

# Mise en oeuvre par éléments finis rectangulaires d'un problème de conductivité 2D

ARSLANE MEDJAHDI & ALOYSE PHULPIN

Mémoire de Master 1 de Mathématiques  
UNIVERSITÉ DE LORRAINE  
Faculté des Sciences et Technologies de Vandoeuvre-lès-Nancy  
Année universitaire 2021-2022

# Table des matières

1	Introduction . . . . .	2
2	Problème de Conductivité . . . . .	2
3	Rappels des définitions et propriétés . . . . .	3
	3.1 Rappels des définitions et notions . . . . .	3
	3.2 Rappels des propriétés . . . . .	4
4	Forme Matricielle . . . . .	7
	4.1 Mise en place du système linéaire . . . . .	7
	4.2 Calcul des coefficients matriciels . . . . .	8
5	Mise en oeuvre numérique . . . . .	13
	5.1 Construction du maillage . . . . .	13
	5.2 Résultats numériques . . . . .	16

# 1 Introduction

Dans ce travail, nous nous intéressons à la résolution numérique d'un problème de conductivité décrit sur un domaine borné en 2 dimensions. Il s'agit d'un problème aux limites dont l'extension en 3 dimensions intervient dans le cadre d'une approche formulée pour la détection de tumeurs cancéreuses du sein (cf. [1]).

Ce rapport est composé de quatre parties. D'abord nous présenterons le problème de conductivité. Dans la deuxième partie, nous rappellerons des résultats et définitions théoriques concernant la formulation variationnelle de notre problème. Dans un troisième temps, nous introduirons la forme matricielle de notre problème. Finalement, nous discuterons de notre mise en oeuvre numérique et des résultats que nous avons obtenus.

## 2 Problème de Conductivité

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$  de frontière  $\mathcal{C}^1$  par morceaux désignée par  $\partial\Omega$ . On considère que le domaine contient une inhomogénéité  $D$ , assez petite par rapport à  $\Omega$ , définie par :

$$D = z + \epsilon B,$$

où  $B \subset \mathbb{R}^2$  qui contient l'origine,  $z \in \mathbb{R}^2$  désigne la position de l'inhomogénéité,  $\epsilon$  représente l'ordre de grandeur du diamètre de l'inhomogénéité, pris suffisamment petit par rapport à celui du diamètre de  $\Omega$ .

On suppose que celle-ci ne se situe pas sur le bord du domaine,

$$\exists d_0 \in \mathbb{R}_+ ; d(z, \partial\Omega) \geq d_0 > 0.$$

On pose :

$$\gamma_\epsilon(x) = \begin{cases} \gamma_0 & \text{si } x \in \overline{\Omega} \setminus \overline{D}, \\ \gamma_1 & \text{si } x \in \overline{D}, \end{cases}$$

où  $\gamma_0, \gamma_1 \in \mathbb{R}$  et  $\gamma_1 > \gamma_0 > 0$ . Le paramètre  $\gamma_\epsilon$  permet de décrire la conductivité du domaine, ainsi  $\gamma_0$  désigne celle dans le domaine en dehors de l'inhomogénéité et  $\gamma_1$  dans son adhérence.

Soit  $g \in L^2(\partial\Omega)$  tel que  $\int_{\partial\Omega} g d\sigma = 0$ , et  $\nu$  la normale unitaire prise sortante par rapport à  $\Omega$ . On considère le problème consistant à trouver une fonction  $u_\epsilon : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\gamma_\epsilon \nabla(u_\epsilon)) &= 0 & \text{dans } \Omega, \\ \gamma_\epsilon \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \nu} &= g & \text{sur } \partial\Omega, \\ \int_{\partial\Omega} u_\epsilon d\sigma &= 0 & . \end{cases} \quad (1)$$

En l'absence de l'inhomogénéité  $D$ , le potentiel noté  $u_0$  vérifie :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\gamma_0 \nabla(u_0)) &= 0 & \text{dans } \Omega, \\ \gamma_0 \frac{\partial u_0}{\partial \nu} &= g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2)$$

### 3 Rappels des définitions et propriétés

#### 3.1 Rappels des définitions et notions

**Définition 1 (Espace de Sobolev)** Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ , et  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . On appelle espace de Sobolev d'ordre  $m$  sur  $\Omega$ ,

$$H^m(\Omega) = \{ v \in L^2(\Omega) \mid \forall |\alpha| \leq m, \partial^\alpha v \in L^2(\Omega) \}$$

où l'on note la dérivée au sens faible de  $v$  (cf [4]),

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad \partial^\alpha v = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} v}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_n} x_n}.$$

Cet espace est un espace de Hilbert pour la norme  $\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}$ ,

$$\forall v \in H^m(\Omega), \quad \|v\|_{H^m(\Omega)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha v\|_{L^2(\Omega)}^2$$

**Définition 2 (Intégrale d'un champ scalaire le long d'une courbe paramétrée de  $\mathbb{R}^2$ )**

Soit  $\Gamma$ , un arc orienté paramétré sur  $[0, 1]$  par une fonction  $\gamma$  de classe  $C^1$ , et soit  $F$  un champ scalaire continu défini sur  $\Gamma$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On définit l'intégrale de  $F$  le long de  $\Gamma$  par :

$$\int_{\Gamma} F d\sigma = \int_0^1 F(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt,$$

où  $\|\gamma'(t)\|$  est la norme euclidienne de  $\gamma'$  évalué en  $t$ .

**Théorème 1 (Formule de Green)** Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ , de frontière  $C^1$  par morceaux, notée  $\partial\Omega$  :

$$\forall u, v \in H^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} u v \nu_i d\sigma,$$

où  $\nu_i$  désigne la  $i$ -ème composante de la normale à  $\partial\Omega$ , sortante par rapport  $\Omega$ .

### 3.2 Rappels des propriétés

#### Conditions de compatibilité

Soient  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $g \in L^2(\partial\Omega)$ ,  $\gamma_\epsilon \in L^\infty(\Omega)$ , tel que :  $\int_{\partial\Omega} g d\sigma = 0$ .  
On considère le problème non homogène associé à (1). Trouver  $u_\epsilon : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  tel que :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\gamma_\epsilon \nabla(u_\epsilon)) &= f & \text{dans } \Omega, \\ \gamma_\epsilon \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \nu} &= g & \text{sur } \partial\Omega, \\ \int_{\partial\Omega} u_\epsilon d\sigma &= 0 & , \end{cases} \quad (3)$$

où  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  est un ouvert borné de frontière  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, notée  $\partial\Omega$ .  
Nous supposons :

- $u_\epsilon$  suffisamment régulière, on choisit :  $u_\epsilon \in H^2(\Omega)$ .
- $\gamma_\epsilon$  régulière.

On pose la fonction test,  $v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ .

D'après (3) dans  $\bar{\Omega}$  :

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\gamma_\epsilon \nabla(u_\epsilon))v &= f v \\ \iff \int_{\Omega} -\nabla \cdot (\gamma_\epsilon \nabla(u_\epsilon))v dx &= \int_{\Omega} f v dx \end{aligned}$$

En appliquant la formule de Green, on obtient que :

$$\int_{\Omega} \gamma_\epsilon \nabla u_\epsilon \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} \gamma_\epsilon \nabla u_\epsilon \cdot \nu v dx + \int_{\partial\Omega} f v dx \quad \forall v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}). \quad (4)$$

En considérant la seconde équation de (3), et comme  $\mathcal{D}(\bar{\Omega}) \subseteq H^1(\Omega)$  :

$$\int_{\Omega} \gamma_\epsilon \nabla u_\epsilon \cdot \nabla v dx = \int_{\partial\Omega} g v d\sigma + \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (5)$$

Ce résultat est sensé comme  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}, f, v \in L^2(\Omega)$  et  $g \in L^2(\partial\Omega)$ .

Considérons le cas particulier  $v = 1$ , ainsi  $\nabla v = 0$  et d'après (5) :

$$\int_{\partial\Omega} g d\sigma + \int_{\Omega} f dx = 0. \quad (6)$$

Cette égalité traduit la condition de compatibilité portant sur les données  $f$  et  $g$ .  
Revenons maintenant à notre problème initial (1). Nous avons considéré  $f \equiv 0$ ,  
la condition de compatibilité devient :

$$\int_{\partial\Omega} g d\sigma = 0. \quad (7)$$

Pour conclure, la relation (7) correspond à la condition de compatibilité de notre problème.

### Formulation variationnelle

On considère notre problème aux limites introduit en 2. On cherche donc  $u_\epsilon : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant (1) avec  $\gamma_\epsilon \in L^\infty(\Omega)$ ,  $g \in L^2(\partial\Omega)$ , tel que :  $\int_{\partial\Omega} g d\sigma = 0$ . Notons le sous espace vectoriel,  $V \subset H^1(\Omega)$  :

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega) \mid \int_{\partial\Omega} v d\sigma = 0 \right\}$$

Selon [2], la formulation variationnelle associée au problèmes aux limites (1) consiste à trouver  $u_\epsilon \in V$  de sorte que :

$$\int_{\Omega} \gamma_\epsilon \nabla u_\epsilon \cdot \nabla v dx = \int_{\partial\Omega} g v d\sigma \quad \forall v \in V. \quad (8)$$

On pose :

$$\begin{cases} a(u, v) = \int_{\Omega} \gamma_\epsilon \nabla u \cdot \nabla v dx & \forall u, v \in V \times V, \\ L(v) = \int_{\partial\Omega} g v d\sigma & \forall v \in V. \end{cases}$$

Il s'agit alors de trouver  $u_\epsilon$  tel que :

$$a(u_\epsilon, v) = L(v) \quad \forall v \in V. \quad (9)$$

Dans [2], il a été démontré, en considérant la norme  $\|\cdot\|_V$  sur  $V$  définie par :

$$\|v\|_V = \|v\|_{H^1(\Omega)},$$

que :

- $a(\cdot, \cdot)$  est une forme bilinéaire continue sur  $V \times V$ ,
- $a(\cdot, \cdot)$  est  $V$ -elliptique,
- $L(\cdot)$  est une forme linéaire continue sur  $V$ .

Notamment depuis [4] et à l'aide du lemme de Lax-Milgram on a ainsi l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel (9).

### Formulation variationnelle discrète

On considère une formulation variationnelle obtenue par une discrétisation par éléments finis rectangulaires en utilisant la méthode de Galerkin. On désigne par :

- $\mathcal{T}_h$  : une famille d'éléments géométriques rectangulaires représentant une discrétisation conforme de  $\bar{\Omega}$ , où  $h := \max_{T \in \mathcal{T}_h} \text{diam}(T)$  désigne le pas du maillage avec  $\text{diam}(T) = \sup_{x, y \in T} \|x - y\|_2$ , avec  $\|\cdot\|_2$  la norme euclidienne ;

- $Q_{1,T}$  : l'espace des polynômes de degré inférieur ou égale 1 par rapport à chaque variable définies sur  $T$  et à valeurs réelles ;
- $\Sigma = \{a_i\}_{1 \leq i \leq 4}$  : un ensemble fini constitué des 4 points de  $T \in \mathcal{T}_h$ , vérifiant la propriété de  $Q_{1,T}$ -unisolvance.

Soit maintenant  $\Sigma_h = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} \Sigma_{1,T}$  l'ensemble des noeuds, qui sont en fait des sommets, de la triangulation  $\mathcal{T}_h$  :  $\Sigma_h = \{s_i\}_{1 \leq i \leq N}$ . Finalement, on peut définir :

$$U_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}); v_h|_T \in Q_1, \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

Notons que  $U_h$  est de dimension finie et tel que  $U_h$  soit contenu dans  $H^1(\Omega)$ . On introduit  $V_h$  le sous-espace de  $U_h$  :

$$V_h = \left\{ v_h \in U_h; \int_{\partial\Omega} v_h d\sigma = 0 \right\}.$$

De part [5], la formulation discrète du problème faible (9) consiste à trouver  $u_h \in V_h$  de sorte que :

$$a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \quad (10)$$

où  $a(\cdot, \cdot)$  et  $L(\cdot)$  sont définies comme précédemment.

On va maintenant faire usage d'une base  $\{\phi_i\}_{1 \leq i \leq N}$  de  $U_h$ , qui constitue l'ensemble des fonctions de forme associées à chacun des sommets  $s_j$ , éléments de  $\Sigma_h$ . On a ainsi :  $\phi_i(s_j) = \delta_{i,j}$  pour tout  $1 \leq i, j \leq N$ , où  $\delta_{i,j}$  est le symbole de Kronecker.

On doit cependant imposer une contrainte de nullité des intégrales des fonctions de forme sur  $\partial\Omega$ , afin de pouvoir construire une base similaire sur  $V_h$ . Le calcul des fonctions de forme introduites précédemment étant très complexe, on se propose donc de réécrire le problème précédent comme ci-après. On cherche  $u_h \in U_h$  telle que :

$$\begin{cases} a(u_h, v_h) = L(v_h) & \forall v_h \in U_h, \\ \int_{\partial\Omega} u_h d\sigma = 0 & \forall u_h \in U_h. \end{cases} \quad (11)$$

On suppose  $u_h$  une solution de (11), alors comme  $\int_{\partial\Omega} u_h d\sigma = 0$ , on a  $u_h \in V_h$  par définition. De plus, cette solution vérifie également  $a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in U_h$ , donc en particulier,  $\forall v_h \in V_h \subset U_h \quad a(u_h, v_h) = L(v_h)$ . Ainsi, toute solution de (11) est aussi une solution de (10), la formulation discrète du problème faible (9).

La démonstration de l'existence et de l'unicité de la solution du problème discret (11) est effectuée dans [2].

## 4 Forme Matricielle

### 4.1 Mise en place du système linéaire

On obtient alors le système linéaire depuis (11). Soit  $(\phi_i)_{1 \leq i \leq N}$  la base de fonctions de forme de  $U_h$  définies comme dans la partie précédente. Alors  $u_h$  peut s'écrire comme suit :

$$u_h = \sum_{i=1}^N u_i \phi_i,$$

où  $u_i$  désigne l'évaluation de la fonction  $u_h$  au point  $s_i \in \Sigma_h$ . On peut donc réécrire le problème (11), par bilinéarité de  $a(\cdot, \cdot)$  et linéarité de l'intégrale, on a :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N u_i \int_{\Omega} a(\phi_i, \phi_j) dx = L(\phi_j) & \forall 1 \leq j \leq N, \\ \sum_{i=1}^N u_i \int_{\partial\Omega} \phi_i d\sigma = 0. \end{cases}$$

Enfin, par définition des applications  $a(\cdot, \cdot)$  et  $L(\cdot)$ , on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N u_i \int_{\Omega} \gamma_{\epsilon} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j dx = \int_{\Omega} f \phi_j dx + \int_{\partial\Omega} g \phi_j d\sigma & \forall 1 \leq j \leq N, \\ \sum_{i=1}^N u_i \int_{\partial\Omega} \phi_i d\sigma = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Finalement, on peut introduire les matrices suivantes : A une matrice de taille N x N, b un vecteur colonne à N éléments, et c un vecteur ligne à N éléments, défini chacun comme suit :

$$\begin{aligned} A_{ji} &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \gamma_{\epsilon} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j & \forall 1 \leq i, j \leq N, \\ b_j &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T f \phi_j dx + \int_{\partial\Omega} g \phi_j d\sigma & \forall 1 \leq j \leq N, \\ c_i &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \phi_i d\sigma & \forall 1 \leq i \leq N. \end{aligned}$$

On obtient alors le système matriciel suivant , équivalent au système (12) :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N A_{j,i} u_i = b_j & \forall 1 \leq j \leq N, \\ \sum_{i=1}^N c_i u_i = 0. \end{cases}$$

Enfin, on peut introduire les 2 matrices  $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times N}$  et  $\tilde{b} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times N}$  :

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \begin{pmatrix} A \\ c \end{pmatrix} \\ \tilde{b} &= \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



On obtient donc une formulation matricielle pour notre problème (11) :  
trouver  $U \in \mathbb{R}^N$  tel que :

$$\tilde{A}U = \tilde{b}$$

La matrice  $\tilde{A}$  est de rang maximal ce qui assure l'existence et l'unicité de solution [2]

## 4.2 Calcul des coefficients matriciels

On cherche maintenant à calculer les coefficients des matrices A, b et c. Pour se faire, il nous est d'abord nécessaire de déterminer de manière explicite les fonctions de formes  $(\phi_i)_{1 \leq i \leq N}$ , qui forment une base de  $U_h$ . De plus, par définition de  $U_h$ , on a  $\phi_i|_T \in Q_{1,T}$ , pour tout  $1 \leq i \leq N$  et pour tout  $T \in \mathcal{T}_h$ . Localement, on a :

$$\phi_i(x, y) = \alpha_{i,T}x + \beta_{i,T}y + \gamma_{i,T}xy + \delta_{i,T} \quad \forall x, y \in T,$$

avec  $\alpha_{i,T}, \beta_{i,T}, \gamma_{i,T}$  et  $\delta_{i,T} \in \mathbb{R}$ . On a aussi que, par construction de nos fonctions de forme, le support de  $\phi_i$  est l'ensemble des rectangles contenant le sommet  $s_i$ . On se place sur un rectangle T contenant le sommet  $s_i$  de coordonnées  $(s_i^1, s_i^2)$ , et on dénote les autres sommets par  $s_{i,2}, s_{i,3}$  et  $s_{i,4}$  de coordonnées respectives  $(s_{i,2}^1, s_{i,2}^2), (s_{i,3}^1, s_{i,3}^2)$  et  $(s_{i,4}^1, s_{i,4}^2)$ . On a alors :

$$\begin{cases} \phi_i(s_i) &= \alpha_{i,T}s_i^1 + \beta_{i,T}s_i^2 + \gamma_{i,T}s_i^1s_i^2 + \delta_{i,T} &= 1 \\ \phi_i(s_{i,2}) &= \alpha_{i,T}s_{i,2}^1 + \beta_{i,T}s_{i,2}^2 + \gamma_{i,T}s_{i,2}^1s_{i,2}^2 + \delta_{i,T} &= 0 \\ \phi_i(s_{i,3}) &= \alpha_{i,T}s_{i,3}^1 + \beta_{i,T}s_{i,3}^2 + \gamma_{i,T}s_{i,3}^1s_{i,3}^2 + \delta_{i,T} &= 0 \\ \phi_i(s_{i,4}) &= \alpha_{i,T}s_{i,4}^1 + \beta_{i,T}s_{i,4}^2 + \gamma_{i,T}s_{i,4}^1s_{i,4}^2 + \delta_{i,T} &= 0 \end{cases}$$

Ou encore :

$$\begin{pmatrix} s_i^1 & s_i^2 & s_i^1s_i^2 & 1 \\ s_{i,2}^1 & s_{i,2}^2 & s_{i,2}^1s_{i,2}^2 & 1 \\ s_{i,3}^1 & s_{i,3}^2 & s_{i,3}^1s_{i,3}^2 & 1 \\ s_{i,4}^1 & s_{i,4}^2 & s_{i,4}^1s_{i,4}^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{i,T} \\ \beta_{i,T} \\ \gamma_{i,T} \\ \delta_{i,T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On appelle alors  $A_i$  la matrice  $4 \times 4$  associée à ce système, elle est liée à la surface du rectangle T. En effet, dans le calcul de  $\det(A)$ , en soustrayant la ligne 1 aux autres lignes puis en simplifiant les coordonnées, on obtient :  $|\det(A_i)| = (s_{i,1}^1 - s_i^1)^2 (s_{i,3}^2 - s_i^2)^2 = (\text{surf}(T))^2$ . Le maillage étant considéré non dégénéré on a bien que  $\forall T \in \mathcal{T}_h$   $\text{surf}(T) > 0$  et donc  $\det(A_i) > 0$ . On résout alors le système par la méthode de Cramer, et les solutions sont alors les

suivantes :

$$\alpha_{i,T} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & s_i^2 & s_i^1 s_i^2 & 1 \\ 0 & s_{i,2}^2 & s_{i,2}^1 s_{i,2}^2 & 1 \\ 0 & s_{i,3}^2 & s_{i,3}^1 s_{i,3}^2 & 1 \\ 0 & s_{i,4}^2 & s_{i,4}^1 s_{i,4}^2 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A_i)}$$

$$\beta_{i,T} = \frac{\begin{vmatrix} s_i^1 & 1 & s_i^1 s_i^2 & 1 \\ s_{i,2}^1 & 0 & s_{i,2}^1 s_{i,2}^2 & 1 \\ s_{i,3}^1 & 0 & s_{i,3}^1 s_{i,3}^2 & 1 \\ s_{i,4}^1 & 0 & s_{i,4}^1 s_{i,4}^2 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A_i)}$$

$$\gamma_{i,T} = \frac{\begin{vmatrix} s_i^1 & s_i^2 & 1 & 1 \\ s_{i,2}^1 & s_{i,2}^2 & 0 & 1 \\ s_{i,3}^1 & s_{i,3}^2 & 0 & 1 \\ s_{i,4}^1 & s_{i,4}^2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A_i)}$$

$$\delta_{i,T} = \frac{\begin{vmatrix} s_i^1 & s_i^2 & s_i^1 s_i^2 & 1 \\ s_{i,2}^1 & s_{i,2}^2 & s_{i,2}^1 s_{i,2}^2 & 0 \\ s_{i,3}^1 & s_{i,3}^2 & s_{i,3}^1 s_{i,3}^2 & 0 \\ s_{i,4}^1 & s_{i,4}^2 & s_{i,4}^1 s_{i,4}^2 & 0 \end{vmatrix}}{\det(A_i)}$$

Maintenant que nous connaissons de manière explicite les coefficients de chacune des fonctions de formes  $\phi_i$ , on peut passer au calcul des coefficients des matrices A, b et c, qui forment notre système.

#### Calcul des coefficients $(A_{j,i})_{1 \leq i,j \leq N}$

Comme pour tout  $1 \leq i \leq N$ , la fonction  $\phi_i$  est un élément de  $Q_{1,T}$ , alors on a que le vecteur  $\nabla \phi_i$  est un vecteur donc les 2 composantes sont des éléments de  $P_{1,T}$ , l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 1 défini sur T :

$\nabla \phi_{i,T} = \begin{pmatrix} \alpha_{i,T} + \gamma_{i,T}y \\ \beta_{i,T} + \gamma_{i,T}x \end{pmatrix}$ . Par la suite, on partitionne notre intégrale suivant

l'ensemble des éléments de notre triangulation :

$$\begin{aligned}
A_{j,i} &= \int_{\Omega} \gamma_{\epsilon} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j dx dy \\
&= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \gamma_{\epsilon} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j dx dy \\
&= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \gamma_{\epsilon} \begin{pmatrix} \alpha_{i,T} + \gamma_{i,T} y \\ \beta_{i,T} + \gamma_{i,T} x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{j,T} + \gamma_{j,T} y \\ \beta_{j,T} + \gamma_{j,T} x \end{pmatrix} dx dy \\
&= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \gamma_{\epsilon} [(\alpha_{i,T} + \gamma_{i,T} y)(\alpha_{j,T} + \gamma_{j,T} y) + (\beta_{i,T} + \gamma_{i,T} x)(\beta_{j,T} + \gamma_{j,T} x)] dx dy \\
&= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \gamma_{\epsilon} [\beta_{i,T} \beta_{j,T} + \alpha_{i,T} \alpha_{j,T} + (\alpha_{i,T} \gamma_{j,T} + \alpha_{j,T} \gamma_{i,T}) y \\
&\quad + (\beta_{i,T} \gamma_{j,T} + \beta_{j,T} \gamma_{i,T}) x + \gamma_{i,T} \gamma_{j,T} (y^2 + x^2)] dx dy
\end{aligned}$$

Et pour calculer cette intégrale, nous utilisons la formule de quadrature de Gauss définis sur  $T = [-1, 1] \times [-1, 1]$  :

$$\int_T F(x) dx \approx \frac{\text{surf}(T)}{4} \sum_{k=1}^4 F(X_q), \quad (13)$$

où  $X_q = (\pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{3})$ .

On note  $\hat{T} = [a_{i,1}^1, a_{i,2}^1] \times [a_{i,3}^2, a_{i,4}^2]$ ,  $\hat{T} \in \mathcal{T}_h$  et :

$$\begin{aligned}
\varphi : T &\longrightarrow \hat{T} \\
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} \frac{(a_{i,2}^1 - a_{i,1}^1)}{2} x_1 + \frac{(a_{i,2}^1 + a_{i,1}^1)}{2} \\ \frac{(a_{i,4}^2 - a_{i,3}^2)}{2} x_2 + \frac{(a_{i,4}^2 + a_{i,3}^2)}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Il suit que  $\forall (x_1, x_2) \in T$  :

$$\begin{aligned}
\det(Jac_{\varphi}) &= \begin{vmatrix} \frac{(a_{i,2}^1 - a_{i,1}^1)}{2} & 0 \\ 0 & \frac{(a_{i,4}^2 - a_{i,3}^2)}{2} \end{vmatrix} \\
&= \frac{(a_{i,2}^1 - a_{i,1}^1)(a_{i,4}^2 - a_{i,3}^2)}{4} \\
&= \frac{\text{surf}(\hat{T})}{4} \\
&> 0
\end{aligned}$$

Par ailleurs,  $\varphi$  est bijective et de classe  $\mathcal{C}^1$ , c'est donc un  $\mathcal{C}^1$  difféomorphisme. On utilise  $\varphi$  afin d'effectuer un changement de variable et d'appliquer la formule

de quadrature de Gauss :

$$\begin{aligned}\int_{\hat{T}} F(t) dt &= \int_T (F \circ \varphi)(x) |\det(Jac_\varphi(x))| dx \\ &= \frac{\text{surf}(\hat{T})}{4} \sum_{k=1}^4 F(\varphi(X_q)),\end{aligned}$$

où  $X_q = (\pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{3})$ .

### Calcul des coefficients $(b_i)_{1 \leq i \leq N}$

Rappelons que  $b_i = \int_{\partial\Omega} g\phi_i d\sigma + \int_{\Omega} f\phi_i dx \forall 1 \leq i \leq N$ , nous avons donc deux intégrales à calculer.

Pour l'intégrale sur  $\Omega$ , elle se calcule comme précédemment avec la formule de quadrature des 4 points intérieurs.

Ensuite pour l'intégrale le long du bord de  $\Omega$ , on pose  $\mathcal{A}_h$  l'ensemble des arrêtes situées sur le bord de  $\Omega$  du maillage. On peut donc partitionner la frontière  $\partial\Omega$  selon les arrêtes de  $\mathcal{A}_h$  et  $\forall 1 \leq i \leq N$  :

$$\int_{\partial\Omega} g\phi_i d\sigma = \sum_{a \in \mathcal{A}_h} \int_a g\phi_i d\sigma.$$

Soit  $a \in \mathcal{A}_h$ , alors on note  $a_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \end{pmatrix}$  et  $a_2 = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \end{pmatrix}$  les 2 sommets de notre arrête  $a$ , on a donc la paramétrisation suivante :

$$\forall t \in [0; 1], \gamma(t) = \begin{pmatrix} t(a_1^1 - a_2^1) + a_2^1 \\ t(a_1^2 - a_2^2) + a_2^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \forall t \in [0; 1], \gamma'(t) = \begin{pmatrix} a_1^1 - a_2^1 \\ a_1^2 - a_2^2 \end{pmatrix}$$

On utilise donc cette paramétrisation dans notre calcul de l'intégrale  $\int_{\partial\Omega} g\phi_i d\sigma$ , et on trouve d'après la définition 2 :

$$\int_{\partial\Omega} g\phi_i d\sigma = \sum_{a \in \mathcal{A}_h} l(a) \int_0^1 (g\phi_i) (t(a_1^1 - a_2^1) + a_2^1, t(a_1^2 - a_2^2) + a_2^2) dt$$

avec  $l(a) = \|\gamma'(t)\|$ .

Enfin, pour approcher chacune des intégrale sur  $[0; 1]$ , on utilise la formule de quadrature de Simpson et l'on a :

$$\int_{\partial\Omega} g\phi_i d\sigma \approx \sum_{a \in \mathcal{A}_h} l(a) \frac{g(a_1)\phi_i(a_1) + g(a_2)\phi_i(a_2) + 4g(\frac{a_1+a_2}{2})\phi_i(\frac{a_1+a_2}{2})}{6}$$

De plus, si l'on se place sur l'arrête  $[a_i; a_{i+1}]$  et que l'on considère que la formule de Simpson est exacte pour les polynômes de degré inférieure ou égal à

3, on obtient la simplification suivante :

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} g\phi_i d\sigma &\approx \sum_{a \in \mathcal{A}_h} l(a) \frac{g(a_i) + 4g(\frac{a_i+a_{i+1}}{2})\phi_i(\frac{a_i+a_{i+1}}{2})}{6} \\
&= \sum_{a \in \mathcal{A}_h} l(a) \frac{g(a_i) + 4g(\frac{a_i+a_{i+1}}{2})\phi_i(\frac{a_i+a_{i+1}}{2})}{6} \\
&= \sum_{a \in \mathcal{A}_h} l(a) \frac{g(a_i) + 2g(\frac{a_i+a_{i+1}}{2})}{6},
\end{aligned} \tag{14}$$

avec le fait que  $\phi_i|_{[a_i; a_{i+1}]}(\frac{a_i+a_{i+1}}{2}) = \frac{1}{2} \quad \forall 1 \leq i \leq N$  car nos fonctions de forme  $\phi_i$  sont des polynômes de degré inférieur ou égal à 1, qui valent 1 en  $a_i$  et 0 sur les autres sommets.

Finalement, on calcule les coefficients  $b_i$  en sommant les 2 approximations (13) et (14).

#### Calcul des coefficients $(c_i)_{1 \leq i \leq N}$

On rappelle que  $\forall 1 \leq i \leq N, \quad c_i = \int_{\partial\Omega} \phi_i d\sigma$ . On note  $\mathcal{A}_{i,h}$  le sous ensemble de  $\mathcal{A}_h$  contenant les arrêtes sur  $\partial\Omega$  du  $i$ -ème élément. En réutilisant les formules utilisées pour calculer l'intégrale  $\int_{\partial\Omega} g\phi_i d\sigma$ , on obtient que :

$$c_i = \int_{\partial\Omega} \phi_i d\sigma = \sum_{a \in \mathcal{A}_{i,h}} \frac{l(a)}{2}$$

## 5 Mise en oeuvre numérique

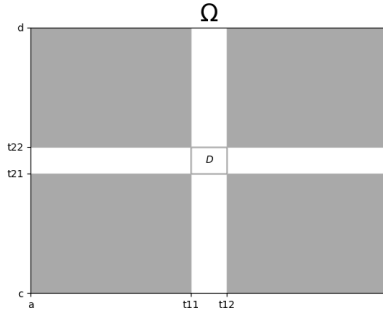
### 5.1 Construction du maillage

On cherche donc maintenant à construire le maillage associé à la formulation discrète évoquée précédemment, on l'effectue dans le langage de programmation python et plus précisément à l'aide du module numpy.

#### Une inhomogénéité

On se place dans le contexte d'une inhomogénéité de forme rectangulaire, c'est à dire que l'on considère :

- $\Omega = [a, b] \times [c, d]$  : le domaine à mailler.
- $D = [t_{11}, t_{12}] \times [t_{21}, t_{22}]$  : l'inhomogénéité.
- $T_i$  : un élément du maillage.
- $h = \max(\text{diam}(T))$  : le pas maximal de maillage.



**Figure 1.**

On cherche donc à mailler  $\Omega$  avec des éléments rectangulaire, en utilisant  $h$  comme pas maximal de maillage. On souhaite cependant mailler de sorte à ce que l'on place systématiquement des éléments sur le bord de l'Inhomogénéité ( $\partial D$ ), et le bord du domaine ( $\partial \Omega$ ). On construit donc une fonction nommée maillage prenant en entrée, le domaine  $\Omega$ , l'Inhomogénéité considérée  $D$ , le pas maximal de maillage  $h$ .

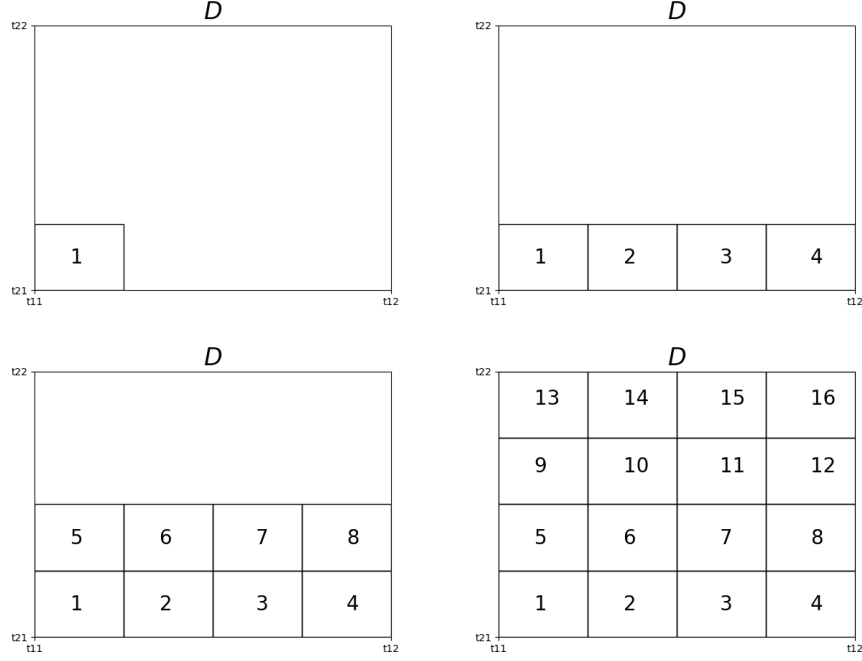
Dans cette fonction on commence par considérer que  $\Omega$  se décompose en 9 sous domaine rectangulaire, comme schématiser sur la figure 1, sur lesquels on doit calculer différents pas de maillage locaux. On note pas vertical et pas horizontal,  $h_1$  et  $h_2$  tel que  $h_1^2 + h_2^2 = h^2$ , les longueurs des arrêtes d'un éléments.

Ainsi pour chaque sous domaine on calcule un pas vertical et horizontal local que l'on utilisera par la suite pour construire les éléments sur le sous domaine correspondant. Notons  $e$  un segment quelconque et  $l(e)$  sa longueur, ces pas sont construits tel que :

- Si  $e$  est l'un des segments caractérisant l'inhomogénéité :  $h_{loc} = \frac{l(e)}{4}$

- Sinon  $\forall i \in \{1, 2\} \quad n = \frac{l(e)}{h_i} \quad h_{loc} = \frac{l(e)}{[n]}$

Finalement, on construit le maillage élément par élément ligne par ligne comme présenté sur  $D$ , ci-dessous.



**Figure 2.**

Pour chacun des éléments on calcule les coordonnées des points manquants auxquels on attribue un numéro globale, ainsi qu'un numéro local représentant la position du point sur l'élément dans le sens trigonométrique. On note également les éléments et les sommets sur la frontière du domaine. En notant,  $n_{11}$ ,  $n_{12}$ ,  $n_{13}$  et  $n_{21}$ ,  $n_{22}$ ,  $n_{23}$  le nombre d'élément sur chacune des subdivisions de  $[a, b]$  et  $[c, d]$  et  $n_1 = n_{11} + n_{12} + n_{13}$ ,  $n_2 = n_{21} + n_{22} + n_{23}$ . On a construit  $N = (N_1 + 1) \times (N_2 + 1)$  noeuds de maillage, ainsi que  $n_T = n_1 \times n_2$  éléments.

Pour conclure, notre fonction retourne :

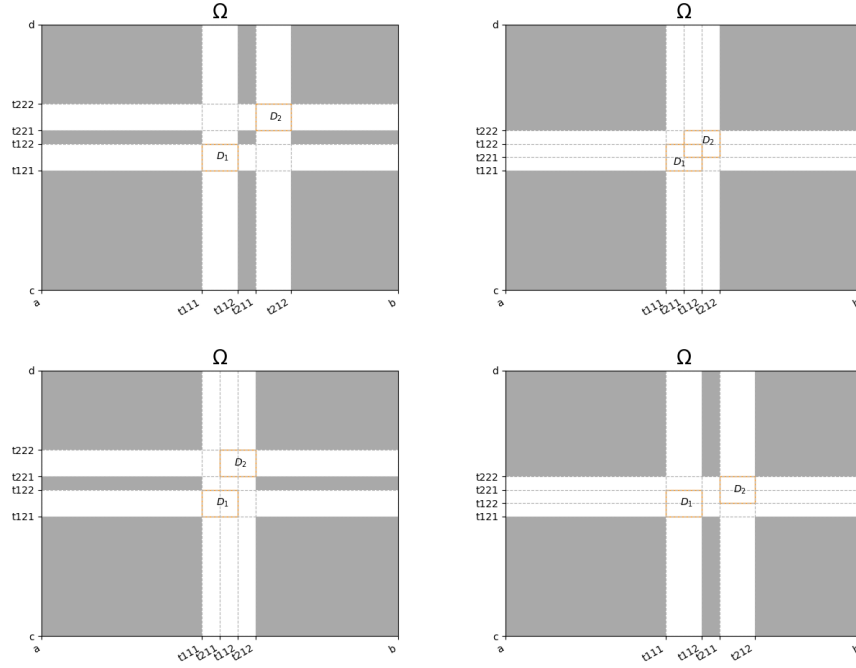
- NbSom et NbElt : Le nombre de sommet et d'élément total ;
- Coord : Le tableau des coordonnées des sommets, de taille  $N \times 2$  ;
- NumSom : Le tableau des numéros des sommets associés à chaque élément, de taille  $n_T \times 4$  ;
- RefCoord : Un tableau indiquant si un sommet est sur le bord ou non.
- RefElt : Un tableau indiquant si un élément admet un sommet sur le bord ou non.

### Un nombre fini d'Inhomogénéité

On se place dans le contexte d'un nombre fini inhomogénéité de forme rectangulaire, c'est à dire que l'on considère :

- $\Omega = [a, b] \times [c, d]$  : le domaine à mailler.
- $D_i$  : une famille d'inhomogénéité.
- $T_i$  : un élément du maillage.
- $h = \max(\text{diam}(T))$  : le pas maximal de maillage.

On remarque que l'on peut expliquer le lien entre 2 inhomogénéités quelconque de  $D_i$ , notée ici  $D_1 = [t_{111}, t_{112}] \times [t_{121}, t_{122}]$ ,  $D_2 = [t_{211}, t_{212}] \times [t_{221}, t_{222}]$ , de 4 façon différentes :



**Figure 3.**

Ainsi, dans le cas d'un nombre fini d'inhomogénéités on cherche un ensemble de sous domaine disjoints de  $\Omega$  sur lesquels on calculera localement le pas vertical et horizontal adéquat.

Tout d'abord on a construit une fonction prenant en entrée la famille d'inhomogénéité considérée et la renvoyant sous forme d'intervalles disjoints. Ensuite, ayant l'assurance qu'aucune inhomogénéité ne se trouve sur  $\partial\Omega$ , on parcourt cette liste d'intervalles disjoints en considérant que 1 intervalle sur 2 caractérise l'inhomogénéité. Finalement, on calcule comme pour une inhomogénéité les pas verticaux et horizontaux correspondant puis on construit le maillage et renvoie les même données.



## 5.2 Résultats numériques

On s'intéresse donc ici aux résultats obtenus lors de la résolution de l'équation matricielle  $\tilde{A}U = \tilde{b}$ . La matrice  $\tilde{A}$  n'étant pas carrée, on se propose de trouver une solution au sens des moindres carrés, ce qui revient donc à résoudre l'équation matricielle :  $\tilde{A}^T \tilde{A}U = \tilde{A}^T \tilde{b}$ .

Pour cette résolution, on considère le problème (3) en posant,  $\forall (x, y) \in \Omega$  :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= -2(x(x-1))^2(6y^2 - 6y + 1) - 2(y(y-1))^2(6x^2 - 6x + 1) \\ \gamma_\epsilon &\equiv 1 \end{aligned}$$

et

$$g(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega$$

Une solution analytique de ce problème est la fonction :

$$u_{an}(x, y) := (x(x-1))^2(y(y-1))^2$$

En notant  $u_h$  notre solution trouvée de manière numérique, on utilisera  $\|\cdot\|_{l_2}$  pour estimer l'erreur  $u_h - u_{an}$ .

En prenant donc 5 pas de maillage différents, on obtient les prémisses de résultats numériques suivants :

$h$	$\ u_h - u_{an}\ _{l_2}$
$h = 2 \times 10^{-1}$	$1.91 \times 10^{-4}$
$h = 1 \times 10^{-1}$	$6.18 \times 10^{-4}$
$h = 5 \times 10^{-2}$	$2.03 \times 10^{-4}$

# Bibliographie

- [1] H. Ammari et H. Kang, *Reconstruction of small inhomogeneities from boundary measurements*, Lecture Notes in Mathematics, v.1846, Springer-Verlag, Berlin, 2004
- [2] J.K. Hammond, *Analyse Numérique d'un Problème de conductivité 2D*, Mémoire de Master-1, Département Mathématiques, Université de Lorraine, 2012-2013.
- [3] P.A. Raviart et J.M. Thomas, *Introduction à l'Analyse Numérique des Equations aux Dérivées Partielles*, Masson, Paris, 1983.
- [4] S. Mefire, *Note de cours unité "Calcul scientifique"*, M1-Mathématiques, Département Mathématiques, Université de Lorraine, 2021-2022.
- [5] R.D.J. Ouedraogo et T. Diouf, *Discrétisation par élément finis rectangulaires d'un problème de conductivité 2D et mise en oeuvre*, Mémoire de Master-1, Département Mathématiques, Université de Lorraine, 2016-2017.
- [6] A. Guyau, *Discrétisation par élément finis triangulaires d'un problème de conductivité 2D et mise en oeuvre*, Mémoire de Master-1, Département Mathématiques, Université de Lorraine, 2016-2017.