№4

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2(x^2+y^2-z^2),\quad a \neq 0$$

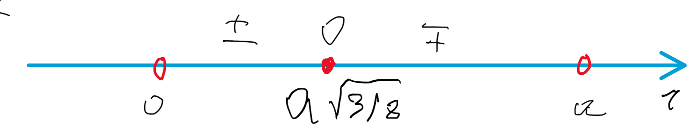
Перейдём к цилиндрическим координатам: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$

$$(r^2+z^2)^2 = a^2(r^2-z^2) \Rightarrow z^4 + (2r^2+a^2)z^2 + r^2(r^2-a^2) = 0$$

Решая данное уравнение и отбрасывая комплексные корни получим:

$$z = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2(a^2+8r^2)} - a^2 - 2r^2}{2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \pm\left(8\left(\sqrt{a^2(a^2+8r^2)} - a^2 - 2r^2\right)\right)^{-1/2}\left(\frac{8a^2r}{\sqrt{a^2(a^2+8r^2)}} - 4r\right) = 0 \Rightarrow r^2 = \frac{3a^2}{8}$$



Значит точки, удовлетворяющие условию $r^2 = 3a^2/8$, — точки экстремума

Исследуем в точке $(0,0)$: $\lim\limits_{r\to+0}\frac{\partial z}{\partial r} = \lim\limits_{r\to+0}\left(\frac{4r+o(r)}{4|r|+o(r)}\right) = \pm 1 \Rightarrow \lim\limits_{r\to-0}\frac{\partial z}{\partial r} = \mp 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow r = 0$ — точка экстремума

для $z = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2(a^2+8r^2)} - a^2 - 2r^2}{2}}$ $\quad z = \frac{a}{\sqrt{8}}$ — максимум, $r = 0$ — минимум

для $z = -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2(a^2+8r^2)} - a^2 - 2r^2}{2}}$ $\quad z = -\frac{a}{\sqrt{8}}$ — минимум, $r = 0$ — максимум