

Отчёт по лабораторной работе 2.2.3.

**Измерение теплопроводности воздуха при
атмосферном давлении.**

Работу выполнил Громов Артём
ЛФИ Б02-006

Долгопрудный, 2021 г.

1. Аннотация

Цель работы: измерить коэффициент теплопроводности воздуха при атмосферном давлении в зависимости от температуры.

В работе используются: цилиндрическая колба с натянутой по оси нитью; термостат; вольтметр и амперметр (цифровые мультиметры); эталонное сопротивление; источник постоянного напряжения; реостат (или магазин сопротивлений).

Теплопроводность — это процесс передачи тепловой энергии от нагретых частей системы к холодным за счёт хаотического движения частиц среды (молекул, атомов и т.п.). В газах теплопроводность осуществляется за счёт непосредственной передачи кинетической энергии от быстрых молекул к медленным при их столкновениях. Перенос тепла описывается законом Фурье, утверждающим, что плотность потока энергии \vec{q} Вт/м² (количество теплоты, переносимое через единичную площадку в единицу времени) пропорциональна градиенту температуры ∇T :

$$\vec{q} = -\kappa \nabla T, \quad (1)$$

где κ — коэффициент теплопроводности.

Молекулярно-кинетическая теория даёт следующую оценку для коэффициента теплопроводности газов:

$$\kappa \sim \lambda \bar{v} n c_V \quad (2)$$

где λ — длина свободного пробега молекул газа, $\bar{v} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$ — средняя скорость их теплового движения, n — концентрация (объёмная плотность) газа, $c_V = \frac{i}{2} k_B$ — его теплоёмкость при постоянном объёме в расчёте на одну молекулу (i — эффективное число степеней свободы молекулы).

Длина свободного пробега может быть оценена как $\lambda = 1/n\sigma$, где σ — эффективное сечение столкновений молекул друг с другом. Тогда из (2) видно, что коэффициент теплопроводности газа не зависит от плотности газа и определяется только его температурой. В простейшей модели твёрдых шариков $\sigma = \text{const}$, и коэффициент теплопроводности пропорционален корню абсолютной температуры: $\kappa \propto \bar{v} \propto \sqrt{T}$. На практике эффективное сечение $\sigma(T)$ следует считать медленно убывающей функцией T .

Рассмотрим стационарную теплопроводность в цилиндрической геометрии (см. рис. 1). Пусть тонкая нить радиусом r_1 и длиной L помещена на оси цилиндра радиусом r_0 . Температура стенок цилиндра T_0 поддерживается постоянной. Пусть в нити выделяется некоторая тепловая мощность Q . Если цилиндр длинный ($L \gg r_0$), можно пренебречь теплоотводом через его торцы. Тогда все параметры газа можно считать зависящими только от расстояния до оси системы r . Вместо (1) имеем:

$$q = -\kappa \frac{dT}{dr}. \quad (3)$$

В стационарном состоянии полный поток тепла через любую цилиндрическую поверхность радиуса r площадью $S = 2\pi r L$ должен быть одинаков и равен $Q = qS$:

$$Q = -2\pi r L \cdot \kappa \frac{dT}{dr} = \text{const.} \quad (4)$$

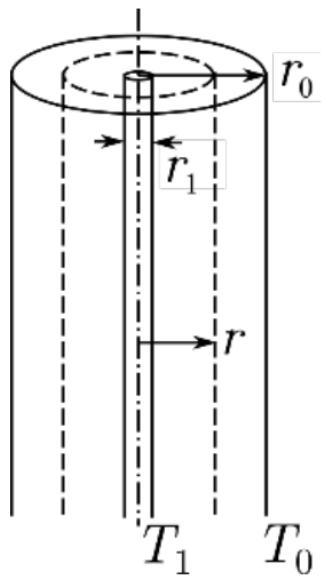


Рис. 1: Геометрия задачи

Если перепад температуры $\Delta T = T_1 - T_2$ между нитью и стенками цилиндра мал ($\Delta T \ll T_0$), то в (4) можно пренебречь изменением теплопроводности от температуры в пределах системы, положив $\kappa \approx \kappa(T_0)$. Тогда разделяя переменные в (4) и интегрируя от радиуса нити до радиуса колбы, получим:

$$Q = \frac{2\pi L}{\ln \frac{r_0}{r_1}} \kappa \cdot \Delta T. \quad (5)$$

Видно, что поток тепла через систему пропорционален разности температур в ней (закон Ньютона).

Оценка времени установления равновесия. При изменении параметров системы (температуры или мощности нагрева) система переходит в новое стационарное состояние не сразу, а в течение некоторого времени τ . Оценим значение τ по порядку величины. Рассмотрим для простоты плоский слой толщиной a и сечением S , заполненный газом при постоянном давлении. Пусть температура одной из граней выросла на некоторую величину ΔT . Это вызовет поток тепла через систему, который можно оценить по закону Фурье как $q \sim \kappa \frac{\Delta T}{a}$. Для того, чтобы весь слой прогрелся на ΔT , в него должно поступить тепло $nSa \cdot c_P \Delta T$, где c_P — теплоёмкость при постоянном давлении (в расчёте на одну молекулу). С другой стороны, поступившее за время τ тепло можно вычислить как $qS\tau = \kappa \frac{\Delta T}{a} S\tau$. Приравнивая, находим искомую оценку времени перехода к стационарному состоянию:

$$\tau \sim \frac{a^2}{\chi}, \text{ где } \chi = \frac{\kappa}{nc_P} \quad (6)$$

Коэффициент χ , равный отношению теплопроводности κ к теплоёмкости единицы объёма nc_P называют температуропроводностью среды. Он отвечает за скорость изменения температуры при теплопередаче. Для воздуха при нормальных условиях $\chi \approx 0.2 \text{ см}^2/\text{с}$, так что при характерном размере $a \approx 1 \text{ см}$ имеем характерное время $\tau \approx 5 \text{ с}$. Таким образом, можно ожидать, что в условиях опыта равновесие будет заведомо устанавливаться в течение нескольких десятков секунд. Более точная оценка потребовала бы решения уравнения теплопроводности с учётом геометрии задачи. В рамках данной работы необходимости прибегать к подобным расчётам нет.

Пределы применимости теории. Укажем пределы применимости закона Фурье (1). В газах он может нарушаться, когда характерные масштабы задачи приближаются к длине свободного пробега молекул. Это, в частности, приводит к тому, что температура нити может отличаться от температуры окружающего её газа (*температурный скачок*). В данной работе такого рода отклонениями можно пренебречь, поскольку при атмосферном давлении длина свободного пробега составляет порядка $\lambda \sim 10^{-5} \text{ см}$, что заведомо меньше наименьшего размера системы — радиуса нити.

Также возможны и другие механизмы теплопередачи: *конвекция* и *излучение*. Известно, что в поле тяжести конвекция возникает при достаточно большом вертикальном перепаде температур. Для её минимизации установка расположена вертикально (градиент температуры имеет место только в горизонтальном направлении).

Вклад излучения может стать существенным при значительном перегреве нити относительно стенок. Оценить мощность излучения можно по закону Стефана–Больцмана:

$$Q = \epsilon S \sigma_S (T_1^4 - T_0^4) \approx 4\epsilon S \sigma_S T_0^3 \Delta T, \quad (7)$$

где S — площадь поверхности нити, $\sigma_S = 5.567 \cdot 10^{-8} (\text{Вт}/\text{м}^2\text{К}^4)$ — постоянная Стефана–Больцмана, ϵ — безразмерный коэффициент "черноты", зависящий от материала излучающей поверхности (для большинства металлов можно для оценки принять $\epsilon \sim 0.1 \div 0.2$).

2. Экспериментальная установка

Схема установки приведена на рис.2. На оси полой цилиндрической трубы с внутренним диаметром $2r_0 = 10 \pm 0.01$ мм размещена молибденовая нить диаметром $2r_1 = 0.05 \pm 0.005$ мм и длиной $L = 365 \pm 2$ мм. Полость трубы заполнена воздухом (полость через небольшое отверстие сообщается с атмосферой). Стенки трубы помещены в кожух, через которых пропускается вода из термостата, так что их температура t_0 поддерживается постоянной. Для предотвращения конвекции трубка расположена вертикально. Молибденовая нить служит как источником тепла, так и датчиком температуры (термометром сопротивления). По пропускаемому через нить постоянному току I и напряжению U на ней вычисляется мощность нагрева по закону Джоуля–Ленца:

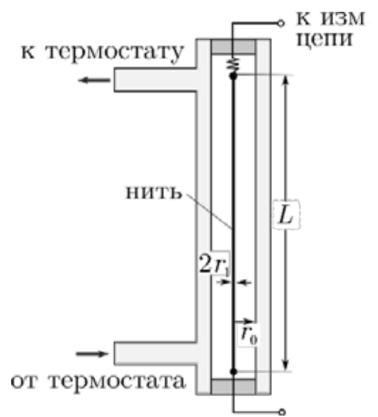


Рис. 2: Схема установки

$$Q = UI,$$

и сопротивление нити по закону Ома:

$$R = \frac{U}{I}$$

Сопротивление нити является однозначной функцией её температуры $R(t)$. Эта зависимость может быть измерена с помощью термостата по экстраполяции мощности нагрева к нулю $Q \rightarrow 0$, когда температура нити и стенок совпадают $t_1 \approx t_0$. Альтернативно, если материал нити известен, зависимость его удельного сопротивления от температуры может найдена по справочным данным.

Для большинства металлов относительное изменение сопротивления из-за нагрева невелико: при изменении температуры на $\Delta t = 1$ °C относительное изменение сопротивления нити $\frac{\Delta R}{R}$ может составлять приблизительно от 0.2% до 0.6% (в зависимости от её материала). Следовательно, измерение R важно провести с высокой точностью. Желательно, чтобы методика измерений и чувствительность приборов обеспечивали измерение тока и напряжения с относительной погрешностью, не превышающей 0.1% (т.е. необходимо уверенно измерять 4–5 значащих цифр, что вполне реально при использовании современных цифровых мультиметров).

Схема рис.3 предусматривает использование одного вольтметра и эталонного сопротивления $R_\Theta = 10.000\Omega$ (класс точности 0.01), включённого последовательно с нитью. В положении переключателя 2 вольтметр измеряет напряжение на нити, а в положении 1 – напряжение на R_Θ , пропорциональное току через нить. Для исключения влияния контактов и подводящих проводов эталонное сопротивление R_Θ также необходимо подключать в цепь по четырёхпроводной схеме. Ток в цепи в обеих схемах регулируется с помощью реостата или магазина сопротивлений R_m , включённого последовательно с источником напряжения.

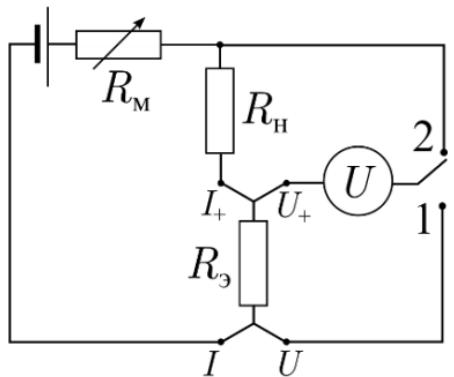


Рис. 3: Схема для измерения сопротивления нити и мощности нагрева

Методика измерений. Принципиально неустранимая систематическая ошибка измерения температуры с помощью термометра сопротивления возникает из-за необходимости пропускать через резистор (нить) измерительный ток. Чем этот ток выше, тем с большей точностью будет измерен как он сам, так и напряжение. Однако при этом квадратично возрастает выделяющаяся на резисторе мощность $Q = UI = I^2R$. Следовательно, температура резистора становится выше, чем у объекта, температуру которого надо измерить. Измерения же при малых токах не дают достаточной точности (в частности, из-за существенного вклада термоэлектрических явлений в проводниках и контактах). Эта проблема решается построением нагрузочной кривой — зависимости измеряемого сопротивления R от выделяющейся в нём мощности $R(Q)$, с последующей экстраполяцией к нулевой мощности $Q \rightarrow 0$ для определения сопротивления $R_0 \equiv R(0)$, при котором его температура равна температуре измеряемого объекта. Кроме того, в данной работе измерение нагрузочных кривых позволяет в ходе эксперимента получить температурную зависимость сопротивления нити, так как при $Q \rightarrow 0$ температура нити равна температуре термостата ($T \approx T_0$).

В исследуемом интервале температур (20–70 °C) зависимость сопротивления от температуры можно с хорошей точностью аппроксимировать линейной функцией:

$$R(t) = R_{273} \cdot (1 + \alpha t), \quad (8)$$

где t — температура в градусах Цельсия, R_{273} — сопротивление нити при температуре 0 °C и $\alpha = \frac{1}{R_{273}} \frac{dR}{dT}$ — температурный коэффициент сопротивления материала. Измерение зависимости (8) по данным для $Q \rightarrow 0$ позволит затем определять температуру нити t по значению её сопротивления R при произвольной мощности нагрева.

3. Результаты измерений и обработка данных

3.1. Подготовка к эксперименту

Проведём предварительные расчёты параметров опыта. Приняв максимально допустимый перегрев нити относительно термостата равным $\Delta T_{max} = 10$ °C, оценим максимальную мощность нагрева Q_{max} , которую следует подавать на нить. Для оценки коэффициент теплопроводности воздуха примем равным $\kappa \sim 25$ мВт/м · К. Пользуясь формулой (6) получим, что $Q \approx 108$ мВт.

Зная приближенное значение сопротивления нити $R \approx 12$ Ом, определим соответствующие значения максимального тока I_{max} и максимального напряжения U_{max} в нити. Используя значение Q_{max} , получим, что $I_{max} \approx 90$ мА, $U_{max} \approx 1200$ мВ.

3.2. Измерение сопротивления проволоки при различных токах и температурах

Измерим зависимость сопротивления нити $R = U/I$ от подаваемой на неё мощности $Q = UI$ при различных температурах термостата начиная с комнатной. Для каждого занятия температуры будем производить по 7 измерений для значений тока от 0 до I_{max} . Данные занесём в таблицу 1. Так как ток мы измеряем с помощью вольтметра и эталонного сопротивления, то в таблицу будем заносить значение напряжение через R_Θ , а затем вычислять силу тока по формуле $I = U_\Theta / R_\Theta$. Погрешность вольтметра составляет около 0.004% и может быть отброшена. Значит могут быть отброшены погрешности измерений силы тока и мощности, так как они совпадают по порядку величины с погрешностью измерения напряжения.

Таблица 1.

Результаты измерения напряжения и мощности на нити при разных температурах

$T = 24^\circ\text{C}$							
U_n , мВ	174.46	376.35	561.62	761.74	964.15	1167.00	1343.34
U_s , мВ	120.16	258.74	384.99	521.92	654.34	786.65	899.45
I , мА	12.016	25.874	38.499	52.192	65.434	78.665	89.945
R , Ом	14.519	14.545	14.588	14.595	14.735	14.835	14.935
Q , мВт	2.096	9.737	21.621	39.756	63.088	91.802	10.826
$T = 30^\circ\text{C}$							
U_n , мВ	177.49	382.42	573.61	767.07	965.45	1164.5	1368.8
U_s , мВ	120.02	258.15	386.12	514.27	643.86	771.74	900.31
I , мА	12.002	25.815	38.612	51.427	64.386	77.174	90.031
R , Ом	14.788	14.814	14.856	14.916	14.995	15.089	15.204
Q , мВт	2.130	9.872	22.148	39.448	62.161	89.869	123.234
$T = 40^\circ\text{C}$							
U_n , мВ	183.24	392.4	591.21	911.46	992.99	1200.3	1410.9
U_s , мВ	120.28	257.14	386.33	591.52	643.03	772.42	901.29
I , мА	12.028	25.714	38.633	59.152	64.303	77.242	90.129
R , Ом	15.234	15.260	15.303	15.409	15.442	15.539	15.654
Q , мВт	2.204	10.09	22.84	53.914	63.852	92.713	127.163
$T = 49.9^\circ\text{C}$							
U_n , мВ	187.66	403.96	608.44	937.43	1021.24	1234.2	1445.7
U_s , мВ	119.6	257.06	386.08	590.89	642.35	771.64	897.55
I , мА	11.96	25.706	38.608	59.089	64.235	77.164	89.775
R , Ом	15.691	15.715	15.759	15.865	15.898	15.995	16.107
Q , мВт	2.244	10.384	23.49	55.391	65.599	95.235	129.758
$T = 60^\circ\text{C}$							
U_n , мВ	194.22	416.05	626.95	965.05	1069.6	1270.5	1488.6
U_s , мВ	120.33	257.37	386.81	591.56	654.02	772.55	898.98
I , мА	12.033	25.737	38.681	59.156	65.402	77.255	89.898
R , Ом	16.141	16.165	16.208	16.314	16.354	16.446	16.559
Q , мВт	2.337	10.707	24.251	57.088	69.953	98.152	133.822

По данным таблицы построим график зависимости сопротивления нити R_n от выделяемого на ней тепла Q . Так как погрешности малы (порядка 0.01%) то их на график наносить не будем. Полученные в эксперименте точки хорошо ложатся на прямые, поэтому воспользуемся методом наименьших квадратов и вычислим для каждого графика его угловой коэффициент, свободный член и их погрешности:

$$\frac{dR}{dQ} = \frac{\langle RQ \rangle - \langle R \rangle \langle Q \rangle}{\langle Q^2 \rangle - \langle Q \rangle^2}, \quad (9)$$

$$R_0 = \langle R \rangle - k \langle Q \rangle, \quad (10)$$

$$\sigma_{\frac{dR}{dQ}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\langle R^2 \rangle - \langle R \rangle^2}{\langle Q^2 \rangle - \langle Q \rangle^2} - \left(\frac{dR}{dQ} \right)^2}, \quad (11)$$

$$\sigma_{R_0} = \sigma_{\frac{dR}{dQ}} \sqrt{\langle Q^2 \rangle - \langle Q \rangle^2}, \quad (12)$$

где $\frac{dR}{dQ}$ — угловой коэффициент, R_0 — свободный член, N — количество опытов.

Погрешность определения углового коэффициента по порядку величины равна 0.5%, а погрешность определения свободного члена — меньше 0.01%. Занесём получившиеся данные в таблицу 2, и построим график рис.4.

Таблица 2.
Сопротивление нити при разных температурах

$T, ^\circ\text{C}$	24.0	30.0	40.0	49.9	60.0
$\frac{dR}{dQ}, \text{Ом/Вт}$	3.51	3.437	3.367	3.27	3.19
$\sigma_{\frac{dR}{dQ}}, \text{Ом/Вт}$	0.02	0.012	0.012	0.02	0.02
$R_0, \text{Ом}$	14.5120	14.7803	15.2268	15.6824	16.1317
$\sigma_{R_0}, \text{Ом}$	0.0007	0.0005	0.0005	0.0009	0.0008

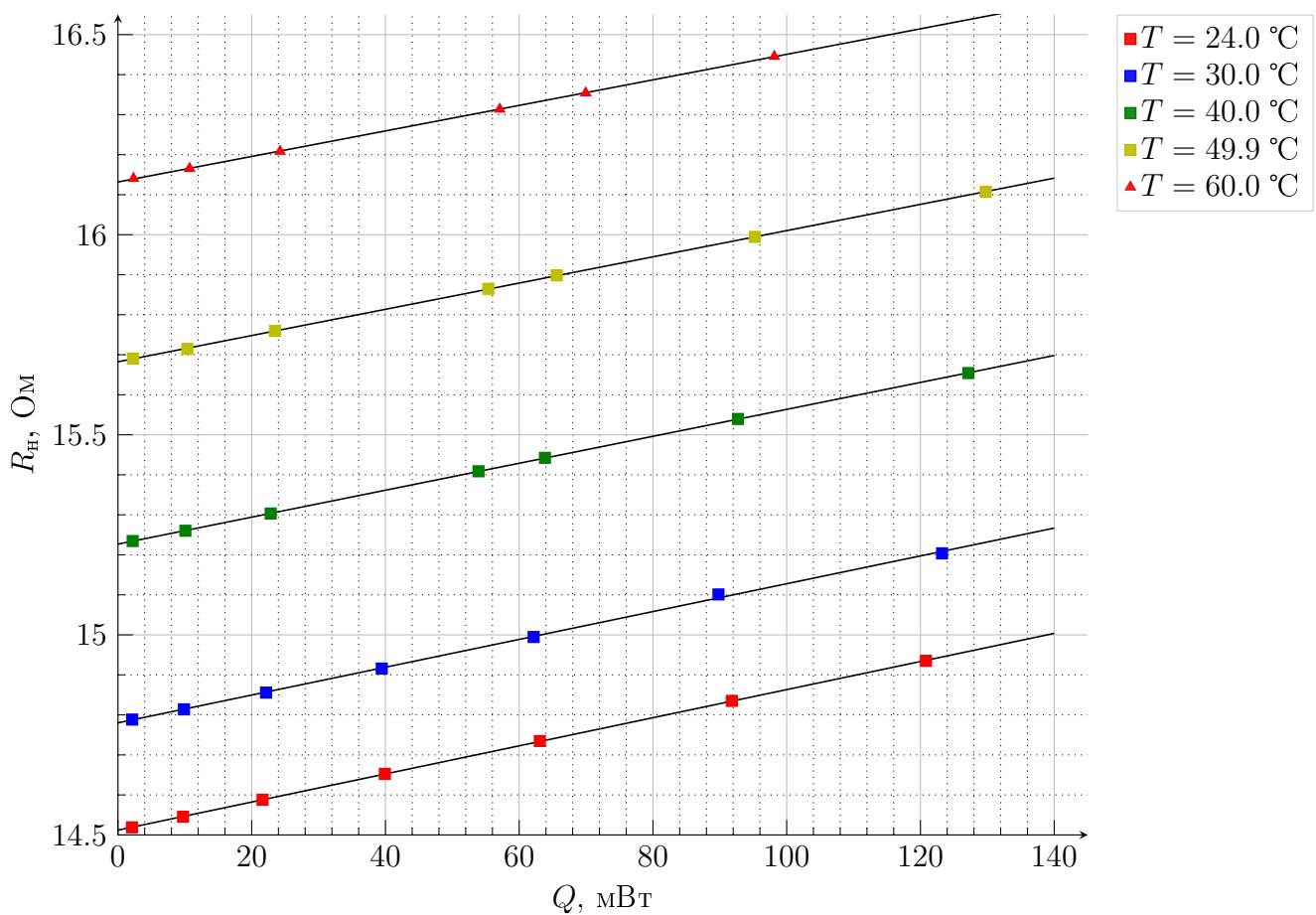


Рис. 4: График зависимости R_n от Q

3.3. Определение температурного коэффициента сопротивления молибдена

Пользуясь результатами, полученными нами в предыдущем пункте, мы можем определить температурный коэффициент сопротивления материала нити. Для этого построим график зависимости сопротивления R_0 от температуры T . Данные для построения графика возьмём из таблицы 2.

Точки на графике хорошо аппроксимируются прямой, определим её угловой коэффициент и свободный член. Для этого опять воспользуемся методом наименьших квадратов:

$$\frac{dR}{dT} = \frac{\langle TR_0 \rangle - \langle R_0 \rangle \langle T \rangle}{\langle T^2 \rangle - \langle T \rangle^2}, \quad (13)$$

$$R_{273} = \langle R_0 \rangle - k \langle T \rangle, \quad (14)$$

где $\frac{dR_0}{dT}$ — угловой коэффициент, R_{273} — свободный член. Так же вычислим погрешности их определения:

$$\sigma_{\frac{dR_0}{dT}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\langle R_0^2 \rangle - \langle R_0 \rangle^2}{\langle T^2 \rangle - \langle T \rangle^2} - \left(\frac{dR_0}{dT} \right)^2}, \quad (15)$$

$$\sigma_{R_{273}} = \sigma_{\frac{dR_0}{dT}} \sqrt{\langle T^2 \rangle - \langle T \rangle^2}. \quad (16)$$

После вычислений получим следующие значения: $\frac{dR_0}{dT} = 0.0451 \pm 0.0002 \text{ Ом}/\text{К}$, $R_{273} = 13.429 \pm 0.003 \text{ Ом}$. Теперь построим график рис.5.

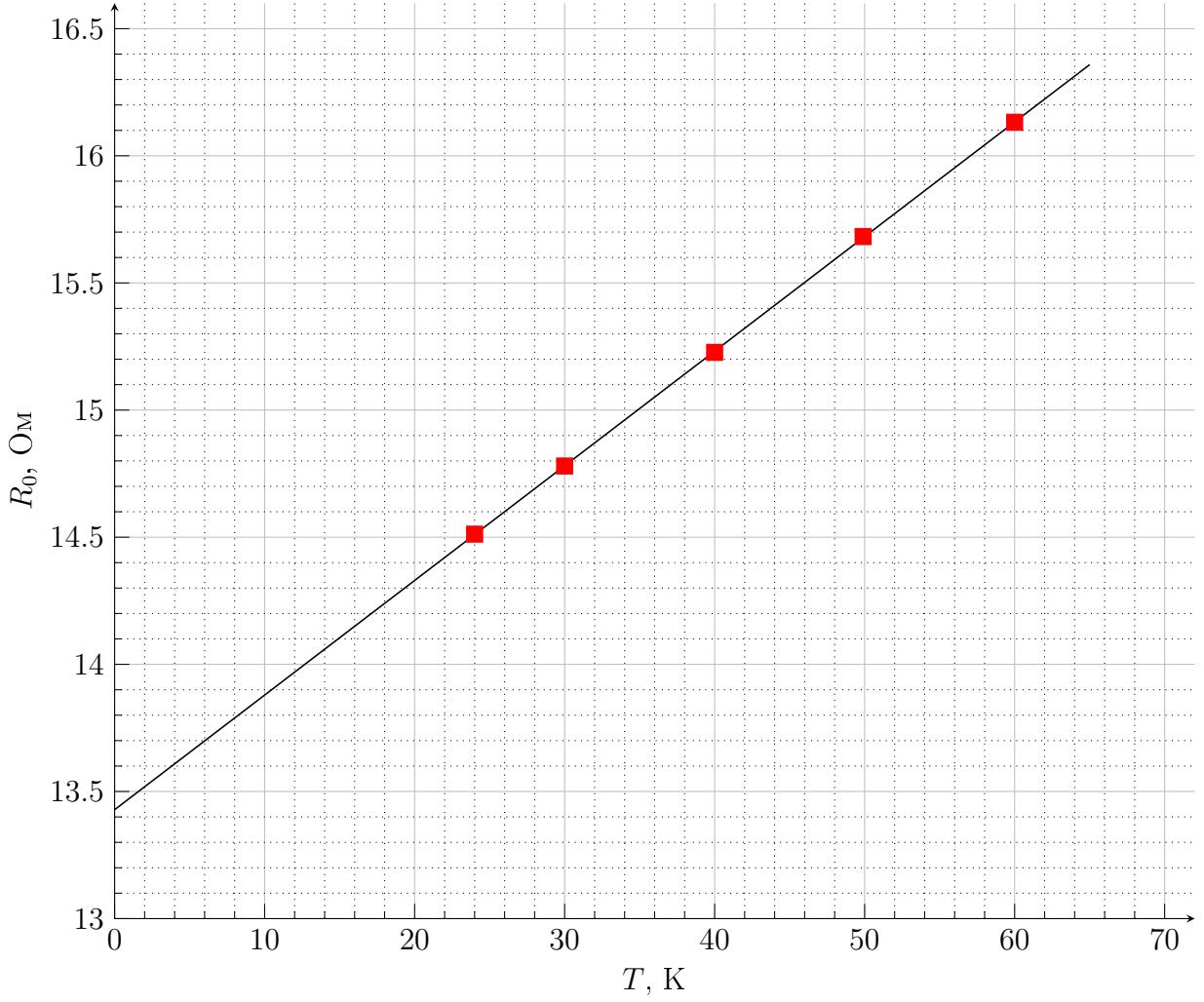


Рис. 5: График зависимости R_0 от T

Зная значения $\frac{dR_0}{dT}$ и R_{273} мы можем узнать чему равен температурный коэффициент сопротивления молибдена α при 0 °С. Для этого воспользуемся формулой:

$$\alpha = \frac{1}{R_{273}} \frac{dR_0}{dT}. \quad (17)$$

Так как погрешность измерения R_{273} много меньше чем погрешность $\frac{dR}{dT}$, то $\sigma_\alpha \approx \alpha \mathcal{E}_{\frac{dR}{dT}}$. В итоге получаем: $\alpha = 3.36 \pm 0.02 \text{ K}^{-1} \cdot 10^{-3}$.

3.4. Определение зависимости коэффициента теплопроводности воздуха от температуры

Используя результаты предыдущих пунктов мы можем определить наклон зависимости выделяющейся на нити мощности Q от её перегрева ΔT относительно стенок:

$$\frac{dQ}{d(\Delta T)} = \frac{dR_0}{dT} / \frac{dR}{dQ}. \quad (18)$$

Погрешность определения $\frac{dQ}{d(\Delta T)}$ вычислим по формуле:

$$\sigma_{\frac{dQ}{d(\Delta T)}} = \frac{dQ}{d(\Delta T)} \sqrt{\mathcal{E}_{\frac{dR_0}{dT}}^2 + \mathcal{E}_{\frac{dR}{dQ}}^2}. \quad (19)$$

Зная значение $\frac{dQ}{d(\Delta T)}$ при каждой температуре термостата можно вычислить теплопроводность воздуха используя формула (5):

$$\kappa = \frac{dQ}{d(\Delta T)} \cdot \frac{\ln \frac{r_0}{r_1}}{2\pi L}. \quad (20)$$

Наибольший вклад в погрешность значения κ вносит погрешность измерения диаметра нити (около 2%). Полученные данные занесём в таблицу 3.

Таблица 3.
Коэффициент теплопроводности воздуха при разных температурах

$T, ^\circ\text{C}$	24.0	30.0	40.0	49.9	60.0
$\kappa, \text{Вт}/\text{м} \cdot \text{К} \cdot 10^3$	29.6	30.3	30.9	31.8	32.6
$\sigma_\kappa, \text{Вт}/\text{м} \cdot \text{К} \cdot 10^3$	0.6	0.6	0.6	0.6	0.7

Исходя из теоретических соображений коэффициент теплопроводности воздуха должен быть пропорционален корню квадратному из температуры. Проверим это, построив график зависимости $\ln \kappa$ от $\ln T$. Погрешности логарифмов вычислим пообщей формуле для погрешностей:

$$\sigma_{\ln x} = \mathcal{E}_x. \quad (21)$$

Занесём полученные значения в таблицу 4.

Таблица 4.
Данные для построения графика $\ln \kappa$ от $\ln T$

T, K	297.15	303.15	313.15	323.05	333.15
$\ln T$	5.69	5.71	5.75	5.78	5.81
$\ln \kappa$	3.39	3.41	3.43	3.46	3.49
$\sigma_{\ln \kappa}$	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02

По таблице 4 построим график рис.6. Угловой коэффициент наклона аппроксимирующей кривой и свободный член найдём с помощью метода наименьших квадратов.

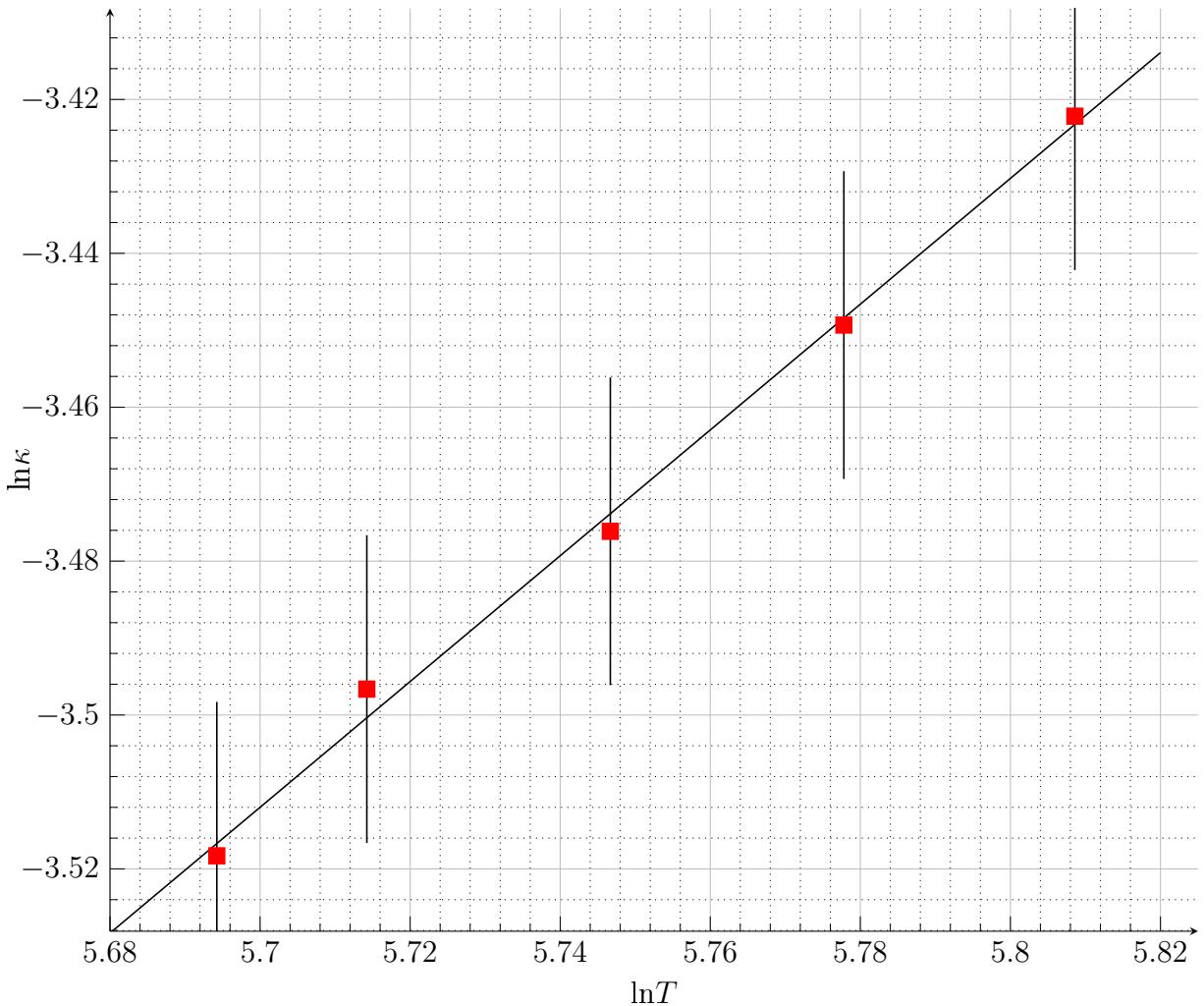


Рис. 6: График зависимости $\ln\kappa$ от $\ln T$

После всех вычислений получаем, что κ зависит от T^β , где $\beta = 0.82 \pm 0.02$.

4. Обсуждение результатов

В данной лабораторной работе было проведено два исследования: 1) определение коэффициента температурного сопротивления молибдена; 2) определение зависимости коэффициента теплопроводности воздуха от его температуры. К сожалению, ни одно из них не совпало с известными табличными данными и теоретическими моделями.

Тот факт, что во втором исследование все значения коэффициента теплопроводности воздуха завышены, по сравнению с табличными может указывать на то, что виновниками данных результатов являются систематические погрешности приборов. Наибольшие подозрения вызывают показания термостата, так как по словам заведующей лаборатории: "студенты с ним начудили". По-мимо термостата возникают вопросы и к точности измерения диаметра нити, она слишком низкая в сравнение с остальными (2% против $\sim 0.5\%$).

Утверждение о систематической погрешности приборов подтверждается ещё и тем, что все построенные линейные графики с очень высокой точностью ложатся на экспериментальные точки.

5. Вывод

Несмотря на столь разочаровывающие результаты, остаётся надежда, что при более качественном оборудовании мы можем получить подтверждение наших теоретических моделей.