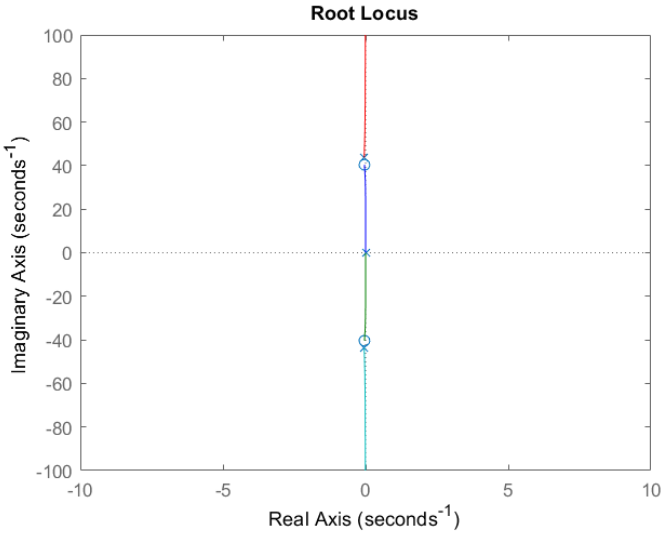


شکل ۱۰: نمودار پاسخ به ورودی پله تابع تبدیل $G(s)$ با فیدبک واحد

انتظار چنین پاسخی را داشتیم. بدلیل اینکه در فضا میتوان از هر فاکتور دمپی صرف نظر کرد و قطب‌های ما قسمت موهومی نیز داشتند که همین باعث شده در خروجی ترم سینوسی مشاهده شود و دمپ آن بسیار ضعیف باشد.

۱.۱.۶ نمودار مکان ریشه

شکل زیر نمودار مکان هندسی ریشه $G(s)$ است.



شکل ۱۱: نمودار مکان ریشه تابع تبدیل $G(s)$

همانطور که مشاهده می‌کنید باید با اضافه کردن صفر و قطب‌های مناسب به سیستم، نمودار مکان ریشه را به سمت چپ منحرف کنیم تا به Settling time و Percentage Overshoot مطلوب دست پیدا کنیم. برای بررسی گین برای پایداری سیستم فوق داریم:

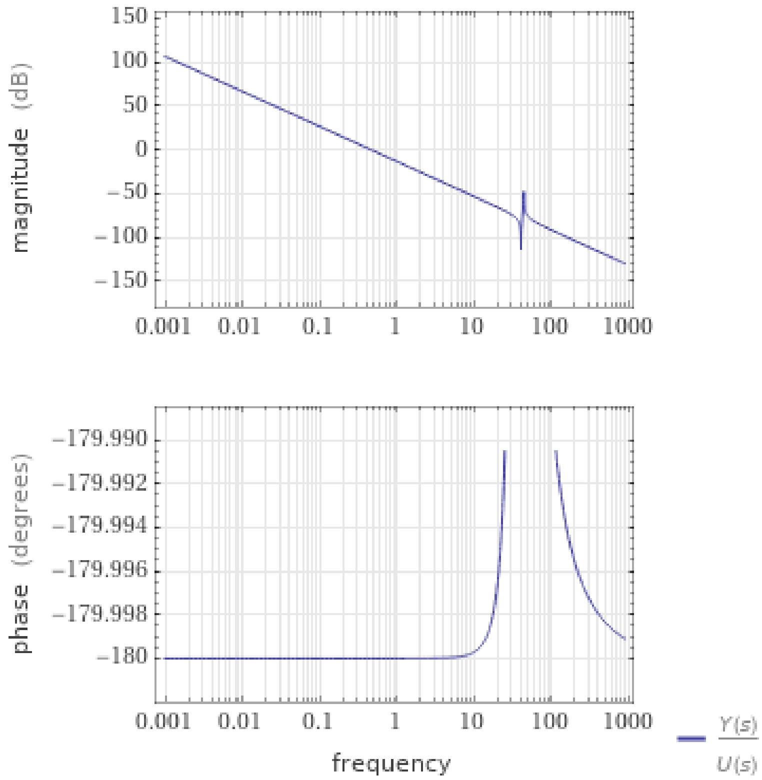
$$G(s).H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$1 + KGH(s) = 0 \Rightarrow D(s) + KN(s) = \Delta(s) = 0 \tag{۴۰}$$

از روابط بالا نتیجه می‌گیریم که به ازای K>۰ سیستم محور jw را قطع نمی‌کند و در نتیجه پایدار است.

۲.۱.۶ دیاگرام بودی

شکل زیر دیاگرام بودی تابع تبدیل $G(s)$ است.



شکل ۱۲: دیاگرام بودی تابع تبدیل $G(s)$

همانطور که مشاهده می‌کنید باید با اضافه کردن صفر و قطب‌های مناسب به سیستم، نمودار مکان ریشه را به سمت چپ منحرف کنیم تا به Settling time و Percentage Overshoot مطلوب دست پیدا کنیم.

۲.۶ انتخاب کنترلر مناسب

همانطور که در بخش قبلی مشاهده کردید، برای بهبود رفتار سیستم، نیاز به کنترلر داریم. برای این امر به سراغ کنترلر Lead می‌رویم که دلایل آن را مشاهده می‌فرمائید:

- تعداد نسبی صفر و قطب تابع تبدیل ما ۲ است که یعنی در نمودار مکان ریشه، در نهایت نمودار ما با زاویه ۹۰± حرکت می‌کنند و استفاده از کنترلر Lead این نسبت را تغییر نمی‌دهد.
- اضافه کردن کنترلر Lead نوع سیستم را تغییر نمی‌دهد پس خطای حالت دائم ما به ورودی پله همچنان صفر باقی می‌ماند.
- با توجه به دیاگرام بودی، با نیاز به تزریق فاز مثبت به سیستم خود داریم که کنترلر Lead این کار را انجام می‌دهد.

پارامترهای مطلوب ما برای پاسخ ورودی پله این سیستم:

Settling time : $T_s = 2s$
Percentage Overshoot : $P.O. = 10\%$

طبق فرمول $\text{Percentage Overshoot}$ که در پایین مشاهده می‌کنید، می‌توان ξ را محاسبه کنیم:

$$P.O. = 100e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \tag{۴۱}$$

for $10\% : \xi = 0.5911$

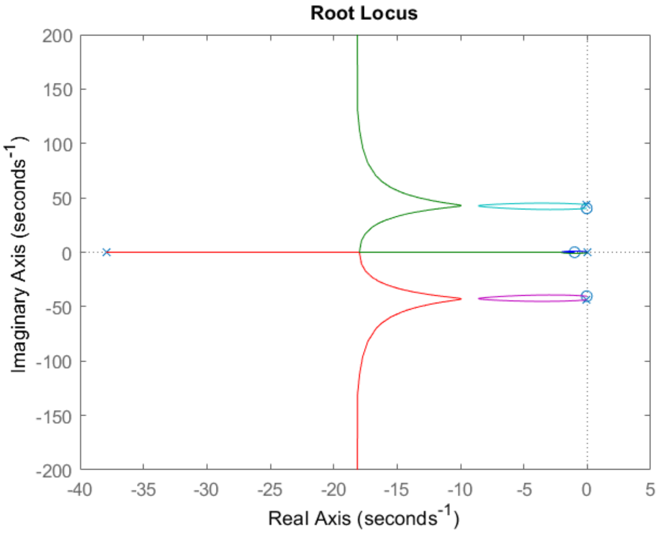
و برای محاسبه w_n خواهیم داشت:

$$T_s = \frac{4}{\xi\omega_n} \Rightarrow \omega_n = 3.\bar{3}$$

۳.۶ طراحی کنترلر Lead با فیدبک واحد

یک صفر در $z = -1$ فرض می‌کنیم، طبق نمودار مکان ریشه کنترلر و تابع تبدیل که در زیر مشاهده می‌کنید، می‌توان با آزمون و خطا قطب مناسب برای Percentage Overshoot ۱۰ درصد را پیدا کرد.
طبق نمودار مکان ریشه:

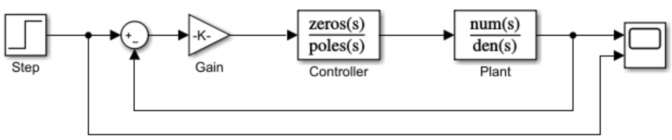
$$S_d = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$



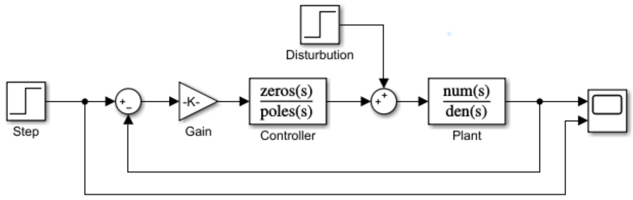
شکل ۱۳: مدل بلوک دیاگرام سیستم ماهواره

طبق مشاهدات بالا، قطب مورد نظر در $p = -37.94$ قرار می‌گیرد. کنترلر ما به شکل زیر در خواهد آمد:

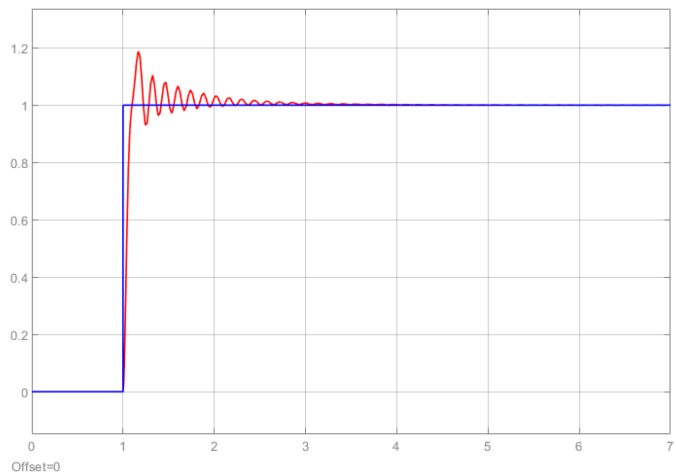
$$G_c = \frac{s+1}{s+37.94}, K = 5820$$



شکل ۱۴: مدل بلوک دیاگرام با کنترلر Lead



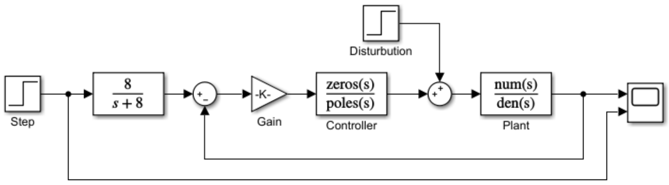
شکل ۱۵: مدل بلوک دیاگرام با کنترلر Lead در حضور اغتشاش پله‌ای



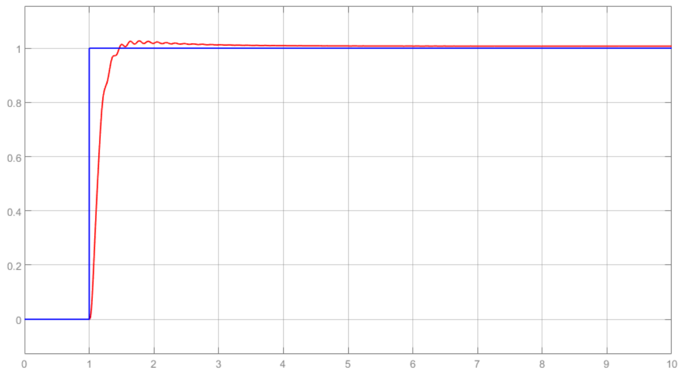
شکل ۱۶: پاسخ به ورودی پله با کنترلر Lead

همانطور که مشاهده می‌کنید .P.O کمی بیشتر از خواسته ماست. برای رفع این مشکل می‌توان از فیلتر کالمن [۷] استفاده کرد. این فیلتر باعث تاخیر در ورودی می‌شود و با اینکه باعث تاخیر زمانی در سیستم ما می‌شود اما می‌تواند .P.O را تا حد بسیار زیادی کاهش دهد.

[7] Kalman Filter

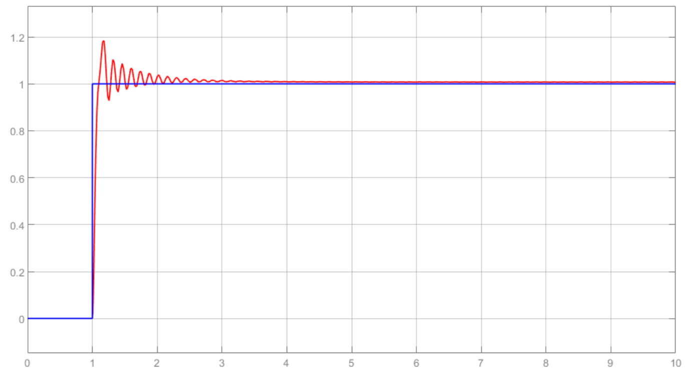


شکل ۱۷: پاسخ به ورودی پله با کنترلر Lead و فیلتر کالمن



شکل ۱۸: پاسخ خروجی پله با اغتشاش و فیلتر کالمن

شکل ۱۸: همانطور که مشاهده می‌کنید مقدار P.O. به شدت کاهش یافته اما زمان آرامش به مقدار ۲.۵ ثانیه افزایش یافته است.
شکل ۱۹: همانطور که مشاهده می‌کنید یک مقدار آفست داریم که برابرست با ۰.۵۰۰ که نیم درصد از مقدار نهایی ما را شامل می‌شود.

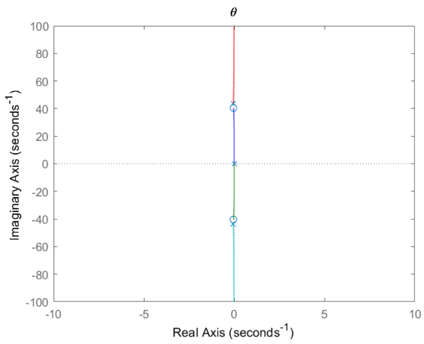


شکل ۱۹: پاسخ به ورودی پله و اغتشاش پله‌ای با کنترلر Lead

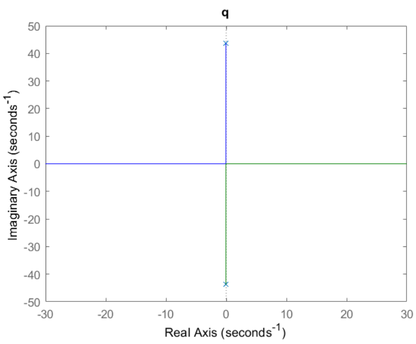
۷ کنترل سیستم با فیدبک حالت

۱.۷ دلیل استفاده از فیدبک حالت

در بخش ۳ به فیدبک حالت و روش آن اشاره شد. در بخش ۶ خواسته ما تنها کنترل θ بود چراکه مد زمانی q و مشتق آن یعنی $\dot{q}$ در نهایت دمپ می‌شدند. اما در این قسمت با توجه به بد بودن مکان قطب‌ها، می‌خواهیم با استفاده از فیدبک حالت، قطب‌های خود را در مطلوب قرار دهیم و دوباره سیستم را کنترل کنیم.
در مورد q و $\dot{q}$ نیز به علت روئت‌پذیری سیستم، می‌توان خروجی را نظارت کرد. شکل پایین نمودار مکان ریشه θ و q را نشان می‌دهد که و مشخص است که q به شدت ناپایدار است.



شکل ۲۰: نمودار مکان ریشه θ



شکل ۲۱: نمودار مکان ریشه q

۲.۷ تعیین قطب مطلوب و محاسبه بردار K

با توجه به بخش ۵.۳، ابتدا قطب‌های مطلوب خود را انتخاب و با توجه به معادله زیر، اقدام به محاسبه بردار K می کنیم:

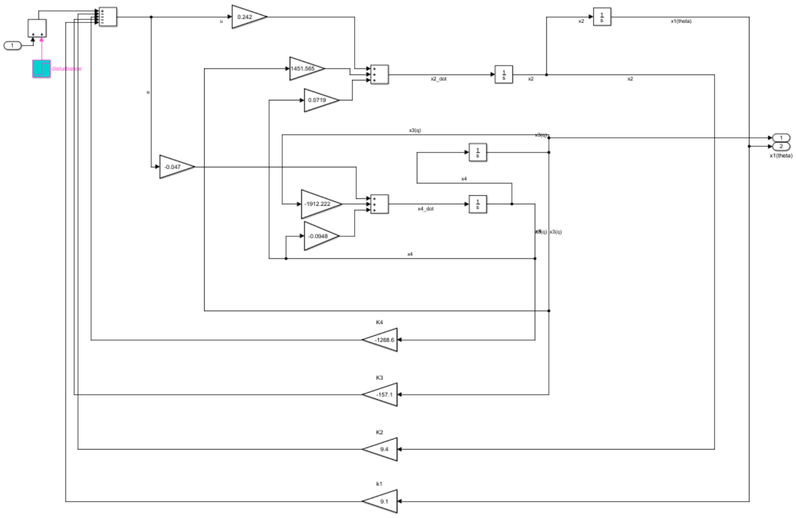
$$|sI - A + BK| = (s - P1)(s - P2)(s - P3)(s - P4) \qquad (۴۲)$$

که با داشتن مقادیر P۱،P۲،P۳،P۴ می‌توانیم بردار K را محاسبه کنیم.

$|sI - A + BK| =$
$s^4 + 0.0948s^3 + 1912s^2 - 0.047k_4s^3 - 0.047k_3s^2 + 0.242k_2s^2 + 0.242k_1s^2 +$
$394.534k_2s + 0.01956k_1s + 394.53$

$P_{1,2} = 1 \pm j$
$P_{3,4} = 30 \pm 30j$

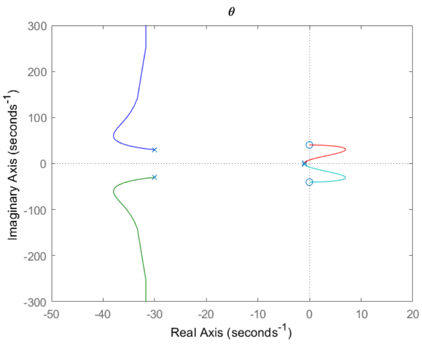
$$\begin{bmatrix} 394.53 & 0 & 0 & 0 \\ 0.01956 & 394.53 & 0 & 0 \\ 0.242 & 0.01956 & -0.047 & 0 \\ 0 & 0.242 & 0 & -0.047 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1912.2 \\ 0.0948 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3600 \\ 3720 \\ 1922 \\ 62 \end{bmatrix} \Rightarrow K = \begin{bmatrix} 9.1 \\ 9.4 \\ -157.1 \\ -1268.6 \end{bmatrix}$$



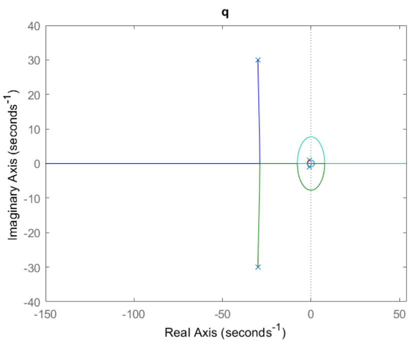
شکل ۲۲: بلوک دیاگرام فیدبک حالت با جایگذاری گین‌ها

۱.۲.۷ نمودار مکان ریشه فیدبک حالت

با محاسبه گین‌ها و جایگذاری آن‌ها، نمودارهای مکان ریشه به اشکال زیر در می‌آیند:



شکل ۲۳: نمودار مکان ریشه θ



شکل ۲۴: نمودار مکان ریشه q

همانطور که مشاهده می‌کنید همچنان برای q ناپایداری داریم. پس باید برای بهبود رفتار و کنترل θ و q، باید از فیدبک و از کنترلر استفاده کنیم.

۳.۷ فیدبک و طراحی کنترلر برای بهبود رفتار زیرسیستم فیدبک حالت

۱.۳.۷ فیدبک

در فیدبک حالت، r ورودی جدید ماست و در صورت اعمال آن به زیرسیستم فیدبک حالت، هر خطایی در گین مستقیما بر روی خورجی نیز تاثیر میگذارد. پس برای بهبود رفتار این زیر سیستم، از فیدبک واحد استفاده می‌کنیم.

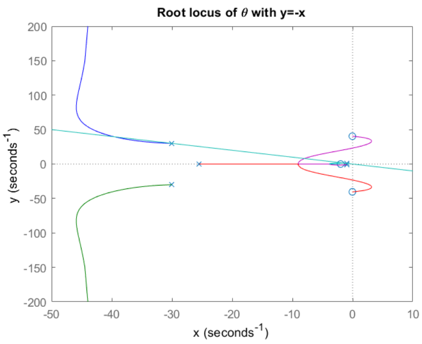
۲.۳.۷ طراحی کنترلر

با وجود فیدبک واحد اما در حضور اغتشاش سیستم ما رفتار مطلوبی را ارائه نمی‌دهد پس از یک کنترل دیگر برای بهبود رفتار زیرسیستم استفاده کنیم. برای اینکار یک کنترل Lead را در نظر گرفته‌ایم و صفر آن بر $z = -2$ قرار می‌دهیم تا زمان آرامش یا T_s به ۲ ثانیه برسد. برای اینکه دو قطب موهومی غالب ما در $\frac{1}{2}$ ثانیه به پایداری برسند و $\xi = 0.7$ شود، خواهیم داشت:

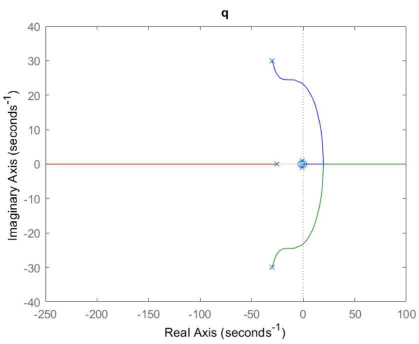
$\xi = 0.7 \Rightarrow P_{1,2} = x \pm xj$
$\xi\omega_n = 8 \Rightarrow P_{1,2} = 8 \pm 8j$

سپس با نوشتن شرط زاویه خواهیم داشت:

$Zero's : 180 + \tan^{-1}(4.068), 180 + \tan^{-1}(6.078), 180 - \tan^{-1}(1.333)$
$Pole's : 135°, 180 - \tan^{-1}(1.2857), -45°, \tan^{-1}(1.7272), \tan^{-1}(\frac{8}{P-8})$
$\frac{8}{P-8} = 0.458 \Rightarrow P = 25.47$



شکل ۲۵: نمودار مکان ریشه θ



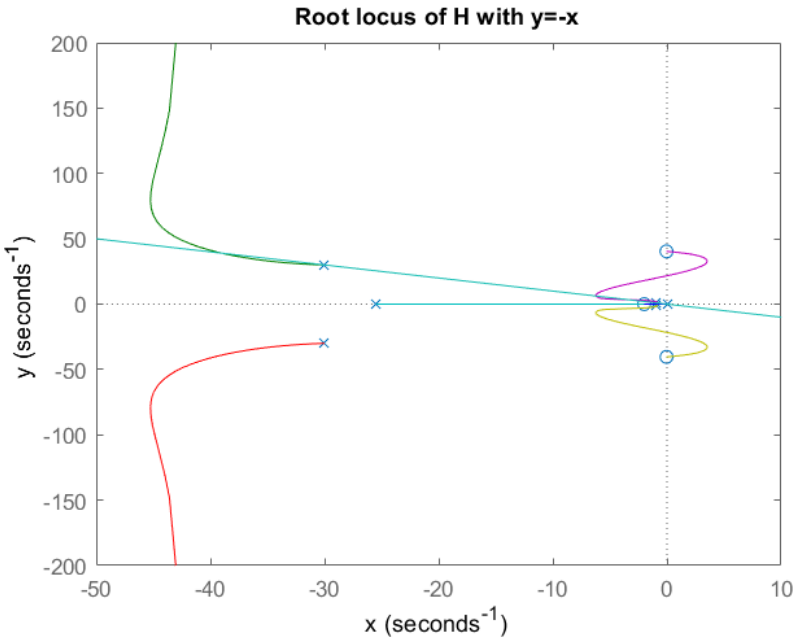
شکل ۲۶: نمودار مکان ریشه q

همانطور که مشاهده می‌شود هنوز عمبکرد سیستم ما برای q مطلوب نیست و نمودار θ نیز در برخی نقاط ناپایداری دارد. این موارد به علت وجود اغتشاش پله‌ای در زیرسیستم فیدبک حالت است و باید راهی برای بهبود آن یافت. برای یافتن گین نیز می‌توان از رابطه $K = \frac{-1}{G(s)}$ گین مطلوب را بدست آورد.

$G_c = \frac{S+2}{S+25.47}$

۳.۳.۷ بهبود عملکرد کنترلر زیرسیستم فیدبک حالت

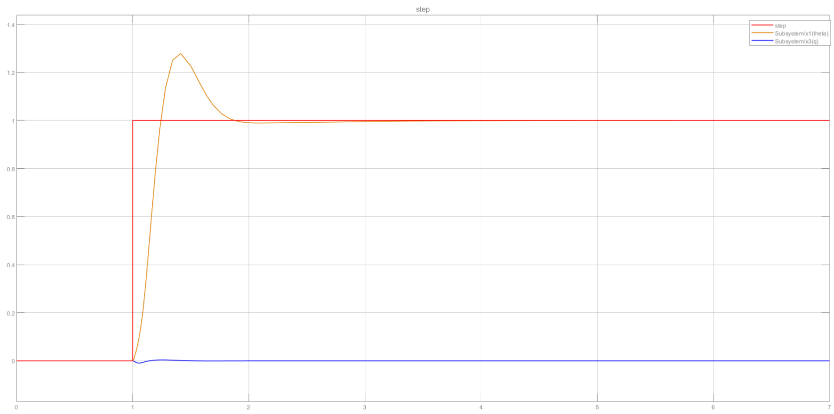
در حضور اغتشاش پله‌ای، کنترلر ما عملکرد مطلوبی ندارد پس برای از بین بردن اثر اغتشاش در خروجی، یک انتگرال‌گیر در کنترلر قرار می‌دهیم اما به منظور عوض نشدن نوع سیستم و حفظ پایداری آن، یک صفر در همان مکان قبلی به سیستم اضافه می کنیم.
با آزمون و خطا متوجه می‌شویم که برای رسیدن به $T_s = 2s$ و $\xi = 0.7$ بهترین قطب‌ها



شکل ۲۷: نمودار مکان ریشه سیستم با کنترلر بهبود یافته

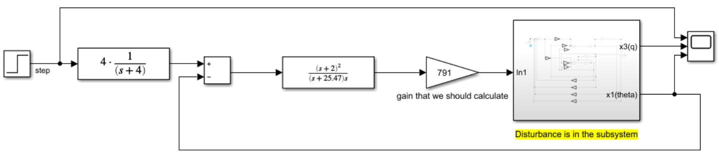
برای جذب نمودار مکان ریشه به سمت چپ، دو قطب زیر هستند که گین را با توجه به آن‌ها محاسبه می‌کنیم:

$P1,2 = -6.25 \pm 6.69j$
$G_c = \frac{(S+2)^2}{S(S+25.47)}$ $K = \frac{-1}{G(P)} = 791$



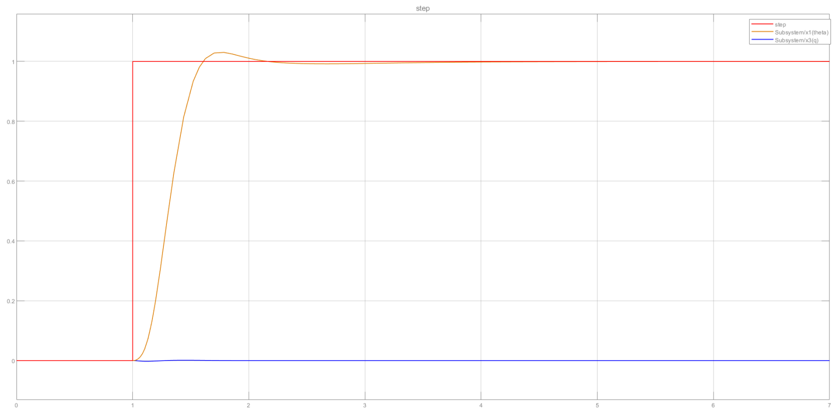
شکل ۲۸: شکل خروجی به ازای ورودی پله در حضور کنترلر بهبود یافته

مشکل سیستم بالا، .P.O ۲۷ درصد است که بالاتر از خواسته ماست که برای حل این مشکل از فیلتر کالمن استفاده می‌کنیم و خواهیم داشت:



شکل ۲۹: بلوک داگرام سیستم با کنترلر بهبود یافته و فیلتر کالمن

۸ نتیجه‌گیری



شکل ۳۰: شکل خورجی سیستم با فیلتر کالمن

با استفاده از فیلتر کالمن و کنترلر بهبود یافته در تهایت به شکل بالا می‌رسیم که همانطور که مشاهده می‌شود، .P.O آن به ۳ درصد می‌رسد که بسیار مطلوب است.
اما زمان آرامش آن اندکی افزایش یافته و دلیل آن استفاده از فیلتر کالمن است. در حالت کلی برای کنترلر این سیستم در نهایت با استفاده از فیدبک حالت و یک کنترلر Cascade، توانستیم پارامترهای سیستم را بسیار ارتقا بخشیم و به مقادیر مطلوب برسیم.