Домашняя контрольная работа

Гиниятуллин Арслан

Июль 2022

Вариант 2

1. Посчитать площадь фигуры, ограниченной данной кривой, заданной в полярных координатах:

$$r^2 = \cos(2\varphi)$$

Решение:

$$\cos(2\varphi) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\varphi \geq -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ 2\varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi \geq -\frac{\pi}{4} + \pi n \\ \varphi \leq \frac{\pi}{4} + \pi n \end{cases}$$

Нам подходит n = 0, 1. На этих отрезках будет одинаковая сумма, поэтому:

$$S = 2\left(\frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2\varphi \, d\varphi\right) = \frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = 1$$

Ответ: 1.

2. Посчитать длину кривой, заданной параметрически:

$$x = 2\cos^3 t,\ y = 2\sin^3 t$$

Решение:

$$x' = -6\cos^2 t \sin t,\ y' = 6\sin^2 t \cos t$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} \, dt = 3\int_0^{2\pi} |\sin 2t| \, dt$$

График $|\sin 2t|$ на $0..2\pi$ состоит из четырех одинаковых дуг. Значит:

$$L = 6 \cdot 4 \int_0^{\pi/2} \sin 2t \, dt = 12$$

Ответ: $L = 12$.

3. Исследовать на сходимость несобственный интеграл:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^5 x}{x} \, dx$$

Решение:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^5 x}{x} \, dx = \int_0^{1} \frac{\sin^5 x}{x} \, dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin^5 x}{x} \, dx$$

$$\int_0^{1} \frac{\sin^5 x}{x} \, dx \sim \int_0^{1} \sin^4 x \, dx \text{ (нет никаких проблем)}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin^5 x}{x} \, dx - \text{сх-ся по Дирихле :}$$

1)$\int \sin^5 x$ ограничен, т.к $\sin^5 x = \frac{1}{16}(10 \sin x - 5 \sin 3x + \sin 5x)$, а $\int \sin x$ ограничен.
2)$\frac{1}{x}$ монотонно стремится к 0(очевидно).

Ответ: интеграл сходится.

4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n}}$$

Решение:

1)Ряд сх-ся по Дирихле, т.к частичные суммы $\cos x$ ограниченны, а $\frac{1}{\sqrt{n}}$ монотонно стремится к 0.

2)Проверим абсолютную сх-ть:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\cos n|}{\sqrt{n}} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^2 n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 2n}{2\sqrt{n}}$$

Первая сумма расх-ся, т.к степень ≤ 1.
Вторая сумма сх-ся по Дирихле(аналогично пункту 1).
В итоге расх-ся + сх-ся = расх-ся.

Ответ: условно сходится.

5. Определить область абсолютной и условной сходимости функционального ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{1+x^{2n+1}}$$

Решение:

Воспользуемся признаком Коши:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{x^{2n}}{|1+x^{2n+1}|}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x^2}{\sqrt[n]{|1+x^{2n+1}|}}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x^2}{\sqrt[n]{|1+x^{2n+1}|}} = \begin{cases} |x|>1, \ \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{\sqrt[n]{|1+x^{2n+1}|}} = 1 \text{ ничего не понято, жаль} \\ |x|=1, \ \text{расх-ся(при x = 1 сумма констант, при x = -1 делим на 0)} \\ |x|<1, \ \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{\sqrt[n]{|1+x^{2n+1}|}} = x^2 < 1 \text{ т.е сх-ся абсолютно.} \end{cases}$$

При x > 1:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{1+x^{2n+1}} \geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2x^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2x} \text{ расх-ся}$$

x < 1 аналогично x > 1, только теперь расходится в $-\infty$.

Ответ: сходится абсолютно при $|x| < 1$.

6. Найти предел данной функциональной последовательности при $n \to +\infty$ и выяснить, будет ли эта сходимость равномерной на заданном множестве E:

$$f_n(x) = \frac{nx^2}{n+x}$$

Решение:

Найдем поточечную сходимость:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nx^2}{n+x} = x^2$$

Проверим на равномерную сходимость:

$$\sup\left|\frac{nx^2}{n+x}-x^2\right|=\sup\left|\frac{x^3}{n+x}\right|$$

a) $E=[1;+\infty)$:
При x = n:

$$\sup\left|\frac{x^3}{n+x}\right|=\sup\left|\frac{n^3}{2n}\right|=\frac{1}{2}n^2\to\infty \text{ (нет равномерной сходимости)}$$

b) $E=[0;2]$ Найдем производную:

$\dfrac{3x^2(n+x)-x^3}{(n+x)^2}=0\Rightarrow 3n+3x-x=0\Rightarrow x=-\dfrac{3}{2}n<0$ (т.е при x > 0 функция возрастает)

Значит максимум будет в x = 2:

$$\sup\left|\frac{x^3}{n+x}\right|=\sup\left|\frac{8}{n+2}\right|\to 0$$

Ответ: $f(x)=x^2$; a) Неравномерно; b) Равномерно.

7. Исследовать равномерную сходимость данного ряда на данном множестве:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2\cos n}{\sqrt{n+2x}},\ E=[1;10]$$

Решение:

Сразу видно, что равномерно сходится по Дирихле:
1) $\left|\sum x^2\cos n\right| = x^2\left|\sum\cos n\right| \le 100\left|\sum\cos n\right|$, ну а $\sum\cos n$ ограничена $\Rightarrow \sum x^2\cos n$ равномерно ограничена.
2) $\frac{1}{\sqrt{n+2x}}$ очевидно равномерно сх-ся(максимум в x = 1, $\frac{1}{\sqrt{n+2}}\to 0$)

Ответ: равномерно сходится.

8. Найти сумму данного функционального ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)x^n}{3^n}$$

Решение:

Воспользуемся признаком Коши:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|x|}{3} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{|x|}{3}$$

Т.о только при |x| $<$ 3 абсолютно сх-ся(при |x| $=$ 3 будет сумма чисел больших 1). Дальше мы будем вносить интеграл в сумму т.к ряд равномерно сх-ся(рассматриваем $|x| < 3$):

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)(n+3)\left(\frac{x}{3}\right)^n$$

$$S_1(x) = \int_0^x S(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (n+1)(n+2)(n+3)\left(\frac{t}{3}\right)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+2)(n+3)\left(\frac{x}{3}\right)^{n+1}$$

$$S_2(x) = \int_0^x S_1(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x 3(n+2)(n+3)\left(\frac{t}{3}\right)^{n+1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} 9(n+3)\left(\frac{x}{3}\right)^{n+2}$$

$$S_3(x) = \int_0^x S_2(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x 9(n+3)\left(\frac{t}{3}\right)^{n+2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} 27\left(\frac{x}{3}\right)^{n+3} = x^3\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n = \frac{3x^3}{3-x}$$

$$S_2(x) = S_3'(x) = \frac{9x^2(3-x)+3x^3}{(3-x)^2} = -\frac{6x^3-27x^2}{(x-3)^2}$$

$$S_1(x) = S_2'(x) = -\frac{(18x^2-54x)(x-3)^2 - 2(x-3)(6x^3-27x^2)}{(x-3)^4} =$$

$$= -\frac{18x^3-54x^2-54x^2+162x-12x^3+54x^2}{(x-3)^3} = -\frac{6x^3-54x^2+162x}{(x-3)^3}$$

$$S(x) = S_1'(x) = -\frac{(18x^2-108x+162)(x-3)^3 - 3(x-3)^2(6x^3-54x^2+162x)}{(x-3)^6} =$$

$$= -\frac{18x^3-54x^2-108x^2+324x+162x-486-18x^3+162x^2-486x}{(x-3)^4} = \frac{486}{(x-3)^4}$$

Ответ: $S(x) = \frac{486}{(x-3)^4}$, $|x| < 3$.

9. Построить ряд Фурье для данной функции, заданной на отрезке $-\pi; \pi$. Написать функцию, к которой поточечно сходится этот ряд:

$$f(x) = \begin{cases} x/2,\ x \in [-\pi; 0) \\ 1,\ x \in [0; \pi] \end{cases}$$

Решение:

Ответ: Что будет, если Пиноккио скажет: "Сейчас у меня вырастет нос"?