Taki Academy
www.takiacademy.com

Mathématiques

Classe : BAC INFORMATIQUE

Session Principale 2022

Exercice 1 — 45' min — 5 pt

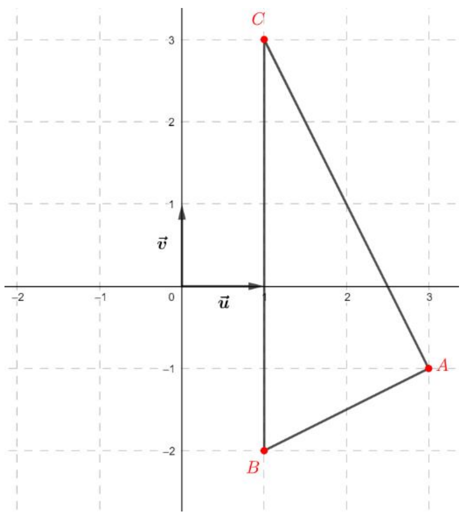
1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2-(4-3i)z+1-7i=0$.

   a) Vérifier que $(2+i)^2=3+4i$.

   b) Résoudre (E).

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A=3-i$, $z_B=1-2i$ et $z_C=1+3i$.

   On désigne par (C) le cercle de diamètre $[BC]$.

   a) Calculer $(z_A-z_B)(\overline{z_A-z_C})$.

   b) En déduire que A appartient à (C).

   Dans la suite de l'exercice, M désigne un point du cercle (C) différent de B et C.

3) On pose $z_M=x+iy$ avec x et y deux réels.

   On note Ω le centre de (C).

   a) Vérifier que : $z_\Omega=1+\frac{1}{2}i$ et calculer ΩA.

   b) Montrer que $(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$.

4) Soit H le projeté orthogonal du point M sur la droite (BC) et on désigne par S l'aire du triangle MBC.

   a) Justifier que : $z_h=1+iy$

   b) Montrer que : $S=\frac{5}{2}|x-1|$.

   c) Déterminer les affixes des points M pour lesquels $S=5$.

Exercice 2 — 45' min — 5 pt

1) On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $(E'): 3x-4y=7$.

   a) Vérifier que $(1,-1)$ est une solution de (E').

b) Déterminer les couples (x, y) de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ solution de (E').

2) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on considère les nombres $a_n = 4n^2+8n-3$ et $b_n = 3n^2+6n-4$.
On pose : $d_n = PGCD(a_n, b_n)$.

a) Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n = 4(n^2+2n-1)+1$ et $b_n = 3(n^2+2n-1)-1$ et montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, (a_n, b_n) est une solution de (E').

b) Montrer que $d_n = 1$ ou $d_n = 7$.

3)

a) Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

b) Recopier et compéter le tableau suivant :

Reste de la division euclidienne de n par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division euclidienne de $(n+1)^2$ par 7							

4)

a) Montrer que si $d_n = 7$ alors $n \equiv 6[7]$.

b) Montrer que si $n \equiv 6[7]$ alors a_n et b_n sont divisibles par 7.

Exercice 3 — 40' min — 4,5 pt

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = e^{-n}U_n \ ; \ n\in\mathbb{N} \end{cases}$

1)

a) Calculer U_1 et U_2.

b) Montrer par récurrence, que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_n > 0$.

c) Justifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $e^{-n} \le 1$ et montrer que (U_n) est décroissante.

d) Montrer que la suite (U_n) est convergente.

2) Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = \ln(U_n)$.

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $V_{n+1} - V_n = -n$.

b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $V_n = \dfrac{-n(n-1)}{2}$.

3)

a) Donner l'expression de U_n en fonction de n.

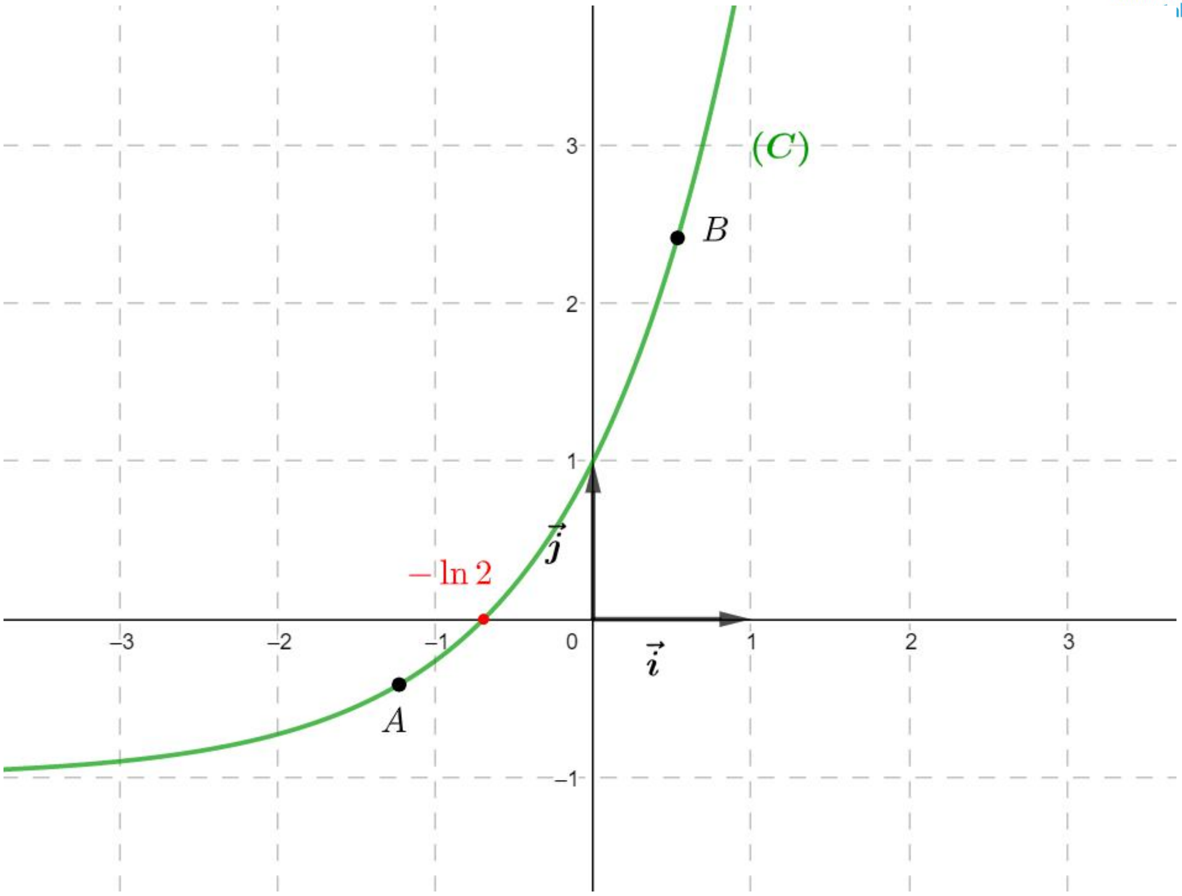
b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 4 | 55' min | 6 pt

On donne ci-dessous la courbe (C) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=2e^{x}-1$.

1) En utilisant le graphique, déterminer $g(-\ln 2)$ et donner le signe de g sur $\mathbb{R}$.
2) On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2e^{x}(e^{x}-1)$ et on note (Γ) sa courbe représentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.
   a) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement ce résultat.
   b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement ce résultat.
3)
   a) Montrer que $f'(x)=2e^{x}g(x)$ pour tout réel x.
   b) Vérifier que $f(-\ln 2)=-\dfrac{1}{2}$ et donner le tableau de variation de f.
4)
   a) Montrer que $f(x)-g(x)=2\left[(e^{x}-1)^{2}-\dfrac{1}{2}\right]$ pour tout réel x et en déduire que (C) et (Γ) se coupent aux points : $A\left(\ln\dfrac{2-\sqrt{2}}{2},1-\sqrt{2}\right)$ et $B\left(\ln\dfrac{2+\sqrt{2}}{2},1+\sqrt{2}\right)$.
   b) Déterminer $f(0)$ et donner le signe de f sur $\mathbb{R}$.
   c) Tracer la courbe (Γ).
5) Soit I l'aire du domaine D du plan limité par la courbe (Γ), l'axe $(O,\vec{i})$ et les droites d'équations $x=-\ln 2$ et $x=0$.
   a) Montrer que $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(f'(x)-g'(x)\right)$ pour tout réel x.
   b) Montrer que : $I=\dfrac{1}{4}$.
   c) Pour tout réel $\alpha<-\ln 2$, on note I_{α} l'aire du domaine D_{α} du plan limité par la courbe (Γ), l'axe $(O,\vec{i})$ et les droites d'équation $x=\alpha$ et $x=-\ln 2$.

      Montrer que : $I_{\alpha}=\dfrac{1}{2}\left(f(\alpha)-g(\alpha)\right)+\dfrac{1}{4}$.
   d) En déduire que $I_{\alpha}=I$ si et seulement si $\alpha=\ln\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$.
   e) Hachurer les domaines D et D_{α} pour $\alpha=\ln\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$.


(C)
B
A
$-\ln 2$
$\vec{i}$
$\vec{j}$
−3
−2
−1
0
1
2
3
−1
1
2
3


Q
Magazines