Домашнее задание по теме «Производные функций нескольких переменных».

1. Найти область определения функции.

$$z = \sqrt{1 - x^3} + \ln\left(y^2 - 1\right)$$

$$\begin{gathered} 1 - x^3 \geq 0 \\ 1 \geq x^3 \\ x \leq 1; \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} y^2 - 1 > 0 \\ y^2 > 1 \\ y_1 > 1, y_2 < -1 \end{gathered}$$

$$(x, y) \in R^2 : (y > 1 \& x <= 1) \parallel (y < -1 \& x <= 1)$$

2. Найти производные 1-го порядка функции.

$$z = \left(1 + \frac{\ln(x)}{\ln(y)}\right)^3$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\left(1 + \frac{\ln(x)}{\ln(y)}\right)^3\right) = \frac{3(\ln(x) + \ln(y))^2}{x \ln^3(y)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\left(1 + \frac{\ln(x)}{\ln(y)}\right)^3\right) =$$

$$= 3 \bullet \left(\frac{\ln(x) + \ln(y)}{\ln(y)}\right)^2 \bullet \frac{\frac{1}{y} \bullet \ln(y) - (\ln(y) + \ln(x)) \bullet \frac{1}{y}}{\ln{(y)}^2} =$$

$$= \frac{3(\ln(x) + \ln(y))^2}{x \ln^3(y)}$$

3.Найти полный дифференциал функции в точке (1;1).

$$z = \sqrt{2xy + \cos\frac{x}{y}}$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{(2y - sin(\frac{x}{y}))}{\sqrt{2xy + \cos\frac{x}{y}}}\frac{1}{y} = \frac{y - \frac{sin\frac{x}{y}}{2y}}{\sqrt{2xy + \cos\frac{x}{y}}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{(2x - sin(\frac{x}{y}))}{\sqrt{2xy + \cos\frac{x}{y}}}\frac{-x}{y^2} = \frac{x + \frac{xsin\frac{x}{y}}{2y^2}}{\sqrt{2xy + \cos\frac{x}{y}}}$$

$$dz(1;1) = \frac{1 - \frac{sin1}{2}}{\sqrt{2 + \cos 1}}dx + \frac{1 + \frac{sin1}{2}}{\sqrt{2 + \cos 1}}dy$$

4. Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 6$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 9$$

$$\begin{cases} 2x + y - 6 = 0 \\ x + 2y - 9 = 0 \end{cases}$$

$$x = -2y + 9$$

$$2(-2y + 9) - 6 + y = 0$$

$$y = 4$$

$$x = 1$$

$$z = -21$$

$$\Delta \begin{bmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{bmatrix} = \Delta \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 3 > 0$$

Минимум в точке (1; 4; -21)