

Отчёт по лабораторной работе 3.6.1.

Спектральный анализ электрических сигналов.

Работу выполнил Громов Артём
ЛФИ Б02-006

Долгопрудный, 2021 г.

1. Аннотация

Цель работы: изучение спектров электрических сигналов.

В работе используются: генератор сигналов произвольной формы, цифровой осциллограф с функцией быстрого преобразования Фурье.

1.1. Разложение сложных сигналов на периодические колебания

Метод для описания сигналов. Для него используется разложение в сумму синусов и косинусов с различными аргументами или, как чаще его называют, *разложение в ряд Фурье*.

Пусть задана функция $f(t)$, которая периодически повторяется с частотой $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, где T — период повторения импульсов. Её разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\Omega_1 t) + b_n \sin(n\Omega_1 t)] \quad (1)$$

или

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega_1 t - \psi_n) \quad (2)$$

Если сигнал чётен относительно $t = 0$, так что $f(t) = f(-t)$ в тригонометрической записи остаются только косинусные члены. Для нечётной наоборот.

Коэффициенты определяются по формуле

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos(n\Omega_1 t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin(n\Omega_1 t) dt \quad (3)$$

Здесь t_1 — время, с которого мы начинаем отсчет. Сравнив формулы (1) и (2) можно получить выражения для A_n и ψ_n :

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \psi_n = \arctan \frac{b_n}{a_n} \quad (4)$$

1.2. Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

Введем некоторые величины $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, где T — период повторения импульсов. Коэффициенты при косинусных составляющих будут равны

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(n\Omega_1 t) dt = 2V_0 \frac{\tau}{T} \frac{\sin(n\Omega_1 \tau/2)}{n\Omega_1 \tau/2} \sim \frac{\sin x}{x}, \quad (5)$$

где V_0 — амплитуда сигнала.

Поскольку наша функция чётная, то $b_n = 0$. Пусть у нас τ кратно T . Тогда введем ширину спектра, равную $\Delta\omega$ — расстояние от главного максимума до первого нуля огибающей, возникающей, как нетрудно убедится при $n = \frac{2\pi}{\tau\Omega_1}$. При этом

$$\Delta\omega\tau \simeq 2\pi \Rightarrow \Delta\nu\Delta t \simeq 1 \quad (6)$$

1.3. Периодическая последовательность цугов

Функция $f(t)$ снова является четной относительно $t = 0$. Коэффициент при n -ой гармонике согласно формуле (3) равен

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(\omega_0 t) \cdot \cos(n\Omega_1 t) dt = V_0 \frac{\tau}{T} \left(\frac{\sin[(\omega_0 - n\Omega_1) \frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 - n\Omega_1) \frac{\tau}{2}} + \frac{\sin[(\omega_0 + n\Omega_1) \frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 + n\Omega_1) \frac{\tau}{2}} \right) \quad (7)$$

1.4. Амплитудно-модулированные колебания

Рассмотрим гармонические колебания высокой частоты ω_0 , амплитуда которых медленно меняется по гармоническому закону с частотой $\Omega \ll \omega_0$.

$$f(t) = A_0 [1 + m \cos \Omega t] \cos \omega_0 t \quad (8)$$

Коэффициентом m называется *глубина модуляции*. При $m < 1$ амплитуда меняется от минимальной $A_{min} = A_0(1 - m)$ до максимальной $A_{max} = A_0(1 + m)$. Глубина модуляции может быть представлена в виде

$$m = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}} \quad (9)$$

Простым тригонометрическим преобразованием уравнения (9) можно найти спектр колебаний

$$f(t) = A_0 \cos \omega_0 t + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega) t + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega) t \quad (10)$$

2. Экспериментальная установка

Исследуемый сигнал $f(t)$ и синусоидальный сигнал от вспомогательного генератора, называемого в таких системах гетеродином, подаются на вход смесителя. Смеситель — элемент, преобразующий колебания с частотами ν_1 и ν_2 в колебания на комбинированных частотах: $\nu_1 + \nu_2$ и $\nu_1 - \nu_2$. «Разностный» сигнал смесителя поступает на фильтр — высокодобротный колебательный контур, настроенный на некоторую фиксированную резонансную частоту ν_0 . Таким образом, если $f(t)$ содержит гармонику $\nu = \nu_{\text{гет}} - \nu_0$ ($\nu_{\text{гет}}$ — частота гетеродина), она будет усиlena, а отклик будет пропорционален её амплитуде.

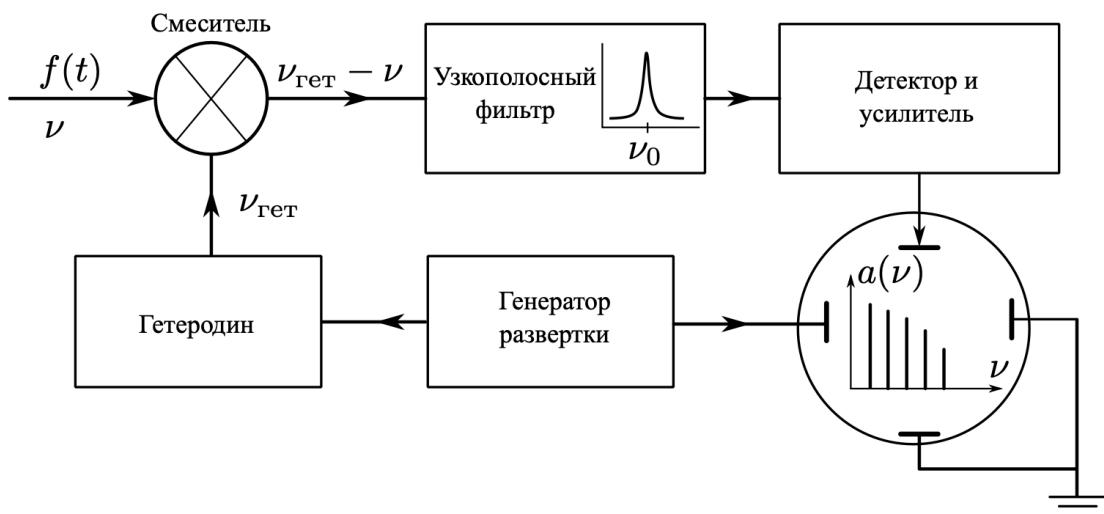


Рис. 1: Структурная схема анализатора спектра

Отметим, что смешение частот исследуемого сигнала и частоты гетеродина лежит в основе большинства современных радиоприёмных устройств — супергетеродинов.

В спектральном анализаторе частота гетеродина пропорциональна напряжению, подаваемому на развёртку по оси X встроенного в анализатор осциллографа. Выходной сигнал подаётся на канал Y . На экране анализатора возникает, таким образом, график, изображающий зависимость амплитуды гармоник исходного сигнала от частоты, т.е. его спектр (заметим, что информация о фазах гармоник при этом теряется).

В последнее время повсеместное распространение получила цифровая обработка сигналов. Спектральный состав оцифрованного сигнала может быть найден численно. Существуют алгоритмы (быстрое преобразование Фурье, FFT), позволяющие проводить вычисления коэффициентов Фурье в реальном времени для сигналов относительно высокой частоты (до 200 МГц). Гетеродинные схемы по-прежнему применяются для анализа спектров сверхвысоких частот, приближающихся к тактовой частоте современных интегральных схем ($\gtrsim 1$ ГГц).

3. Результаты измерений и обработка данных

3.1. Исследование спектра периодических последовательностей прямоугольных импульсов

Устанавливаем колебания прямоугольные с $\nu_{\text{повт}} = 1$ кГц (период $T = 1$ мс) и длительность импульса $\tau = T/20 = 50$ мкс. Получаем на экране спектр сигнала, потом изменяя τ и $\nu_{\text{повт}}$, не изменяя другой величины наблюдаем, как изменяется спектр. Результаты измерений приведены на рис.2-7.

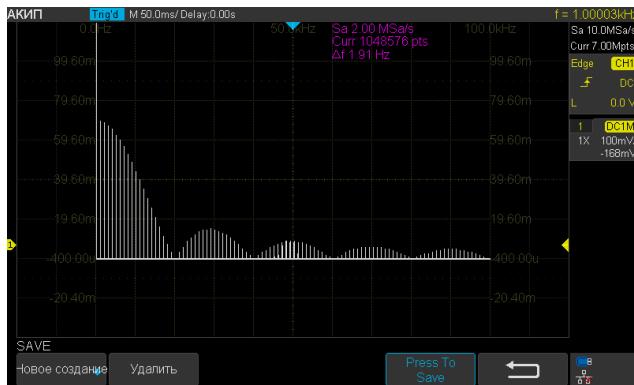


Рис. 2: $\nu_{\text{повт}} = 1$ кГц, $\tau = 50$ мкс

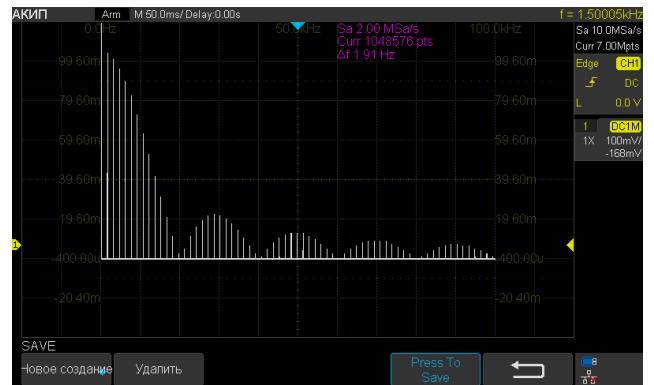


Рис. 4: $\nu_{\text{повт}} = 1.5$ кГц, $\tau = 50$ мкс

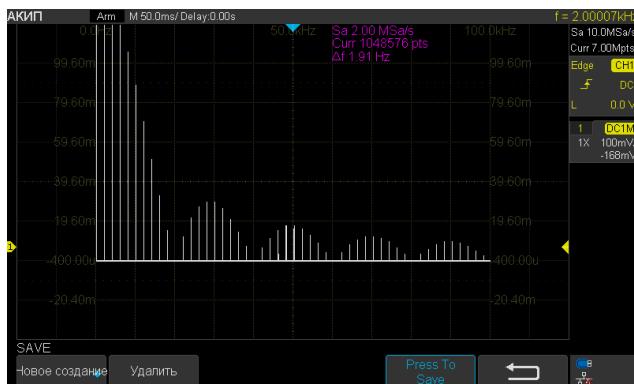


Рис. 3: $\nu_{\text{повт}} = 2$ кГц, $\tau = 50$ мкс

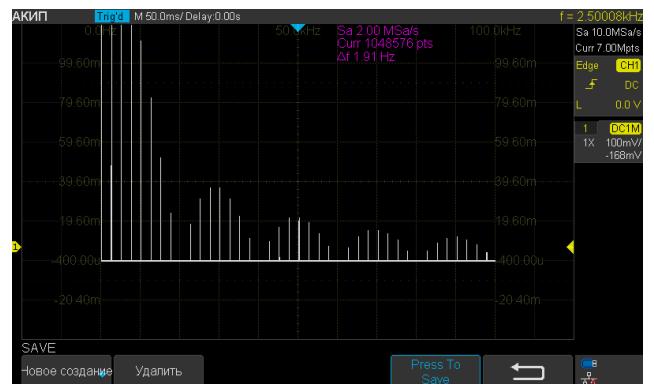


Рис. 5: $\nu_{\text{повт}} = 2.5$ кГц, $\tau = 50$ мкс

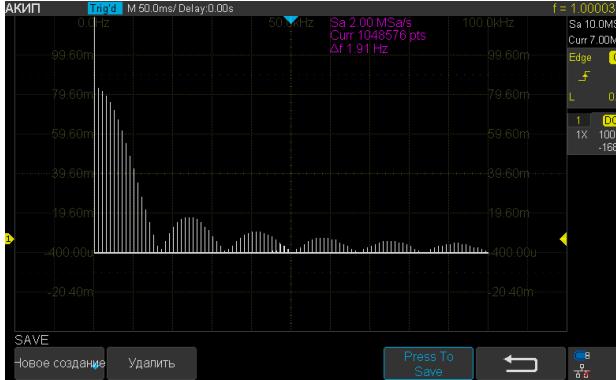


Рис. 6: $\nu_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$, $\tau = 60 \text{ мкс}$

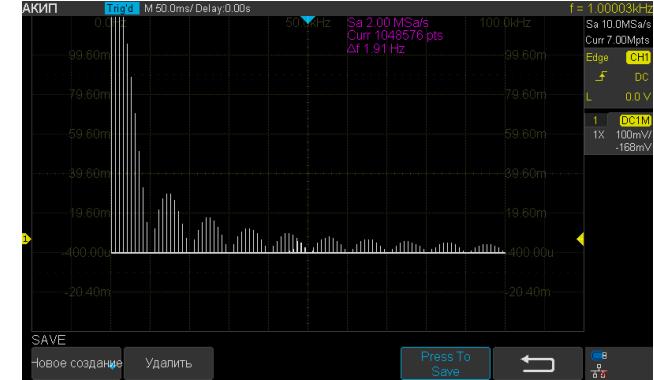


Рис. 7: $\nu_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$, $\tau = 100 \text{ мкс}$

Теперь зафиксируем $\nu_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$ и $\tau = 50 \text{ мкс}$. Для этих параметров измерим величину a_n и ν_n . И сравним с рассчитанными значениями по формуле (5).

Из таблицы мы видим, что $\Delta\nu$ сохраняются между гармониками, что сходится с теорией. Так же мы видим, что амплитуды довольно неплохо сходятся с теорией.

Таблица 1.
Исследование амплитуд и частот гармоник

| n гармоники | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|------|------|------|------|------|
| f , кГц | 29,4 | 49,4 | 69,6 | 89,8 | 110 |
| a_n , мВ | 15,6 | 9,2 | 7,5 | 5,2 | 4,4 |
| $a_{n,\text{теория}}$, мВ | 11,6 | 10,3 | 8,4 | 6,1 | 3,6 |
| $\frac{ a_n - a_{n,\text{теория}} }{a_{n,\text{теория}}}$ | 0,25 | 0,12 | 0,12 | 0,16 | 0,18 |
| $\Delta\nu$, кГц | 20 | 20 | 20,2 | 20,2 | 20,2 |

Таблица 2.

Исследование зависимости Δt от $\Delta\nu$

| τ , мкс | 50 | 75 | 100 | 125 | 150 | 175 | 200 |
|---------------------------------------|------|------|-----|-----|-----|-----|-----|
| $\Delta\nu$, кГц | 19,6 | 13,4 | 9,8 | 8,0 | 6,5 | 5,5 | 4,5 |
| $1/\tau \cdot 10^3$, с^{-1} | 20 | 13 | 10 | 8 | 7 | 6 | 5 |
| $\Delta\nu\Delta t = 1,000 \pm 0,018$ | | | | | | | |

Теперь проведём измерения зависимости ширины спектра от $\Delta\nu$ и установим зависимость между $\Delta\nu$ и τ , полученную из формулы (6). В итоге получаем, что формула (6) довольно точно выполняется.

3.2. Исследование спектра периодической последовательности цугов

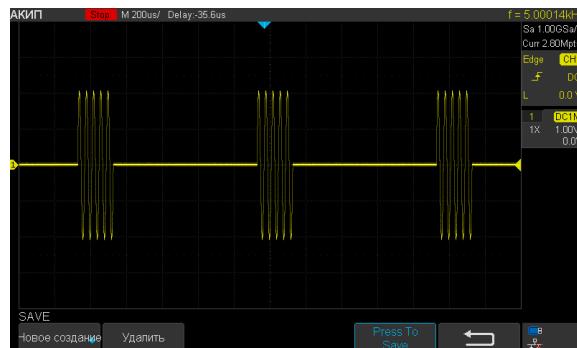


Рис. 8: Последовательность цугов.

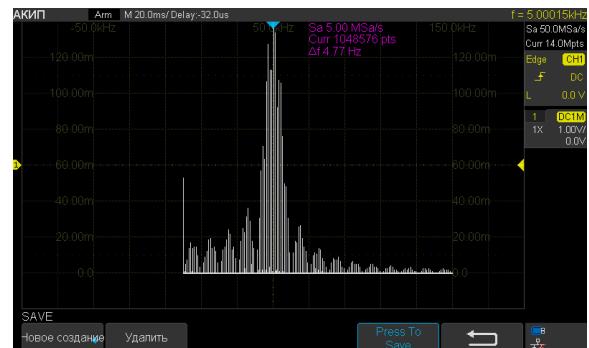


Рис. 9: Спектр последовательности цугов.

Получим на экране последовательность пугов (рис. 8) с характерными параметрами: $\nu_0 = 50$ кГц, $T = 1$ мс, число периодов в одном импульсе $N = 5$ (длительность импульса $\tau = T/\nu_0 = 100$ мкс). Так же для этого сигнала получаем картину спектра (рис. 9).

Теперь будем менять эти параметры по одному и зафиксируем несколько таких изменений. Результаты приведены на рис.10-15.

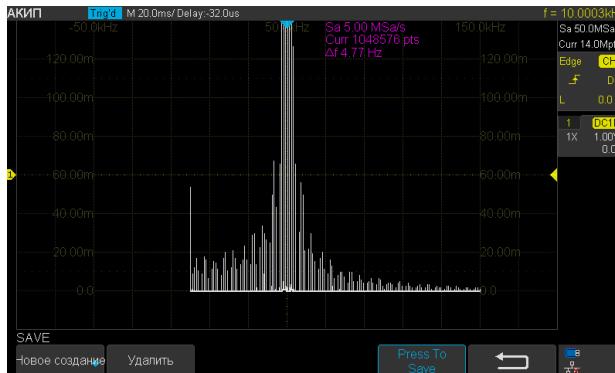


Рис. 10: $\nu_0 = 50$ кГц, $T = 1$ мс, $N = 10$.

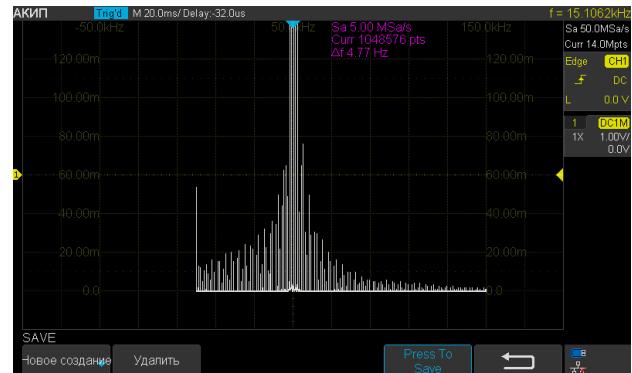


Рис. 13: $\nu_0 = 50$ кГц, $T = 1$ мс, $N = 15$.

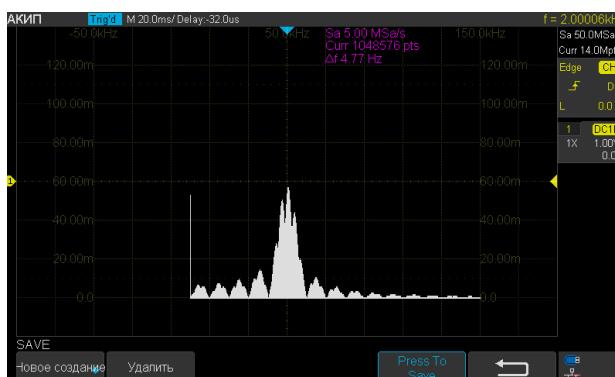


Рис. 11: $\nu_0 = 50$ кГц, $T = 2.5$ мс, $N = 5$.

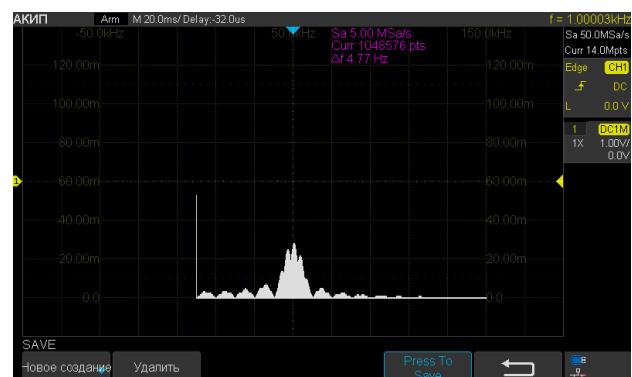


Рис. 14: $\nu_0 = 50$ кГц, $T = 5$ мс, $N = 5$.

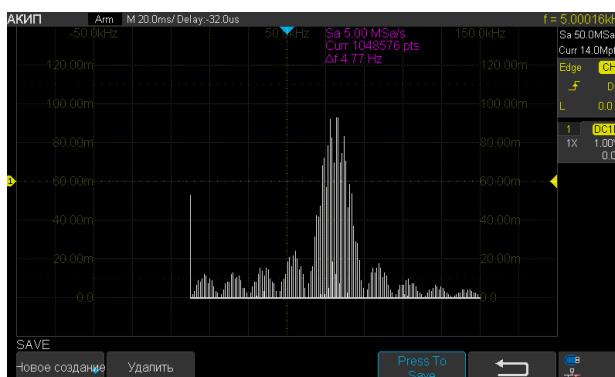


Рис. 12: $\nu_0 = 75$ кГц, $T = 1$ мс, $N = 5$.

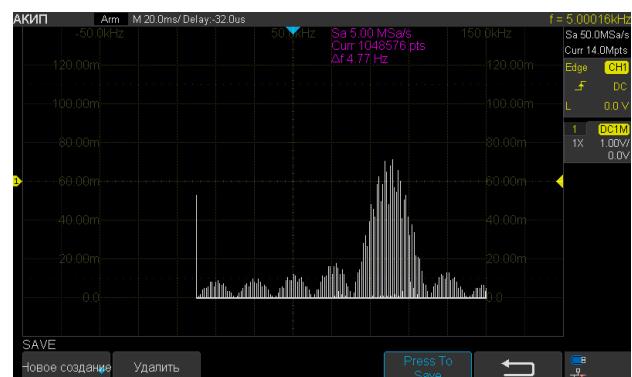


Рис. 15: $\nu_0 = 100$ кГц, $T = 1$ мс, $N = 5$.

Теперь зафиксируем $\nu_0 = 50$ кГц, $N = 5$.

Для этих параметров измерим, меняя T ($\nu_{\text{повт}}$), зависимость $\delta\nu$ от τ .

В итоге: $\delta\nu/\nu_{\text{повт}} = 1.05 \pm 0.08$

Таблица 3.

Исследование зависимости Δt от $\Delta\nu$

| $\Delta\nu$, кГц | 23 | 32 | 35 | 38 | 35 | 45 |
|---------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| n | 42 | 33 | 18 | 13 | 10 | 8 |
| $\nu_{\text{повт}}$, кГц | 0.5 | 1.0 | 2.0 | 3.0 | 4.0 | 6.0 |

3.3. Исследование спектра амплитудно модулированного сигнала

Получим картину амплитудно-модулированного сигнала с характерными параметрами (рис.17): несущая частота $\nu_0 = 50$ кГц, $\nu_{\text{мод}} = 2$ кГц, глубину модуляции - 50 % ($m = 0, 5$). Найдем для него A_{\max} и A_{\min} (таблица 4) и проверим справедливость формулы (9).



Таблица 4

| $A_{\max}, \text{ В}$ | $A_{\min}, \text{ В}$ | m |
|-----------------------|-----------------------|------|
| 1,52 | 0,48 | 0,52 |

Рис. 16: Картина амплитудно-модулированного сигнала.

Получим на экране спектр сигнала и будем изменять его параметры

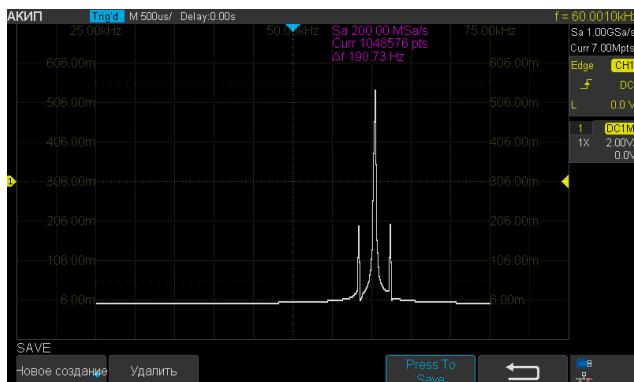


Рис. 17: $\nu_0 = 60$ кГц, $\nu_{\text{мод}} = 2$ кГц.

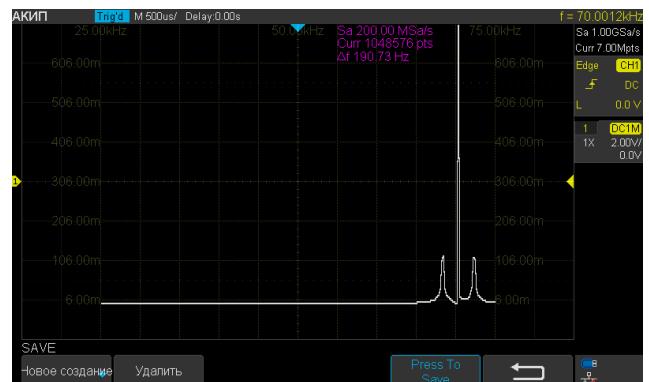


Рис. 19: $\nu_0 = 70$ кГц, $\nu_{\text{мод}} = 2$ кГц.

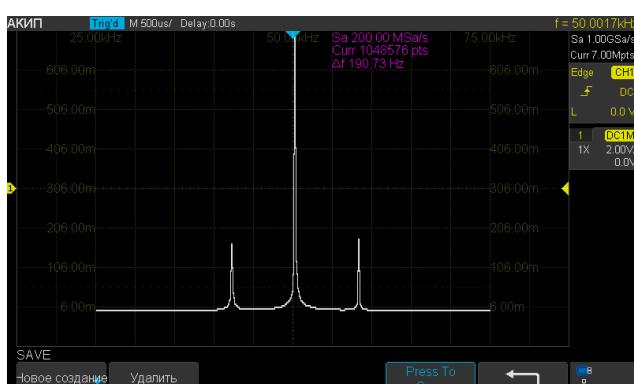


Рис. 18: $\nu_0 = 50$ кГц, $\nu_{\text{мод}} = 8$ кГц.

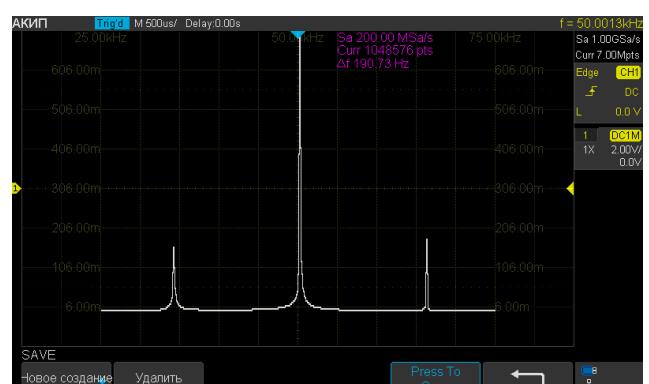


Рис. 20: $\nu_0 = 50$ кГц, $\nu_{\text{мод}} = 16$ кГц.

Из формулы (10) следует, что $a_{\text{осн}} = A_0$, а $a_{\text{бок}} = 0,5 \cdot mA_0$. Проверим это с помощью данных из таблицы 5.

Согласно нашим измерениям $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}} \cdot m \approx 0,5$, что согласуется с предсказаниями теории.

Таблица 5.
Исследование зависимости $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$ от m .

| $m, \%$ | 10 | 25 | 50 | 75 | 100 |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|
| $a_{\text{бок}}, \text{ мВ}$ | 360 | 820 | 1660 | 2320 | 3260 |
| $a_{\text{осн}}, \text{ мВ}$ | 6240 | 6240 | 6240 | 6240 | 6240 |
| $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$ | 0,06 | 0,13 | 0,27 | 0,37 | 0,52 |
| $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}} \cdot m, \%$ | 57,69 | 52,56 | 53,21 | 49,57 | 52,24 |
| $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}} \cdot m = (53,1 \pm 1,31), \%$ | | | | | |

4. Вывод

Мы убедились в справедливости разложения в ряд Фурье сигналов, с помощью анализа спектра сигналов и получения для них характерных величин и проверки закономерностей.