

Отчёт по лабораторной работе 4.3.4.

**Метод преобразования Фурье в оптике.**

Работу выполнил Громов Артём  
ЛФИ Б02-006

Долгопрудный, 2022 г.

# 1. Аннотация

**Цель работы:** исследование особенностей применения пространственного преобразования Фурье для анализа дифракционных явлений.

**В работе используется:** гелий-неоновый лазер, кассета с набором сеток разного периода, щель с микрометрическим винтом, линзы, экран, линейка.

Анализ сложного волнового поля во многих случаях целесообразно проводить, разлагая его на простейшие составляющие, например, представляя его в виде разложения по плоским волнам. При этом оказывается, что если мы рассматриваем поле, полученное после прохождения плоской монохроматической волны через предмет или транспарант (изображение предмета на фотоплёнке или стеклянной пластинке) с функцией пропускания  $t(x)$ , то разложение по плоским волнам соответствует преобразованию Фурье от этой функции. Если за предметом поставить линзу, то каждая плоская волна сфокусируется в свою точку в задней фокальной плоскости линзы. Таким образом, картина, наблюдаемая в фокальной плоскости линзы, даёт нам представление о спектре плоских волн падающего на линзу волнового поля. Поэтому можно утверждать, что с помощью линзы в оптике осуществляется пространственное преобразование Фурье.

## 1.1. Спектр функции пропускания амплитудной синусоидальной решётки

Рассмотрим вначале простой пример: дифракцию плоской монохроматической волны на синусоидальной амплитудной решётке. Пусть решётка с периодом  $d$  расположена в плоскости  $Z = 0$ , а её штрихи ориентированы вдоль оси  $Y$ . Функция пропускания такой решётки имеет вид

$$t(x) = \beta + \alpha \cos(ux) = \beta + \alpha \frac{e^{iux} + e^{-iux}}{2} \quad (1)$$

с постоянными  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $u$  ( $u = 2\pi/d$  — пространственная частота).

Если на решётку падает плоская монохроматическая волна, распространяющаяся вдоль оси  $Z$ ,

$$E(\vec{r}, t) = E_0 e^{-i(\omega t - kz)}, \quad (2)$$

где  $\omega$  — круговая частота,  $k$  — волновой вектор ( $k = 2\pi/\lambda$ ),  $E_0$  — амплитуда, то на выходе из решётки мы получим три плоских волны:

$$\begin{aligned} E_1 &= \beta E_0 e^{-i(\omega t - kz)}; \\ E_2 &= \frac{\alpha}{2} E_0 e^{-i(\omega t - ux - z\sqrt{k^2 - u^2})}; \\ E_3 &= \frac{\alpha}{2} E_0 e^{-i(\omega t + ux - z\sqrt{k^2 - u^2})}. \end{aligned} \quad (3)$$

Действительно, легко видеть, что в плоскости  $Z = 0$  амплитуда колебаний, создаваемая суммой этих волн, описывается функцией (1), а фаза колебаний постоянна. Таким образом, в силу единственности решения волнового уравнения при заданных граничных условиях мы нашли искомую суперпозицию плоских волн. Каждая из этих трёх плоских волн фокусируется линзой в точку в задней фокальной плоскости.

Волна  $E_1 = \beta E_0 e^{-i(\omega t - kz)}$ , распространяющаяся вдоль оси линзы (оси  $Z$ ), фокусируется в начало координат, а волны  $E_2$  и  $E_3$ , распространяющиеся в направлении  $\sin \theta = \pm(u/k)$ , фокусируются в точках  $x_{1,2} = \pm Fu/k = \pm F\lambda/d$  ( $F$  — фокусное расстояние линзы).

Функция  $t(x)$  с самого начала задана в виде суммы гармонических составляющих, т. е. в виде ряда Фурье. Каждой гармонической составляющей мы поставили в соответствие с

(3) плоскую волну, собираемую линзой в точку в задней фокальной плоскости (её обычно называют фурье-плоскостью). Проводя аналогию с «временной» координатой, мы можем заключить, что спектр функции  $t(x)$  представлен в фурье-плоскости тремя пространственными частотами:  $0, +u, -u$ ; с амплитудами соответственно:  $\beta, \alpha/2, \alpha/2$ .

Теорема Фурье, доказываемая в курсе математического анализа, утверждает, что широкий класс периодических функций  $t(x)$  может быть представлен в виде суммы бесконечного множества гармонических составляющих, имеющих кратные частоты, т. е. в виде ряда Фурье. В комплексной форме этот ряд имеет вид

$$t(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inu x}. \quad (4)$$

Рассуждая так же, как в случае амплитудной синусоидальной решётки, мы придём к выводу, что картина, наблюдаемая в фурье-плоскости, представляет собой эквидистантный набор точек с координатами

$$x_n = \frac{Fu}{k} n = \frac{f\lambda}{d} n$$

и амплитудами, пропорциональными  $C_n$ . Таким образом, с помощью линзы в оптике осуществляется пространственное преобразование Фурье: при освещении транспаранта плоской монохроматической волной картина, наблюдаемая в задней фокальной плоскости линзы, установленной за транспарантом, представляет собой фурье-образ функции пропускания транспаранта.

Последнее утверждение нуждается в уточнении. Распределение света в задней фокальной плоскости линзы будет воспроизводить распределение амплитуд плоских волн, продифрагировавших на транспаранте, но фазовые соотношения при этом, вообще говоря, оказываются искажёнными и не соответствуют аргументам комплексных амплитуд в выражении (4). При изменении расстояния между транспарантом и линзой фазовые соотношения изменяются. Можно доказать, что если транспарант установлен в передней фокальной плоскости линзы, то в её задней фокальной плоскости восстанавливаются и амплитудные, и фазовые соотношения между плоскими волнами, и таким образом строго осуществляется комплексное фурье-преобразование (4).

Во многих практически важных случаях функция пропускания транспаранта чисто амплитудная, как, например, в случае амплитудной синусоидальной решётки (1). Тогда для того, чтобы найти фурье-образ функции пропускания транспаранта, достаточно определить только пространственные частоты и соотношение между амплитудами плоских волн на выходе из транспаранта. Для амплитудной синусоидальной решётки мы получили три плоских волны с пространственными частотами  $0, +u, -u$  и амплитудами, пропорциональными  $\beta, \alpha/2, \alpha/2$ . В соответствии с (1) мы можем утверждать, что нашли пространственный фурье-образ функции пропускания амплитудной синусоидальной решётки.

Интересно заметить, что наблюдаемая визуально картина фраунгоферовой дифракции в задней фокальной плоскости линзы не зависит от расстояния между транспарантом и линзой, так как глаз не реагирует на фазу волны, а регистрирует только интенсивность (усреднённый по времени квадрат амплитуды поля). Условия наблюдения дифракции Фраунгофера можно выполнить и без применения линзы, если наблюдать дифракционную картину на достаточно удалённом экране. Таким образом, пространственное преобразование Фурье может осуществляться и в свободном пространстве при наблюдении дифракции Фраунгофера.

## 1.2. Спектр функции пропускания щелевой диафрагмы и периодической последовательности таких функций

Картина дифракции Фраунгофера на щели и на дифракционной решётке, имеющей вид периодического набора щелей, хорошо известна из курса оптики. Спектр дифракционной решётки представлен на рис. 1. Если размеры дифракционной решётки неограничены, то дифракционные максимумы в спектре бесконечно узки. Чем меньше размер решётки (полное число щелей), тем шире каждый отдельный максимум.

Направление на главные максимумы  $\theta_n = un/k = \lambda n/d$  ( $n$  — целое число) определяется периодом решётки  $d$ , а распределение амплитуд в спектре (огibaющая) — фурье-образом функции пропускания отдельного штриха:

$$g_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } -D/2 \leq x \leq D/2; \\ 0 & \text{при } D/2 > x > D/2. \end{cases} \quad (5)$$

Так как функция  $g_2$  неперiodична, её фурье-образ представляется непрерывным множеством точек и определяется интегральным преобразованием Фурье:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(u) e^{iux} du, \\ G(u) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-iux} dx, \end{aligned} \quad (6)$$

Говорят, что в таком виде  $g(x)$  и  $G(u)$  представляют собой пару преобразований Фурье:  $G(u)$  — спектр или фурье-образ функции  $g(x)$ .

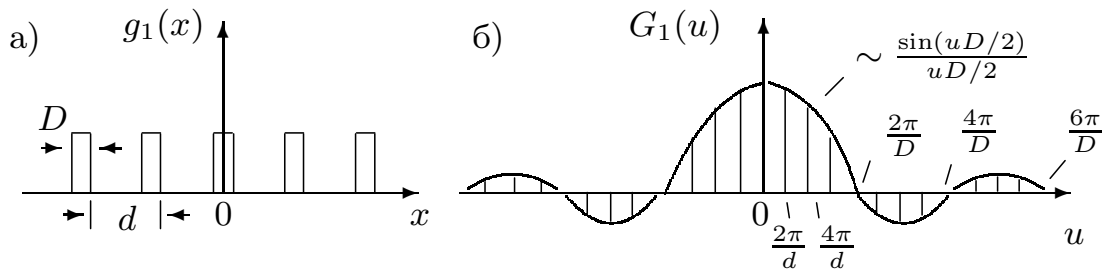


Рис. 1: а)  $g_1(x)$  — функция пропускания дифракционной решётки (последовательности прозрачных и непрозрачных полос); б)  $G_1(u)$  — спектр функции пропускания дифракционной решётки

Спектр функции  $g_2(x)$  хорошо известен, он соответствует картине дифракции Фраунгофера на щели и описывается функцией вида  $\sin x$  (рис. 2).

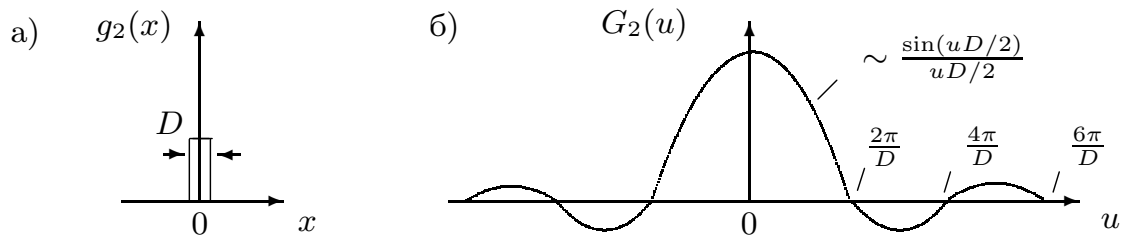


Рис. 2: а)  $g_2(x)$  — функция пропускания щелевой диафрагмы; б)  $G_2(u)$  — спектр функции пропускания щелевой диафрагмы

Получим спектр  $G_2(u)$  ещё раз с помощью преобразования Фурье:

$$G_2(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(x) e^{-iux} dx = \int_{-D/2}^{D/2} e^{-iux} = D \frac{\sin uD/2}{uD/2}.$$

Отсюда видно, что направление на первый минимум  $\theta_1$  в огибающей спектра пропускания дифракционной решётки определяется шириной функции пропускания отдельного штриха:  $\theta_1 = u/k = \lambda/D$ . Если ввести понятия протяжённости функции пропускания транспаранта по координате  $(\Delta x)$  и ширины её спектра  $(\Delta u)$ , то

$$\Delta u \cdot \Delta x = \text{const.} \quad (7)$$

Для частного случая функции пропускания щелевой диафрагмы, определяя ширину её спектра по первому нулю функции  $\frac{\sin uD/2}{uD/2}$ , получаем

$$\Delta u \cdot \Delta x = \frac{2\pi}{D} \cdot D = 2\pi.$$

Соотношение (7) в волновой физике играет чрезвычайно важную роль. Его называют соотношением неопределённости.

Измерив на удалённом экране расстояния между максимумами или минимумами в спектре пропускания щели (рис. 2б) или решётки (рис. 1б), можно рассчитать размер щели или период решётки.

Размер малого объекта можно рассчитать, если получить его изображение, увеличенное с помощью линзы.

### 1.3. Метод Аббе

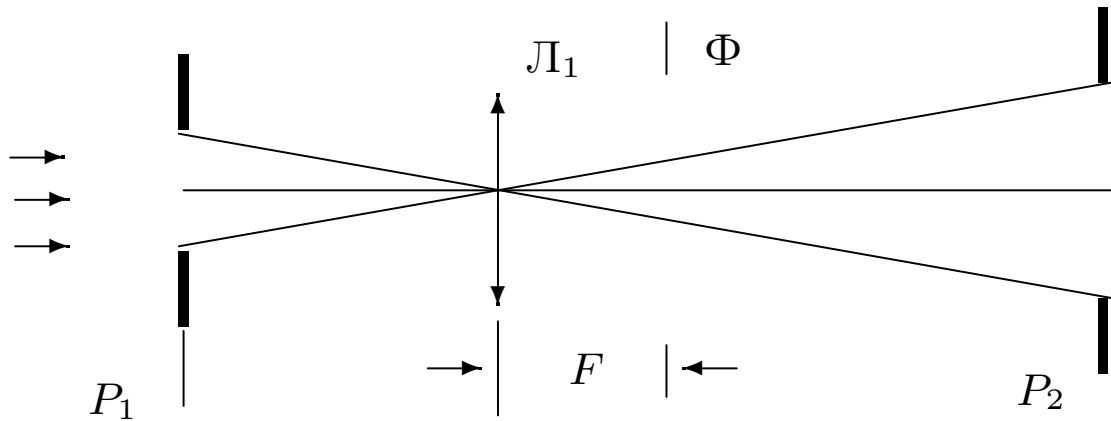


Рис. 3: Схема, поясняющая метод Аббе построения изображения

Рассмотрим кратко схему образования изображения (рис. 3). Пусть предмет расположен в плоскости  $P_1$  на расстоянии от линзы большем, чем фокусное. Тогда существует сопряжённая предметной плоскости  $P_1$  плоскость  $P_2$ , где образуется изображение предмета-щели.

Аббе предложил рассматривать схему прохождения лучей от предмета к изображению в два этапа. Сначала рассматривается изображение-спектр в задней фокальной плоскости  $\Phi$  линзы  $\mathcal{L}_1$  (это изображение Аббе назвал первичным).

Затем это изображение рассматривается как источник волн, создающий изображение предмета в плоскости  $P_2$  (вторичное изображение). Такой подход опирается на принцип Гюйгенса–Френеля, согласно которому любой участок волнового фронта можно рассматривать как источник излучения.

Картина, наблюдаемая в плоскости  $P_2$ , зависит от распределения амплитуды и фазы в плоскости  $\Phi$  — в первичном изображении. Если плоскость  $P_2$  сопряжена с предметной плоскостью  $P$ , то фазовые соотношения в первичном изображении оказываются именно такими, что в плоскости  $P_2$  мы наблюдаем соответственно увеличенное или уменьшенное изображение предмета. Поэтому иногда говорят, что линза дважды осуществляет преобразование Фурье: сначала в задней фокальной плоскости  $\Phi$  линзы получается световое поле, соответствующее фурье-образу функции пропускания предмета (с точностью до фазы), а затем на промежутке между фокальной плоскостью  $\Phi$  и плоскостью изображений  $P_2$  осуществляется обратное преобразование Фурье, и в плоскости  $P_2$  восстанавливается таким образом изображение предмета.

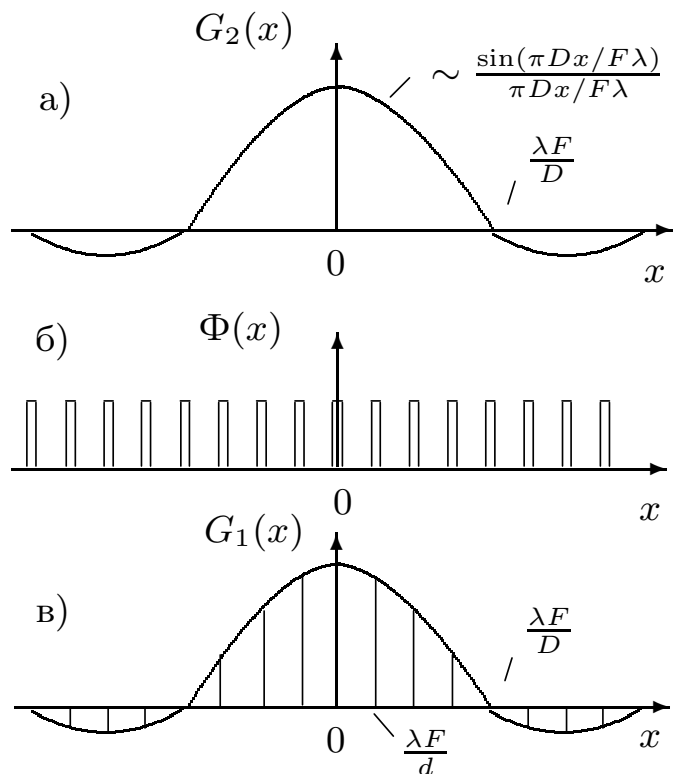


Рис. 4: а)  $G_2(x)$  — спектр функции пропускания щелевой диафрагмы;  $x$  — координаты в задней фокальной плоскости линзы; б)  $\Phi(x)$  — функция пропускания решётки, установленной в фурье-плоскости линзы; в)  $G_1(x)$  — отфильтрованный спектр щелевой диафрагмы (ср. с рис. 1)

#### 1.4. Мультипликация изображения предмета

Рассмотрим, что произойдёт с изображением предмета, если мы установим в задней фокальной плоскости линзы решётку. Сопоставим вначале спектры щелевой диафрагмы (рис. 2) и периодической последовательности щелевых диафрагм (рис. 1).

Легко видеть, что спектр, изображённый на рис. 1, можно получить из спектра, изображённого на рис. 2, если исключить из него часть пространственных частот, поместив в фурье-плоскость решётку — последовательность прозрачных и непрозрачных линий (рис. 4).

Отфильтрованный таким образом спектр не будет отличаться ни по амплитуде, ни по фазе от спектра периодической последовательности щелевых диафрагм, и в плоскости  $P_2$  мы получим вместо изображения одиночной щели изображение периодической последовательности щелей.

Эти рассуждения можно повторить и для предмета с произвольным спектром, необходимо только, чтобы период решётки был заметно меньше ширины спектра (точное соотношение можно получить из теоремы Котельникова). Таким образом, установив в задней фокальной плоскости линзы решётку, мы вместо изображения одиночного предмета получим эквидистантный набор изображений таких предметов, т. е. осуществим мультипликацию изображения предмета (увидим изображение несуществующей «фиктивной»

решётки).

Поменяв местами сетку и щель, можно проследить влияние размера щели на изображение сетки.

## 2. Экспериментальная установка

Схема установки представлена на рис. 5. Щель переменной ширины  $D$ , снабжённая микрометрическим винтом В, освещается параллельным пучком света, излучаемым He-Ne лазером (радиус кривизны фронта волны велик по сравнению с фокусными расстояниями используемых в схеме линз).

Увеличенное изображение щели с помощью линзы  $L_1$  проецируется на экран Э. Величина изображения  $D_1$  зависит от расстояний от линзы до предмета —  $a_1$  и до изображения —  $b_1$ , т. е. от увеличения  $\Gamma$  системы:

$$\Gamma = \frac{D_1}{D} = \frac{b_1}{a_1}. \quad (8)$$

Изображение спектра щели образуется в задней фокальной плоскости  $\Phi$  линзы  $L_1$ . Размещая в плоскости  $\Phi$  двумерные решётки-сетки, можно влиять на первичное изображение и получать мультиплицированное изображение щели.

Убрав линзу, можно наблюдать на экране спектр щели (рис. 6), а если заменить щель решёткой — спектр решётки. Крупные решётки дают на экране очень мелкую картину спектра, которую трудно промерить. В этом случае используют две линзы (рис. 7): первая (длиннофокусная) формирует первичное изображение — спектр, вторая (короткофокусная) — проецирует на экран увеличенное изображение спектра.

## 3. Результаты измерений и обработка данных

### 3.1. Определение ширины щели с помощью линзы

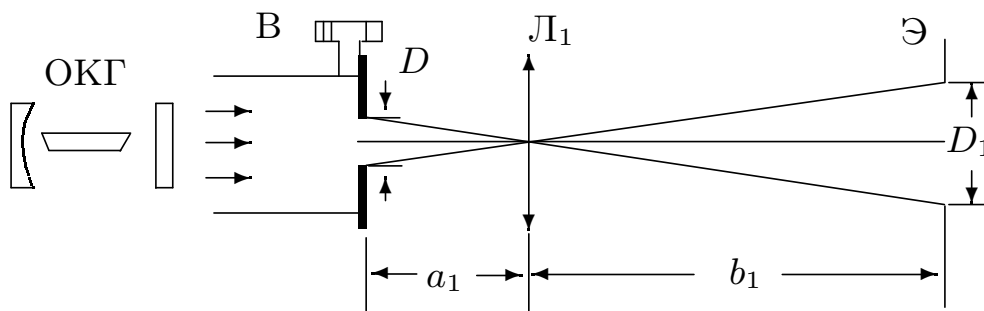


Рис. 5: Схема, поясняющая метод Аббе построения изображения

С помощью короткофокусной линзы  $L_1$  ( $F_1 = 38$  мм) получим на экране Э увеличенное изображение щели. Меняя ширину щели от 50 до 500 мкм, снимим зависимость размера изображения  $D_1$  от ширины щели  $D$ . Занесём данные в таблицу 1.

Измерим расстояния  $a_1 = 5 \pm 1$  см и  $b_1 = 120 \pm 1$  см для определения увеличения  $\Gamma$  системы. Погрешность этих измерений велика, поэтому дополнительно измерим  $L = a_1 + b_1 = 125 \pm 1$  см и, зная  $F_1$ , вычислим  $a_1 = LF_1/b_1 = 3.96 \pm 0.05$  см. Полученное косвенно значение лучше согласуется с ожидаемым ( $a_1 \simeq F_1$ ), поэтому будем использовать

его. Зная увеличение линзы и размер изображения, вычислим размер щели по формуле (8) и занесём результаты в таблицу 1.

**Таблица 1.**  
Ширина щели и изображения

$D_1$ , мм	1.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	11.0	12.0
$D$ , мкм	50.0	100.0	150.0	200.0	250.0	300.0	350.0	400.0	450.0	500.0
$D_{\text{л}}$ , мкм	30.0	100.0	130.0	160.0	200.0	230.0	260.0	300.0	360.0	400.0
$\sigma_{D_{\text{л}}}$ , мкм	30.0	30.0	30.0	30.0	30.0	30.0	30.0	30.0	30.0	30.0

### 3.2. Определение ширины щели по её спектру

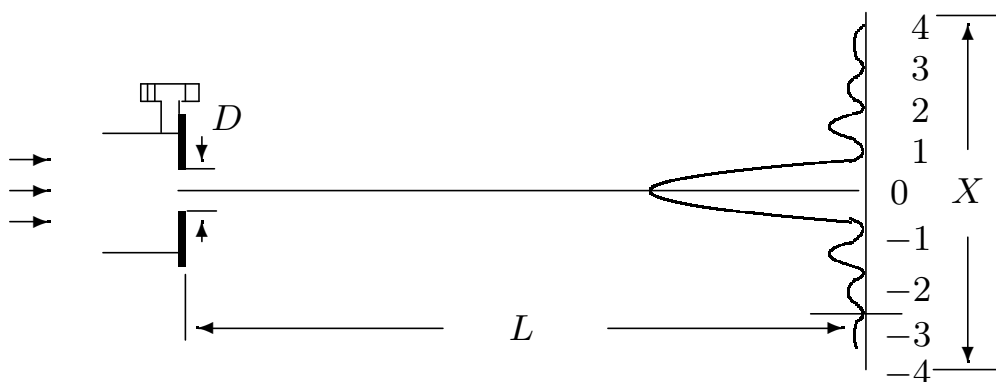


Рис. 6: Схема, поясняющая метод Аббе построения изображения

Получим на удалённом экране спектр щели (рис. 6). Измерим ширину спектра для самой маленькой щели. Для большей точности будем измерять расстояние  $X$  между наиболее удалёнными минимумами. Измерения проведём для нескольких значений  $D$  и занесём данные в таблицу 1.

По результатам измерения спектра рассчитаем ширину щели  $D_c$  используя соотношения

$$\Delta X = \frac{X}{m} = \frac{\lambda}{D_c} L. \quad (9)$$

Длина волны He-Ne лазера  $\lambda = 5320 \text{ \AA}$ . Полученные данные занесём в таблицу 2.

**Таблица 2.**  
Ширина щели и изображения

$X$ , мм	113.0	168.0	216.0	208.0	208.0	207.0	98.0	74.0	74.0	74.0
$m$	9.0	24.0	48.0	59.0	73.0	84.0	48.0	40.0	44.0	52.0
$D$ , мкм	100.0	150.0	200.0	250.0	300.0	350.0	400.0	450.0	500.0	550.0
$D_c$ , мкм	53.0	95.0	148.0	189.0	234.0	270.0	330.0	360.0	400.0	470.0
$\sigma_{D_c}$ , мкм	0.6	4.0	6.0	7.0	10.0	10.0	10.0	20.0	20.0	20.0



Построим на одном графике зависимости  $D_{\text{л}} = f(D)$  и  $D_{\text{и}} = f(D)$ .

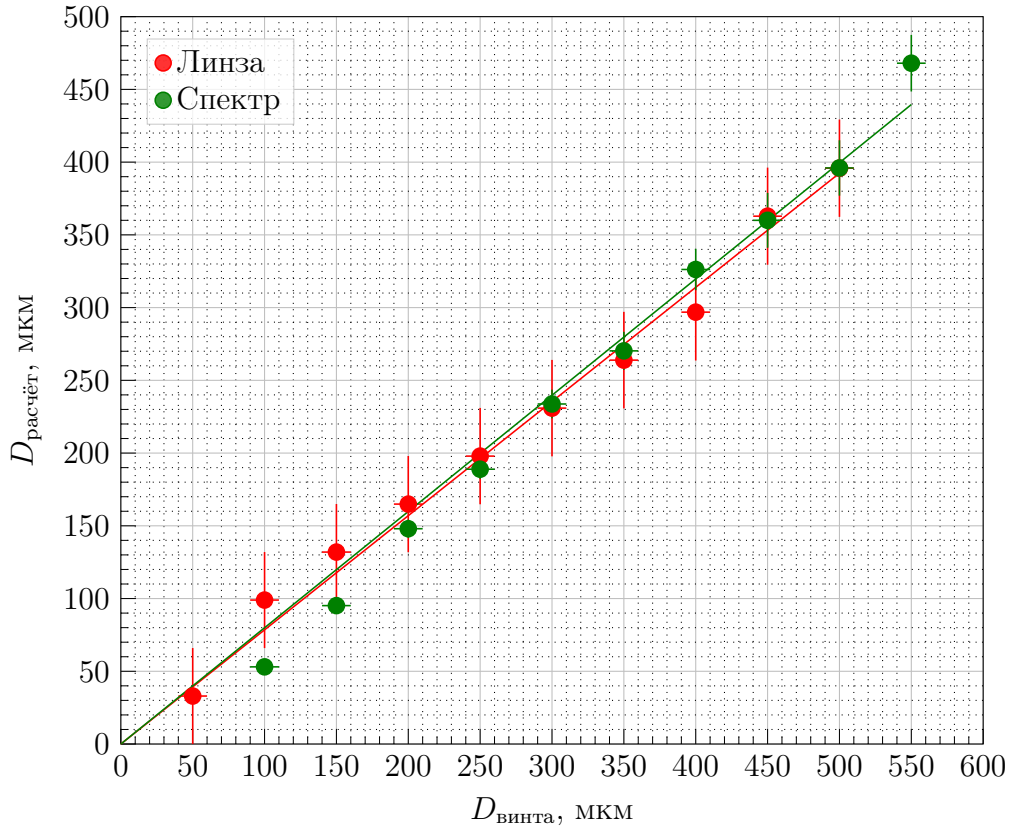


Рис. 7: Графики зависимости рассчитанных диаметров от показаний микрометрического винта

### 3.3. Определение периода решётки по спектру на удалённом экране

Поставим кассету с двумерными решётками вплотную к выходному окну лазера. Вращением наружного кольца будем менять сетки. Для каждой сетки измерим расстояние  $x$  между соседними максимумами и отметим  $m$  — порядок максимума. Измерим расстояние  $L = 136$  см от кассеты до экрана.

Рассчитаем расстояние  $\Delta X$  между соседними максимумами и определим период каждой решётки  $d_c = f(N)$ , используя соотношения

$$\Delta X = \frac{X}{2m} = \frac{\lambda}{d_c} L. \quad (10)$$

Данные занесём в таблицу 3.

### 3.4. Определение периода решёток по увеличенному изображению спектра

Линзу  $\mathcal{L}_2$  с максимальным фокусом  $F_2 = 110$  мм поставим на расстоянии  $\simeq F_2$ . В плоскости  $\Phi$  линза  $\mathcal{L}_2$  даёт фурье-образ сетки — её спектр, а короткофокусная линза  $\mathcal{L}_3$  ( $F_3 = 25$  мм) создаёт на экране увеличенное изображение этого спектра.

Так как экран достаточно удалён ( $b_3 \gg a_3$ ), то практически  $a_3 = F_3$ , и расстояние между линзами  $\simeq F_2 + F_3$ .

Измерим  $X$  — расстояние между наиболее удалёнными минимумами и их количество  $m$  для разных сеток. Зная увеличение линзы  $\mathcal{L}_3$  можно рассчитать расстояние между максимумами  $\Delta x$  в плоскости  $\Phi$ , а затем период сетки  $d_{\pi}$ :

$$\Delta x = \frac{\Delta X}{\Gamma_3} = \frac{\lambda}{d_{\pi}} F_2. \quad (11)$$

Данные занесём в таблицу 4.

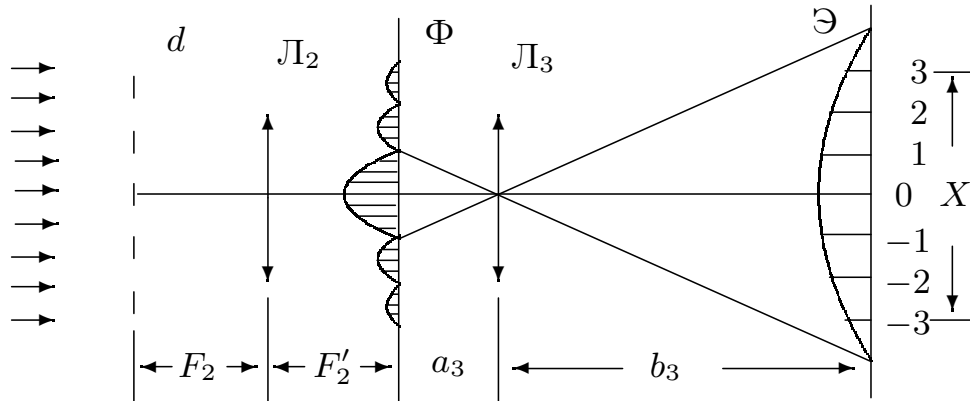


Рис. 8: Схема, поясняющая метод Аббе построения изображения

**Таблица 3.**  
Ширина щели и изображения

№	$X$ , мм	$m$	$d_c$ , мкм	$\sigma_{d_c}$ , мкм
1.0	218.0	3.0	19.9	0.2
2.0	267.0	5.0	27.1	0.2
3.0	241.0	10.0	60.0	0.5
4.0	177.0	15.0	123.0	1.0
5.0	92.0	10.0	157.0	2.0

**Таблица 4.**  
Ширина щели и изображения

№	$X$ , мм	$m$	$d_{\pi}$ , мкм	$\sigma_{d_{\pi}}$ , мкм
1.0	295.0	1.0	18.1	0.2
2.0	196.0	1.0	27.2	0.3
3.0	295.0	3.0	54.2	0.5
4.0	355.0	7.0	105.1	0.9
5.0	355.0	10.0	150.0	1.0

### 3.5. Мультиплицирование

Снова поставим тубус со щелью к окну лазера (рис. 8) и найдём на экране резкое изображение щели с помощью линзы  $\mathcal{L}_2$ .

В фокальной плоскости  $\Phi$  линзы  $\mathcal{L}_2$  поставим кассету с сетками, которые будут «рассекать» фурье-образ щели — осуществлять пространственную фильтрацию.

Подберём такую ширину входной щели  $D$ , чтобы на экране можно было наблюдать мультиплицированное изображение для всех сеток. Чем уже щель, тем шире её фурье-образ и тем легче рассеять его сетками.

Снимем зависимость  $Y$  (расстояние между симметрично удалёнными изображениями щели) и  $K$  (число промежутков между изображением и центром) от номера сетки для фиксированной ширины входной щели. Данные занесём в таблицу 5.

Измерим расстояния  $a_2 = 14 \pm 1$  см и  $b_2 = 114 \pm 1$  см для расчёта увеличения  $\Gamma_2$ .

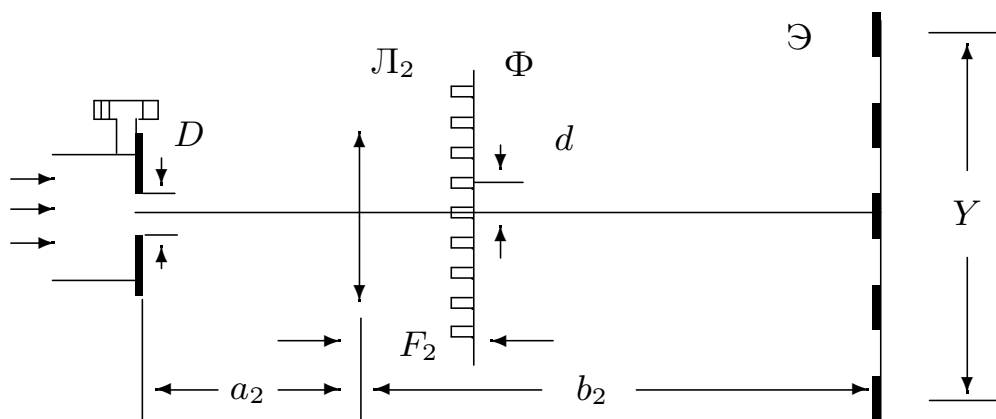


Рис. 9: Схема, поясняющая метод Аббе построения изображения

Рассчитаем периоды  $\Delta y$  «фиктивных» решёток, которые дают такую же периодичность на экране:  $\Delta y = \Delta Y / \Gamma_2$ , где  $\Delta Y = Y / (2K)$ . Результаты поместим в таблицу 5.

**Таблица 5.**  
Ширина щели и изображения

№	$Y$ , мм	$K$	$\Delta y$ , мм	$\sigma_{\Delta y}$ , мм
1.0	222.0	4.0	3.4	0.2
2.0	260.0	7.0	2.3	0.2
3.0	205.0	11.0	1.14	0.08
4.0	178.0	20.0	0.55	0.05
5.0	162.0	25.0	0.4	0.03

Построим график зависимости  $\Delta y$  от  $1/d_c$ .

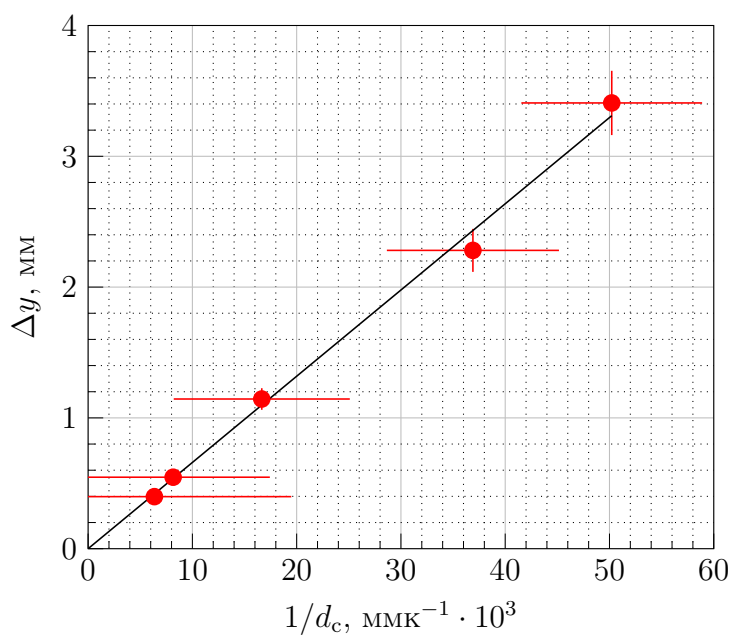


Рис. 10: Графики зависимости  $\Delta y \frac{1}{d_c}$

## 4. Обсуждение результатов

В данной работе мы измеряли параметры решёток и щели разными методами. Методы дали несовпадающие результаты. Вероятно, это вызвано плохой методикой измерений, так как для большинства опытов было трудно точно определить требуемые расстояния.

Построенные графики совпадают с теоретическими зависимостями (линейные и проходят через ноль). Для построения аппроксимирующих прямых  $y = kx$  использовался МНК:

$$k = \frac{\langle xy \rangle}{\langle x^2 \rangle} \quad (12)$$

Погрешности оценивались по общей формуле погрешностей:

$$\sigma_{f(a,b,c,\dots)} = f(a,b,c,\dots) \sqrt{\left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_c}{c}\right)^2 + \dots} \quad (13)$$

## 5. Вывод

Несмотря на плохое соответствие значений между разными методами, совпадающие с теоретической зависимостью графики дают надежду, что при более аккуратном проведении эксперимента, данные будут согласовываться лучше.

