

МЕТОДИЧКА ПО МАТАНАЛІЗУ

Version 5.0
Долгопрудный, 2022

1. Аннотация

Введем понятия:

1. \mathbb{R}^m – m -мерное координатное пространство.
2. Точка $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ – точка m -мерного пространства, $x_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots, m$ – координата точки.
3. $x, y \in \mathbb{R}^m$; $\rho_e(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^m (x_j - y_j)^2}$ – расстояние между точками x и y .
4. $\mathbb{E}^m = (\mathbb{R}^m, \rho_e)$ – m -мерное евклидово пространство.
5. $\mathcal{M} = (M, \rho)$ – метрическое пространство, где $M \subset \mathbb{R}^m$ – некоторое множество, $\rho(x, y)$ – функция, задающая расстояние между точками x, y множества M (метрика).
6. $B_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{E}^m : \rho(x, x_0) < \varepsilon\}$ – m -мерный шар с центром в точке x_0 и радиусом ε (шаровая ε -окрестность точки x_0).
7. $\Pi_{r_1, r_2, \dots, r_m}(x_0) = \{x \in \mathbb{E}^m : |x_j - x_{0j}| < r_j, j = 1, 2, \dots, m\}$ – m -мерный прямоугольник с центром x_0 и сторонами $2r_1, 2r_2, \dots, 2r_m$.
8. $\Pi_r(x_0) = \{x \in \mathbb{E}^m : |x_j - x_{0j}| < r\}$ – m -мерный квадрат с центром в точке x_0 и стороной $2r$.

Предложение:

1. В любую шаровую окрестность можно вписать прямоугольную окрестность.
2. В любую прямоугольную окрестность можно вписать шаровую окрестность.

Доказательство: Пусть $B_\varepsilon(x_0)$, $\Pi_r(x_0)$ – шаровая и прямоугольная окрестности точки x_0 , $r = (r_1, r_2, \dots, r_m)$. Возьмем $\delta = \min\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$, тогда:

1. $\Pi_\delta(x_0) \subset B_\varepsilon(x_0)$, $\delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$.
2. $B_\varepsilon(x_0) \subset \Pi_\delta(x_0)$, $\delta = \varepsilon$.

1.1. Предел последовательности точек в n -мерном евклидовом пространстве.

Обозначим $\mathcal{M} = (M, \rho)$, $\{x^n\}_{n=1}^\infty$ – последовательность точек в \mathcal{M} .

Определение: Последовательность $\{x^n\} \subset \mathcal{M}$ точек метрического пространства сходится к точке $a \in \mathcal{M}$, если:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x^n, a) = 0$$

$$[\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = a] \stackrel{\text{def}}{=} [\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \mapsto \rho(x^n, a) < \varepsilon]$$

Любой шар с центром в точке a и радиусом ε содержит все члены последовательности $\{x^n\}$ за исключением быть может конечного числа N .

Лемма: Сходящаяся последовательность точек ограничена.

Доказательство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = a \stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$$

где $y_n = \rho(x^n, a)$. Тогда $\{y_n\}$ – бесконечно малая последовательность $\Rightarrow \{y_n\}$ – ограничена, т. е. $\exists C > 0 : 0 \leq y_n = \rho(x^n, a) \leq C$.

Лемма: Сходящаяся последовательность точек имеет единственный предел.

Доказательство: Будем доказывать от противного: предположим, что

$$\exists a \neq b : \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = a \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = b \end{cases} \Rightarrow$$

$$(1) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists N_1 = N_1(\varepsilon) : \forall n \geq N_1 \mapsto \rho(x^n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$(2) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists N_2 = N_2(\varepsilon) : \forall n \geq N_2 \mapsto \rho(x^n, b) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Рассмотрим $N = \max\{N_1, N_2\}$, тогда:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \mapsto \rho(a, b) \leq \rho(x^n, a) + \rho(x^n, b) < \varepsilon$$

Таким образом, получаем, что $\rho(a, b) = 0 \Rightarrow a = b$ – противоречие.

1.2. Теорема Больцано–Вейерштрасса и критерий Коши сходимости последовательности.

Определение: Последовательность точек $\{x^n\} \subset \mathcal{M}$ ограничена, если $\exists R > 0 \forall n \mapsto \rho(x^n, 0) \leq R$.

Теорема: Пусть $\{x^n\} = \{x_1^n, x_2^n, x_3^n, \dots, x_m^n\} \subset \mathbb{E}^m$ – последовательность точек m -мерного евклидова пространства, а $a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in \mathbb{E}^m$ – точка m -мерного евклидова пространства, тогда

$$x^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a \Leftrightarrow \forall j \ x_j^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a_j$$

Доказательство:

Необходимость (\Rightarrow)

По условию дано:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \mapsto \rho(x^n, a) < \varepsilon$$

Тогда:

$$\rho(x^n, a) = \sqrt{\sum_{j=1}^m (x_j^n - a_j)^2} \Rightarrow |x_j^n - a_j| \leq \rho(x^n, a) < \varepsilon$$

Таким образом получаем:

$$[\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \ \& \ \forall j = 1, 2, \dots, m \mapsto |x_j^n - a_j| < \varepsilon] \stackrel{def}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} x_j^n = a_j$$

Достаточность (\Leftarrow)

Запишем определение покоординатной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_j = N_j(\varepsilon) : \forall n \geq N_j \mapsto |x_j - a_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$$

Пусть $N = \max\{N_1, N_2, \dots, N_m\} \Rightarrow \forall n \geq N \mapsto |x_j - a_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$ для всех j .

$$\rho(x^n, a) = \sqrt{\sum_{j=1}^m (x_j^n - a_j)^2} < \sqrt{m \cdot \frac{\varepsilon^2}{m}} = \varepsilon \Rightarrow$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = a$$

Теорема [Теорема Больцано–Вейерштрасса]: Из любой ограниченной последовательности $\{x^n\} \subset \mathbb{E}^m$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x^{k_n}\} \subset \mathbb{E}^m$.

Доказательство:

$\{x^n\} \subset \mathbb{E}^m$ является ограниченной $\stackrel{def}{\Rightarrow} \exists R > 0 \forall n \mapsto \rho_e(x^n, 0) \leq R$. Тогда для всех j последовательность $\{x_j^n\}$ так же ограничена (x_j^n – j -ая компонента).

$\{x_1^n\}$ ограничена, тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса для числовой последовательности существует подпоследовательность $\{x_1^{k_{n_1}}\}$ такая, что $x_1^{k_{n_1}} \xrightarrow{n_1 \rightarrow \infty} a_1$.

Возьмём подпоследовательность $\{x^{k_{n_1}}\} \subset \mathbb{E}^m$ (по номерам k_{n_1} выбираем из последовательности $\{x^n\}$ точки). И рассмотрим числовую последовательность $\{x_2^{k_{n_1}}\}$. Она ограничена (как подпоследовательность ограниченной последовательности) и следовательно, по теореме Больцано-Вейерштрасса существует подпоследовательность $\{x_2^{k_{n_2}}\}$ такая, что $x_2^{k_{n_2}} \xrightarrow{n_2 \rightarrow \infty} a_2$. При этом все еще справедливо $x_1^{k_{n_2}} \xrightarrow{n_2 \rightarrow \infty} a_1$.

$$\begin{aligned} \{x^n\} \subset \mathbb{E}^m &\Rightarrow \{x_1^n\} \Rightarrow \{x_1^{k_{n_1}}\} \Rightarrow x_1^{k_{n_1}} \xrightarrow{n_1 \rightarrow \infty} a_1 \\ \{x^{k_{n_1}}\} \subset \mathbb{E}^m &\Rightarrow \{x_2^{k_{n_1}}\} \Rightarrow \{x_2^{k_{n_2}}\} \Rightarrow \begin{cases} x_2^{k_{n_2}} \xrightarrow{n_2 \rightarrow \infty} a_2 \\ x_1^{k_{n_2}} \xrightarrow{n_2 \rightarrow \infty} a_1 \end{cases} \\ \{x^{k_{n_2}}\} \subset \mathbb{E}^m &\Rightarrow \{x_3^{k_{n_2}}\} \Rightarrow \{x_3^{k_{n_3}}\} \Rightarrow \begin{cases} x_3^{k_{n_3}} \xrightarrow{n_3 \rightarrow \infty} a_3 \\ x_2^{k_{n_3}} \xrightarrow{n_3 \rightarrow \infty} a_2 \\ x_1^{k_{n_3}} \xrightarrow{n_3 \rightarrow \infty} a_1 \end{cases} \\ &\dots \\ \{x^{k_{n_{m-1}}}\} \subset \mathbb{E}^m &\Rightarrow \{x_m^{k_{n_{m-1}}}\} \Rightarrow \{x_m^{k_{n_m}}\} \Rightarrow \begin{cases} x_m^{k_{n_m}} \xrightarrow{n_m \rightarrow \infty} a_m \\ \dots \\ x_1^{k_{n_m}} \xrightarrow{n_m \rightarrow \infty} a_1 \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом мы нашли подпоследовательность $\{x^{k_{n_m}}\} \subset \mathbb{E}^m$ такую, что $x^{k_{n_m}} \xrightarrow{n_m \rightarrow \infty} a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$.

Определение: Последовательность точек $\{x^n\} \subset \mathcal{M}$ называется *фундаментальной*, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \ \& \ \forall k \geq N \mapsto \rho(x^n, x^k) < \varepsilon$.

Определение: Метрическое пространство \mathcal{M} , в котором любая фундаментальная последовательность точек $\{x^n\} \subset \mathcal{M}$ является сходящейся, называется *полным*.

Теорема [Критерий Коши]: для того, чтобы последовательность $\{x^n\} \subset \mathbb{E}^m$ сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Доказательство:

Необходимость (\Rightarrow)

$$x^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) :$$

$$\forall n \geq N \mapsto \rho(x^n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall k \geq N \mapsto \rho(x^k, a) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\rho(x^n, x^k) \leq \rho(x^n, a) + \rho(x^k, a) < \varepsilon$$

Достаточность (\Leftarrow)

Докажем, что евклидово пространство \mathbb{E}^m является полным, то есть любая фундаментальная последовательность этого пространства является сходящейся.

Рассмотрим последовательность $\{x^n\} \subset \mathbb{E}^m$, которая является фундаментальной. Распишем по определению:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \ \& \ \forall k \geq N \mapsto \rho(x^n, x^k) < \varepsilon$$

Воспользуемся утверждением:

$$\forall j \mapsto |x_j^n - x_j^k| \leq \rho(x^n, x^k) < \varepsilon$$

Таким образом, получаем, что последовательность $\{x_j\}$ является фундаментальной, отсюда, по теореме Коши для обычной числовой последовательности, она является сходящейся, то есть:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : |x_j - a_j| < \varepsilon$$

Последовательность $\{x^n\} \subset \mathbb{E}^m$ имеет покоординатную сходимость, а этого, как известно, достаточно для сходимости последовательности $\{x^n\}$.

Замечание: Таким образом, мы доказали, что **в евклидовом пространстве** справедлив критерий Коши.

Замечание: Для произвольных метрик может существовать последовательность, которая является фундаментальной, но при этом не сходится.

Контрпример: Рассмотрим метрическое пространство $\mathcal{M} = (\mathbb{Q}, \rho)$, $\rho(x, y) = |x - y|$. Рассмотрим последовательность $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$. Данная последовательность является фундаментальной, но при этом не является сходящейся в \mathcal{M} .

1.3. Внутренние, предельные, изолированные точки множества.

Определение: точка x_0 множества $X \subset \mathcal{M} = (M, \rho)$ называется *внутренней точкой* множества, если существует $B_r(x_0) : B_r(x_0) \subset X$.

Определение: точка x_0 называется *предельной точкой* множества $X \subset \mathcal{M} = (M, \rho)$, если любая окрестность точки x_0 содержит по крайней мере одну точку множества X , отличную от x_0 .

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in X : x_\varepsilon \neq x_0 \ \& \ x_\varepsilon \in B_\varepsilon(x_0)$$

Определение: точка x_0 множества $X \subset \mathcal{M} = (M, \rho)$ называется *изолированной точкой* множества, если у этой точки существует окрестность, не содержащая никаких других точек множества X .

$$\exists r > 0 : \forall x \in B_r(x_0) : x \neq x_0 \mapsto x \notin X$$

Определение: точка x_0 называется *точкой прикосновения* множества $X \subset \mathcal{M} = (M, \rho)$, если любая окрестность этой точки содержит по крайней мере одну точку множества X .

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in X : x_\varepsilon \in B_\varepsilon(x_0)$$

Определение: точка x_0 называется *граничной точкой* множества $X \subset \mathcal{M} = (M, \rho)$, если в любой ее окрестности существуют точки, как принадлежащие множеству X , так и не принадлежащие ему.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x'_\varepsilon \in X \ \& \ x''_\varepsilon \notin X : x'_\varepsilon, x''_\varepsilon \in B_\varepsilon(x_0)$$

1.4. Открытые и замкнутые множества, их свойства.

Определение: Множество $X \subset \mathcal{M}$ называется *открытым*, если любая его точка внутренняя.

Определение: Множество $X \subset \mathcal{M}$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Теорема: открытые множества метрического пространства \mathcal{M} обладают следующими свойствами:

1. \mathcal{M}, \emptyset – открытые множества.
2. $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ – объединение любого числа открытых множеств X_α есть открытое множество.
3. $\bigcap_{j=1}^K X_j$ – пересечение конечного числа открытых множеств X_j есть открытое множество.

Доказательство свойства 2: Возьмём произвольную точку $x \in X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$, тогда существует множество X_{α_0} , такое что $x \in X_{\alpha_0}$. Но X_{α_0} – открытое множество (по условию), поэтому $\exists \varepsilon_0 : B_{\varepsilon_0}(x) \subset X_{\alpha_0} \subset X$, таким образом, получается, что любая точка множества

X входит в него с некоторой ε -окрестностью, это значит, что X – открытое множество.

Доказательство свойства 3: Возьмём произвольную точку $x \in X = \bigcap_{j=1}^K X_j$, тогда $x \in X_j$, $j = 1, 2, \dots, K$. Но каждое X_j – открытое множество, поэтому $\forall j \exists \varepsilon_j : B_{\varepsilon_j}(x) \subset X_j$. Пусть $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_K\}$, тогда $\forall j B_{\varepsilon}(x) \subset X_j \Rightarrow B_{\varepsilon}(x) \subset X$, это значит, что X – открытое множество.

Теорема:

1. $Y \setminus (\bigcap_{\alpha \in A} X_{\alpha}) = \bigcup_{\alpha \in A} (Y \setminus X_{\alpha})$
2. $Y \setminus (\bigcup_{\alpha \in A} X_{\alpha}) = \bigcap_{\alpha \in A} (Y \setminus X_{\alpha})$

Доказательство (1):

Пусть $x \in Y \setminus (\bigcap_{\alpha \in A} X_{\alpha}) \Rightarrow [x \in Y] \& [x \notin \bigcap_{\alpha \in A} X_{\alpha}] \Rightarrow \exists \alpha' \in A : x \notin X_{\alpha'}$.

Пусть $x \in \bigcup_{\alpha \in A} (Y \setminus X_{\alpha}) \Rightarrow \exists \alpha' : x \in Y \setminus X_{\alpha'} \Rightarrow [x \in Y] \& [x \notin X_{\alpha'}]$.

Таким образом в обоих случаях мы приходим к тому, что $\exists \alpha' \in A : [x \in Y] \& [x \notin X_{\alpha'}]$.

Доказательство (2): Проводим аналогичные рассуждения.

Теорема: множество X метрического пространства \mathcal{M} является замкнутым $\Leftrightarrow CX = \mathcal{M} \setminus X$ – открытое множество. Причем CX называется *дополнением множества X* .

Доказательство:

Необходимость (\Rightarrow)

Доказываем от противного: предположим, что CX не является открытым множеством $\Rightarrow \exists x_0 \in CX : x_0$ не является внутренней точкой $CX \Rightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_{\varepsilon} \neq x_0 : x_{\varepsilon} \notin CX \& x_{\varepsilon} \in B_{\varepsilon}(x_0)$$

тогда x_0 по определению является предельной точкой множества X и при этом $x_0 \notin X$ (т. к. $x_0 \in CX$); получается, что существует предельная точка множества X , не лежащая в этом множестве, но по условию X – замкнутое множество, а значит содержит все свои предельные точки, таким образом приходим к противоречию.

Достаточность (\Leftarrow)

Доказываем от противного: предположим, что X не является замкнутым множеством, тогда:

$$\exists x_0 \notin X : x_0 \text{ – предельная точка множества } X$$

По определению предельной точки:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \neq x_0 : x_\varepsilon \in X \ \& \ x_\varepsilon \in B_\varepsilon(x_0)$$

Тогда любой шарик $B_\varepsilon(x_0)$ с радиусом $r = \varepsilon$ и центром в точке x_0 не содержится в $CX \Rightarrow x_0$ не является внутренней точкой множества CX , но при этом $x_0 \in CX$, поскольку $x_0 \notin X$; однако, по условию CX – открытое множество, а значит должно содержать все свои внутренние точки. Таким образом, приходим к противоречию.

Теорема: замкнутые множества обладают следующими свойствами:

1. \mathcal{M}, \emptyset – замкнутые множества.
2. $\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha$ – пересечение любого числа замкнутых множеств X_α есть замкнутое множество.
3. $\bigcup_{j=1}^K X_j$ – объединение конечного числа замкнутых множеств X_j есть замкнутое множество.

Доказательство свойства 2: Воспользуемся теоремой о дополнении множества X : рассмотрим $C(\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha) = \mathcal{M} \setminus (\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in A} (\mathcal{M} \setminus X_\alpha)$. X_α – замкнутое множество $\Rightarrow \mathcal{M} \setminus X_\alpha$ – открытое множество $\Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} (\mathcal{M} \setminus X_\alpha) = C(\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha)$ – открытое множество, тогда по теореме о дополнении множества $\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha$ – замкнутое множество.

Доказательство свойства 3: Воспользуемся теоремой о дополнении множества X : рассмотрим $C(\bigcup_{j=1}^K X_j) = \mathcal{M} \setminus (\bigcup_{j=1}^K X_j) = \bigcap_{j=1}^K (\mathcal{M} \setminus X_j)$. X_j – замкнутое множество $\Rightarrow \mathcal{M} \setminus X_j$ – открытое множество $\Rightarrow \bigcap_{j=1}^K (\mathcal{M} \setminus X_j) = C(\bigcup_{j=1}^K X_j)$ – открытое множество, тогда по теореме о дополнении множества $\bigcup_{j=1}^K X_j$ – замкнутое множество.

Замечание:

1. Если X – открытое множество, то $X = \text{int}X$.
2. Если X – замкнутое множество, то $\overline{X} = X$.
3. Пусть G – открытое множество, тогда в общем случае $\text{int}(\overline{G}) \neq G$.
4. Пусть F – замкнутое множество, тогда в общем случае $\overline{\text{int}F} \neq F$.

1.5. Внутренность, замыкание и граница множества.

Определение: $\text{int}X$ – совокупность всех внутренних точек множества $X \subset \mathcal{M}$ называется *внутренностью* множества X .

Определение: \overline{X} – *замыкание* множества $X \subset \mathcal{M}$ – операция присоединения к множеству X всех его предельных точек.

Определение: ∂X – граница множества X – совокупность всех граничных точек множества X .

1.6. Компакты.

Определение: Множество $X \subset \mathcal{M}$ называется *компактом*, если из любой последовательности его точек можно выделить сходящуюся подпоследовательность, предел которой принадлежит множеству X .

$$\forall \{x^n\} \subset X \exists \{x^{k_n}\} \subset X : \lim_{n \rightarrow \infty} x^{k_n} = a \in X$$

Определение: Множество $X \subset \mathbb{R}^m$, любые 2 точки которого можно соединить лежащей в нем непрерывной кривой, называется *линейно связным* (непрерывной кривой в m -мерной пространстве). («Введение в математический анализ.» Л. Д. Кудрявцев том 2).

Определение: Множества X_1 и X_2 метрического пространства \mathcal{M} называются *отделимыми*, если ни одно из них не содержит точек прикосновения другого.

Определение: Множество X метрического пространства \mathcal{M} называется *связным*, если его нельзя представить в виде объединения двух отделимых множеств.

Определение: Открытое связное множество называется *областью*.

1.7. Метрическое пространство.

Определение: Пусть M – произвольное множество, для любых точек $x, y \in M$ поставим в соответствие число $\rho(x, y) \geq 0$ такое что

1. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$

тогда $\mathcal{M} = (M, \rho)$ называется *метрическим пространством*, а функция $\rho(x, y)$ – его метрикой.

Теорема [Неравенство Коши-Буняковского]: для любых точек $a_1, b_1, \dots, a_m, b_m$ справедливо:

$$\left(\sum_{j=1}^m a_j b_j \right)^2 \leq \sum_{j=1}^m a_j^2 \cdot \sum_{j=1}^m b_j^2$$

Доказательство: Рассмотрим многочлен:

$$p(z) = \sum_{j=1}^m (a_j + b_j z)^2 = A + 2Bz + Cz^2$$

$$A = \sum_{j=1}^m a_j^2; \quad B = \sum_{j=1}^m a_j b_j; \quad C = \sum_{j=1}^m b_j^2$$

Заметим, что при любых значениях z многочлен $p(z) \geq 0$, поскольку является суммой неотрицательных членов, тогда справедливо $B^2 - AC \leq 0 \Rightarrow B^2 \leq AC$ (дискриминант квадратного уравнения, деленный на 4). Подставляя A, B, C получаем исходное неравенство.

Теорема [Неравенство Минковского]: для любых $a_1, b_1, \dots, a_m, b_m$ справедливо:

$$\sqrt{\sum_{j=1}^m (a_j + b_j)^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^m a_j^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^m b_j^2}$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m (a_j + b_j)^2 &= \sum_{j=1}^m a_j^2 + 2 \sum_{j=1}^m a_j b_j + \sum_{j=1}^m b_j^2 \\ \sum_{j=1}^m a_j^2 + 2 \sum_{j=1}^m a_j b_j + \sum_{j=1}^m b_j^2 &\stackrel{\text{К-Б}}{\leq} \left(\sqrt{\sum_{j=1}^m a_j^2} \right)^2 + 2 \sqrt{\sum_{j=1}^m a_j^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^m b_j^2} + \left(\sqrt{\sum_{j=1}^m b_j^2} \right)^2 \end{aligned}$$

Свернём правую часть по формуле квадрата суммы и получим:

$$\sum_{j=1}^m (a_j + b_j)^2 \leq \left(\sqrt{\sum_{j=1}^m a_j^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^m b_j^2} \right)^2$$

Примеры метрических пространств:

$$\mathcal{M} = (M, \rho), \quad \rho = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

$$\mathbb{E}^m = (\mathbb{R}^m, \rho_e), \quad \rho_e(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^m (x_j - y_j)^2}$$

$$\mathcal{M} = (\mathbb{R}^m, \rho_1), \quad \rho_1(x, y) = \max_{1 \leq j \leq m} |x_j - y_j|$$

1.8. Компакты в метрическом пространстве и описание компактов в n -мерном евклидовом пространстве.

Определение: Множество $X \subset \mathbb{E}^m$ называется ограниченным, если существует m -мерный шар $B_R(0)$ такой, что $X \subset B_R(0)$ («Курс математического анализа» Л. Д. Кудрявцев том 2).

Теорема: $X \subset \mathbb{E}^m$ является компактом $\Leftrightarrow X$ – ограниченное и замкнутое множество.

Доказательство:

Необходимость (\Rightarrow)

Пусть $X \subset \mathbb{E}^m$ является компактом, докажем, что X является замкнутым множеством. Возьмём произвольную предельную точку a множества X и будем рассматривать её окрестности: $B_{\frac{1}{n}}(a)$:

$$\begin{aligned} r_1 = 1, \text{ тогда по определению предельной точки } \exists x_1 \neq a : x_1 \in X \ \& \ x_1 \in B_1(a) \\ r_2 = \frac{1}{2}, \text{ тогда по определению предельной точки } \exists x_2 \neq a : x_2 \in X \ \& \ x_2 \in B_{\frac{1}{2}}(a) \\ & \dots \\ r_n = \frac{1}{n}, \text{ тогда по определению предельной точки } \exists x_n \neq a : x_n \in X \ \& \ x_n \in B_{\frac{1}{n}}(a) \\ & \dots \end{aligned}$$

Таким образом, мы построили последовательность точек $\{x^n\} \subset X$ такую, что выполняется следующее:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = \frac{1}{\varepsilon} : \forall n \geq N \mapsto \rho(a, x^n) < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

или, что то же самое:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = a$$

но, по условию, X – компакт, а значит $a \in X$, таким образом, в силу произвольности точки a , компакт X содержит все свои предельные точки, а значит, является замкнутым множеством.

Заметим, что неограниченное множество X не может быть компактом, так как в неограниченном множестве можно построить последовательность точек, которая не будет являться сходящейся.

Достаточность (\Leftarrow)

Пусть $X \subset \mathbb{E}^m$ – ограниченное, замкнутое множество. Возьмём последовательность точек $\{x^n\} \subset X$, по теореме Больцано-Вейерштрасса, в силу ограниченности этой последовательности, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x^{k_n}\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$, в силу замкнутости множества $a \in X$, но тогда получается, что X – компакт.

2. Билет 2

2.1. Предел числовой функции нескольких переменных.

Обозначения: $\mathcal{M} = (\mathbb{M}, \rho)$, $a \in \mathcal{M}$, $\mathcal{U}(a)$, $w = f(x)$ - некоторая функция, заданная в $\mathcal{U}(a)$, за исключением, быть может, самой точки a .

Определение (по Гейне):

$$[\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b] \stackrel{def}{=} \left[\forall \{x^n\} : [x^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a] \ \& \ [x^n \neq a \ \forall n] \mapsto w^n = f(x^n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} b \right].$$

Определение (по Коши):

$$[\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b] \stackrel{def}{=} [\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : [\forall x : 0 < \rho(x, a) < \delta] \mapsto |f(x) - b| < \varepsilon].$$

Пример:

$$w = f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2},$$

$$x^2 + y^2 \neq 0, \ \vec{0} = (0, 0)$$

$$[\lim_{(x, y) \rightarrow \vec{0}} f(x, y) - \text{не существует}]$$

Рассмотрим последовательности:

$$\{z^n\}' = \{(x^n, y^n)\} = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \quad \rho(\{z^n\}', \vec{0}) = \frac{\sqrt{2}}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

$$\{z^n\}'' = \{(x^n, y^n)\} = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \quad \rho(\{z^n\}'', \vec{0}) = \frac{\sqrt{2}}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Однако $f(\{z^n\}') = 1$, $f(\{z^n\}'') = -1$. Поэтому предел функции $f(x, y)$ в точке $\vec{0} = (0, 0)$ не существует.

Предложение: Пусть $a \in \mathcal{M}$ и $w = f(x)$, $w = g(x)$ определены в $\mathcal{U}(a)$, за исключением, быть может, самой точки a ; $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$. Тогда:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = b \pm c$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = b \cdot c$$

.

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{b}{c}, \ c \neq 0$$

.

Доказательство аналогично доказательству для функций одной переменной.

Определение: Функция $\alpha = \alpha(x)$, определенная в $\mathcal{U}(a)$, за исключением, быть может, самой точки a , называется бесконечно малой, если $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$.

Предложение:

$[f(x) : \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b] \Rightarrow [\alpha = \alpha(x) = f(x) - b - \text{бесконечно малая при } x \rightarrow a]$.

2.2. Предел функции по множеству.

Обозначения: a - предельная точка множества $A \subset \mathcal{M}$, $w = f(x)$ определена в A .

Определение: Предел функции по множеству:

$$[\lim_{x \xrightarrow{x \in A} a} f(x) = b] \stackrel{def}{=} [\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in A : 0 < \rho(x, a) < \delta \mapsto |f(x) - b| < \varepsilon]$$

Обозначения: $D \subset \mathbb{E}^m$ - неограниченное множество. $w = f(x)$ - определена на D .

Определение: Предел функции при $x \rightarrow \infty$:

$$[\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b] \stackrel{def}{=} [\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in D : \rho(x, \vec{0}) > \delta \mapsto |f(x) - b| < \varepsilon]$$

Здесь $\vec{0} = (0, \dots, 0)_m$.

Определение: Пусть функция $w = f(x)$ определена на множестве $\prod_r(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : 0 < |x - x_0| < r_1, 0 < |y - y_0| < r_2\}$ и $\forall x \in (x_0 - r_1, x_0 + r_1), x \neq x_0 \exists \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \varphi(x), \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = b$. Тогда говорят, что у функции $w = f(x, y)$ существует повторный предел $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = b$. Пусть $\forall y \in (y_0 - r_2, y_0 + r_2), y \neq y_0 \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \psi(y), \exists \lim_{y \rightarrow y_0} \psi(y) = c$. Тогда говорят, что у функции $w = f(x, y)$ существует повторный предел $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = c$.

Замечание: Из существования предела функции в точке не следует существование повторных пределов. А из существования и равенства повторных пределов не следует существования предела в точке.

Примеры:

1.

$$w = f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \neq 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 0$$

Но предел функции в точке $(0, 0)$ не существует.

2.

$$w = f(x, y) = \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{y}\right), & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

$$|f(x, y)| \leq |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta = \varepsilon$$

$$[\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in A : 0 < \rho(x, a) < \delta \mapsto |f(x) - b| < \varepsilon]$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow \vec{0} \\ y \neq 0}} f(x, y) = 0 \quad \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0, \text{ однако} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) - \text{ не существует.}$$

Предложение: Пусть $w = f(x, y)$ определена в $\prod_r(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : 0 < |x - x_0| < r_1, 0 < |y - y_0| < r_2\}$ и $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = b$. Пусть, кроме того, $\forall x : 0 < |x - x_0| < r_1 \exists \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \varphi(x)$ и $\forall y : 0 < |y - y_0| < r_2 \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \psi(y)$. Тогда повторные пределы существуют и равны числу b .

2.3. Непрерывность функции нескольких переменных в точке и по множеству.

Определение: Функция $w = f(x)$, определенная в $\mathcal{U}(a) \subset \mathcal{M}$ называется непрерывной в точке a , если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Обозначения: $w = f(x)$ определена на $A \subset \mathcal{M}$ и a предельная точка множества A .

Определение: Функция $w = f(x)$ называется непрерывной в точке a по множеству A , если $\lim_{x \xrightarrow{A} a} f(x) = f(a)$.

Определение: Функция $w = f(x)$ называется непрерывной на множестве $\mathbb{X} \subset \mathcal{M}$, если она непрерывна в каждой точке множества \mathbb{X} по множеству \mathbb{X} .

Предложение:

$$[f - \text{непрерывна в точке } a \in \mathcal{M}] \Leftrightarrow [\Delta f(x) = f(x) - f(a) - \text{бесконечно малая при } x \rightarrow a]$$

Обозначения:

$$w = f(x), \quad x \in \mathbb{E}^m; \quad \Delta_k f(x^0, \Delta x_k) = f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k^0 + \Delta x_k, x_{k+1}^0, \dots, x_m^0) - f(x^0)$$

Частичное приращение функции $w = f(x)$ в точке $x^0 = (x_1^0, \dots, x_m^0)$ соответствуют приращению Δx_k аргумента x_k .

Определение: Функция $w = f(x)$ называется непрерывной в точке x^0 по переменной x_k , если $\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \Delta_k f(x^0, \Delta x_k) = 0$.

Замечание: Из непрерывности функции $w = f(x)$ в точке $x^0 = (x_1^0, \dots, x_m^0)$ следует непрерывность функции по каждой переменной, но из непрерывности функции по каждой переменной не следует непрерывность функции в точке.

Контрпримеры:

1.

$$w = f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

$$\Delta_x f(\vec{0}, x) = \Delta_y f(\vec{0}, y) = 0.$$

Функция непрерывна в точке $\vec{0} = (0, 0)$ по переменной x и по переменной y . Однако пусть $y = kx$, тогда:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow \vec{0}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2}{(1+k^2)x^2} = \frac{k}{1+k^2} \neq 0, \text{ при } k \neq 0. \text{ Поэтому функция } f(x, y) \text{ не является непрерывной в точке } \vec{0}.$$

2.

$$w = f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$$

Функция f непрерывна в точке $\vec{0}$ по переменной x и по переменной y , непрерывна по множеству $y = kx$, однако не является непрерывной в точке $\vec{0}$ по множеству $y = x^2$: $\lim_{(x,y) \rightarrow \vec{0}} f(x, y) = \frac{1}{2} \neq 0$.

2.4. Свойства функций, непрерывных на компакте: ограниченность, достижение точных нижней и верхней границ, равномерная непрерывность (теорема Кантора).

Предложение: Пусть функции $w = f(x)$ и $w = g(x)$ непрерывны в точке $a \in \mathcal{M}$. Тогда функции $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ - непрерывны в точке a , в случае частного $g(a) \neq 0$.

Обозначения: $x \in \mathbb{E}^m$, $x_j = \varphi_j(t)$, $t \in T \subset \mathbb{E}^k$, $j = 1, \dots, m$; $\forall t \in T \subset \mathbb{E}^k \mapsto x \in \mathbb{X} \subset \mathbb{E}^m$.

Теорема [О непрерывности суперпозиции функций]: Пусть функция $x_j = \varphi_j(t)$, $j = 1, \dots, m$, непрерывна в точке a , функция f - непрерывна в точке $b = (b_1, \dots, b_m)$, причем $b_j = \varphi_j(a)$, $j = 1, \dots, m$. На $T \subset \mathbb{E}^k$ определена сложная функция

$$F(t) = f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t))$$

Тогда функция $F(t) = f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t))$ непрерывна в точке a .

Доказательство:

$$[w = f(x) \text{ непрерывна в точке } b] \stackrel{def}{=} [\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : [\forall x : \rho(x, b) < \delta] \mapsto |f(x) - f(b)| < \varepsilon]$$

$$[\varphi_j \text{ непрерывна в точке } a, j = 1, \dots, m] \stackrel{def}{=} [\forall \delta > 0 \exists \sigma_j = \sigma_j(\varepsilon) > 0,$$

$$j = 1, \dots, m : [\forall t : \rho(t, a) < \sigma_j] \mapsto |\varphi_j(t) - \varphi_j(a)| < \frac{\delta}{\sqrt{m}}$$

$$\exists \sigma = \sigma(\varepsilon) = \min\{\sigma_1, \dots, \sigma_m\} \Rightarrow \forall t : \rho(t, a) < \sigma \Rightarrow |x_j - b_j| < \frac{\delta}{\sqrt{m}}$$

$$\rho(x, b) = \sqrt{\sum_{j=1}^m (x_j - b_j)^2} < \sqrt{\sum_{j=1}^m \frac{\delta^2}{m}} = \delta \mapsto |f(x) - f(b)| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)) - f(\varphi_1(a), \dots, \varphi_m(a))| < \varepsilon \Rightarrow |F(t) - F(a)| < \varepsilon$$

$$[\forall \varepsilon > 0 \exists \sigma > 0 : [\forall t : \rho(t, a) < \sigma] \mapsto |F(t) - F(a)| < \varepsilon] \stackrel{def}{=} [F(t) - \text{непрерывна в точке } a.]$$

Теорема [О локальном сохранении знака непрерывной функции]: пусть $w = f(x)$ определена на $\mathcal{U}(a) \subset \mathbb{E}^m$ и непрерывна в точке $x = a$, $f(a) \neq 0$. Тогда $\exists \delta > 0 : \forall x : \rho(x, a) < \delta \mapsto f(x) \cdot f(a) > 0$.

Доказательство: используется ” ε - δ ” определение непрерывности функции функции в точке и выбором $0 < \varepsilon < |f(a)|$.

Теорема Вейерштрасса: Пусть функция $w = f(x)$ непрерывна на компакте $\mathbb{X} \subset \mathbb{E}^m$. Тогда она ограничена на \mathbb{X} и достигает на \mathbb{X} своих верхней и нижней граней.

Доказательство(по Бесову): проведем доказательство лишь для случая верхней грани. Как увидим, оно повторяет доказательство теоремы Вейерштрасса для одномерного случая: $\mathbb{X} = [a, b]$.

Пусть $B := \sup_{\mathbb{X}} f \leq +\infty$. Из определения верхней грани следует, что существует последовательность точек $\{x^n\}$, $x^n \in \mathbb{X} \forall n \in \mathbb{N}$ такая, что

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x^n) = B$. Последовательность $\{x^n\}$ ограничена в силу ограниченности множества \mathbb{X} . В силу теоремы Больцано-Вейерштрасса выделим из $\{x^n\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{x^{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Пусть $x^0 = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{n_k}$. Точка x^0 принадлежит \mathbb{X} в силу замкнутости \mathbb{X} . Следовательно, f непрерывна в точке x^0 по множеству \mathbb{X} .

Теперь из соотношений

$$f(x^{n_k}) \rightarrow B, f(x^{n_k}) \rightarrow f(x^0) \text{ при } k \rightarrow \infty$$

вытекает, что $f(x^0) = B$, т.е. что верхняя грань функции f достигается в точке $x^0 \in \mathbb{X}$, Следовательно, верхняя грань $\sup_{\mathbb{X}} f$ конечна, а функция f ограничена сверху на \mathbb{X} .

Аналогично доказывается, что функция f достигает своей нижней грани на \mathbb{X} и ограничена снизу на \mathbb{X} . Теорема доказана.

Определение: функция f называется равномерно непрерывной на множестве $\mathbb{X} \subset \mathcal{M}$, если для любого положительного числа ε найдется положительное число δ такое, что для всех точек $x', x'' \in \mathbb{X}$, таких, что $\rho(x', x'') < \delta$, выполняется неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

На языке кванторов: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x', x'' \in \mathbb{X}, \rho(x', x'') < \delta \mapsto |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

Теорема [Теорема Кантора]: Пусть функция f непрерывна на компакте $\mathbb{X} \subset \mathbb{E}^m$. Тогда f равномерно непрерывна на \mathbb{X} .

Доказательство(по Бесову): Предположим, что теорема неверна, то есть, что существует f , непрерывная, но не равномерно непрерывная на \mathbb{X} . Тогда:

$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 \exists x, y \in \mathbb{X} : \rho(x, y) < \delta : |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0$

Будем в качестве δ брать $\delta_n = \frac{1}{n}$ и обозначать через x^n, y^n соответствующую пару точек x, y . Тогда имеем:

$$x^n, y^n \in \mathbb{X}, \rho(x^n, y^n) < \frac{1}{n},$$

$$|f(x^n) - f(y^n)| \geq \varepsilon_0 > 0.$$

Выделим из последовательности x^n сходящуюся подпоследовательность $\{x^{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{n_k} = x^0$, что возможно по теореме Больцано-Вейерштрасса в силу ограниченности x^n . Тогда из $\rho(x^n, y^n) < \frac{1}{n}$ следует, что $\lim_{k \rightarrow \infty} y^{n_k} = x^0$. Точка $x^0 \in \mathbb{X}$, так как \mathbb{X} замкнуто. В силу непрерывности f в точке x^0 по множеству \mathbb{X} имеем: $f(x^{n_k}) \rightarrow f(x^0), f(y^{n_k}) \rightarrow f(x^0)$ при $k \rightarrow \infty$, так что

$$|f(x^{n_k}) - f(y^{n_k})| \leq |f(x^{n_k}) - f(x^0)| + |f(y^{n_k}) - f(x^0)| \rightarrow 0, \text{ при } k \rightarrow \infty$$

Это противоречит тому, что

$$|f(x^{n_k}) - f(y^{n_k})| \geq \varepsilon_0 > 0 \forall k \in \mathbb{N}$$

Теорема доказана.

2.5. Теорема о промежуточных значениях функции, непрерывной в области.

Теорема [Прохождение непр. функции через промежуточные значения]:

Пусть функция $w = f(x)$ непрерывна на линейно связном множестве $\mathbb{X} \subset \mathbb{E}^m$, $a, b \in \mathbb{X}$ $f(a) = A, f(b) = B$. Пусть число C лежит между числами A и B . Тогда на любой кривой соединяющей точки a и b и лежащей в \mathbb{X} , найдется точка c , такая, что $f(c) = C$.

Доказательство: Пусть $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{E}^1, x_j = \varphi_j(t), \varphi_j(\alpha) = a_j, \varphi_j(\beta) = b_j, j = 1, \dots, m; a = (a_1, \dots, a_m), b = (b_1, \dots, b_m), \varphi_j$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$.

$$\Gamma = \{\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t), \alpha \leq t \leq \beta\}$$

соединяющая точки a и $b, \Gamma \subset \mathbb{X}$.

Рассмотрим функцию одной переменной $F(t) = f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t))$. По теореме о непрерывности суперпозиции функций $F(t)$ - непрерывна на $[\alpha, \beta]$ $F(\alpha) = A, F(\beta) = B \Rightarrow \exists \gamma \in (\alpha, \beta) : F(\gamma) = C$ (т. Больцано - Коши). Тогда $c = (\varphi_1(\gamma), \dots, \varphi_m(\gamma)) \Rightarrow f(c) = C$.

3. Билет 3

3.1. Частные производные функции нескольких переменных.

Определение: f определена $\mathcal{U}(a) \subset \mathbb{E}^m$. Если существует и конечен $\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{\Delta_k f(a, \Delta x_k)}{\Delta x_k} = b \in R$, то этот предел называется частной производной функции $w = f(x)$ в точке a по аргументу x_k .

Обозначение. $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ или f'_{x_k}

$$\Delta_k f(a, \Delta x_k) = f(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + \Delta x_k, a_{k+1}, \dots, a_m) - f(a_1, \dots, a_m)$$

(Только на месте k -ого аргумента есть приращение).

Замечания.

1. При вычислении $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ вычисляется как для функций одной переменной x_k при фиксированных остальных переменных (остальные переменные – постоянные).

2. $\left[\exists \frac{\partial f}{\partial x_j}(a), j = 1, \dots, m \right] \not\Rightarrow [f \text{ непрерывна в точке } a]$

Контрпример.

$$\omega = f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0$$

Однако, f не является непрерывной в точке $(0, 0)$, т.к. в этой точке у нее не существует $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

3. Определение частной производной функции $w = f(x)$ дано для внутренней точки множества определения функции. Оно не пригод- но для граничной предельной точки множества, поскольку в граничной точке не всегда можно определить частное приращение. Поэтому частная производная в граничной предельной точке множества определения функции находится как предел частной производной по множеству.

Точка $a \in X$ – предельная граничная точка.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a_1, a_2) \\ (x,y) \in X}} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a_1, a_2) \\ (x,y) \in X}} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

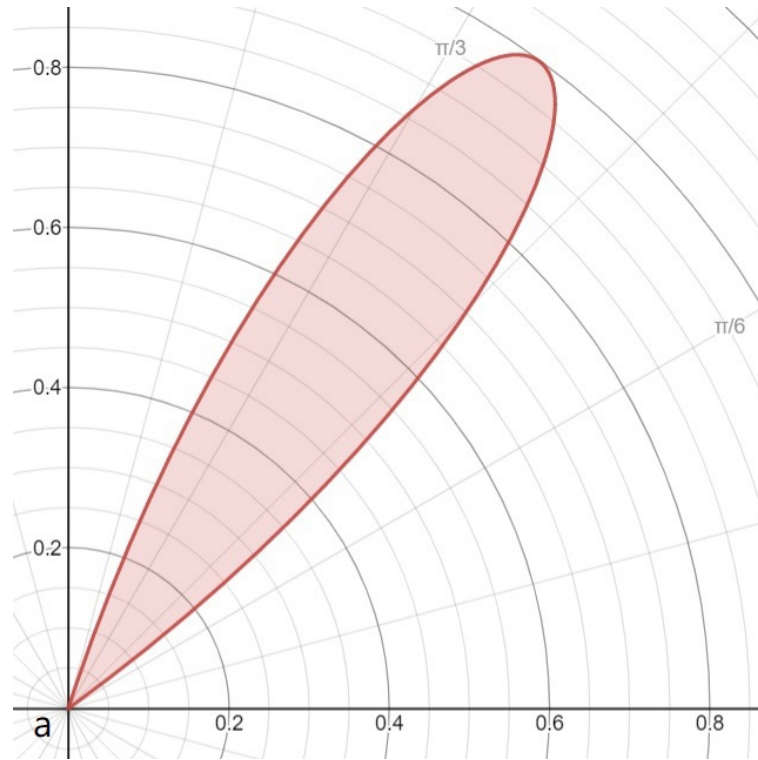


Рис. 1: Пример того, как частную производную следует искать как предел по множеству в точке a .

3.2. Дифференцируемость функции в точке

Некоторые замечания, которые нужны для определения дифференцируемости функции в точке:

Рассмотрим $w = f(x)$, она определена в $\mathcal{U}(a)$, $a = (a_1, \dots, a_m)$, $\Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_m) : a + \Delta x = (a_1 + \Delta x_1, \dots, a_m + \Delta x_m) \in \mathcal{U}(a)$

Рассмотрим $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_m)^2}$, $\rho \rightarrow 0 \Leftrightarrow \Delta x \rightarrow \bar{0}$, где $\bar{0} = \overbrace{(0, 0, \dots, 0)}^m$.

$\Delta f(a, \Delta x) = f(a + \Delta x) - f(a)$ – Полное приращение функции в точке a , соответствующее приращению аргументов $\Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)$.

Определение: Функция f называется дифференцируемой в точке a , если

Условие 1:

$$\Delta f(a, \Delta x) = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_m \Delta x_m + \alpha_1(\Delta x) \Delta x_1 + \dots + \alpha_m(\Delta x) \Delta x_m$$

где A_j – постоянные, $j = 1, \dots, m$, не зависят от Δx , $\alpha_j = \alpha_j(\Delta x)$ – б.м. функции при $\Delta x \rightarrow 0$; $\alpha_j = 0$ при $\bar{\Delta x} = \bar{0}$.

Условие 2:

$$\Delta f(a, \Delta x) = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_m \Delta x_m + o(\rho), \rho \rightarrow 0$$

(По сути ρ – расстояние от точки Δx до $\bar{0}$).

Предложение. Условия 1 и 2 определения дифференцируемости функции в точке эквиваленты.

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2$

Покажем, что $\alpha_1(\Delta x)\Delta x_1 + \dots + \alpha_m(\Delta x)\Delta x_m = o(\rho)$, $\rho \rightarrow 0$, $\rho \neq 0$.

Заметим, что

$$\left| \frac{\Delta x_j}{\rho} \right| \leq 1, \quad \rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_m)^2}$$

$$|\alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_m \Delta x_m| \leq \rho \cdot (|\alpha_1| \frac{|\Delta x_1|}{\rho} + \dots + |\alpha_m| \frac{|\Delta x_m|}{\rho}) \leq \rho \cdot (|\alpha_1| + \dots + |\alpha_m|)$$

В силу того, что $\rho \rightarrow 0 \Leftrightarrow \Delta x \rightarrow \bar{0}$, $|\alpha_1| + \dots + |\alpha_m|$ также стремиться к нулю, как конечная сумма б.м. функций. Значит, $\rho \cdot (|\alpha_1| + \dots + |\alpha_m|) = o(\rho)$. Показали, что это выражение действительно есть б.м. функция.

$2 \Rightarrow 1$

$$o(\rho) = \frac{\rho^2}{\rho} \frac{o(\rho)}{\rho} = \frac{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_m)^2}{\rho} \frac{o(\rho)}{\rho}$$

$$o(\rho) = \left(\frac{\Delta x_1}{\rho} \frac{o(\rho)}{\rho} \right) \Delta x_1 + \dots + \left(\frac{\Delta x_m}{\rho} \frac{o(\rho)}{\rho} \right) \Delta x_m$$

Понятно, что $\alpha_j = \frac{\Delta x_j}{\rho} \frac{o(\rho)}{\rho}$, но $\frac{\Delta x_j}{\rho}$ величина ограниченная, а $\frac{o(\rho)}{\rho} \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow 0 \Rightarrow$ при $\Delta x \rightarrow \bar{0}$. $\alpha_j = 0$, $j = 1, \dots, m$, только при $\Delta x = \bar{0}$. *Доказано.*

3.3. Достаточные условия дифференцируемости функции в точке

Теорема 2. Пусть $w = f(x)$ определена в $\mathcal{U}(a) \subset \mathbb{E}^m$ и в этой окрестности существуют $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $j = 1, \dots, m$. Если $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $j = 1, \dots, m$ непрерывны в точке a , то функция f дифференцируема в точке a .

Доказательство. Проведем доказательство для $m = 2$, $w = f(x, y)$, $a = (a_1, a_2)$.

Рассмотрим точку $(a_1 + \Delta x, a_2 + \Delta y) \in \mathcal{U}(a)$.

Рассмотрим

$$\Delta f(a, (\Delta x, \Delta y)) = f(a_1 + \Delta x, a_2 + \Delta y) - f(a_1, a_2)$$

$$\Delta f(a, (\Delta x, \Delta y)) = f(a_1 + \Delta x, a_2 + \Delta y) - f(a_1, a_2 + \Delta y) + f(a_1, a_2 + \Delta y) - f(a_1, a_2)$$

Введем функцию $\varphi(x) = f(x, a_2 + \Delta y)$ и $\psi(y) = f(a_1, y)$

$$\Delta f(a, (\Delta x, \Delta y)) = \Delta \varphi(a_1, \Delta x) + \Delta \psi(a_2, \Delta y) =$$

$$= \varphi(a_1 + \Delta x) - \varphi(a_1) + \psi(a_2 + \Delta y) - \psi(a_2)$$

По теореме Лагранжа для функции одной переменной: $\exists \theta_1 : 0 < \theta_1 < 1$ и $\exists \theta_2 : 0 < \theta_2 < 1$:

$$f(a_1 + \Delta x, a_2 + \Delta y) - f(a_1, a_2 + \Delta y) = f'_x(a_1 + \theta_1 \Delta x, a_2 + \Delta y) \Delta x$$

$$f(a_1, a_2 + \Delta y) - f(a_1, a_2) = f'_y(a_1, a_2 + \theta_2 \Delta y) \Delta y$$

$$f'_x(a_1 + \theta_1 \Delta x, a_2 + \Delta y) = f'_x(a_1, a_2) + \alpha_1(\Delta x, \Delta y); \alpha_1 \rightarrow 0, (\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$$

$$f'_y(a_1, a_2 + \theta_2 \Delta y) = f'_y(a_1, a_2) + \alpha_2(\Delta x, \Delta y); \alpha_2 \rightarrow 0, (\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$$

$$\Delta f(a, (\Delta x, \Delta y)) = f'_x(a) \Delta x + f'_y(a) \Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y$$

Получили в точности определение дифференцируемости функции f в точке a .

Доказано.

Примеры. (Доказательство дифференцируемости ф-ции в точке)

$$w = f(x, y), \bar{0} = (0, 0), \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$f(x, y) - f(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \Delta y + o(\rho), \rho \rightarrow 0.$$

Пример 1. $f(x, y) = y^2 \sin x$

Заметим, что $f(x, 0) = f(0, y) = f(0, 0) = 0$

Из определения частной производной: $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0.$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0.$$

Частные производные равны нулю, значит, надо показать, что $f(x, y) = o(\rho)$, $\rho \rightarrow 0$. Надо показать, что $F(x, y) = \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \rightarrow 0$, при $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

$$|F(x, y)| = \left| \frac{y^2 \sin x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq [|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}] \leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2} \leq \delta = \varepsilon$$

$$[\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon : \forall (x, y) : 0 < \rho = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \mapsto |F(x, y)| < \varepsilon] \stackrel{def}{=} [\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} F(x, y) = 0] \Leftrightarrow [f(x, y) = o(\rho), \rho \rightarrow 0].$$

Пример 2. $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$, $\bar{0} = (0, 0)$

$$f(x, 0) = f(0, y) = f(0, 0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

$$F(x, y) = \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Перейдем к полярным координатам: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $F(x, y) = \sqrt{|\cos \varphi \sin \varphi|}$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow F(\rho, \varphi) = 0$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4} \Rightarrow F(\rho, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$$

Значит, f не является дифференцируемой в точке $(0, 0)$.

Пример 3.(Очень важный для понимания теории)

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

$$f(x, 0) = x^2 \sin \frac{1}{|x|}, x \neq 0$$

$$f(0, y) = y^2 \sin \frac{1}{|y|}, y \neq 0$$

$$f(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{|x|} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} y \sin \frac{1}{|y|} = 0$$

Теперь докажем, что эта функция дифференцируема в $(0, 0)$

Введем функцию

$$F(x, y) = \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$|F(x, y)| \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta = \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon : \forall (x, y) : 0 < \rho = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \mapsto |F(x, y)| < \varepsilon \stackrel{def}{=}$$

$$[\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} F(x, y) = 0] \Leftrightarrow [f(x, y) = o(\rho), \rho \rightarrow 0] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f \text{ дифференцируема в } (0, 0)$$

Посмотрим на частные производные этой функции по x и y вне точки $(0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x^2 + y^2}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ не существует} \Rightarrow f'_x \text{ не является непрерывной в } (0, 0).$$

Пример показывает, что непрерывность частных производных в точке не является необходимым условием дифференцируемости функции.

Замечание. Непрерывность частных производных функции f в точке не является необходимым условием дифференцируемости функции в точке. Это условие достаточно (Теорема 2).

3.4. Дифференцируемость сложной функции

Рассматриваем функции $x_j = \varphi_j(t)$ в окрестности точки $t^0 = (t_1^0, \dots, t_k^0) \in \mathbb{E}^k$, $j = 1, \dots, m$. Рассматриваем функцию $w = f(x)$, которая определена в окрестности точки $a = (a_1, \dots, a_m)$, причем $a_j = \varphi_j(t^0)$, $j = 1, \dots, m$. $F(t) = f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t))$ – суперпозиция функций f и функций $\varphi_1(t) \dots$ (сложная функция)

Теорема 3 [О дифференцируемости сложной функции]:

Пусть функции φ_j , $j = 1, \dots, m$ дифференцируемы в точке t^0 , функция f дифференцируема в точке a , причем $a_j = \varphi_j(t^0)$, $j = 1, \dots, m$. Тогда $F(t) = f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t))$ дифференцируема в точке t^0 и

$$\frac{\partial F}{\partial t_j}(t^0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_j}(t^0) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_j}(t^0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \frac{\partial \varphi_m}{\partial t_j}(t^0), j = 1, \dots, k$$

Доказательство. $t^0 + \Delta t \in \mathcal{U}(t^0), a + \Delta x \in \mathcal{U}(a), \rho = \sqrt{(\Delta t_1)^2 + \dots + (\Delta t_k)^2}$.

Условия дифференцируемости функции φ_j в точке t^0 :

$$\Delta \varphi_j(t^0, \Delta t) = \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_1}(t^0) \Delta t_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k}(t^0) \Delta t_k + o(\rho), \rho \rightarrow 0; \rho \rightarrow 0 \Leftrightarrow \Delta t \rightarrow \bar{0}.$$

Условия дифференцируемости функции f в точке a :

$$\Delta f(a, \Delta x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_m \Delta x_m.$$

Подставим вместо $\Delta x_1 \dots \Delta x_m$ приращения функции φ :

$$\begin{aligned} \Delta f(a, \Delta x) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}(t^0) \Delta t_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k}(t^0) \Delta t_k + o(\rho) \right] + \dots \\ &\quad \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \left[\frac{\partial \varphi_m}{\partial t_1}(t^0) \Delta t_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_m}{\partial t_k}(t^0) \Delta t_k + o(\rho) \right] + \\ &\quad + \alpha_1 \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}(t^0) \Delta t_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k}(t^0) \Delta t_k + o(\rho) \right] + \dots \\ &\quad \dots + \alpha_m \left[\frac{\partial \varphi_m}{\partial t_1}(t^0) \Delta t_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_m}{\partial t_k}(t^0) \Delta t_k + o(\rho) \right]. \end{aligned}$$

Перегруппируем слагаемые:

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}(t_0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \frac{\partial \varphi_m}{\partial t_1}(t_0) \right] \Delta t_1 + \dots \\
& \dots + \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k}(t_0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \frac{\partial \varphi_m}{\partial t_k}(t_0) \right] \Delta t_k + \\
& + o(\rho) \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) + \alpha_1 + \dots + \alpha_m \right] + \\
& + \rho \left[\alpha_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}(t^0) + \dots + \alpha_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial t_1}(t^0) \right] \frac{\Delta t_1}{\rho} + \dots \\
& \dots + \rho \left[\alpha_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k}(t^0) + \dots + \alpha_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial t_k}(t^0) \right] \frac{\Delta t_k}{\rho}.
\end{aligned}$$

$$\Delta F(t^0, \Delta t) = \frac{\partial F}{\partial t_1}(t^0) \Delta t_1 + \dots + \frac{\partial F}{\partial t_k}(t^0) \Delta t_k + o(\rho) \gamma + \rho \Lambda_1 + \dots + \rho \Lambda_k$$

γ - ограничена, $\Delta x_j = \Delta \varphi_j \xrightarrow{\Delta t \rightarrow \bar{0}} 0$, $\rho \rightarrow 0 \Leftrightarrow \Delta t \rightarrow \bar{0} = (0, \dots, 0)$. $\Rightarrow \alpha_j \rightarrow 0$, при $\rho \rightarrow 0$

$$\Lambda_j = [\alpha_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}(t^0) + \dots + \alpha_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial t_1}(t^0)] \frac{\Delta t_j}{\rho} \rightarrow 0, \rho \rightarrow 0$$

Перепишем:

$$\Delta F(t^0, \Delta t) = \frac{\partial F}{\partial t_1}(t^0) \Delta t_1 + \dots + \frac{\partial F}{\partial t_k}(t^0) \Delta t_k + o(\rho), \rho \rightarrow 0$$

Доказано.

3.5. Дифференциал. Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменных.

Рассматриваем функцию $w = f(x)$ определенную в $\mathcal{U}(a) \subset \mathbb{E}^m$. Мы предполагаем, что f дифференцируема в точке a . Поскольку функция дифференцируема в точке a , то

$$\Delta f(a, \Delta x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \Delta x_m + o(\rho), \rho \rightarrow 0$$

Определение: Дифференциалом функции f в точке a называется главная линейная часть (относительно Δx_j) приращения функции f в точке a , соответствующая приращению аргументов $\Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$.

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \Delta x_m$$

Поскольку дифференциал независимой переменной x_j есть произвольное число, то $dx_j = \Delta x_j$.

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) dx_m \quad (*)$$

Предложение. [Инвариантность формы 1-го дифференциала]

Выражение (*) универсально, оно справедливо и в случае, когда $x_j = \varphi_j(t)$, $t \in \mathcal{U}(t^0) \subset \mathbb{E}^k$, $a_j = \varphi_j(t^0)$, $j = 1, \dots, m$ (φ_j дифференцируема в точке t^0).

Доказательство.

$$d\varphi_j(t^0) = \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_1}(t^0)dt_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k}(t^0)dt_k, \quad j = 1, \dots, m$$

Введем функцию $F(t) = f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t))$

$$dF(t^0) = \frac{\partial F}{\partial t_1}(t^0)dt_1 + \dots + \frac{\partial F}{\partial t_k}(t^0)dt_k$$

$$\begin{aligned} dF(t^0) &= \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}(t^0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \frac{\partial \varphi_m}{\partial t_1}(t^0) \right] dt_1 + \dots \\ &+ \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k}(t^0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \frac{\partial \varphi_m}{\partial t_k}(t^0) \right] dt_k \end{aligned}$$

Перегруппируем:

$$\begin{aligned} dF(t^0) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}(t^0)dt_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k}(t^0)dt_k \right] + \dots \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \left[\frac{\partial \varphi_m}{\partial t_1}(t^0)dt_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_m}{\partial t_k}(t^0)dt_k \right] \end{aligned}$$

Получаем:

$$dF(t^0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)dx_m$$

Доказано.

3.6. Производная по направлению и градиент, их связь и геометрический смысл.

Рассматриваем функцию $w = f(x)$ определенную в $\mathcal{U}(a) \subset \mathbb{E}^m$. Мы предполагаем, что f дифференцируема в точке a . Возьмём единичный вектор $\vec{n} = (\cos \alpha_1, \dots, \cos \alpha_m)$, $|\vec{n}| = 1$.

$$l : \begin{cases} x_1 = a_1 + t \cos \alpha_1; \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ x_m = a_m + t \cos \alpha_m; \end{cases}$$

Рассмотрим суперпозицию:

$$F(t) = f(a_1 + t \cos \alpha_1, \dots, a_m + t \cos \alpha_m)$$

F дифференцируема в точке $t = 0$.

Определение: Производной функции f по направлению l в точке $x = a$ называется производная функции F в точке $t = 0$.

Обозначения.

$$\frac{\partial f}{\partial l}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + t \cos \alpha_1, \dots, a_m + t \cos \alpha_m) - f(a)}{t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial l}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \cos \alpha_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \cos \alpha_m$$

Определение: Градиентом функции f называется вектор

$$\text{grad} f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \right)$$

Из этого определения и выражения для производной по направлению l в точке a функции f мы получаем:

$$\frac{\partial f}{\partial l}(a) = (\text{grad} f(a), \vec{n})$$

Предложение. Градиент функции f в точке a характеризует направление и величину максимального роста производной по направлению функции f в точке a .

Доказательство.

По определению производной по направлению в точке a :

$$\frac{\partial f}{\partial l}(a) = |\text{grad} f(a)| |\vec{n}| \cos \varphi = |\text{grad} f(a)| \cos \varphi$$

$\cos \varphi$ имеет наибольшее значение равное 1 $\Rightarrow \cos \varphi = 1 \Rightarrow \vec{n}$ и grad – направление совпадают, т.к. в этом случае $\varphi = 0$.

Доказано.

3.7. Необходимые условия дифференцируемости

Необходимое условие 1.

$$[f \text{ дифференцируема в точке } a] \Rightarrow [\exists \frac{\partial f}{\partial x_j}(a), j = 1, \dots, m]$$

Доказательство.

Возьмем $j = k$, рассматриваем $\Delta x = (0, \dots, 0, \Delta x_k, 0, \dots, 0)$. Тогда $\Delta f(a, \Delta x) = \Delta_k f(a, \Delta x_k)$. Тогда используя 1-ое условие определения получим:

$$\Delta f(a, \Delta x) = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_m \Delta x_m + \alpha_1(\Delta x) \Delta x_1 + \dots + \alpha_m(\Delta x) \Delta x_m$$

Получаем следующее:

$$\Delta_k f(a, \Delta x_k) = A_k \Delta x_k + \alpha_k \Delta x_k$$

$$\frac{\Delta_k f(a, \Delta x_k)}{\Delta x_k} = A_k + \alpha_k \rightarrow A_k, \Delta x_k \rightarrow 0 \Rightarrow A_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$$

В силу произвольности мы доказано для всех переменных.

Доказано.

Таким образом мы уточнили определение, например, перепишем определение 1:

$$\Delta f(a, \Delta x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \Delta x_m + \alpha_1(\Delta x) \Delta x_1 + \dots + \alpha_m(\Delta x) \Delta x_m$$

Необходимое условие 2. Если $w = f(x), x \in \mathbb{E}^m$ дифференцируема в точке a , то f непрерывна в точке a .

Доказательство.

$$\Delta f(a, \Delta x) = f(a + \Delta x) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \Delta x_m + \alpha_1(\Delta x) \Delta x_1 + \dots + \alpha_m(\Delta x) \Delta x_m.$$

Если $\Delta x \rightarrow \bar{0}$, то $f(a + \Delta x) - f(a) \rightarrow 0 \Rightarrow f$ непрерывна в точке a .

Доказано.

Необходимое условие 3. (Не было в лекции Знаменской)

Пусть функция f дифференцируема в точке (x_0, y_0, z_0) . Тогда в этой точке функция f имеет производную по любому направлению и эта производная находится по формуле

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma$$

[Взято из Кудрявцева, Том 2, стр. 267]

4. Билет 4

4.1. Частные производные высших порядков.

Определение: Пусть $\omega = f(x)$ - дифференцируема в $D \subset \mathbb{E}^m$, D - область. И $\forall x \in D \exists \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$, $j = \overline{1, m}$.

Пусть $g_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$, и в точке x : $\exists \frac{\partial g_j}{\partial x_k}(x)$. Тогда

$$\frac{\partial g_j}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) (x)$$

называется частной производной 2-го порядка функции f в точке x . Частные производные высших порядков определяются так же.

Обозначения:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(x), f''_{x_j x_k}(x), f^{(2)}_{x_j x_k}(x)$$

$$j = k : \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x)$$

Примечание: если $k \neq j$, производная $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$ называется смешанной.

4.2. Независимость смешанной частной производной от порядка дифференцирования.

Примеры:

1.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{y} \right) \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{y^2 + x^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2} \right) = -\frac{x}{y^2 + x^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{y^2 + x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -\frac{y^2 + x^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \end{aligned}$$

2.

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

$$f(x, 0) = f(0, y) = f(0, 0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

$$f'_x = y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \frac{2x(x^2 + y^2) - 2x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y(x^4 - y^4) + 4x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f'_y = x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \frac{-2y(x^2 + y^2) - 2y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x(x^4 - y^4) + 4x^3y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{yx^4 - y^5 + 4x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5 - xy^4 - 4x^3y^2}{(x^2 + y^2)^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f'_x(0, y) - f'_x(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^5}{y^5} = -1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'_y(x, 0) - f'_y(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5}{x^5} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Из этих примеров видно, что в общем случае смешанные производные зависят от порядка дифференцирования.

Теорема: Пусть в $\mathcal{U}(a) \subset \mathbb{E}^2$ определены $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, и эти производные непрерывны в точке $a = (a_1, a_2)$, тогда

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$$

Доказательство: Рассмотрим функцию

$$U(x, y) = f(x, y) - f(x, a_2) - f(a_1, y) + f(a_1, a_2)$$

Пусть $\Pi = \{(x, y) : |x - a_1| \leq r_1, |y - a_2| \leq r_2\}$, $\Pi \subset \mathcal{U}(a)$, где определены смешанные производные. Фиксируем $y \in (a_2 - r_2, a_2 + r_2)$ и на интервале $(a_1 - r_1, a_1 + r_1)$ рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = f(x, y) - f(x, a_2)$$

φ дифференцируема на интервале $(a_1 - r_1, a_1 + r_1)$ и $U(x, y) = \varphi(x) - \varphi(a_1)$. Тогда, по теореме Лагранжа $\exists \theta_1 : 0 < \theta_1 < 1$:

$$U(x, y) = \varphi'(a_1 + \theta_1 \Delta x) \Delta x$$

где $\Delta x = x - a_1$

$$U(x, y) = [f'_x(a_1 + \theta_1 \Delta x, y) - f'_x(a_1 + \theta_1 \Delta x, a_2)] \Delta x$$

К выражению, стоящему в [...] применим теорему Лагранжа.

$\exists \theta_2 : 0 < \theta_2 < 1$:

$$U(x, y) = f''_{xy}(a_1 + \theta_1 \Delta x, a_2 + \theta_2 \Delta y) \Delta y \Delta x$$

где $\Delta y = y - a_2$.

Аналогично фиксируем $x \in (a_1 - r_1, a_1 + r_1)$ и на интервале $(a_2 - r_2, a_2 + r_2)$ получаем

$$U(x, y) = f''_{yx}(a_1 + \theta_3 \Delta x, a_2 + \theta_4 \Delta y) \Delta y \Delta x$$

$$f''_{yx}(a_1 + \theta_3 \Delta x, a_2 + \theta_4 \Delta y) = f''_{xy}(a_1 + \theta_1 \Delta x, a_2 + \theta_2 \Delta y)$$

Учитывая непрерывность в точке a при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$, получаем $f''_{xy}(a) = f''_{yx}(a)$.

Определение: Функция $\omega = f(x, y)$ называется n раз дифференцируемой в точке $x = a \in \mathbb{E}^m$, если все ее частные производные порядка $n - 1$ есть дифференцируемые функции

Теорема: (без доказательства) Пусть $\omega = f(x, y)$ дважды дифференцируема в точке a , тогда

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$$

4.3. Дифференциалы высших порядков. Отсутствие инвариантности их формы.

Определение: Пусть $\omega = f(x)$ дважды дифференцируема в $D \subset \mathbb{E}^m$. $\forall x \in D$ $df(x) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) dx_j$. Тогда дифференциалом 2 порядка будем называть

$$d^2 f(x) = d(df)(x) = \sum_{j=1}^m d \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) (x) dx_j = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(x) dx_k \right) dx_j$$

Дифференциалы высших порядков определяются таким же образом.

Замечание: Если рассмотреть дифференциал, как оператор

$$d = \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + dx_m \frac{\partial}{\partial x_m} \right)$$

То дифференциал n -ого порядка можно записать в виде

$$d^n = \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + dx_m \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^n$$

Предложение: Дифференциалы высших порядков не обладают свойством инвариантности формы.

Доказательство: Пусть $\omega = f(x)$, $x_j = \varphi_j(t)$, $j = \overline{1, m}$, f, φ_j - дважды дифференцируемы.

$$df(x) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) dx_j, \quad dx_j = \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_i}(t) dt_i$$

$$d^2 f(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) dx_i dx_j + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) d^2 x_j$$

причем

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) d^2 x_j \neq 0$$

4.4. Формула Тейлора для функций нескольких переменных.

Теорема [Разложение с остаточным членом в форме Лагранжа]: Пусть функция $\omega = f(x)$ обладает непрерывными частными производными порядка $n + 1$ в шаре $B_\delta(a)$, Δx таково, что $a + \Delta x \in B_\delta(a)$. Тогда найдется $0 < \theta < 1$ такое, что

$$f(a + \Delta x) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{d^k f(a)}{k!} + r_{n+1}(\theta)$$

где

$$r_{n+1}(\theta) = \frac{d^{n+1} f(a + \theta \Delta x)}{(n+1)!}$$

Примечание: dx_j трактуется как Δx_j

Доказательство: $a + \Delta x \in B_\delta(a) \Rightarrow a - \Delta x \in B_\delta(a)$, $\forall t \in [-1, 1], a + t\Delta x \in B_\delta(a)$.

$$f(a + t\Delta x) = f(a_1 + t\Delta x_1, \dots, a_m + t\Delta x_m) = \varphi(t)$$

$$\varphi(0) = f(a)$$

$$\varphi'(t) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(a + t\Delta x_j) \Delta x_j = df(a + t\Delta x)$$

$$\varphi^{(k)}(t) = \sum_{j_k=1}^m \dots \sum_{j_1=1}^m \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_k} \dots \partial x_{j_1}} \Delta x_{j_1} \dots \Delta x_{j_k} = d^k f(a + t\Delta x)$$

По формуле Тейлора

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \sum_{k=1}^n \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} t^k + r_{n+1}(\theta)$$

где

$$r_{n+1}(\theta) = \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta t)}{(n+1)!} t^{(n+1)}$$

Подставив $t = 1$ получим требуемое равенство.

Теорема [Разложение с остаточным членом в форме Пеано]: (без доказательства) Пусть f n -раз дифференцируема в точке $x = a$, тогда

$$f(a + \Delta x) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{d^k f(a)}{k!} \rho^k + o(\rho), \quad \rho \rightarrow 0, \quad \rho = \rho(\Delta x, 0)$$

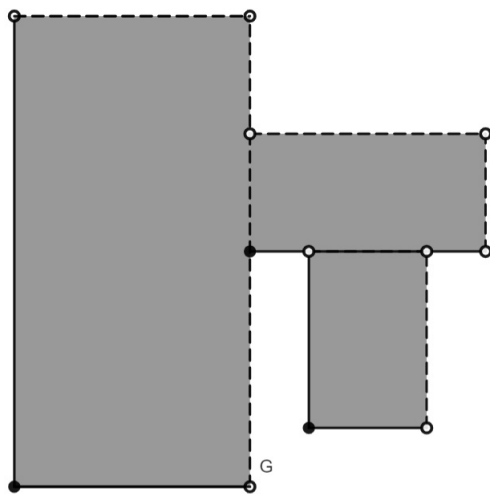
5. Билет 5

5.1. Необходимые определения и предложения билета.

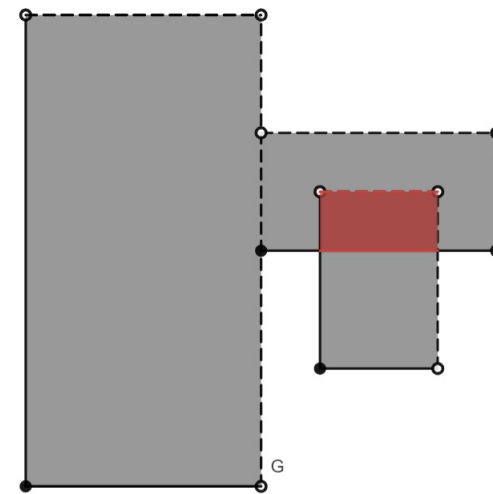
Определение: множество $Q = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \cdots \times [a_m, b_m)$ будем называть клеткой в \mathbb{E}^m .

Определение: множество $G \subset \mathbb{E}^m$ будем называть клеточным, если оно является объединением **конечного** числа попарно непересекающихся клеток:

$$G = \bigcup_{j=1}^k Q_j, \quad Q_i \cap Q_j = \emptyset, \quad i \neq j.$$



G - клеточное множество



G - не клеточное множество

Свойства клеточных множеств:

1° Объединение **конечного** числа попарно непересекающихся клеточных множеств есть клеточное множество.

Доказательство:

G и H - клеточные множества. Тогда:

$$G = \bigcup_{j=1}^k Q_j, \quad H = \bigcup_{j=k+1}^n Q_j.$$

Значит:

$$G \cup H = \bigcup_{j=1}^n Q_j - \text{клеточное множество.}$$

2° Пересечение двух клеток есть клетка.

Доказательство:

Пусть $Q_1 = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \cdots \times [a_m, b_m)$, а $Q_2 = [c_1, d_1) \times [c_2, d_2) \times \cdots \times [c_m, d_m)$. Тогда возможны два случая:

а) $\exists j: [a_j, b_j) \cap [c_j, d_j) = \emptyset \Rightarrow Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$ - клетка;

б) $\forall j \mapsto [a_j, b_j) \cap [c_j, d_j) = [e_j, f_j) \Rightarrow Q_1 \cap Q_2 = [e_1, f_1) \times [e_2, f_2) \times \dots \times [e_m, f_m) - \text{клетка}.$

3° Пересечение двух клеточных множеств есть клеточное множество.

Доказательство:

Пусть G_1 и G_2 - клеточные множества.

$$G_1 = Q_1^1 \cup Q_2^1 \cup \dots \cup Q_k^1$$

$$G_2 = Q_1^2 \cup Q_2^2 \cup \dots \cup Q_n^2$$

Обозначим $Q_{ij} = Q_i^1 \cap Q_j^2, i = \overline{1, k}, j = \overline{1, n}.$

Q_{ij} - клетка (свойство **2°**).

$G_1 \cap G_2 = \bigcup_{i,j} Q_{ij} = \bigcup_{i=1}^k \bigcup_{j=1}^n Q_{ij}$ - объединение попарно непересекающихся клеток есть клеточное множество.

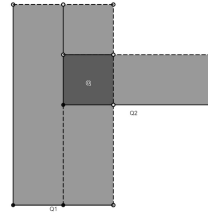
4° Разность двух клеток есть клеточное множество.

Доказательство:

Q_1 и Q_2 - клетки. $Q = Q_1 \cap Q_2$ - клетка (свойство **2°**). Тогда

$$Q_1 \setminus Q_2 = Q_1 \setminus Q.$$

Существует такое разбиение клетки Q_1 на более мелкие клетки, что Q является одной из них $\Rightarrow Q_1 \setminus Q_2$ - клеточное множество.



5° Разность двух клеточных множеств есть клеточное множество.

Доказательство:

$$G_1 = \bigcup_{j=1}^k Q_j^1, \quad G_2 = \bigcup_{j=1}^n Q_j^2.$$

$$G_1 \setminus Q_1^2 = \bigcup_{i=1}^k (Q_i^1 \setminus Q_1^2) = \bigcup_{i=1}^k G_{i1}$$

G_{i1} - клеточное множество (свойство **4°**).

$G_{i1} \cap G_{j1} = \emptyset$, если $i \neq j \Rightarrow G_1 \setminus Q_1^2$ - клеточное множество (свойство **1°**).

Аналогично для других клеток G_2

$$G_1 \setminus G_2 = G_1 \setminus \left(\bigcup_{j=1}^n Q_j^2 \right) = \bigcap_{j=1}^n (G_1 \setminus Q_j^2)$$

Последнее является клеточным множеством по свойству **3°**. Откуда получаем, что $G_1 \setminus G_2$ - клеточное множество.

6° Объединение **конечного** числа клеточных множеств есть клеточное множество.

Доказательство:

1) G_1 и G_2 .

$$G_1 \cup G_2 = (G_1 \setminus G_2) \cup (G_2 \setminus G_1) \cup (G_1 \cap G_2);$$

Последние три скобки являются попарно непересекающимися клеточными множествами $\stackrel{1^\circ}{\Rightarrow} G_1 \cup G_2$ - клеточное множество.

2) Далее для G_3, G_4, \dots, G_n по индукции.

Таким образом, объединение, пересечение и разность конечного числа клеточных множеств есть клеточное множество.

Определение: мерой клетки Q назовем число:

$$m(Q) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \dots \cdot (b_m - a_m);$$

$$m(\emptyset) = 0.$$

Определение: мерой клеточного множества G назовем число:

$$m(G) = \sum_{j=1}^k m(Q_j); \quad m(\emptyset) = 0.$$

Лемма: мера клеточного множества G не зависит от способа разбиения этого множества на клетки.

Доказательство:

Пусть $G = Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_k$ и также $G = Q'_1 \cup Q'_2 \cup \dots \cup Q'_n$. Тогда обозначим $Q_{ij} = Q_i \cap Q'_j$, $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, n}$.

Понятно, что

$$Q_i = \bigcup_{j=1}^n Q_{ij}, \quad Q'_j = \bigcup_{i=1}^k Q_{ij}.$$

Тогда:

$$m(G) = \sum_{i=1}^k m(Q_i) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n m(Q_{ij}) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k m(Q_{ij}) = \sum_{j=1}^n m(Q'_j) = m(G).$$

Предложение 1: если клеточные множества G_1, G_2, \dots, G_n попарно не пересекаются, то для $G = \bigcup_{j=1}^n G_j$ выполняется $m(G) =$

$$\sum_{j=1}^n m(G_j).$$

Доказательство:

$$G_j = \bigcup_{i=1}^{k_j} Q_i^j, \quad j = \overline{1, n}.$$

Тогда

$$G = \bigcup_{j=1}^n G_j = \bigcup_{j=1}^n \bigcup_{i=1}^{k_j} Q_i^j = \bigcup_{\substack{1 \leq j \leq n, \\ 1 \leq i \leq k_j}} Q_i^j$$

Все клетки из последнего объединения попарно не пересекаются, поэтому:

$$m(G) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n, \\ 1 \leq i \leq k_j}} m(Q_i^j) = \sum_{j=1}^n m(G_j).$$

Предложение 2: если G_1 и G_2 - клеточные множества и $G_1 \subset G_2$, то $m(G_2) = m(G_1) + m(G_2 \setminus G_1)$, $m(G_1) \leq m(G_2)$.

Доказательство:

$$G_2 = G_1 \cup (G_2 \setminus G_1) = G_1 \cup G.$$

$$G_1 \cap G = \emptyset \xrightarrow{\text{np.1}} m(G_2) = m(G_1) + m(G_2 \setminus G_1) \Rightarrow m(G_1) \leq m(G_2).$$

Предложение 3: если G_1, G_2, \dots, G_k - клеточные множества, $G = \bigcup_{j=1}^k G_j$, то $m(G) \leq \sum_{j=1}^k m(G_j)$.

Доказательство:

Для G_1 и G_2 по предложению 2, а далее по индукции.

Предложение 4: для любого клеточного множества G и $\forall \varepsilon > 0 \exists G_\varepsilon, G^\varepsilon$ - клеточные множества такие, что:

- 1) $G_\varepsilon \subset \overline{G_\varepsilon} \subset \text{int } G \subset G$; $m(G) - m(G_\varepsilon) < \varepsilon$;
- 2) $G \subset \overline{G} \subset \text{int } G^\varepsilon \subset G^\varepsilon$; $m(G^\varepsilon) - m(G) < \varepsilon$.

Доказательство:

- 1) $G = Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_k$.

Рассмотрим отдельную клетку $Q = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \dots \times [a_m, b_m)$

$$m(Q_a) = \prod_{j=1}^m (b_j - a_j - 2a), \quad Q_a \subset Q$$

$$S_j = \prod_{\substack{i=1, \\ i \neq j}}^m (b_i - a_i);$$

Тогда

$$m(Q) \leq m(Q_a) + 2a \cdot \sum_{j=1}^m S_j = m(Q_a) + 2aS \Rightarrow m(Q) - m(Q_a) \leq 2aS = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Тогда для одной клетки $a = \frac{\varepsilon}{4S}$.

Так как $G = Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_k$, то $a = \frac{\varepsilon}{4Sk}$.

Получаем $G_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^k (Q_a)_i$.

Таким образом, $G_\varepsilon \subset \overline{G_\varepsilon} \subset \text{int } G \subset G$.

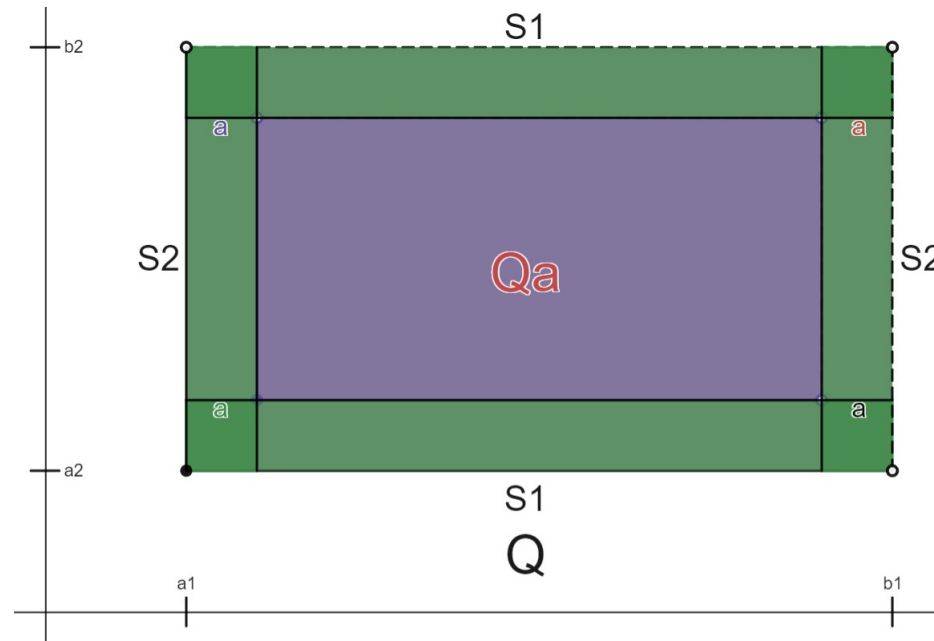


Рис. 2: Случай при $m = 2$

2) Доказывается аналогично 1).

5.2. Определение измеримости по Жордану множества в m -мерном евклидовом пространстве.

Определение: множество $X \subset \mathbb{E}^m$ называется измеримым по Жордану, если $\forall \varepsilon > 0 \exists G_\varepsilon$ и G^ε - клеточные множества такие, что $G_\varepsilon \subset X \subset G^\varepsilon$ и $m(G^\varepsilon) - m(G_\varepsilon) < \varepsilon$.

Определение: мерой измеримого по Жордану множества $X \subset \mathbb{E}^m$ называется такое число $m(X)$, что $\forall G_\varepsilon, G^\varepsilon$ таких, что $G_\varepsilon \subset X \subset G^\varepsilon \implies m(G_\varepsilon) \leq m(X) \leq m(G^\varepsilon)$.

Лемма: для любого измеримого по Жордану множества X его мера $m(X)$ существует и единственна, причем

$$m(X) = \overline{m}(X) = \underline{m}(X),$$

где $\overline{m}(X) = \inf_{X \subset G^\varepsilon} m(G^\varepsilon)$ - верхняя (внешняя) мера X ;

$\underline{m}(X) = \sup_{G_\varepsilon \subset X} m(G_\varepsilon)$ - нижняя (внутренняя) мера X .

Доказательство:

Так как $G_\varepsilon \subset X \subset G^\varepsilon$, то $m(G_\varepsilon) \leq m(G^\varepsilon) \Rightarrow \{m(G_\varepsilon)\}$ ограничена сверху $\Rightarrow \exists \alpha = \sup_{G_\varepsilon} m(G_\varepsilon) = \underline{m}(X)$.

Аналогично: $\{m(G^\varepsilon)\}$ ограничена снизу $\Rightarrow \exists \beta = \inf_{G^\varepsilon} m(G^\varepsilon) = \overline{m}(X)$.

По теореме об отделимости множеств: $m(G_\varepsilon) \leq \alpha \leq \beta \leq m(G^\varepsilon)$.

Пусть $m(X) = \alpha$.

$\forall \varepsilon > 0 \mapsto 0 \leq \beta - \alpha \leq m(G^\varepsilon) - m(G_\varepsilon) < \varepsilon$.

Откуда $\beta = \alpha \Rightarrow m(X)$ единственна.

Предложение 5: пусть множество X измеримо по Жордану и $\forall \varepsilon > 0 \exists G^\varepsilon: X \subset G^\varepsilon, m(G^\varepsilon) < \varepsilon$. Тогда $m(X) = 0$.

Доказательство:

Возьмем $G_\varepsilon = \emptyset$. Тогда:

$\forall \varepsilon > 0 \mapsto G_\varepsilon \subset X \subset G^\varepsilon \text{ \& } m(G^\varepsilon) - m(G_\varepsilon) = m(G^\varepsilon) < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \leq m(X) < \varepsilon \Rightarrow m(X) = 0$.

Замечание: измеримое по Жордану множество, обладающее свойством из предыдущего предложения, будем называть множеством меры нуль.

Предложение 6: подмножество множества меры нуль есть множество меры нуль.

Доказательство:

Пусть $m(X) = 0$ и $Y \subset X$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists G^\varepsilon: X \subset G^\varepsilon, m(G^\varepsilon) < \varepsilon$.

Как следствие:

$\forall \varepsilon > 0 \exists G^\varepsilon: Y \subset X \subset G^\varepsilon, m(G^\varepsilon) < \varepsilon \Rightarrow m(Y) = 0$.

Предложение 7: объединение конечного числа множеств меры нуль есть множество меры нуль.

Доказательство:

$m(X_1) = m(X_2) = 0$.

$\forall \varepsilon > 0 \exists G_1^\varepsilon: X_1 \subset G_1^\varepsilon, m(G_1^\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2};$
 $\exists G_2^\varepsilon: X_2 \subset G_2^\varepsilon, m(G_2^\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}.$

Тогда $X_1 \cup X_2 \subset G_1^\varepsilon \cup G_2^\varepsilon = G^\varepsilon$.

$m(G^\varepsilon) \overset{\text{пр.3}}{\leq} m(G_1^\varepsilon) + m(G_2^\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow m(X_1 \cup X_2) = 0$.

Далее по индукции.

5.3. Критерий измеримости.

Теорема [Критерий измеримости]:

$$[X - \text{измеримо по Жордану}] \iff [X \text{ ограничено и } m(\partial X) = 0].$$

Доказательство:

\implies :

X - измеримо по Жордану: $\forall \varepsilon > 0 \exists G_\varepsilon, G^\varepsilon: G_\varepsilon \subset X \subset G^\varepsilon$,
 $m(G^\varepsilon) - m(G_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{3}$;

Из предложения 4 $\Rightarrow \exists \widetilde{G}^\varepsilon: \overline{G^\varepsilon} \subset \text{int } \widetilde{G}^\varepsilon \subset \widetilde{G}^\varepsilon$, $m(\widetilde{G}^\varepsilon) - m(G^\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{3}$;
 $\exists \widetilde{G}_\varepsilon: \widetilde{G}_\varepsilon \subset \text{int } G_\varepsilon \subset G_\varepsilon$, $m(G_\varepsilon) - m(\widetilde{G}_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Тогда:

$$m(\widetilde{G}^\varepsilon) - m(\widetilde{G}_\varepsilon) = m(\widetilde{G}^\varepsilon) - m(G^\varepsilon) + m(G^\varepsilon) - m(G_\varepsilon) + m(G_\varepsilon) - m(\widetilde{G}_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

$\widetilde{G}_\varepsilon$ не содержит точки ∂X , а $\widetilde{G}^\varepsilon$ содержит их все, откуда:

$\widetilde{G}^\varepsilon \setminus \widetilde{G}_\varepsilon$ - клеточное множество и $\partial X \subset \widetilde{G}^\varepsilon \setminus \widetilde{G}_\varepsilon$
 $m(\widetilde{G}^\varepsilon \setminus \widetilde{G}_\varepsilon) = m(\widetilde{G}^\varepsilon) - m(\widetilde{G}_\varepsilon) < \varepsilon \Rightarrow m(\partial X) = 0$.

\Leftarrow :

X - ограничено $\Rightarrow \exists Q$ - клетка: $X \subset Q$;

$$[m(\partial X) = 0] \stackrel{\text{def}}{=} [\forall \varepsilon > 0 \exists G^\varepsilon: \partial X \subset G^\varepsilon, m(G^\varepsilon) < \varepsilon]$$

$Q \setminus G^\varepsilon$ - клеточное множество $\Rightarrow Q \setminus G^\varepsilon = \bigcup_{j=1}^k Q_j$, где Q_j не содержат точек ∂X .

Тогда есть два варианта:

$[Q_j \subset X]$ либо $[Q_j \cap X = \emptyset]$

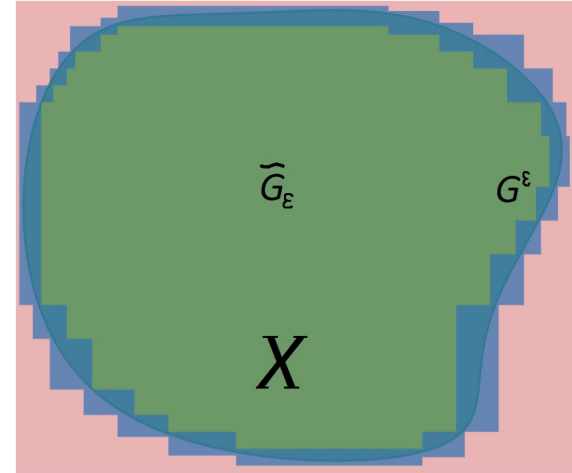
Пусть без потери общности $Q_1, Q_2, \dots, Q_l: Q_j \subset X, j = \overline{1, l}$;

$Q_{l+1}, Q_{l+2}, \dots, Q_k: Q_j \cap X = \emptyset, j = \overline{l+1, k}$;

$$\widetilde{G}_\varepsilon = \bigcup_{j=1}^l Q_j, \quad \widetilde{G}^\varepsilon = \widetilde{G}_\varepsilon \cup G^\varepsilon = Q \setminus \left(\bigcup_{j=l+1}^k Q_j \right)$$

$$\widetilde{G}_\varepsilon \subset X \subset \widetilde{G}^\varepsilon$$

$$m(G^\varepsilon) = m(\widetilde{G}^\varepsilon) - m(\widetilde{G}_\varepsilon) < \varepsilon \Rightarrow X \text{ измеримо по Жордану.}$$



5.4. Примеры неизмеримых по Жордану множеств.

$$\boxed{1} \quad X = \{x \in [0, 1] : x \in \mathbb{Q}\}, \quad X \subset \mathbb{E}^1.$$

$$\partial X = [0, 1] \Rightarrow m(\partial X) = 1 \neq 0 \Rightarrow X \text{ неизмеримо.}$$

$$\boxed{2} \quad Y = X \times X, \text{ где } X \text{ из } \boxed{1}.$$

$$\partial Y = [0, 1] \times [0, 1] \Rightarrow m(\partial Y) = 1 \neq 0 \Rightarrow Y \text{ неизмеримо.}$$

$$\boxed{3} \quad X \text{ из } \boxed{1}. \quad X = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}, \quad 0 \leq a_j \leq 1$$

Пусть $B = \bigcup_{j=1}^{\infty} \left(a_j - \frac{\varepsilon}{2^j}; a_j + \frac{\varepsilon}{2^j}\right)$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$.

B открыто как объединение открытых множеств.

Обозначим $B_k = \bigcup_{j=1}^k \left(a_j - \frac{\varepsilon}{2^j}; a_j + \frac{\varepsilon}{2^j}\right)$

$$m(B_k) \leq \sum_{j=1}^k \frac{\varepsilon}{2^{j-1}} = \varepsilon \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}}\right) = \varepsilon \frac{1 - \frac{1}{2^k}}{\frac{1}{2}} = 2\varepsilon \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) < 2\varepsilon$$

Тогда $\underline{m}(B) \leq 2\varepsilon < 1$. Но $[0, 1] \subset B \Rightarrow \overline{m}(B) > 1$.

То есть $\underline{m}(B) \neq \overline{m}(B) \Rightarrow B$ неизмеримо.

5.5. Измеримость объединения, пересечения и разности измеримых множеств.

1° Если X_1 и X_2 измеримы по Жордану, то $X_1 \cup X_2$, $X_1 \cap X_2$, $X_1 \setminus X_2$ - измеримые по Жордану множества.

Доказательство:

X_1 и X_2 измеримы по Жордану $\Rightarrow X_1$ и X_2 ограничены и $m(\partial X_1) = m(\partial X_2) = 0$. Тогда и $m(\partial X_1 \cup \partial X_2) = 0$.

$$\overbrace{\partial(X_1 \cup X_2) \subset \partial X_1 \cup \partial X_2; \partial(X_1 \cap X_2) \subset \partial X_1 \cup \partial X_2; \partial(X_1 \setminus X_2) \subset \partial X_1 \cup \partial X_2}^{\downarrow}$$

$$m(\partial(X_1 \cup X_2)) = m(\partial(X_1 \cap X_2)) = m(\partial(X_1 \setminus X_2)) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow X_1 \cup X_2$, $X_1 \cap X_2$ и $X_1 \setminus X_2$ измеримы.

5.6. Конечная аддитивность меры Жордана.

2° Пусть X_1, X_2, \dots, X_k - измеримые по Жордану множества, тогда множество $X = \bigcup_{j=1}^k X_j$ измеримо и:

$$1) m(X) \leq \sum_{j=1}^k m(X_j);$$

$$2) \text{ Если } X_j \cap X_i = \emptyset \text{ при } i \neq j, \text{ то } m(X) = \sum_{j=1}^k m(X_j).$$

Доказательство: (для $k = 2$, а дальше по индукции)

1) X_1 и X_2 измеримы по Жордану $\Rightarrow X = X_1 \cup X_2$ измеримо.

$\forall \varepsilon > 0 \exists G_1^\varepsilon, G_2^\varepsilon: X_1 \subset G_1^\varepsilon, X_2 \subset G_2^\varepsilon$ и:

$$m(X_1) > m(G_1^\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$m(X_2) > m(G_2^\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2}$$

Тогда $G^\varepsilon = G_1^\varepsilon \cup G_2^\varepsilon$ - клеточное множество и $X \subset G^\varepsilon$.

Получаем:

$$m(X) \leq m(G^\varepsilon) \leq m(G_1^\varepsilon) + m(G_2^\varepsilon) < m(X_1) + m(X_2) + \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon \Rightarrow m(X) \leq m(X_1) + m(X_2)$ *

$$2) X_1 \cap X_2 = \emptyset, X = X_1 \cup X_2$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists G_\varepsilon^1, G_\varepsilon^2: G_\varepsilon^1 \subset X_1, G_\varepsilon^2 \subset X_2$ и:

$$m(G_\varepsilon^1) > m(X_1) - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$m(G_\varepsilon^2) > m(X_2) - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$G_\varepsilon = G_\varepsilon^1 \cup G_\varepsilon^2 \text{ и } G_\varepsilon^1 \cap G_\varepsilon^2 = \emptyset, \text{ а также } G_\varepsilon^1 \cup G_\varepsilon^2 \subset X.$$

$$\text{Тогда } m(X) \geq m(G_\varepsilon) = m(G_\varepsilon^1) + m(G_\varepsilon^2) > m(X_1) + m(X_2) - \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем $m(X) \geq m(X_1) + m(X_2)$ **

Из * и ** $\Rightarrow m(X) = m(X_1) + m(X_2)$.

5.7. Измеримость и мера цилиндра в $(m+1)$ -мерном пространстве.

Предложение: пусть $X \subset \mathbb{E}^m$, $m \geq 1$, - измеримо, тогда множество $Y = X \times [a, b] \subset \mathbb{E}^{m+1}$ - измеримо. $m(Y) = m(X)(b - a)$.

Доказательство:

$$[X \text{ измеримо}] \stackrel{\text{def}}{=} [\forall \varepsilon > 0 \exists G_\varepsilon, G^\varepsilon : G_\varepsilon \subset X \subset G^\varepsilon, m(G^\varepsilon) - m(G_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{b-a}].$$

Рассмотрим клеточные множества: $\widetilde{G}_\varepsilon = G_\varepsilon \times [a, b]$ и $\widetilde{G}^\varepsilon = G^\varepsilon \times [a, b]$;

Тогда $\widetilde{G}_\varepsilon \subset Y \subset \widetilde{G}^\varepsilon$, а $m(\widetilde{G}_\varepsilon) = m(G_\varepsilon)(b - a)$ и $m(\widetilde{G}^\varepsilon) = m(G^\varepsilon)(b - a)$;

Получаем: $m(\widetilde{G}^\varepsilon) - m(\widetilde{G}_\varepsilon) = (m(G^\varepsilon) - m(G_\varepsilon))(b - a) < \frac{\varepsilon}{b-a}(b - a) = \varepsilon \Rightarrow Y$ измеримо.

6. Билет 6

6.1. Определенный интеграл Римана.

Обозначения:

$y = f(x)$ некоторая функция, $x \in [a, b]$

T – разбиение отрезка $[a, b] : T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$

$\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$, $\Delta_T = \max_{1 \leq j \leq n} \Delta x_j$ – мелкость разбиения

$\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$, $j = \overline{1, n}$

Определение: Число $I\{T, \xi\} = \sum_{j=1}^n f(\xi_j) \Delta x_j$ называется интегральной суммой.

Определение: Число I называется пределом интегральных сумм $I\{T, \xi\}$ при $\Delta_T \rightarrow 0$, Если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall T : \Delta_T < \delta \ \& \ \forall \{\xi\} \mapsto |I\{T, \xi\} - I| < \varepsilon$.

Определение: Функция $y = f(x)$ называется интегрируемой на $[a, b]$, если существует конечный предел I интегральных сумм $I\{T, \xi\}$ при $\Delta_T \rightarrow 0$.

Указанный предел I называется определенным интегралом функции f на $[a, b]$.

Обозначение: $I = \int_a^b f(x) dx$

Пример: $y(x) \equiv C$, $x \in [a, b]$

$$I\{T, \xi\} = C(b - a) \Rightarrow I = \int_a^b C dx = C(b - a)$$

Предложение: [Необходимое условие интегрируемости функции]:

$$[f - \text{интегрируема на } [a, b]] \Rightarrow [f - \text{ограничена на } [a, b]]$$

Доказательство: от противного:

Пусть f не является ограниченной на $[a, b]$ это означает, что $\exists k$: на $[x_{k-1}, x_k]$ функция не является ограниченной, то есть, $|f(\xi_k)| \Delta x_k$ может быть как угодно большим за счет выборки точки $\xi_k \Rightarrow I\{T, \xi\}$ неогречена и предел $I\{T, \xi\} \Delta_T \rightarrow 0$ не существует – противоречие.

Замечание: Не всякая ограниченная функция является интегрируемой на отрезке.

Пример: функция Дирихле на любом отрезке $[a, b]$ ограничена

$$y = D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{J} \end{cases}$$

Однако:

$$\xi'_j \in \mathbb{Q}, j = \overline{1, n}$$

$$\xi''_j \in \mathbb{J}, j = \overline{1, n}$$

$$I\{T, \xi'\} = b - a \neq 0$$

$$I\{T, \xi''\} = 0, \text{ отсюда } D(x) \text{ не является интегрируемой}$$

6.2. Верхние и нижние суммы Дарбу, их свойства.

Определение: Пусть $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, ограничена на данном отрезке; T -разбиение отрезка $[a, b]$.

$$T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}, \Delta x_j = x_j - x_{j-1}$$

$$m_j = \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f(x), M_j = \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f(x), j = \overline{1, n}, \text{ тогда:}$$

$$\underline{S}_T = \sum_{j=1}^n m_j \Delta x_j \text{—нижняя сумма Дарбу по разбиению } T$$

$$\overline{S}_T = \sum_{j=1}^n M_j \Delta x_j \text{—верхняя сумма Дарбу по разбиению } T$$

Очевидно, что при фиксированном T выполняется $\underline{S}_T \leq I\{T, \xi\} \leq \overline{S}_T$

Свойство 1: Для фиксированного T выполняется:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \xi', \xi'' : \overline{S}_T - I\{T, \xi'\} < \varepsilon, I\{T, \xi''\} - \underline{S}_T < \varepsilon$$

Доказательство: из определения $M_j = \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f(x)$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \xi'_j \in [x_{j-1}, x_j] : f(\xi'_j) > M_j - \frac{\varepsilon}{b-a} \Rightarrow M_j - f(\xi'_j) < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$\sum_{j=1}^n (M_j - f(\xi'_j)) \Delta x_j < \sum_{j=1}^n \frac{\varepsilon}{b-a} \Delta x_j = \varepsilon \Rightarrow \sum_{j=1}^n (M_j - f(\xi'_j)) \Delta x_j =$$

$$\overline{S}_T - I\{T, \xi'\} < \varepsilon$$

Второе неравенство доказывается аналогично.

Определение: T' -измельчение разбиения T , если $T' = T \cup \{b_1 \dots b_k\}$, то есть, мы добавляем еще k точек, таким образом $\Delta_{T'} \leq \Delta_T$.

Свойство 2: При измельчении разбиения T нижние суммы Дарбу не уменьшаются, а верхние не увеличиваются.

$$T' \text{—измельчение разбиения } T, \underline{S}_T \leq \underline{S}_{T'} \leq \overline{S}_{T'} \leq \overline{S}_T$$

Доказательство: Добавим одну точку на $[x_{j-1}, x_j] : b \in (x_{j-1}, x_j), \Delta x_j = \Delta x'_j + \Delta x''_j, M'_j \leq M_j; M''_j \leq M_j$, тогда:

$$\bar{S}_T - \bar{S}_{T'} = M_j \Delta x_j - (M'_j \Delta x'_j + M''_j \Delta x''_j) = (M_j - M'_j) \Delta x' + (M_j - M''_j) \Delta x'' \geq 0$$

$$\Rightarrow \bar{S}_{T'} \leq \bar{S}_T$$

Аналогично доказывается для нижних сумм.

Свойство 3: Пусть T' и T'' произвольные разбиения отрезка $[a, b]$, тогда: $\underline{S}_{T'} \leq \bar{S}_{T''}, \underline{S}_{T''} \leq \bar{S}_{T'}$

Доказательство: $T = T' \cup T''$ —измельчение разбиений T', T''

Тогда из свойства 2 следует, что $\underline{S}_{T'} \leq \underline{S}_T \leq \bar{S}_T \leq \bar{S}_{T''}$ и

$$\underline{S}_{T''} \leq \underline{S}_T \leq \bar{S}_T \leq \bar{S}_{T'}$$

Свойство 4: существуют числа \underline{I}, \bar{I} :

$$\underline{I} = \sup_T \underline{S}_T, \bar{I} = \inf_T \bar{S}_T \text{ такие, что для произвольных разбиений } T', T'' \text{ выполняется: } \underline{S}_{T'} \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq \bar{S}_{T''}$$

\bar{I} —верхний интеграл Дарбу

\underline{I} —нижний интеграл Дарбу.

Доказательство: следует из свойства 3 и теоремы об отделимости множеств.

Свойство 5 [Лемма Дарбу]:

$$1) [\underline{I} = \lim_{\Delta_T \rightarrow 0} \underline{S}_T] \stackrel{\text{def}}{=} [\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall T : \Delta_T < \delta \mapsto \underline{I} - \underline{S}_T < \varepsilon]$$

$$2) [\bar{I} = \lim_{\Delta_T \rightarrow 0} \bar{S}_T] \stackrel{\text{def}}{=} [\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall T : \Delta_T < \delta \mapsto \bar{S}_T - \bar{I} < \varepsilon]$$

Доказательство: 2)

$$M = \sup_{[a, b]} f(x), m = \inf_{[a, b]} f(x)$$

а) $M = m$ — тривиальный случай;

б) $M > m; \bar{I} = \inf_T \bar{S}_T$ из определения *inf*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists T^* : \bar{S}_{T^*} < \bar{I} + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \bar{S}_{T^*} - \bar{I} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$T\text{—произвольное разбиение: } \Delta_T = \max_j \Delta x_j < \frac{\varepsilon}{2(M-m)k}$$

k —количество точек разбиения T^* , лежащих на (a, b)

рассмотрим $T' = T \cup T^*$

$$0 \leq \bar{S}_T - \bar{S}_{T'} \leq (M - m)k\Delta_T < \frac{\varepsilon}{2} \text{ (оценили сверху) отсюда:}$$

$$0 \leq \bar{S}_T - \bar{S}_{T'} \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (1)$$

Из свойств 3 и 4: $\bar{I} \leq \bar{S}_{T'} \leq \bar{S}_{T^*}$

$$0 \leq \bar{S}_{T'} - \bar{I} \leq \bar{S}_{T^*} - \bar{I} < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$

$$\bar{S}_{T'} - \bar{I} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (2)$$

Складываем (1) и (2), получаем $\bar{S}_T - \bar{I} < \varepsilon$

Итак: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2(M-m)k} > 0 \quad \forall T : \Delta_T < \delta \mapsto \bar{S}_T - \bar{I} < \varepsilon$

6.3. Критерий интегрируемости функции.

Теорема 1: Пусть функция f ограничена на $[a, b]$
 $[f \text{ интегрируема на } [a, b]] \Leftrightarrow [\forall \varepsilon > 0 \exists T : \bar{S}_T - \underline{S}_T < \varepsilon]$

Доказательство [Необходимость]: \Rightarrow

$[f \text{ интегрируема на } [a, b]] \stackrel{\text{def}}{=} [\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall T : \Delta_T < \delta \ \& \ \forall \{\xi\} \mapsto |I - I\{T, \xi\}| < \frac{\varepsilon}{4}]$

из свойства 1: $\exists \xi', \xi''$:

$\bar{S}_T - I\{T, \xi'\} < \frac{\varepsilon}{4}, I\{T, \xi''\} - \underline{S}_T < \frac{\varepsilon}{4}$, тогда

$\bar{S}_T - \underline{S}_T = |\bar{S}_T - I\{T, \xi'\} + I\{T, \xi'\} - I + I - I\{T, \xi''\} + I\{T, \xi''\} - \underline{S}_T| \leq \bar{S}_T - I\{T, \xi'\} + |I\{T, \xi'\} - I| + |I - I\{T, \xi''\}| + I\{T, \xi''\} - \underline{S}_T < 4 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon \Rightarrow$
 $\forall \varepsilon > 0 \exists T : \bar{S}_T - \underline{S}_T < \varepsilon$

Доказательство [Достаточность]: \Leftarrow

$\forall \varepsilon > 0 \exists T^* : \bar{S}_{T^*} - \underline{S}_{T^*} < \varepsilon$

Из свойства 4: существуют числа $\underline{I}, \bar{I} : \forall T \mapsto \underline{S}_T \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq \bar{S}_T \Rightarrow$

$0 \leq \bar{I} - \underline{I} \leq \bar{S}_{T^*} - \underline{S}_{T^*} < \varepsilon$ так как это выполняется для любых $\varepsilon > 0 \Rightarrow$ это возможно лишь при $\bar{I} - \underline{I} = 0, \bar{I} = \underline{I} = I$

По Лемме Дарбу:

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0 : \forall T : \Delta_T < \delta_1 \mapsto \bar{S}_T - \bar{I} < \varepsilon$

для этого же $\varepsilon \exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0 : \forall T : \Delta_T < \delta_2 \mapsto \underline{I} - \underline{S}_T < \varepsilon$

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} \Rightarrow \forall T \Delta_T < \delta \mapsto$

$\bar{S}_T - I < \frac{\varepsilon}{2}, I - \underline{S}_T < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall T \Delta_T < \delta \ \& \ \forall \xi = \{\xi_j\} \mapsto$

$\underline{S}_T \leq I \leq \bar{S}_T$ (1)

также используем то, что $\underline{S}_T \leq I\{T, \xi\} \leq \bar{S}_T \Rightarrow$

$-\bar{S}_T \leq -I\{T, \xi\} \leq -\underline{S}_T$ (2)

Сложим (1) и (2) $\Rightarrow |I - I\{T, \xi\}| \leq \bar{S}_T - \underline{S}_T < \varepsilon$

6.4. Классы интегрируемых функций.

Теорема 2: Если $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то f интегрируема на $[a, b]$.

Доказательство: f ограничена на $[a, b]$ по первой теореме Вейерштрасса, f равномерно непрерывна на $[a, b]$ по теореме Кантора \Rightarrow

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x', x'' \in [a, b] : |x' - x''| < \delta \mapsto$

$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$

Для этого же $\varepsilon \exists T : \Delta_T < \delta, T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$

По 2 теореме Вейерштрасса $\forall j \exists x'_j, x''_j \in [x_{j-1}, x_j] :$

$$M_j = \max_{[x_{j-1}, x_j]} f(x) = f(x'_j), m_j = \min_{[x_{j-1}, x_j]} f(x) = f(x''_j)$$

тогда из р.н. получаем, что $\forall j \ M_j - m_j < \frac{\varepsilon}{b-a} \Rightarrow$

$$\bar{S}_T - \underline{S}_T = \sum_{j=1}^n (M_j - m_j) \Delta x_j < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{j=1}^n \Delta x_j = \frac{\varepsilon(b-a)}{b-a} = \varepsilon \Rightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists T : \bar{S}_T - \underline{S}_T < \varepsilon.$$

Теорема 3: Если функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и монотонна на отрезке, то f интегрируема на $[a, b]$.

Доказательство: для неубывающей функции: $\forall x \in [a, b] \mapsto$

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b) \Rightarrow \text{ограничена}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists T : \Delta_T < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}, T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$$

$$j = \overline{1, n} \ [x_{j-1}, x_j] \mapsto M_j = f(x_j), m_j = f(x_{j-1})$$

$$\bar{S}_T - \underline{S}_T = \sum_{j=1}^n (M_j - m_j) \Delta x_j < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} (f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) -$$

$$- f(x_1) + \dots + f(x_n) - f(x_{n-1})) = \frac{\varepsilon(f(b)-f(a))}{f(b)-f(a)} = \varepsilon \Rightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists T : \bar{S}_T - \underline{S}_T < \varepsilon$$

Теорема 4: Если функция $y = f(x)$ ограничена на $[a, b]$ и $\forall \varepsilon > 0$ существует конечное число интервалов, покрывающих точки разрыва функции f , сумма длин которых не превосходит $\varepsilon \Rightarrow f$ интегрируема на $[a, b]$

Доказательство: Пусть $M = \sup_{[a, b]} f(x), m = \inf_{[a, b]} f(x)$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists X_1 = \bigcup_{j=1}^n \delta_j^1 - \text{интервал, покрывающий точки разрыва и } |\delta_j^1| - \text{его длина} \Rightarrow \sum_{j=1}^n |\delta_j^1| < \frac{\varepsilon}{2(M-m)}$$

$$X_2 = (a, b) \setminus \overline{X_1}$$

(a, b) – открытое, $\overline{X_1}$ – замкнутое $\Rightarrow X_2$ – открытое, то есть, мы отбросили интервалы с точками разрыва.

$$X_2 = \bigcup_{j=1}^k \delta_j^2 \text{ на каждом } \delta_j^2 - f \text{ непрерывна} \Rightarrow f \text{ равномерно непрерывна на } \overline{X_2} \text{ (Замыкание, то есть } \overline{X_2} \text{ компакт – ограниченное и замкнутое)}$$

Тогда из опр. р.н. $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x', x'' \in \overline{X_2} \mapsto$

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, T = \{\delta_j^1, \delta_i^2\}_{j=1}^n, \substack{i=1, \\ k}, \text{ то есть концы интервалов образует разбиение отрезка } [a, b].$$

$$\bar{S}_T - \underline{S}_T = \sum_{j=1}^n (M_j - m_j) |\delta_j^1| + \sum_{i=1}^k (M_i - m_i) |\delta_i^2| \leq (M - m) \sum_{j=1}^n |\delta_j^1| + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{i=1}^k |\delta_i^2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon(b-a)}{2(b-a)} = \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists T : \bar{S}_T - \underline{S}_T < \varepsilon \Rightarrow f$$

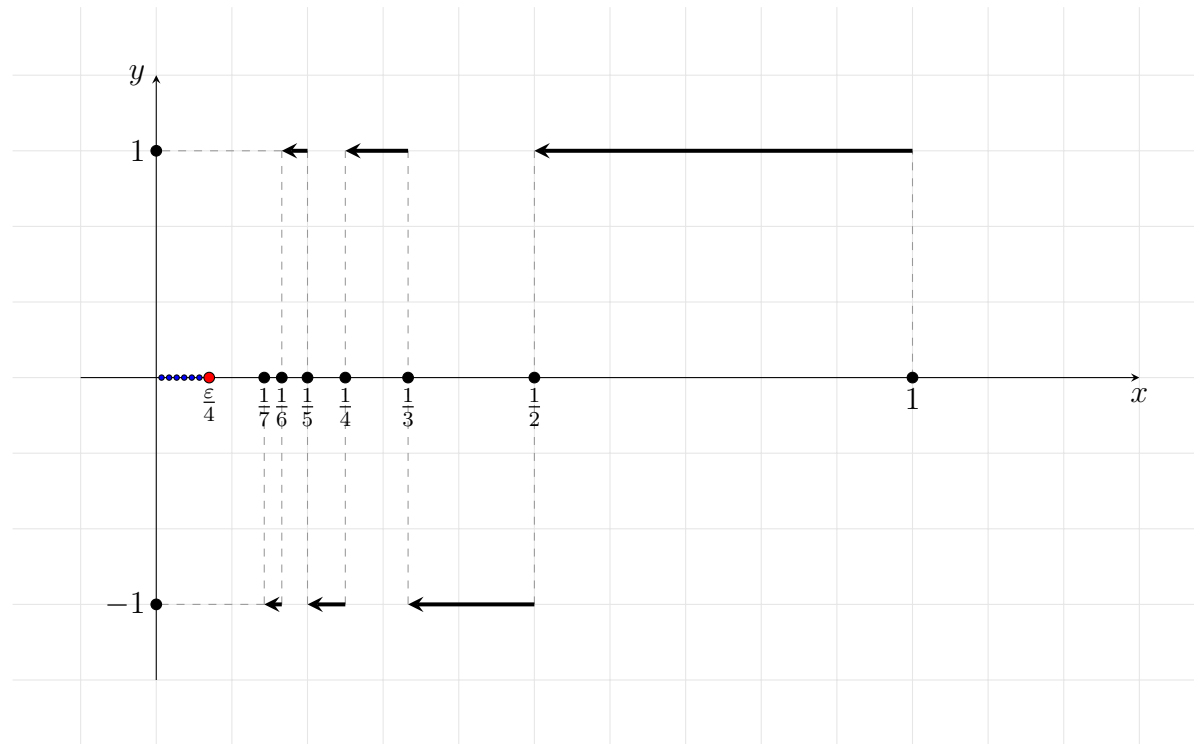
интегрируема на $[a, b]$.

Следствие: Если функция $y = f(x)$ ограничена на $[a, b]$ и имеет на нем конечное число точек разрыва, то f интегрируема на $[a, b]$

Рассмотрим пример функции, имеющей на отрезке бесконечное число точек разрыва:

Пример: $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}\right], n \in \mathbb{N} \\ -1, & x \in \left(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}\right], n \in \mathbb{N} \end{cases}$

$$x \in [0,1]$$



Точки разрыва $\frac{1}{n}, n > 1$ на $[0,1]$.

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : \forall n \geq N \implies 0 < \frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{4}$$

Оставшиеся N точек вне данного интервала покрываем интервалами длины $\frac{\epsilon}{4N}$, тогда сумма длин итервалов покрытия равна $\frac{\epsilon}{4} + N \frac{\epsilon}{4N} = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \Rightarrow$ интегрируема по теореме 4.

7. Билет 7

7.1. Некоторые свойства определенного интеграла.

Свойство 1:

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

Свойство 2:

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

Свойство 3:

Если f, g интегрируемы на $[a, b]$, то $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ функция $h = \alpha f + \beta g$ интегрируема на $[a, b]$.

Доказательство:

$$I_h\{\tau, \xi\} = \sum_{j=1}^n [\alpha f(\xi_j) + \beta g(\xi_j)] \Delta x_j = \alpha \cdot \sum_{j=1}^n f(\xi_j) \Delta x_j + \beta \cdot \sum_{j=1}^n g(\xi_j) \Delta x_j = \alpha I_f\{\tau, \xi\} + \beta I_g\{\tau, \xi\}.$$

Свойство 4:

Если f и g интегрируемы на $[a, b]$, то $h = f \cdot g$ интегрируема на $[a, b]$.

Доказательство:

$\exists A > 0 \wedge \exists B > 0 : |f(x)| \leq A, |g(x)| \leq B \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow h$ ограничена на $[a, b]$

$$\begin{aligned} |h(x') - h(x'')| &= |f(x')g(x') - f(x'')g(x'')| = |f(x')g(x') - f(x'')g(x') + \\ &+ f(x'')g(x') - f(x'')g(x'')| \leq |g(x')| \cdot |f(x') - f(x'')| + |f(x'')| \cdot |g(x') - \\ &- g(x'')| \leq B|f(x') - f(x'')| + A|g(x') - g(x'')| \Rightarrow [M_j(h) - m_j(h)] \leq \\ &B[M_j(f) - m_j(f)] + A[M_j(g) - m_j(g)] \end{aligned}$$

f, g интегрируемы на $[a, b] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists T' : \bar{S}_{T'}(f) - \underline{S}_{T'}(f) < \frac{\varepsilon}{2B}$

$$\exists T'' : \bar{S}_{T''}(g) - \underline{S}_{T''}(g) < \frac{\varepsilon}{2A}$$

$$T = T' \cup T''$$

$$\underline{S}_{T'}(f) \leq \underline{S}_T(f) \leq \bar{S}_T(f) \leq \bar{S}_{T'}(f) \Rightarrow \bar{S}_T(f) - \underline{S}_T(f) \leq \bar{S}_{T'}(f) - \underline{S}_{T'}(f) < \frac{\varepsilon}{2B}$$

$$\underline{S}_{T''}(g) \leq \underline{S}_T(g) \leq \bar{S}_T(g) \leq \bar{S}_{T''}(g) \Rightarrow \bar{S}_T(g) - \underline{S}_T(g) \leq \bar{S}_{T''}(g) - \underline{S}_{T''}(g) < \frac{\varepsilon}{2A}$$

$$\Rightarrow \bar{S}_T(h) - \underline{S}_T(h) < A \cdot \frac{\varepsilon}{2A} + B \cdot \frac{\varepsilon}{2B} = \varepsilon \Rightarrow h \text{ интегрируемая на } [a, b].$$

Свойство 5:

f интегрируема на $[a, b]$ & $[c, d] \in [a, b] \Rightarrow f$ интегрируема на $[c, d]$.

Доказательство:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists T : \bar{S}_T - \underline{S}_T < \varepsilon$$

$$T' = T \cup \{c, d\}$$

$$\bar{S}_{T'} - \underline{S}_{T'} \leq \bar{S}_T - \underline{S}_T < \varepsilon$$

Рассмотрим разбиение T^* отрезка $[c, d]$, порождаемое разбиением T' , то есть в T^* включены все точки разбиения T' , лежащие на

отрезке $[c, d]$. $\Rightarrow \overline{S_{T^*}} - \underline{S_{T^*}} \leq \overline{S_T} - \underline{S_T} < \varepsilon$

Свойство 6: Если f интегрируема на отрезке $[a, c]$ и $[c, b]$, то f интегрируема на $[a, b]$ и

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Доказательство: Пусть $a < c < b$: $\forall \varepsilon > 0 \exists T', T''$ отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$ $\overline{S_{T'}} - \underline{S_{T'}} < \frac{\varepsilon}{2}$, $\overline{S_{T''}} - \underline{S_{T''}} < \frac{\varepsilon}{2}$ $T = T' \cup T''$ – разбиение отрезка $[a, b]$. $\underline{S_{T'}} = \underline{S_T}^1 \leq \overline{S_T}^1 = \overline{S_{T'}}$ $\underline{S_{T''}} = \underline{S_T}^2 \leq \overline{S_T}^2 = \overline{S_{T''}}$ $\overline{S_T} - \underline{S_T} = \overline{S_T}^1 + \overline{S_T}^2 - \underline{S_T}^1 - \underline{S_T}^2 < \varepsilon \Rightarrow f$ интегрируема на $[a, b] \Rightarrow$ интегральная сумма на $[a, b]$ есть сумма интегральных сумм на $[a, c]$ и $[c, b]$.

Пусть $c < a < b$ или $a < b < c$:

$[a, b]$ есть часть отрезка $[c, b]$ или $[a, c] \Rightarrow$ ввиду того, что интегрируемая на отрезке интегрируема на любом его участке, то f интегрируема на $[a, b]$.

Пусть $a < b < c$:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx &= \int_a^c f(x)dx \\ \int_a^b f(x)dx &= \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \end{aligned}$$

Аналогично доказывается для $c < a < b$.

Свойство 7: Пусть f ограничена на $(a, b]$, $\forall \alpha > 0 : 0 < \alpha < b - a$, f интегрируема на $[\alpha + a, b]$, тогда при любом доопределении f в точке a , получится функция, интегрируемая на $[a, b]$ и $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{a+\alpha}^b f(x)dx$.

Доказательство:

$$\exists A > 0 : \forall x \in (a, b] \mapsto |f(x)| \leq A, f(a) = B$$

$$M = \max\{A, |B|\} \Rightarrow \forall x \in [a, b], |f(x)| \leq M$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha = \alpha(\varepsilon) > 0 : 2M\alpha < \varepsilon/2$$

Для $[a + \alpha, b]$ найдется такое $\exists T : \overline{S_T} - \underline{S_T} < \varepsilon/2$

$$\exists T' = T \cup \{a\}, \overline{S_{T'}} - \underline{S_{T'}} = \overline{S_T} - \underline{S_T} + (M_0 - m_0)\alpha < \varepsilon/2 + 2M\alpha < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

7.2. Оценки определенного интеграла.

Оценка 1: f интегрируема на $[a, b]$ & $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Доказательство: $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b] \Rightarrow \forall T \ \& \ \forall \{\xi\} \mapsto I\{T, \xi\} \geq 0, I$ — предел интегральных сумм.

Теперь надо доказать, что при $\Delta_T \rightarrow 0 \mapsto I \geq 0$

От противного:

$I < 0 \Rightarrow \varepsilon = \frac{|I|}{2} \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall T, \Delta_T < \delta \mapsto |I\{T, \xi\} - I| < \frac{|I|}{2} \Rightarrow I - \frac{|I|}{2} < I\{T, \xi\} < I + \frac{|I|}{2} < 0 \Rightarrow I\{T, \xi\} < 0$ — противоречие.

Оценка 2:

f непрерывна на $[a, b]$ & $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$ & $f(x) \not\equiv 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq \gamma > 0$.

Доказательство:

$\exists x_0 \in (a, b) : f(x_0) = 2\alpha > 0 \Rightarrow$ [по теореме о сохранении знака непрерывной функции] $\Rightarrow \exists [c, d] \subset [a, b], x \in [c, d] : f(x) \geq \alpha > 0$ на

$[c, d] \Rightarrow f(x) - \alpha \geq 0$ на $[c, d] \xrightarrow{\text{св-во 5 и оц-ка 1}} \int_c^d (f(x) - \alpha) dx \geq 0 \Rightarrow \int_c^d f(x) dx \geq \int_c^d \alpha dx = \alpha(d - c) = \gamma > 0$

$\int_c^d f(x) dx \geq \gamma > 0 \Rightarrow \int_a^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx \geq 0 + \gamma + 0 > 0$

Оценка 3:

f, g интегрируемы на $[a, b]$ & $\forall x \in [a, b] \mapsto f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.

Доказательство:

$f(x) - g(x) \geq 0 \forall x \in [a, b] \xrightarrow{\text{оц-ка 1}} \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \geq 0 \xrightarrow{\text{св-во 3}} \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \geq 0$

Оценка 4: Если $y = f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то $y = |f(x)|$ интегрируема на $[a, b]$ и

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Доказательство:

Пусть f — интегрируема.

$$T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$$

$$M_j = \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f(x), m_j = \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f(x)$$

$$\overline{M}_j = \sup_{[x_{j-1}, x_j]} |f(x)|, \overline{m}_j = \inf_{[x_{j-1}, x_j]} |f(x)|$$

$$\overline{M}_j - \overline{m}_j \leq M_j - m_j \quad (*)$$

1) $M_j > 0, m_j > 0 \Rightarrow$ очевидное равенство в $(*)$

2) $M_j < 0, m_j < 0 \Rightarrow$ очевидное равенство в $(*)$

3) $M_j > 0, m_j < 0 \Rightarrow \overline{M}_j - \overline{m}_j < M_j - m_j$

Из $(*)$ следует:

$$\overline{S}_T(|f|) - \underline{S}_T(|f|) \leq \overline{S}_T(f) - \underline{S}_T(f) < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists T : \overline{S}_T(|f|) - \underline{S}_T(|f|) < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f| \text{ интегрируема и } -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

Вспомним, что если $y = f(x)$ и $y = g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$ и $f(x) \geq g(x) \forall x \in [a, b]$, то $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$, тогда

$$\begin{aligned} - \int_a^b |f(x)| dx &\leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \end{aligned}$$

Замечание: $|f|$ – интегрируема $\nRightarrow f$ – интегрируема.

Пример:

$$y = \tilde{D}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ -1, & x \in \mathbb{I}; \end{cases}$$

Оценка 5:

Пусть $y = f(x)$, $y = g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$ и $g(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$.

Если $M = \sup_{[a, b]} f(x)$, $m = \inf_{[a, b]} f(x)$, то

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx$$

Доказательство:

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b] \quad g(x) \geq 0 \Rightarrow m \cdot g(x) \leq f(x) \cdot g(x) \leq M \cdot g(x)$$

\Rightarrow исходное условие доказано исходя из оценки 3 и свойства 3.

Предложение [Формула среднего значения]: Пусть f интегрируема на $[a, b]$, $M = \sup_{[a,b]} f(x)$, $m = \inf_{[a,b]} f(x)$. Тогда $\exists \mu : m \leq \mu \leq$

M такое, что

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$$

Доказательство: Из оценки интегрирования неравенств (результата предыдущего пункта) при $g \equiv 1 \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

$$\Rightarrow \mu = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}.$$

Теорема [Интегральная теорема о среднем]: Пусть f и g интегрируемы на $[a, b]$. $M = \sup_{[a,b]} f(x)$, $m = \inf_{[a,b]} f(x)$ и $g(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$

(либо $g(x) \leq 0$). Тогда $\exists \mu : m \leq \mu \leq M$ такая, что

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$$

В частности, если f непрерывна на $[a, b]$, то $\exists \xi \in [a, b] :$

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)dx = f(\xi) \cdot \int_a^b g(x)dx$$

Доказательство:

$$1. \ 1) \int_a^b g(x)dx = 0$$

\Rightarrow оценка интегрирования неравенства $\Rightarrow \int_a^b f(x)g(x) = 0$ и μ — любое число

$$2. \ 2) \int_a^b g(x)dx > 0$$

\Rightarrow Оценка интегрирования неравенства

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M \text{ и } \mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$$

Если f непрерывна на $[a, b] \Rightarrow \exists \xi : \mu = f(\xi)$

Предложение:

Пусть f интегрируема на $[a, b]$, $m = \inf_{[a, b]} f$, $M = \sup_{[a, b]} f \Rightarrow \exists \mu : m \leq \mu \leq M : \int_a^b f(x) dx = \mu(b - a)$, если f непрерывна на $[a, b]$, то $\exists \xi \in [a, b] : \int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a)$ [$g \equiv 1$].

7.3. Интегралы с переменным верхним пределом. Вычисление определенных интегралов.

Определение: Пусть $y = f(x)$ интегрируема на $[a, b] \Rightarrow \forall x \in [a, b]$ существует

$$\int_a^x f(t) dt = F(x)$$

Этот интеграл называется интегралом с переменным верхним пределом.

Теорема: Любая непрерывная на $[a, b]$ функция $y = f(x)$ имеет на этом отрезке первообразную. Одной из первообразных является функция

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, x \in [a, b]$$

Доказательство: $\forall x \in [a, b], x + \Delta x \in [a, b]$. Докажем, что

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x)$$

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int_x^{x + \Delta x} f(t) dt$$

По теореме о среднем $\exists \xi$, лежащая между x и $x + \Delta x : F(x + \Delta x) - F(x) = f(\xi)\Delta x \Rightarrow \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(\xi)$ Так как f непрерывна на $[a, b]$, то при $\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow f(\xi) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} f(x)$ и

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x)$$

Замечание: Из доказательства теоремы следует, что

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

Предложение: Если f интегрируема на $[a, b]$, то F непрерывна на $[a, b]$.

Доказательство: $\forall x \in [a, b], x + \Delta x \in [a, b], F(x + \Delta x) - F(x) = \Delta F(x, \Delta x)$. $\Delta F(x, \Delta x) = \int_x^{x + \Delta x} f(t) dt = \mu \Delta x : m \leq \mu \leq M$ (Формула

среднего значения) $\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta F(x, \Delta x) \rightarrow 0 \Rightarrow F$ непрерывна в X .

Замечание: Если f непрерывна на $[a, b] \Rightarrow \forall \Phi(x) = \int_a^x f(t)dt + C$. $\Phi(a) = C$, $\Phi(b) = \int_a^b f(x)dx + C \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$.

Теорема [Формула Ньютона-Лейбница]: Если f непрерывна на $[a, b]$, то $\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$, где Φ — любая первообразная функции f .

Доказательство: См. предыдущее замечание..

Теорема 7: Если f : 1) интегрируема на $[a, b]$; 2) обладает на $[a, b]$ первообразной Φ ; то справедлива формула $\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$.

Замечание: 1) $y = \operatorname{sgn} x$, $x \in [-1, 1]$ интегрируема на $[-1, 1]$, но не обладает первообразной. 2) $F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & |x| \leq 1, x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ явля-

ется первообразной для $f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, & |x| \leq 1, x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ $F'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x^2}}{x} = 0$, но f не является интегрируемой на $[-1, 1]$ (не ограничена).

Теорема [Замена переменных в определенном интегрировании]: Пусть выполнены следующие условия: 1) $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ 2) $x = g(t)$ непрерывно дифференцируема на $[\alpha, \beta]$ 3) $g(\alpha) = a, g(\beta) = b$ и $\forall t \in [\alpha, \beta] \mapsto a \leq g(t) \leq b$ тогда справедлива формула $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$.

Доказательство: Φ — первообразная функции $f \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$. Т.к. Φ и g дифференцируемы на $[a, b]$ и $[\alpha, \beta]$ соответственно, то $\frac{d}{dt} [\Phi(g(t))] = \Phi'(g(t)) \cdot g'(t)$, но $\Phi'(x) = f(x) \rightarrow \Phi'(g(t)) = f(g(t)) \Rightarrow \frac{d}{dt} [\Phi(g(t))] = f(g(t)) \cdot g'(t)$ По условию $f(g(t)) \cdot g'(t)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$ и $\Phi(g(t))$ — её первообразная.

$$\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt = \Phi(g(\beta)) - \Phi(g(\alpha)) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b f(x)dx$$

Теорема [Формула интегрирования по частям]: Пусть $u = u(x), v = v(x)$ непрерывно дифференцируемые на $[a, b]$. Тогда

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du$$

Доказательство: Функция $u \cdot v$ является первообразной функции $uv' + u'v$. Каждая из этих функций непрерывная \Rightarrow

$$\int_a^b [uv' + u'v]dx = [uv]_a^b$$

8. Билет 8

8.1. Геометрические приложения определенного интеграла.

Площадь криволинейной трапеции.

Определение: Пусть на $[a, b]$ задана непрерывная функция $f : \forall x \in [a, b] \rightarrow f(x) \geq 0$. Множество $G = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ называется криволинейной трапецией. Измеримость криволинейной трапеции по Жордану была доказана ранее. (нет ☺)

Предложение: Площадь $m(X)$ криволинейной трапеции X определяется формулой $m(X) = \int_a^b f(x)dx$.

Доказательство: f интегрируема на $[a, b] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists T : \overline{S_T} - \underline{S_T} < \varepsilon$ НО $m(G_\varepsilon) = \underline{S_T} \leq I \leq \overline{S_T} = m(G^\varepsilon)$ $m(G_\varepsilon) \leq m(X) \leq m(G^\varepsilon)$
 $m(X) = I = \int_a^b f(x)dx$.

Площадь криволинейного сектора.

Определение: $r = r(\varphi)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$. Криволинейный сектор X измерим по Жордану.

Приложение: Площадь $m(X)$ криволинейного сектора X вычисляется по формуле $m(X) = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2(\varphi) d\varphi$.

Доказательство: $T = \{\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_n = \beta\}$ $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$, $i = \overline{1, n}$ $R_i = \max_{[\varphi_{i-1}, \varphi_i]} r(\varphi)$ $r_i = \min_{[\varphi_{i-1}, \varphi_i]} r(\varphi)$

$\overline{S_T} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n R_i^2 \Delta\varphi_i$, $\underline{S_T} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r_i^2 \Delta\varphi_i$. Это верхняя и нижняя сумма Дарбу функции $\frac{1}{2}r^2(\varphi)$. Это функция интегрируема на $[\alpha, \beta]$.

$\underline{S_T} \leq I \leq \overline{S_T}$ и $I = m(X) = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2(\varphi) d\varphi$.

Объем тела вращения:

Определение: Тело, полученное путем вращения криволинейной трапеции вокруг оси Ox назовём телом вращения.

Предложение: Объем $m(X)$ тела вращения X криволинейной трапеции вокруг Ox вычисляется по формуле $m(X) = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$.

Доказательство: $T = a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ $M_i = \max_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $m_i = \min_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$ $\overline{S_T} = \pi \sum_{i=1}^n M_i^2 \Delta x_i$, $\underline{S_T} = \pi \sum_{i=1}^n m_i^2 \Delta x_i$ Это

суммы Дарбу функции $y = \pi f^2(x)$, которая интегрируема на $[a, b]$ $\underline{S_T} \leq m(X) = I \leq \overline{S_T} \Rightarrow m(X) = I = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.

Длина дуги кривой.

$\Gamma = \{\vec{r} = \vec{r}(t), \alpha \leq t \leq \beta\}$ непрерывно дифференцируема \Rightarrow спрямляемая кривая.

Предложение: Если кривая Γ непрерывно дифференцируема, то ее длина L вычисляется по формуле $L = \int_\alpha^\beta |\vec{r}'(t)| dt$.

Доказательство: $S'(t) = |\vec{r}'(t)|$ $L = S(\beta) - S(\alpha) = \int_\alpha^\beta S'(t) dt = \int_\alpha^\beta |\vec{r}'(t)| dt$.

1. $\vec{r} = \vec{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}, t \in [\alpha, \beta]$ $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$

$$2. y = f(x), \alpha \leq x \leq \beta \quad L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

$$3. r = r(\varphi), \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$$

$$\begin{cases} x = r \cos(\varphi) \\ y = r \sin(\varphi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = r' \cos(\varphi) - r \sin(\varphi) \\ y' = r' \sin(\varphi) + r \cos(\varphi) \end{cases}$$

$$(x')^2 + (y')^2 = (r')^2 + (r)^2 \quad (1)$$

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r')^2 + (r)^2} d\varphi \quad (2)$$

8.2. Вычисление площади поверхности вращения.

Пусть $y = f(x), x \in [a, b]$ и $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Рассмотрим поверхность Π вращения графика функции f вокруг Ox . $T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$. $A_0(x_0, f(x_0)), A_1(x_1, f(x_1)) \dots A_n(x_n, f(x_n))$. Строим ломанную $A_0, A_1 \dots A_n$. При вращении ломанной вокруг оси Ox , получаем поверхность Π_T , составляющую одну из боковых поверхностей усеченных конусов, обозначим эту площадь за P_T . $P_T = 2\pi \sum_{i=1}^n \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} l_i = \pi \sum_{i=1}^n [f(x_{i-1}) + f(x_i)] l_i$, где l_i - длина звена $A_{i-1}A_i$.

Определение: Число P называется пределом площади P_T при мелкости разбиения, стремящимся к нулю, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall T : \Delta_T < \delta \rightarrow |P_T - P| < \varepsilon$.

Определение: Поверхность Π называется квадрируемой, если существует предел площадей P_T при мелкости разбиения, стремящейся к 0. При этом P называется площадью поверхности Π .

Предложение: Если $y = f(x)$ непрерывно дифференцируема на $[a, b]$, $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$, то поверхность вращения Π графика $y = f(x)$ вокруг x , квадрируема и ее площадь вычисляется по формуле $P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$. **Без доказательства.**

8.3. Криволинейные интегралы.

$\boxed{\mathbb{E}^2}$ $\Gamma = \{\vec{r} = \vec{r}(t), \alpha \leq t \leq \beta\}$ - спрямляемая кривая, $\vec{r}(t) = \{x = \varphi(t), y = \psi(t)\}$ f, P, Q - непрерывные на Γ
 функции $T = \{\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_k = \beta\}$ - разбиение $M_j(x_j, y_j)$ - точка, $x_j = \varphi(t_j), y_j = \psi(t_j), j = 0, 1, \dots, k$
 $\Delta s_j = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt, \Delta s_T = \max_{1 \leq j \leq k} \Delta s_j \quad \tau_j \in [t_{j-1}, t_j], N_j(\xi_j, \eta_j)$ - точка, $\xi_j = \varphi(\tau_j), \eta_j = \psi(\tau_j) \quad \Delta x_j =$

$$x_j - x_{j-1} = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi'(t) dt = \varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})$$

$$\sigma_T = \sum_{j=1}^k f(N_j) \Delta s_j$$

$$\sigma_T^x = \sum_{j=1}^k P(N_j) \Delta x_j$$

$$\sigma_T^y = \sum_{j=1}^k Q(N_j) \Delta y_j$$

Определение: число I является пределом σ_T при $\Delta s_T \rightarrow 0$, если

$$[\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall T : \Delta s_T < \delta \ \& \ \forall \{N_j\}_{j=1}^k \mapsto |\sigma_T - I| < \varepsilon]$$

Определение: число $I_{x,y}$ является пределом $\sigma_T^{x,y}$ при $\Delta s_T \rightarrow 0$, если

$$[\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall T : \Delta s_T < \delta \ \& \ \forall \{N_j\}_{j=1}^k \mapsto |\sigma_T^{x,y} - I_{x,y}| < \varepsilon]$$

Число I называется *криволинейным интегралом 1-го рода*:

$$\int_{\Gamma} f(x, y) ds = I$$

Числа $I_{x,y}$ называются *криволинейными интегралами 2-го рода*:

$$\int_{\Gamma} P(x, y) dx = I_x \qquad \int_{\Gamma} Q(x, y) dy = I_y$$

$$\int_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy - \text{общий криволинейный интеграл 2-го рода}$$

Замечание: криволинейные интегралы 2-го рода зависят от направления обхода кривой, и при его изменении у этих интегралов меняется знак.

8.4. Существование криволинейных интегралов, их вычисление.

Теорема: Пусть $\Gamma = \{x = \varphi(t), y = \psi(t), \alpha \leq t \leq \beta\}$ – гладкая кривая, функции f, P, Q непрерывны на Γ . Тогда криволинейные интегралы 1-го и 2-го рода от этих функций по кривой Γ существуют и вычисляются по формулам

$$\int_{\Gamma} f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt = I$$

$$\int_{\Gamma} P(x, y) dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt = I_x$$

$$\int_{\Gamma} Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t) dt = I_y$$

Доказательство:

$$\sigma_T = \sum_{j=1}^k f(N_j) \Delta s_j = \sum_{j=1}^k f(\varphi(\tau_j), \psi(\tau_j)) \int_{t_{j-1}}^{t_j} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt$$

$$\sigma_T - I = \sum_{j=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} [f(\varphi(\tau_j), \psi(\tau_j)) - f(\varphi(t), \psi(t))] \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt$$

$$\Phi(t) = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} > 0 \quad \forall t \in [\alpha, \beta] \text{ (т.к. гладкая кривая)}$$

$$M = \max_{[\alpha, \beta]} \Phi(t), \quad m = \min_{[\alpha, \beta]} \Phi(t) > 0 \Rightarrow m \Delta t_j \leq \Delta s_j \leq M \Delta t_j$$

$$\frac{\Delta s_j}{M} \leq \Delta t_j \leq \frac{\Delta s_j}{m} \Rightarrow \Delta s_T \rightarrow 0 \Leftrightarrow \Delta_T \rightarrow 0$$

$$F(t) = f(\varphi(t), \psi(t)) \text{ непрерывна на } [\alpha, \beta] \Rightarrow F(t) \text{ РН на } [\alpha, \beta] \text{ (т. Кантора), т.е.}$$

$$\left[\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall t', t'' \in [\alpha, \beta] : |t' - t''| < \delta \mapsto |F(t') - F(t'')| < \frac{\varepsilon}{L} \right] \text{ (L - длина кривой)}$$

$$\forall T : \Delta_T < \delta \Rightarrow \frac{\Delta s_T}{M} < \Delta_T < \delta \Rightarrow |\sigma_T - I| < \frac{\varepsilon}{L} \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt = \frac{\varepsilon}{L} \cdot L = \varepsilon$$

8.5. Несобственный интеграл.

Определение: Пусть $y = f(x)$ интегрируема на $[a, \xi]$ $\forall \xi : \xi > a$. Символ $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ называется несобственным интегралом функции $y = f(x)$ по промежутку $[a; +\infty)$. Если существует и конечен предел $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} I(\xi) = A$, $A \in \mathbb{R}$, то несобственный интеграл $I = \int_a^{+\infty} f(x) dx$ называется сходящимся и равен числу A . **Обозначение:** $\int_a^{+\infty} f(x) dx < \infty \equiv$ интеграл сходится. **Соглашение:** несобственный интеграл будет записываться как $\int_a^b f(x) dx$, где $b = +\infty$ или b - вертикальная асимптота $f(x)$.

Свойства несобственных интегралов и их вычисление:

$$1. \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad \forall c: a \leq c < b:$$

$$\left[\int_a^b f(x)dx < \infty \right] \Leftrightarrow \left[\int_c^b f(x)dx < \infty \right]$$

$$2. \left[\left[\int_a^b f(x)dx < \infty \right] \ \& \ \left[\int_a^b g(x)dx < \infty \right] \right] \Rightarrow \int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

$$3. \text{ Пусть } y = f(x) \text{ непрерывна на } [a, b) \text{ и } F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b) \text{ и } \lim_{x \rightarrow b-0} F(x) = F(b-0) \in R.$$

Тогда:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b-0) - F(a) \quad \text{Формула Ньютона-Лейбница}$$

$$4. [u, v - \text{непрерывно дифференцируемы на } [a, b) \text{ и } \exists \lim_{\xi \rightarrow b-0} u(\xi)v(\xi) = u(b-0)v(b-0) \in \mathbb{R}, \int_a^b u'(x)v(x)dx < \infty] \Rightarrow \left[\int_a^b u(x)v'(x)dx < \infty \text{ и } \int_a^b u(x)v'(x)dx = uv|_a^{b-0} - \int_a^b u'(x)v(x)dx \right]$$

$$5. \text{ Пусть } y = f(x) \text{ непрерывна на } [a, b), x = \varphi(t) \text{ непрерывна дифференцируема и возрастает на } [\alpha, \beta), \varphi(\alpha) = a, \lim_{t \rightarrow \beta-0} \varphi(t) = b. \text{ Тогда:}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

при условии сходимости хотя бы одного интегралов равенства

$$6. \left[\left[\int_a^b f(x)dx < \infty \right] \ \& \ \left[\int_a^b g(x)dx < \infty \right] \ \& \ [f(x) < g(x)] \right] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$$

8.6. Несобственные интегралы от неотрицательных функций:

Теорема 1: $\left[\int_a^b f(x)dx < \infty \right] \Leftrightarrow [I(\xi) = \int_a^\xi f(x)dx \text{ ограничена на } [a, b)]$.

Доказательство: Необходимость: $\int_a^b f(x)dx < \infty \Rightarrow I(\xi) \text{ ограничена на } [a, b)$. $\int_a^b f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \exists \lim_{\xi \rightarrow b-0} I(\xi) = A \in R \Rightarrow A = \sup_{\xi \in [a, b)} I(\xi)$ (A – это точная вер

$\Rightarrow 0 \leq I(\xi) \leq A \Rightarrow$ функция ограничена. Достаточность: $I(\xi)$ ограничена на $[a, b) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx < \infty$ $I(\xi)$ ограничена на $[a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \exists C > 0 :$

$\forall \xi \in [a, b) \mapsto 0 \leq I(\xi) \leq C \Rightarrow \exists A = \sup_{\xi \in [a, b)} I(\xi)$ Из $A = \sup_{\xi \in [a, b)} I(\xi)$ следует:

1. $\forall \xi \in [a, b) \mapsto I(\xi) \leq A$
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists \xi_\varepsilon \in (a, b) : I(\xi_\varepsilon) > A - \varepsilon$
 $\xi_\varepsilon = \delta \Rightarrow \forall \xi \in (\delta, b) \mapsto I(\xi) \geq I(\xi_\varepsilon) > A - \varepsilon$

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in (a, b) : \forall \xi \in (\delta, b) \mapsto 0 \leq A - I(\xi) < \varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\xi \rightarrow b-0} I(\xi) = A \in R \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b f(x)dx < \infty$.

Теорема 2 [Признак сравнения]: Пусть $\forall x \in [a, b) \mapsto 0 \leq f(x) \leq g(x)$. Тогда:

1. $\int_a^b g(x)dx < \infty \Rightarrow \int_a^b f(x)dx < \infty$
2. $\int_a^b f(x)dx = \infty \Rightarrow \int_a^b g(x)dx = \infty$

Доказательство:

1. $\int_a^b g(x)dx < \infty \iff (\text{Из } T_1) G(\xi) = \int_a^\xi g(x)dx$ ограничена на полуинтервале $\stackrel{\text{def}}{=} \exists C \geq 0 : \forall \xi \in [a, b) \mapsto G(\xi) \leq C$.

$$I(\xi) = \int_a^\xi f(x)dx \leq \int_a^\xi g(x)dx \leq C \Rightarrow (\text{из } T_1) \int_a^b f(x)dx < \infty.$$

2. $\int_a^b f(x)dx = \infty \Rightarrow \int_a^b g(x)dx = \infty$.

В противном случае: $\int_a^b g(x)dx < \infty \Rightarrow (\text{из } \Pi_1) \int_a^b f(x)dx < \infty$.

Следствие (Признак сравнения в предельной форме)

Если $f(x) > 0$ $g(x) > 0 \forall x \in [a, b)$ $f(x) \sim g(x)$ $x \rightarrow b - 0$, $\int_a^b f(x)dx$ $\int_a^b g(x)dx$ ведут себя одинаково.

Доказательство:

$$\left[\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \right] \Rightarrow [\varepsilon = 1/2. \exists \delta \in (a, b) : \forall x \in (\delta, b) \mapsto \left| \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right| < \frac{1}{2}]$$

$\frac{1}{2}g(x) < f(x) < \frac{3}{2}g(x)$ Далее просто применяем T_2 .

8.7. Критерий Коши сходимости несобственных интегралов.

Пусть функция интегрируема в собственном смысле на промежутке из $[a, b)$. Тогда:

$$\left[\int_a^b f(x) dx < \infty \right] \Leftrightarrow \left[\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in (a, b) : \forall \xi', \xi'' \in (\delta, b) \mapsto \left| \int_{\xi'}^{\xi''} f(x) dx \right| < \varepsilon \right]$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \left[\int_a^b f(x) dx < \infty \right] &\Leftrightarrow \left[\exists \lim_{\xi \rightarrow b-0} \int_a^{\xi} f(x) dx = \lim_{\xi \rightarrow b-0} I(\xi) = A \in R \right] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left[\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in (a, b) : \forall \xi', \xi'' \in (\delta, b) \mapsto |I(\xi') - I(\xi'')| < \varepsilon \right] \\ |I(\xi') - I(\xi'')| &= \left| \int_{\xi'}^{\xi''} f(x) dx \right| < \varepsilon \end{aligned}$$

8.8. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов.

Определение 1 Интеграл $\int_a^b f(x) dx$ называется абсолютно сходящимся, если $\int_a^b |f(x)| dx < \infty$.

Определение 2 Если $\int_a^b |f(x)| dx = \infty$, а $\int_a^b f(x) dx < \infty$, $\int_a^b f(x) dx$ называется условно сходящимся.

Предложение: Если интеграл сходится абсолютно, то и он сам сходится.

Доказательство: $\forall \xi', \xi'' \in (a, b) \left| \int_{\xi'}^{\xi''} f(x) dx \right| \leq \int_{\xi'}^{\xi''} |f(x)| dx$. Тогда по критерию Коши $\left| \int_{\xi'}^{\xi''} f(x) dx \right|$ сходится и из T_2 сходится и $\int_{\xi'}^{\xi''} |f(x)| dx$.

Предложение: Если $\int_a^b g(x) dx$ сходится абсолютно, то $\int_a^b f(x) dx$ и $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx$ ведут себя одинаково.

Доказательство: Абсолютная сходимость: $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ Если $\int_a^b |f(x)| dx < \infty \Rightarrow \int_a^b |f(x) + g(x)| dx < \infty$ В другую сторону: $\int_a^b |f(x) + g(x)| dx < \infty \Rightarrow f(x) = [f(x) + g(x)] - g(x) \Rightarrow |f(x)| \leq |f(x) + g(x)| + |g(x)| \Rightarrow$ по $T_2 \int_a^b |f(x)| dx < \infty$.

8.9. Признаки Дирихле и Абеля сходимости интегралов.

Теорема [Признак Дирихле]: Если выполнены условия:

1. $f(x)$ непрерывна, $g(x)$ непрерывно дифференцируема на $[a, b)$

2. $F(x) = \int_a^b f(t)dt$ ограничена на $[a, b)$

3. $g(x)$ монотонна на $[a, b)$ и $\lim_{x \rightarrow b-0} g(x) = 0$

Тогда $\int_a^b f(x) \cdot g(x)dx < \infty$.

Доказательство:

$$\exists M > 0 : |F(x)| \leq M, \forall x \in [a, b)$$

$$\xi'' > \xi' > a$$

$$\forall \xi', \xi'' \in [a, b)$$

Сделаем замену для интегрирования по частям: $u = g(x), du = g'(x)dx, dv = f(x)dx, v = F(x)$.

$$\int_{\xi'}^{\xi''} f(x)g(x)dx = g(x) \cdot F(x) \Big|_{\xi'}^{\xi''} - \int_{\xi'}^{\xi''} g'(x)F(x)dx$$

$$\left| \int_{\xi'}^{\xi''} f(x)g(x)dx \right| \leq M(|g(\xi')| + |g(\xi'')|) + \left| \int_{\xi'}^{\xi''} g'(x)F(x)dx \right| \leq M(|g(\xi')| + |g(\xi'')|) + \int_{\xi'}^{\xi''} |g'(x)F(x)|dx \leq$$

$$\leq M(|g(\xi')| + |g(\xi'')|) + M \int_{\xi'}^{\xi''} |g'(x)|dx \leq M(|g(\xi')| + |g(\xi'')|) \pm M \int_{\xi'}^{\xi''} g'(x)dx \leq 2M(|g(\xi')| + |g(\xi'')|)$$

$$\left[\lim_{x \rightarrow b-0} g(x) = 0 \right] \stackrel{\text{def}}{=} \left[\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) \in (a, b) \forall x \in (\delta, b) \mapsto |g(x)| < \frac{\varepsilon}{4M} \Rightarrow \right.$$

$$\Rightarrow \forall \xi', \xi'' \in (\delta, b) \mapsto \left| \int_{\xi'}^{\xi''} f(x)g(x)dx \right| < 2M\left(\frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{4M}\right) = \varepsilon \Rightarrow$$

$$\text{по критерию Коши } \int_a^b f(x)g(x) < \infty$$

Следствие (Признак Абеля): Если выполняются условия:

1. $f(x)$ непрерывна, $g(x)$ непрерывно дифференцируема на $[a, b)$

$$2. \int_a^b f(x) < \infty$$

3. $g(x)$ монотонна и ограничена на $[a, b)$

Тогда $\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx < \infty$.

Доказательство: Из условия 3 следует, что $\exists \lim_{x \rightarrow b-0} g(x) = g(b-0) \in R$ $g_1(x) = g(x) - g(b-0) \xrightarrow{x \rightarrow b-0} 0 \xRightarrow{\text{по Дирихле}} \int_a^b f(x) g_1(x) dx < \infty$

$\int_a^b f(x) g_1(x) dx = \int_a^b f(x) g(x) dx - g(b-0) \int_a^b f(x) dx$ $\int_a^b f(x) g_1(x) dx$ и $\int_a^b f(x) dx$ сходятся, значит сходится и $\int_a^b f(x) g(x) dx$

9. Билет 9

9.1. Числовые ряды.

Определение: Пусть задана числовая последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$. Выражение $u_1 + u_2 + \dots + u_k + \dots$ будем называть *числовым рядом*.

Обозначение: $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ — член ряда. $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ — n -ая частичная сумма ряда.

Определение: Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ *сходится*, если последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится и $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ — *сумма ряда*. Если $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ расходится, то и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ *расходится*.

Обозначения: $\sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty$ — ряд сходится $\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \infty$ — ряд расходится

Примеры:

$$1. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + 1 - 1 + \dots$$

$$S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, S_4 = 0, \dots$$

$$S_{2k-1} = 1, S_{2k} = 0 \Rightarrow \{S_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ расходящаяся} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k = \infty$$

$$2. \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = 1 + q + \dots + q^{n-1} + \dots$$

$$S_n = 1 + q + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^n}{1 - q}$$

$$\text{а) } |q| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 - q} = S$$

$$\text{б) } |q| > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |q|^n = \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \infty$$

$$\text{в) } q = 1 \Rightarrow S_n = n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \infty$$

$$\text{г) } q = -1 \Rightarrow \text{пример 1) } \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \infty$$

$$3. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + e^{\xi x} \cdot \frac{x^n}{n!}, \quad 0 < \xi < 1$$

$$|e^x - S_n| \leq e^x \cdot \frac{x^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

9.2. Критерий Коши сходимости ряда.

Теорема:

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty \right] \Leftrightarrow \left[\text{Выполнено условие Коши: } \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \ \& \ \forall p \in \mathbb{N} \mapsto \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon \right]$$

Доказательство: $|S_{n+p} - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right|$ Условие теоремы означает, что $\{S_n\}$ – фундаментальна $\Leftrightarrow \{S_n\}$ сходится

Обозначение: $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ – n -й остаток числового ряда

Следствие:

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty \right] \Leftrightarrow [\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ сходится}]$$

Доказательство:

$$[\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ сходится}] \Leftrightarrow [\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ фундаментальна}] \Leftrightarrow [\text{условие Коши}]$$

Следствие [Необходимое условие сходимости числового ряда]:

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty \right] \Rightarrow \left[\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = 0 \right]$$

Доказательство: Следует из условия критерия Коши при $p = 1$.

$$[\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \mapsto |u_{n+1}| < \varepsilon] \stackrel{\text{def}}{=} \left[\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = 0 \right]$$

Отрицание условия Коши:

$$\left[\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall n \exists n_0 \geq n \ \& \ \exists p_0 \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=n_0+1}^{n_0+p_0} u_k \right| \geq \varepsilon_0 \right]$$

Пример: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ – гармонический ряд $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$, но

$$\exists \varepsilon_0 = \frac{1}{4} : \forall n \exists n_0 = n \ \& \ \exists p_0 = n : \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} =$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} \cdot n = \frac{1}{2} > \frac{1}{4} = \varepsilon_0$$

Предложение 1: Добавление (отбрасывание) конечного числа членов ряда не влияет на его поведение.

Доказательство: $\sum_{k=1}^{\infty} u_k \pm \sum_{k=1}^{k_0} \alpha_k = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k \ \forall n > n_0 \mapsto \tilde{S}_n = S_n + A, \quad A = \sum_{k=1}^{k_0} \alpha_k$ Если $\{S_n\}$ сходится [расходится], то $\{\tilde{S}_n\}$ сходится [расходится].

Предложение 2: $\tilde{u}_k = cu_k, \ c \in \mathbb{R}, \ c \neq 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k$ ведут себя одинаково.

9.3. Знакопостоянные ряды: признак сравнения сходимости, признаки Даламбера и Коши, интегральный признак.

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k, u_k \geq 0 \quad \forall k, \quad \{S_n\}_{n=1}^{\infty} - \text{неубывающая.}$$

Теорема 2 [Критерий сходимости числового ряда с неотр. членами]:

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty \right] \Leftrightarrow [\{S_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ ограничена}]$$

Доказательство:

$$[\{S_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ сходится}] \Leftrightarrow [\{S_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ ограничена}] \quad (\text{т.к. монотонная})$$

Теорема 3 [Признак сравнения]: $\forall k \mapsto 0 \leq u_k \leq \tilde{u}_k$

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty$
2. $\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k = \infty$

Доказательство:

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k < \infty$, т.е. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{S}_n = \tilde{S} \in \mathbb{R}$

$$\forall n \mapsto S_n \leq \tilde{S}_n \leq \tilde{S} \Rightarrow \{S_n\} \text{ ограничена} \xrightarrow{T.2} \sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty$$

2. $\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \infty \xRightarrow{1)} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k = \infty$ иначе в противном случае по пункту а) $\sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty$ (противоречие)

Замечание:

1. В **Теореме 3** $\boxed{\forall k}$ можно заменить на $\boxed{\forall k \geq k_0, k_0 \in \mathbb{N}}$, т.к. отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на его поведение.
2. Неравенство $0 \leq u_k \leq \tilde{u}_k$ можно заменить $0 \leq u_k \leq c\tilde{u}_k, c > 0$, т.к. умножение на действительное число c не влияет на поведение числового ряда.

Следствие:

$$[\forall k \mapsto u_k > 0, \tilde{u}_k > 0 \text{ и } u_k \sim \tilde{u}_k] \Rightarrow \left[\sum_{k=1}^{\infty} u_k, \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k \text{ ведут себя одинаково} \right]$$

Доказательство:

$$\left[\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_k}{\tilde{u}_k} = 1 \right] \stackrel{\text{def}}{=} \left[\forall \varepsilon > 0 \exists K = K(\varepsilon) : \forall k \geq K \mapsto \left| \frac{u_k}{\tilde{u}_k} - 1 \right| < \varepsilon \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall k \geq K \mapsto (1 - \varepsilon)\tilde{u}_k < u_k < (1 + \varepsilon)\tilde{u}_k$$

$0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ Утверждение следует из **Теоремы 3** и **Замечания 2**.

Примеры:

$$1. \sum_{k=1}^{\infty} u_k, u_k = \frac{1}{3 + b^k}, b > 0$$

$$а) \ b \leq 1 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} u_k \neq 0 \Rightarrow \text{не выполнено } \mathbf{HUC} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k = \infty$$

$$б) \ b > 1$$

$$u_k = \frac{1}{3 + b^k} \leq \left(\frac{1}{b}\right)^k = q^k, \quad 0 < q < 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k < \infty \xRightarrow{T.3} \sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty$$

$$2. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

$$\frac{1}{k^\alpha} \geq \frac{1}{k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty \xRightarrow{T.3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \infty$$

$$3. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad k > 1 \Rightarrow \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \tilde{u}_k$$

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \Rightarrow \tilde{S}_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k < \infty \xRightarrow{T.3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$$

$$\forall \alpha \geq 2 \mapsto \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{k^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} < \infty \text{ при } \alpha \geq 2$$

Теорема 4 [Признак сравнения]:

$$\left[\forall k \mapsto u_k > 0, \tilde{u}_k > 0 \text{ и } \frac{u_{k+1}}{u_k} \leq \frac{\tilde{u}_{k+1}}{\tilde{u}_k} \right] \Rightarrow$$

$$1. \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty$$

$$2. \sum_{k=1}^{\infty} u_k = \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k = \infty$$

Доказательство:

$$\times \begin{cases} \frac{u_2}{u_1} \leq \frac{\tilde{u}_2}{\tilde{u}_1} \\ \frac{u_3}{u_2} \leq \frac{\tilde{u}_3}{\tilde{u}_2} \\ \dots \\ \frac{u_k}{u_{k-1}} \leq \frac{\tilde{u}_k}{\tilde{u}_{k-1}} \end{cases} \Rightarrow \frac{u_k}{u_1} \leq \frac{\tilde{u}_k}{\tilde{u}_1} \Rightarrow u_k \leq c\tilde{u}_k, \quad c = \frac{u_1}{\tilde{u}_1} > 0$$

Утверждение **Теоремы 4** следует из **Теоремы 3** и **Замечания 2**.

Теорема 5 [Признак Даламбера]:

$$\forall k \quad [\forall k \geq k_0] \mapsto u_k > 0$$

$$1. \quad \left[\frac{u_{k+1}}{u_k} \leq q < 1 \right] \Rightarrow \left[\sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty \right]$$

$$2. \quad \left[\frac{u_{k+1}}{u_k} \geq 1 \right] \Rightarrow \left[\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \infty \right]$$

Доказательство:

$$1. \quad \tilde{u}_k = q^k$$

$$\frac{\tilde{u}_{k+1}}{\tilde{u}_k} = q \Rightarrow \frac{u_{k+1}}{u_k} \leq \frac{\tilde{u}_{k+1}}{\tilde{u}_k} = q < 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k = \sum_{k=1}^{\infty} q^k < \infty \xrightarrow{T.4} \sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty$$

$$2. \quad \tilde{u}_k = 1$$

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} \geq \frac{\tilde{u}_{k+1}}{\tilde{u}_k} = 1, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k = \infty \xrightarrow{T.4} \sum_{k=1}^{\infty} u_k = \infty$$

Теорема 6 [Признак Даламбера в предельной форме]:

$$[\forall k \mapsto u_k > 0] \& \left[\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = L \in \mathbb{R} \right] \Rightarrow$$

$$1. \quad [L < 1] \Rightarrow \left[\sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty \right]$$

$$2. \quad [L > 1] \Rightarrow \left[\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \infty \right]$$

Доказательство:

$$1. L < 1 \Rightarrow \exists \alpha > 0 : L = 1 - 2\alpha \Rightarrow L + \alpha = 1 - \alpha = q < 1$$

$$\varepsilon = \alpha \exists K = K(\varepsilon) : \forall k \geq K \mapsto 0 < \frac{u_{k+1}}{u_k} < L + \alpha = 1 - \alpha = q < 1 \xRightarrow{T.5} \sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty$$

$$2. L > 1 \Rightarrow \exists \alpha > 0 : L = 1 + \alpha \Rightarrow L - \alpha = 1$$

$$\varepsilon = \alpha \exists K = K(\varepsilon) : \forall k \geq K \mapsto \frac{u_{k+1}}{u_k} > L - \alpha = 1 \xRightarrow{T.5} \sum_{k=1}^{\infty} u_k = \infty$$

Замечание:

1. В **Теореме 5** неравенство $\frac{u_{k+1}}{u_k} \leq q < 1$ **нельзя** заменить неравенством $\frac{u_{k+1}}{u_k} < 1$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \mapsto \frac{k}{k+1} < 1 \forall k, \text{ но } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

2. Для $L = 1$ (в **Теореме 6**) признак Даламбера в предельной форме «не работает».

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k+1} = 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^2}{(k+1)^2} = 1$$

Теорема 7 [Признак Коши]:

$$\forall k [\forall k \geq k_0] \mapsto u_k \geq 0$$

$$1. [\sqrt[k]{u_k} \leq q < 1] \Rightarrow \left[\sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty \right]$$

$$2. [\sqrt[k]{u_k} \geq 1] \Rightarrow \left[\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \infty \right]$$

Доказательство:

$$1. \tilde{u}_k = q^k \Rightarrow \sqrt[k]{u_k} \leq \sqrt[k]{\tilde{u}_k} = q < 1 \Rightarrow u_k \leq \tilde{u}_k$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k < \infty \xRightarrow{T.3} \sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty$$

$$2. \tilde{u}_k = 1 \Rightarrow \sqrt[k]{u_k} \geq \sqrt[k]{\tilde{u}_k} = 1 \Rightarrow u_k \geq \tilde{u}_k$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k = \infty \xRightarrow{T.3} \sum_{k=1}^{\infty} u_k = \infty$$

Теорема 8 [Признак Коши в предельной форме]:

$$[\forall k \mapsto u_k \geq 0] \& \left[\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{u_k} = L \in \mathbb{R} \right] \Rightarrow$$

$$1. [L < 1] \Rightarrow \left[\sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty \right]$$

$$2. [L > 1] \Rightarrow \left[\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \infty \right]$$

Доказательство:

$$1. L < 1 \Rightarrow \exists \alpha > 0 : L = 1 - 2\alpha \Rightarrow L + \alpha = 1 - \alpha = q < 1$$

$$\varepsilon = \alpha \exists K = K(\varepsilon) : \forall k \geq K \mapsto 0 \leq \sqrt[k]{u_k} < L + \alpha = 1 - \alpha = q < 1 \xRightarrow{T.7} \sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty$$

$$2. L > 1 \Rightarrow \exists \alpha > 0 : L = 1 + \alpha \Rightarrow L - \alpha = 1$$

$$\varepsilon = \alpha \exists K = K(\varepsilon) : \forall k \geq K \mapsto \sqrt[k]{u_k} > L - \alpha = 1 \xRightarrow{T.7} \sum_{k=1}^{\infty} u_k = \infty$$

Замечание:

1. В **Теореме 7** неравенство $\sqrt[k]{u_k} \leq q < 1$ **нельзя** заменить неравенством $\sqrt[k]{u_k} < 1$.

2. Для $L = 1$ (в **Теореме 8**) признак Коши в предельной форме «не работает».

3. Предельный признак Коши более сильный, чем предельный признак Даламбера.

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k, \quad u_k = \frac{3 + (-1)^k}{2^{k+1}}, \quad \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3 + (-1)^{k+1}}{3 + (-1)^k}$$

$$\begin{cases} k = 1 : \frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \\ k = 2 : \frac{u_3}{u_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} \text{ не существует}$$

$$\sqrt[k]{u_k} = \frac{1}{2} \sqrt[k]{\frac{3 + (-1)^k}{2}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{сходится по предельному признаку Коши}$$

Теорема 9 [Признак Коши—Маклорена][интегральный признак]: Пусть f — неотрицательная и невозрастающая на $[m; +\infty)$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\left[\sum_{k=m}^{\infty} f(k) < \infty \right] \Leftrightarrow \left[\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha_n = \int_m^n f(x) dx \right], \quad n \geq m + 1$$

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \int_m^{+\infty} f(x) dx \right)$$

Доказательство: $\forall k \geq m+1 \mapsto k-1 \leq x \leq k \Rightarrow f(k) \leq f(x) \leq f(k-1) [k-1; k]: f$ – монотонная и ограниченная $\Rightarrow f$ интегрируема

$$f(k) \leq \int_{k-1}^k f(x)dx \leq f(k-1), \quad k \geq m+1$$

$$+ \begin{cases} f(m+1) \leq \int_{m+1}^{m+2} f(x)dx \leq f(m) \\ f(m+2) \leq \int_{m+2}^{m+3} f(x)dx \leq f(m+1) \\ \dots \\ f(n) \leq \int_{n-1}^n f(x)dx \leq f(n-1) \end{cases}$$

$$S_n = \sum_{k=m}^n f(k)$$

$$S_n - f(m) \leq \int_m^n f(x)dx \leq S_{n-1} \Rightarrow \{\alpha_n\} \text{ сходится} \Leftrightarrow \{S_n\} \text{ ограничена}$$

Примеры:

$$1. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}, \quad \alpha > 1$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx < \infty, \text{ если } \alpha > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} < \infty \text{ при } \alpha > 1.$$

$$2. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^{\beta} k}$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^{\beta} x} < \infty \text{ при } \beta > 1 \Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^{\beta} k} < \infty \text{ при } \beta > 1.$$

9.4. Знакопеременные ряды, абсолютная и условная сходимость, признаки Лейбница, Дирихле и Абеля.

Определение: Если $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k| < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k$ – абсолютно сходящийся ряд.

Предложение:

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} |u_k| < \infty \right] \Rightarrow \left[\sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty \right]$$

Доказательство: По Критерию Коши сходимости числового ряда:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \ \& \ \forall p \in \mathbb{N} \mapsto \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \varepsilon$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \varepsilon$$

Определение: Если $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k| = \infty$ и $\sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty$, то $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ — *условно сходящийся* ряд.

Примеры:

$$1. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha}, \alpha > 1$$

$$\left| \frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha} \right| = \frac{1}{k^\alpha}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} < \infty \text{ при } \alpha > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha} \text{ сходится абсолютно.}$$

$$2. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

$$|u_k| = \frac{1}{k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \dots + \frac{(-1)^n x^n}{n} + R_{n+1}(x)$$

$$R_{n+1}(x) = [\ln(1+x)]^{(n+1)}(\theta x) \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad 0 < \theta < 1$$

$$[\ln(1+x)]^{(n+1)}(\theta x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+\theta x)^{n+1}}$$

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^n}{n} + R_{n+1}(1)$$

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$$

$$|S_n - \ln 2| = |R_{n+1}(1)| \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \text{ сходится условно}$$

Тождество Абеля: $\{u_k\}_{k=1}^\infty, \{v_k\}_{k=1}^\infty, \quad S_n = u_1 + \dots + u_n, \quad u_k = S_k - S_{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{n+p} u_k v_k &= \sum_{k=n}^{n+p} S_k v_k - \sum_{k=n}^{n+p} S_{k-1} v_k = \sum_{k=n}^{n+p} S_k v_k - \sum_{k=n-1}^{n+p-1} S_k v_{k+1} = \\ &= \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k (v_k - v_{k+1}) + S_{n+p} v_{n+p} - S_{n-1} v_n \end{aligned}$$

$$\sum_{k=n}^{n+p} (S_k - S_{k-1}) v_k = S_{n+p} v_{n+p} - S_{n-1} v_n - \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k (v_{k+1} - v_k)$$

Теорема [Признак Лейбница]:

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} v_k, \quad 0 \leq v_{k+1} \leq v_k, \quad v_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \right] \Rightarrow \left[\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} v_k < \infty \right]$$

Доказательство: $S_{2n} = v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + \dots + v_{2n-1} - v_{2n} \geq 0$ $S_{2n} = v_1 - \underbrace{(v_2 - v_3)}_{\geq 0} - \underbrace{(v_4 - v_5)}_{\geq 0} - \dots - \underbrace{(v_{2n-2} - v_{2n-1})}_{\geq 0} - v_{2n} \Rightarrow S_{2n} \leq v_1 \quad \forall n$

$\{S_{2n}\}$ – неубывающая и ограниченная $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S \in \mathbb{R}$ $S_{2n-1} = S_{2n} + v_{2n} \Rightarrow S_{2n-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} S$

Теорема [Признак Дирихле]: Пусть

1. $\{\mathcal{U}_n\}$ – послед. частичных сумм $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ ограничена, $\mathcal{U}_n = \sum_{k=1}^n u_k$
2. $\{v_k\}$ – монотонна и $v_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$

Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k < \infty$

Доказательство: $\exists C > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \mapsto |\mathcal{U}_n| \leq C$ $\{v_k\}$ – невозрастающая и $v_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists K = K(\varepsilon) : \forall k \geq K \mapsto 0 \leq v_k \leq \frac{\varepsilon}{2C}$

$$\forall p \in \mathbb{N} \mapsto \left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k v_k \right| \leq C v_{n+p} + C v_n + C \sum_{k=n}^{n+p-1} (v_k - v_{k+1}) \leq 2C v_n < \varepsilon$$

Следствие [Признак Абеля]: Пусть

1. $\sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty$
2. $\{v_k\}$ – монотонна и ограничена

Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k < \infty$

Доказательство: $\{v_k\}$ монотонна и ограничена $\Rightarrow \{v_k\}$ сходится $\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} v_k = v \in \mathbb{R}$ $\tilde{v}_k = v_k - v$ монотонна и $\tilde{v}_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ $\{\mathcal{U}_n\}$ сходится

$$\Rightarrow \{\mathcal{U}_n\} \text{ ограничена} \quad \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} u_k \tilde{v}_k}_{< \infty \text{ по пр. Дирихле}} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k - v \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} u_k}_{< \infty \text{ по усл.}} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k < \infty$$

Примеры:

$$1. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}, \quad \frac{1}{\sqrt{k}} \text{ убывает и } \frac{1}{\sqrt{k}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} < \infty \text{ (по признаку Лейбница)}$$

$$2. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k}, \quad x - \text{фиксированное число, } x \neq 2\pi m, \text{ т.к. получится гармонический ряд}$$

$$v_k = \frac{1}{k}, \quad u_k = \cos kx, \quad S_n = \sum_{k=1}^n \cos kx$$

$$\begin{aligned} \sin \frac{x}{2} \cdot S_n &= \sum_{k=1}^n \sin \frac{x}{2} \cdot \cos kx = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[\sin \left(\frac{2k+1}{2} \right) x - \sin \left(\frac{2k-1}{2} \right) x \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\sin \frac{3x}{2} - \sin \frac{x}{2} + \dots + \sin \left(\frac{2n+1}{2} \right) x - \sin \left(\frac{2n-1}{2} \right) x \right] \end{aligned}$$

$$|S_n| = \left| \frac{\sin \left(\frac{2n+1}{2} \right) x - \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} \right| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|} \quad \forall n, \quad x \neq 2\pi m \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k} < \infty \text{ (по признаку Дирихле)}$$

$$3. 1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{2}{9} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3k-2} + \frac{1}{3k-1} - \frac{2}{3k} \right)$$

$$v_k = \frac{1}{k}$$

$$u_1 = 1, u_2 = 1, u_3 = -2, u_4 = 1, u_5 = 1, u_6 = -2, \dots$$

$$S_1 = 1, S_2 = 2, S_3 = 0, S_4 = 1, S_5 = 2, S_6 = 0, \dots$$

$$S_n \leq 2 \quad \forall n \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty \text{ (по признаку Дирихле)}$$

9.5. Независимость суммы абсолютно сходящегося ряда от порядка слагаемых.

Теорема [Коши]: Если $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится абсолютно и $\sum_{k=1}^{\infty} u_k = S$, то любой $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k$, полученный из исходного перестановкой членов, является абсолютно сходящимся и $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k = S$.

Доказательство: $\circledast \quad S_n = \sum_{k=1}^n u_k, \quad \tilde{S}_n = \sum_{k=1}^n \tilde{u}_k$

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} u_k \text{ cx. абс.} \right] \Leftrightarrow \left[\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 = N_1(\varepsilon) : \forall n \geq N_1 \ \& \ \forall p \in \mathbb{N} \mapsto \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2} \right]$$

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} u_k = S \right] \stackrel{\text{def}}{=} \left[\forall \varepsilon > 0 \exists N_2 = N_2(\varepsilon) : \forall n \geq N_2 \mapsto |S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2} \right]$$

$$N_0 = \max\{N_1; N_2\}$$

$$\forall p \in \mathbb{N} \mapsto \sum_{k=N_0+1}^{N_0+p} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |S_{N_0} - S| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$\tilde{S}_n : \forall n \geq N : \tilde{S}_n$ содержит все N_0 первых членов исходного ряда

$$|\tilde{S}_n - S| = |(\tilde{S}_n - S_{N_0}) + (S_{N_0} - S)| \leq \underbrace{|\tilde{S}_n - S_{N_0}|}_{n-N_0 \text{ членов}} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Число $p \in \mathbb{N}$ выбираем таким образом, чтобы $N_0 + p$ был больше номеров членов ряда, содержащихся в $\tilde{S}_n - S_{N_0} \Rightarrow |\tilde{S}_n - S_{N_0}| \leq \sum_{k=N_0+1}^{N_0+p} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2}$, тогда

$$|\tilde{S}_n - S| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Для доказательства абсолютной сходимости повторяем \circledast для рядов $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$ и $\sum_{k=1}^{\infty} |\tilde{u}_k|$.

9.6. Теорема Римана о перестановках членов условно сходящегося ряда.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{S}_{3m} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3m} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \frac{1}{2} S_n, \quad n = 3m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln 2 \\ \tilde{S}_{3m-1} = \frac{1}{2} S_n + \frac{1}{4n} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln 2 \\ \tilde{S}_{3m-2} = \frac{1}{2} S_n + \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n-2} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln 2 \end{array} \right. \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k = \frac{1}{2} \ln 2$$

Теорема [Римана]: Если числовой ряд сходится условно, то каково бы ни было число S , члены ряда можно переставить так, что полученный ряд сходится к S .

9.7. Произведение абсолютно сходящихся рядов.

Теорема [О сумме сходящихся рядов]: Если $\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \mathcal{U} \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=1}^{\infty} v_k = \mathcal{V} \in \mathbb{R}$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} (u_k \pm v_k) = \mathcal{U} \pm \mathcal{V}$$

Доказательство:

$$\mathcal{U}_n = \sum_{k=1}^n u_k, \quad \mathcal{V}_n = \sum_{k=1}^n v_k$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n (u_k \pm v_k) = \mathcal{U}_n \pm \mathcal{V}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{U} \pm \mathcal{V}$$

Теорема [О произведении абсолютно сходящихся рядов]:

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \mathcal{U} - \text{абс. сход.}, \sum_{k=1}^{\infty} v_k = \mathcal{V} - \text{абс. сход.} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\sum_{k,l=1}^{\infty} u_k v_l = \sum_{j=1}^{\infty} w_j \text{ сход. абс. и } \sum_{j=1}^{\infty} w_j = \mathcal{U} \cdot \mathcal{V} \right]$$

Доказательство: $\bar{S}_n = \sum_{j=1}^n |w_j|$ Пусть m – наибольший индекс из индексов k и l , входящих в $\bar{S}_n \Rightarrow \bar{S}_n \leq (|u_1| + |u_2| + \dots + |u_m|)(|v_1| + |v_2| + \dots + |v_m|)$ $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ сход. абс. $\Rightarrow \{\bar{\mathcal{U}}_m\}, \{\bar{\mathcal{V}}_m\}$ ограничены $\Rightarrow \{\bar{S}_n\}$ ограничена $\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} |w_j| < \infty \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} w_j$ сход. абс. $\mathcal{W}_n = (u_1 + \dots + u_n)(v_1 + \dots + v_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{U} \cdot \mathcal{V} \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} w_j = \mathcal{U} \cdot \mathcal{V}$

10. Билет 10

10.1. Понятия функциональных последовательностей и рядов.

Определение: [функциональная последовательность]:

Пусть $X \subset \mathbb{R}$ — произвольное множество.

$$\forall n \in \mathbb{N} \leftrightarrow y = f_n(x), x \in X$$

Множество занумерованных функций $f_1, f_2 \dots f_n \dots$ называют функциональной последовательностью, где

f_n — член последовательности

X — область определения

Определение: [функциональный ряд]:

сумма

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x) + \dots$$

членов функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{k=1}^{\infty}$ называется функциональным рядом.

Замечание: изучение функциональных рядов эквивалентно изучению функциональных последовательностей:

1. Каждому функциональному ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

соответствует функциональная последовательность его частичных сумм

$$\{S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)\}_{n=1}^{\infty}$$

2. Каждой функциональной последовательности $\{S_n(x)\}_{k=1}^{\infty}$ соответствует функциональный ряд с членами $f_1(x) = S_1(x)$, $f_2(x) = S_2(x) - S_1(x) \dots$, $f_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x)$, \dots

Примеры:

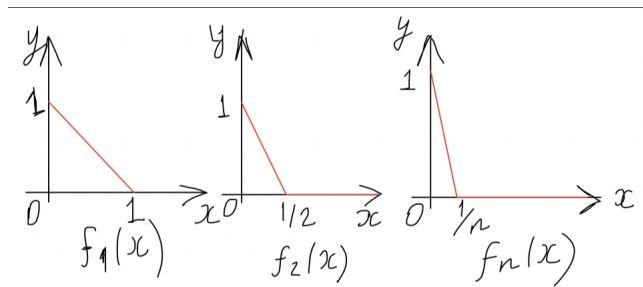
1.

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & , 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & , \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

$$2. 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$S_{n+1}(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

$S_{n+1}(x)$ отличается от e^x по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа на $R_{n+1}(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}$, $0 < \theta < 1$



10.2. Сходимость функциональных рядов и последовательностей в точке и на множестве.

Определение: [сходимость в точке]:

Зафиксируем точку $x_0 \in X$ и рассмотрим числовую последовательность $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$. Если указанная последовательность сходится, то функциональную последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ называют сходящейся в точке x_0 .

Замечание: аналогичное верно и для функциональных рядов: Если числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$ сходится, то функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ называют сходящимся в точке x_0 .

Определение: [область сходимости]:

Множество точек в которых сходится функциональная последовательность (или функциональный ряд) называют областью сходимости функциональной последовательности (функционального ряда).

Замечание: область сходимости функциональной последовательности(ряда) может совпадать с его областью определения X , составлять его части или быть \emptyset .

Определение: [предельная функция]:

Пусть $\tilde{X} \subset X$ — область сходимости функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, совокупность пределов, взятых в точке $x \in \tilde{X}$ определяет на \tilde{X} функцию $y = f(x)$. Эта функция называется предельной функцией $y = f(x)$ функциональной последовательности.

Определение: [сумма ряда]:

Пусть $\tilde{X} \subset X$ — область сходимости функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, совокупность пределов, взятых в точке $x \in \tilde{X}$ определяет на \tilde{X} функцию $y = S(x)$. Эта функция называется суммой ряда $y = S(x)$ функциональной последовательности.

10.3. Понятие равномерной сходимости на множестве.

Определение:[равномерная сходимость функциональной последовательности]:

Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно к функции $y = f(x)$ на множестве X если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \ \& \ \forall x \in X \mapsto |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$$(-): \exists \varepsilon_0 > 0 : \forall n \exists n_0 \geq n \ \& \ \exists x_n \in X : |f_{n_0}(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon_0$$

Обозначение: $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x \in X} f(x)$ **Примеры:**

1.

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & , 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & , \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , 0 < x \leq 1 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$

$\exists \varepsilon_0 = \frac{1}{4} \forall n \exists N = n \ \& \ \exists x_n = \frac{1}{2n} : |f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{1}{2} > \frac{1}{4} = \varepsilon_0$ $f_n(x)$ сходится неравномерно к $f(x) = 0$ на $[0, 1]$.

2. $X = [\delta, 1]$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & , \delta \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & , \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

Для заданного $\delta > 0 \exists N \forall n \geq N \mapsto$
 $f_n(x) \equiv 0$ на $[\delta, 1]$
 $f(x) \equiv 0$ на $[\delta, 1]$

Тогда $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x \in [\delta; 1]} 0$.

Замечания:

1. N в определении не зависит от x , а только от ε . Один номер для всех $x \in X$ одновременно.

2. Из сходимости функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ в каждой точке $x \in X$ НЕ следует равномерная сходимость на X .

Замечание: Если $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x \in X} f(x)$, то $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x \in X'} f(x)$, где $X' \subset X$.

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & , \delta \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & , \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

Определение: [равномерная сходимость функционального ряда]:

Функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

равномерно сходится к $S(x)$ на множестве X , если $S_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x \in X} S(x)$

10.4. Критерий Коши равномерной сходимости.

Теорема [Критерий Коши для функциональной последовательности]: Функциональная последовательность $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x \in X} f(x)$

сходится тогда и только тогда, когда выполнено условие Коши равномерной сходимости функциональной последовательности:

$$[\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon): \forall n \geq N \ \& \ \forall p \in \mathbb{N} \ \forall x \in X \mapsto |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon] \text{ Доказательство:}$$

1. *Необходимость* \Rightarrow :

$$f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x \in X} f(x)$$

Тогда:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon): \forall n \geq N \ \& \ \forall x \in X \mapsto |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$$

Тогда и

$$\forall p \in \mathbb{N} \ |f_{n+p}(x) - f(x)| < \varepsilon/2$$

Воспользуемся правилом треугольника:

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

2. *Достаточность* \Leftarrow :

$$[\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon): \forall n \geq N \ \& \ \forall p \in \mathbb{N} \ \& \ \forall x \in X \mapsto |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon]$$

Зафиксируем $x \in X$, тогда $\exists f(x)$ — предельное значение последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

$$\text{Тогда } f_{n+p}(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x)$$

В неравенстве перейдем к предельному при $p \rightarrow \infty$:

$$\forall n \geq N \ \& \ \forall x \in X \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Тогда получим, что $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x \in X} f(x)$ по определению.

Теорема [Критерий Коши для функционального ряда]: Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \xrightarrow{x \in X} S(x)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие

Коши:

$$[\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon): \forall n \geq N \ \& \ \forall p \in \mathbb{N} \ \& \ \forall x \in X \mapsto \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon] \text{ Замечание: критерий Коши для функциональных рядов}$$

следует из критерия Коши для функциональных последовательностей, так как:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| = |S_{n+p}(x) - S_n(x)|$$

Отрицание условия Коши:

Для функциональной последовательности:

$$\exists \varepsilon_0 > 0: \forall n \exists n_0 \geq n \ \& \ \exists p_0 \in \mathbb{N} \ \& \ \exists x_n \in X : |f_{n_0+p_0}(x_n) - f_{n_0}(x_n)| \geq \varepsilon_0$$

Для функционального ряда:

$$\exists \varepsilon_0 > 0: \forall n \exists n_0 \geq n \ \& \ \exists p_0 \in \mathbb{N} \ \& \ \exists x_n \in X : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x_n) \right| \geq \varepsilon_0$$

10.5. Критерии равномерной сходимости функциональной последовательности и функционального ряда.

Теорема 1 [sup-критерий для функциональной последовательности]:

$$f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x \in X} f(x) \text{ тогда и только тогда, когда}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Доказательство:

$$\text{Обозначим } M_n = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|.$$

Тогда запишем наше равенство в виде:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \mapsto 0 \leq M_n < \varepsilon$$

1. *Необходимость* \Rightarrow :

$$[f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x \in X} f(x)] \stackrel{def}{=} [\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \ \& \ \forall x \in X \mapsto |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}]$$

$$\text{Отсюда, } M_n \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

2. *Достаточность* \Leftarrow :

$$\forall x \in X \mapsto |f_n(x) - f(x)| \leq M_n$$

То есть:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \ \& \ \forall x \in X \mapsto |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Теорема 2 [sup-критерий для функционального ряда]:

Функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ равномерно сходится к $S(x)$ на множестве X тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |r_n(x)| = 0$$

Доказательство:

$$r_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$$

$$\text{То есть } r_n(x) = S(x) - S_n(x)$$

Но $S_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x \in X} S(x)$ тогда и только тогда, когда $r_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x \in X} 0$.

Примеры: 1. $f_n(x) = nx^2e^{-nx}$, $x \in [2, +\infty) = X$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx^2}{e^{nx}} = 0 \Rightarrow y = f(x) \equiv 0$ $f'_n(x) = nx(2 - nx)e^{-nx} = 0$ $x_n = \frac{2}{n}$ – точка максимума, при $x > \frac{2}{n}$, $n > 1 \Rightarrow f'_n(x) < 0 \Rightarrow f_n$ убывает на X ;

$$\sup_X f_n(x) \leq f\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{4}{ne^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Отсюда, $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x \in X} 0$. 2. $f_n(x) = n^2x^2e^{-nx}$, $X = (0, 2)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2x^2}{e^{nx}} = 0$$

$$\Rightarrow y = f(x) \equiv 0$$

$$f'_n(x) = n^2x(2 - nx)e^{-nx} = 0$$

$x_n = \frac{2}{n}$, $n > 1$ – точка максимума. \Rightarrow

$$\sup_X f_n(x) = \frac{4}{e^2} \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

3.

$$f_n(x) = \frac{\ln(nx)}{\sqrt{nx}}, X = (0, 1)$$

$$\forall n \exists n_0 = n \ \& \ \exists p_0 = n \ \& \ \exists x_n = \frac{1}{n}$$

$$|f_{2n}(x_n) - f_n(x_n)| = \left| \frac{\ln 2}{\sqrt{2}} - \frac{\ln 1}{\sqrt{1}} \right| = \frac{\ln 2}{\sqrt{2}} > \varepsilon_0 = \frac{\ln 2}{2\sqrt{2}}$$

Отсюда, равномерной сходимости нет.

10.6. Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов.

Теорема 1: если члены функционального ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

непрерывны на $[a, b]$ и ряд сходится равномерно на $[a, b]$ к функции $y = S(x)$, то сумма ряда $y = S(x)$ непрерывна на $[a, b]$.

Доказательство:

$[S_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x \in [a, b]} S(x)] \stackrel{def}{=} [\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon): \forall n \geq N \ \& \ \forall x \in [a, b] \mapsto |S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{3}]$ Возьмем $n_0 \geq N \Rightarrow |S_{n_0}(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ При $x_0 \in [a, b]$ выполняется: $|S_{n_0}(x_0) - S(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ В силу непрерывности f_k на $[a, b]$, S_{n_0} непрерывна на $[a, b]$, в частности в точке $x_0 \in [a, b]$, то есть: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon): \forall x \in [a, b]: |x - x_0| < \delta \mapsto |S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \ \forall x \in [a, b]: |x - x_0| < \delta \mapsto$
 $|S(x) - S(x_0)| = |[S(x) - S_{n_0}(x)] + [S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0)] + [S_{n_0}(x_0) - S(x_0)]| \leq |S(x) - S_{n_0}(x)| + |S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0)| + |S_{n_0}(x_0) - S(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \cdot 3 = \varepsilon$

В силу произвольности выбора точки $x_0 \in [a, b]$ функция $y = S(x)$ непрерывна на $[a, b]$.

Теорема 1': если члены функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ в каждой точке $x \in X$ непрерывны на $[a, b]$ и последовательность сходится равномерно на $[a, b]$ к функции $f(x)$, то $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. **Замечание:** пусть ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

удовлетворяет условиям теоремы 1 и $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$.

$$\forall x_0 \in [a, b] \mapsto \lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = S(x_0)$$

Отсюда,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x)$$

При выполнении условий теоремы 1 возможен почленный переход к пределу под знаком суммы для равномерно сходящегося функционального ряда, члены которого есть непрерывные функции.

Теорема 2: если члены функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ непрерывны на $[a, b]$ и ряд сходится равномерно на $[a, b]$ к функции $y = S(x)$,

то функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^x f_k(t) dt$ также сходится равномерно на $[a, b]$ к функции $y = \int_a^x S(t) dt$.

Доказательство: $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится равномерно на $[a, b]$ к $y = S(x)$: $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon): \forall n \geq N \ \& \ \forall x \in [a, b] \mapsto |S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ По теореме 1 S непрерывны на $[a, b]$, следовательно S и f_k — интегрируемые функции ($\forall k$) на $[a, b]$. Обозначим:

$$I(x) = \int_a^x S(t) dt$$

и

$$I_n(x) = \sum_{k=1}^n \int_a^x f_k(t) dt = \int_a^x [\sum_{k=1}^n f_k(t)] dt = \int_a^x S_n(t) dt$$

$$|I(x) - I_n(x)| = \left| \int_a^x [S(t) - S_n(t)] dt \right| \leq \int_a^x |S_n(t) - S(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{b-a} (x-a) < \varepsilon$$

Итак: $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon): \forall n \geq N \ \& \ \forall x \in [a, b] \mapsto |I(x) - I_n(x)| < \varepsilon$, то есть функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^x f_k(t) dt$$

сходится равномерно на $[a, b]$ к функции

$$\int_a^x S(t)dt = \int_a^x \left[\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \right] dt$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^x f_k(t)dt = \int_a^x \left[\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \right] dt$$

Теорема 2': если члены функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ непрерывны на $[a, b]$. и $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{[a, b]} f(x)$, то $\int_a^x f_n(t)dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{[a, b]} \int_a^x f(t)dt$.

Замечания:

1. В теоремах 2, 2' отрезок $[a, x]$ можно заменить отрезком $[x_0, x] \subset [a, b]$.
2. Теоремы 2 и 2' остаются справедливыми, если функции $y = f_k(x)$ интегрируемы на $[a, b]$.

Теорема 3: если члены функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ непрерывно-дифференцируемы на $[a, b]$ и функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$ сходится равномерно на $[a, b]$, а числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$ ($x_0 \in [a, b]$) сходится, то функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится равномерно на $[a, b]$ к функции $y = S(x)$ и $S'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$ **Доказательство:** Обозначим:

$$\tilde{S}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$$

Из условия теорем 3 и 1 $y = \tilde{S}(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$ можно почленно интегрировать (по теореме 2), то есть:

$$\int_{x_0}^x \tilde{S}(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_{x_0}^x f'_k(t)dt \right]$$

Согласно теореме 2 ряд сходится равномерно на $[a, b]$. Но $\int_{x_0}^x f'_k(t)dt = f_k(x) - f_k(x_0)$, следовательно:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_{x_0}^x f'_k(t)dt \right] = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$$

Ряды слева и справа равномерно-сходящиеся, а значит, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится равномерно на $[a, b]$.

$$\int_{x_0}^x \tilde{S}(t) dt = S(x) - S(x_0)$$

Левая часть – интеграл с переменным верхним пределом и его производная равна $\tilde{S}(x) \Rightarrow$ правая часть – дифференцируемая функция и $S'(x) = \tilde{S}(x)$, то есть

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$$

Замечания:

1. По условию теоремы 3: $\tilde{S}(x) = S'(x)$ – непрерывная функция $\Rightarrow S$ – непрерывно-дифференцируемая на $[a, b]$.
2. Теорема 3 остается справедливой, если функции $y = f_k(x)$ являются дифференцируемыми функциями.

Теорема 3': если члены функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ являются непрерывно-дифференцируемыми функциями на $[a, b]$, числовая последовательность $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, где $x_0 \in [a, b]$; а функциональная последовательность $\{f'_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится на $[a, b]$, то $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно на $[a, b]$ к функции $y = f(x)$ и справедливо равенство

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x), x \in [a, b]$$

Замечание: можно сделать важный вывод: равномерная сходимостъ не выводит из класса непрерывных функций, а в случае равномерной сходимости производных – из класса непрерывно дифференцируемых функций.

10.7. Достаточные признаки сходимости функциональных рядов.

Теорема 1 [Признак Вейерштрасса]: Если для функционального ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

можно указать такой числовой ряд с неотрицательными членами $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$, что $\forall k \geq k_0$ и $\forall x \in X$ выполняется: $0 \leq |f_k(x)| \leq a_k$, то функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

сходится абсолютно и равномерно на X .

Доказательство:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_1 = N_1(\varepsilon): \forall n \geq N_1 \ \& \ \forall p \in \mathbb{N} \mapsto \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon$$

$$\exists N = \max\{N_1, k_0\} \Rightarrow \forall n \geq N \ \& \ \forall x \in X \ \& \ \forall p \in \mathbb{N} \mapsto$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon$$

Следствие: если сходится числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k,$$

где $a_k = \sup_{x \in X} |f_k(x)|$, то функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится абсолютно и равномерно на X .

Теорема 2 [Признак Дирихле]: Если:

1.

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

имеет равномерно ограниченную на X последовательность частичных сумм $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\exists M > 0: \forall x \in X \ \& \ \forall n \in \mathbb{N} \mapsto |S_n(x)| \leq M$$

2. $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ монотонна на X и равномерно стремится к 0: $v_k(x) \leq v_{k+1}(x) \ \forall x \in X \ \& \ \forall k \ [v_k(x) \geq v_{k+1}(x)]$ и $v_k(x) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{x \in X} 0$:

то $\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k$ сходится равномерно на X .

Теорема 2 [Признак Абеля]: Если:

1. $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ равномерно сходится на X .

2. $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно ограничена и монотонна на X .

то $\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k$ сходится равномерно на X .

11. Билет 11

11.1. Степенные ряды с комплексными числами

Определение: $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(\zeta - a)^k$; $c_k, a \in \mathbb{C}$ — фиксированные числа, $\zeta \in \mathbb{C}$ — переменная.

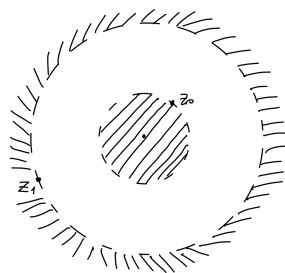
Такой функциональный ряд называется *степенным*.

c_k — коэф. степенного ряда. Этот ряд сходится в точке a .

$\zeta - a = z \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ — будем рассматривать такой степенной ряд, который сходится в т. $z = 0$

11.2. Теорема 1. [Первая теорема Абеля]

1. Если степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ сходится в т. $z_0 \neq 0$, то он сходится абсолютно в круге: $K_0 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < |z_0|\}$
2. Если степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ расходится в т. z_1 , то он расходится в любой т. $z : |z| > |z_1|$



Доказательство:

$$1) \sum_{k=0}^{\infty} c_k z_0^k < \infty \Rightarrow c_k z_0^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \text{Ограничена: } \exists M > 0 : \forall k \Rightarrow |c_k z_0^k| \leq M$$

$$\forall z : |z| < |z_0|$$

$$|c_k z^k| = |c_k z_0^k \left(\frac{z}{z_0}\right)^k| \leq M \cdot [q(z)]^k, |q(z)| < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} q^k(z) < \infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |c_k z^k| < \infty \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \text{ сходится абсолютно в точке } z \in K_0$$

В силу произвольности точки $z \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ сходится абсолютно в K_0

$$2) \sum_{k=0}^{\infty} c_k z_1^k = \infty \Rightarrow \forall z : |z| > |z_1| - \text{ряд } \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \text{ расходится, если бы в точке } z_2 :$$

$$|z_2| > |z_1| \text{ ряд } \sum_{k=0}^{\infty} c_k z_2^k < \infty \stackrel{1)}{\Rightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z_1^k < \infty - \text{противоречие.}$$

Следствие 1. Если $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z_0^k < \infty$, $z_0 \neq 0$, то $\forall \rho : 0 < \rho < |z_0|$ в круге $K_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \rho\}$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ сходится равномерно.

Доказательство:

$$\exists M > 0 : \forall k \Rightarrow |c_k z_0^k| \leq M$$

$$\forall z \in K_\rho$$

$$|c_k z^k| = |c_k z_0^k \cdot \frac{z^k}{z_0^k}| \leq M \left(\frac{\rho}{|z_0|} \right)^k = M \cdot q^k$$

$$|q| = \frac{\rho}{|z_0|} < 1 \left(\frac{\rho}{|z_0|} \text{ не зависит от } z \right),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k < \infty \xRightarrow{\text{По пр. Вей.}} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \text{ сходится равномерно в круге } K_\rho$$

Следствие 2 Если в т. $z_0 \neq 0$ выполнено $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z_0^k < \infty$, то

$$1) \sum_{k=m}^{\infty} c_k z^{k-m} \text{ сходится абсолютно в круге } K_0 \text{ и равномерно в круге } K_\rho$$

$$2) \sum_{k=1}^{\infty} k c_k z^{k-1} \text{ сходится абсолютно в круге } K_0 \text{ и равномерно в круге } K_\rho$$

Доказательство:

$$1) \forall z \in K_0 \Rightarrow |c_k z^{k-m}| = |c_k z_0^k \left(\frac{z}{z_0} \right)^{k-m} \cdot \frac{1}{z_0^m}| \leq$$

$$\frac{M}{|z_0|^m} \cdot \left| \frac{z}{z_0} \right|^{k-m} = \frac{M}{|z_0|^m} \cdot q^{k-m}(z), \quad q(z) = \left| \frac{z}{z_0} \right| < 1$$

$$\sum_{k=m}^{\infty} q^{k-m} < \infty - \text{сходится абсолютно в } K_0$$

$$\forall z \in K_1 \Rightarrow |c_k z^{k-m}| \leq \frac{M}{|z_0|^m} \cdot q_1^{k-m}, \quad q_1 = \frac{\rho}{|z_0|} < 1.$$

$0 < q_1 < 1$ - не зависит от $z \Rightarrow$ по признаку Вейр. в K_1 ряд сходится равномерно

$$2) \forall z \in K_0$$

$$|k c_k z^{k-1}| = \left| \frac{c_k z_0^k}{z_0} \cdot k \left(\frac{z}{z_0} \right)^{k-1} \right| \leq \frac{M}{|z_0|} \cdot k q^{k-1}(z), \quad q(z) = \left| \frac{z}{z_0} \right| < 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k q^k(z) < \infty \text{ по признаку Даламбера}$$

11.3. Теорема 2. [О радиусе сходимости степенного ряда].

Для любого степенного ряда существует R ($R \geq 0$ или $R = +\infty$) такое, что

$$1) 0 < R < \infty \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k < \infty \text{ в круге } K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\} \text{ и расходится в } \mathbb{C} \setminus \overline{K}$$

2) $R = 0$, то $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k < \infty$ только в $z = 0$

3) $R = +\infty$, то $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k < \infty \forall z \in \mathbb{C}$

R - называется радиусом сходимости степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$

K - круг сходимости.

Доказательство: Пусть $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ - множество сходимости степенного ряда; $\mathcal{D} \neq \emptyset$, т.к. $0 \in \mathcal{D}$

1) \mathcal{D} - огран., $\exists z_0 \in \mathcal{D}$, $z_0 \neq 0$

$R = \sup_{z \in \mathcal{D}} |z|$ - сущ. т.к. \mathcal{D} огранич. мн-во. Докажем: $\forall z \in K \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k < \infty \forall z \in \mathbb{C} \setminus \overline{K} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \infty$ По определению $\sup \forall z' \in K \exists z_1 \in$

$\mathcal{D} : |z'| < |z_1| \leq R$, т.к. $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z_1^k < \infty \Rightarrow$ 1-я теорема Абеля $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z')^k < \infty$ и сходится абсолютно \Rightarrow В силу произв. $z' \in K \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$

сходится абс. в круге K Пусть $z' \notin K \Rightarrow |z'| > R \Rightarrow$ по опред. $\sup z' \notin \mathcal{D} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z')^k = \infty \Rightarrow$ расходится вне круга K 2) \mathcal{D} -

огран.; если $\mathcal{D} = \{0\}$, то ряд сход в т. $z = 0$ и расх в $z \neq 0 \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k < \infty \quad z = 0 \Rightarrow R = 0$ 3) \mathcal{D} - неогранич. $\Rightarrow \forall z \in \mathbb{C} \exists z' \in \mathcal{D} :$

$|z| < |z'|$, $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z')^k < \infty \xrightarrow{1\text{-я т. Аб.}} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k < \infty$.

11.4. Теорема 3. [Вторая теорема Абеля].

Если $0 < R < +\infty$, R - радиус сходимости $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ и $\sum_{k=0}^{\infty} c_k R^k < \infty$, то на $[0, R]$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ сх. равномерно и его сумма $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ непрерывна $\forall x \in [0, R]$ **Доказательство:** $\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{c_k R^k}_{U_k} \cdot \underbrace{\left(\frac{x}{R}\right)^k}_V 1) \sum_{k=0}^{\infty} c_k R^k < \infty$ 2) $V_k = \left(\frac{x}{R}\right)^k \quad 0 \leq V_k \leq 1 \quad \forall x \in [0, R] \quad V_{k+1} = \left(\frac{x}{R}\right)^{k+1} < \left(\frac{x}{R}\right)^k =$

$V_k \quad \forall k$

\Downarrow признак Абеля $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k < \infty$ сходится равномерно на $[0, R]$ $f_k(x) = c_k x^k$ - непрерывна на $[0, R]$

$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ непрерывна на $[0, R]$

11.5. Теорема 4.

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

1) $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = \rho \quad (\rho \geq 0, \rho = +\infty) \Rightarrow R = \frac{1}{\rho}$ 2) Если $|c_k| > 0 \forall k$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|} = \rho \quad (\rho \geq 0, \rho = +\infty) \Rightarrow R = \frac{1}{\rho}$.

Доказательство: $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{\rho}\}$

$z_0 \in K : \sqrt[k]{|c_k z_0^k|} = |z_0| \sqrt[k]{|c_k|} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} |z_0| \cdot \rho < \frac{1}{\rho} \cdot \rho = 1$

↓ По признаку Коши

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k z_0^k| < \infty \quad z_1 : |z_1| > \frac{1}{\rho} \quad \sqrt[k]{|c_k z_1^k|} = |z_1| \sqrt[k]{|c_k|} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} |z_1| \cdot \frac{1}{\rho} > \frac{1}{\rho} \Rightarrow \text{По признаку}$$

$$\text{Коши} \quad \sum_{k=0}^{\infty} c_k z_1^k = \infty.$$

Пример (показывает, для чего нужна формула Коши-Адамара):

$$\sum_{k=1}^{\infty} z^{k^2} = z + z^4 + z^9 + z^{16} + z^{25} + \dots + z^{k^2} + \dots \quad \{c_k\} = \{c_1 = 1, c_2 = c_3 = 0, c_4 = 1, c_5 = c_6 = c_7 = c_8 = 0, c_9 = 1, \dots\}$$

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k^2]{|c_{k^2}|} = 1 \Rightarrow R = 1.$$

11.6. Теорема 5. [Формула Коши-Адамара].

Если R - радиус сходимости $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, тогда $R = \frac{1}{\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}}$.

Доказательство: 1) $\{\sqrt[k]{|c_k|}\}$ - неогр. 2) $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = L > 0$; $L \in R$ 3) $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0 \Rightarrow \{\sqrt[k]{|c_k|}\}$ сходится к 0 1) Для бескон. числа номеров $k \in \mathbb{N}$

$$|c_k z^k| > 1 \quad \forall z \neq 0, \quad z \in \mathbb{C}$$

↓ Не выполняется необходимое условие сходимости ряда

↓

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \infty$$

↓

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k < \infty \quad \text{только для } z = 0 \quad 2) \text{ Докажем, что а) } \forall z : |z| < \frac{1}{L} \text{ ряд сходится б) } \forall z : |z| > \frac{1}{L} \text{ ряд расходится а) } z : |z| < \frac{1}{L}$$

Тогда $\exists \varepsilon > 0 : |z| < \frac{1}{L+\varepsilon} < \frac{1}{L}$

$$\varepsilon > 0 \quad \exists k_0(\varepsilon) : \forall k \geq k_0 \Rightarrow \sqrt[k]{|c_k|} < L + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\sqrt[k]{|c_k z^k|} = |z| \sqrt[k]{|c_k|} \leq \frac{L+\frac{\varepsilon}{2}}{L+\varepsilon}$$

↓ По признаку Коши $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k < \infty$ в круге $K = \{z : |z| < \frac{1}{L}\}$ б) $\forall z : |z| > \frac{1}{L} \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : |z| > \frac{1}{L-\varepsilon} > \frac{1}{L} [\exists \{c_{k_n}\} : \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k_n]{|c_{k_n}|} = L] \stackrel{\text{def}}{=} [\varepsilon >$

$0 \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \mapsto L - \varepsilon < \sqrt[k_n]{|c_{k_n}|} < L + \varepsilon] \quad \sqrt[k_n]{|c_{k_n}| z^{k_n}} = |z| \sqrt[k_n]{|c_{k_n}|} > \frac{1}{L-\varepsilon} \cdot (L - \varepsilon) = 1 \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow |c_{k_n} z^{k_n}| > 1 \Rightarrow \Rightarrow \text{Не выполняется необходимых условий сходимости}$

↓ Ряд расходится $\forall z : |z| > \frac{1}{L}$ 3) $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0 \Rightarrow \{\sqrt[k]{|c_k|}\}$ сходится к 0.

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z \neq 0 : \frac{1}{2|z|} = \varepsilon : \quad \exists k_0(\varepsilon) : \forall k \geq k_0 \Rightarrow \sqrt[k]{|c_k|} < \frac{1}{2|z|} \Rightarrow \Rightarrow \sqrt[k]{|c_k| \cdot |z^k|} = |z| \sqrt[k]{|c_k|} < |z| \cdot \frac{1}{2|z|} = \frac{1}{2} < 1$$

↓ По признаку Коши

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k < \infty \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

11.7. Теорема 6.

Для рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k z^{k+1}}{k+1}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} k c_k z^{k-1}$$

1) 2) 3)

радиус сходимости один и тот же.

1) R_1, K_1

2) R_2, K_2

3) R_3, K_3

Надо доказать: $R_1 = R_2 = R_3 = R$.

Доказательство: $\forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{1}{k+1} < 1 \leq k$

$$\left| \frac{c_k}{k+1} z^{k+1} \right| \leq |z| \cdot |c_k z^k| \leq |z|^2 \cdot |k c_k z^{k-1}| \quad \underbrace{|z| \cdot |c_k z^k| \leq |z|^2 \cdot |k c_k z^{k-1}|}_{1)} \quad \underbrace{\left| \frac{c_k}{k+1} z^{k+1} \right| \leq |z| \cdot |c_k z^k|}_{2)}$$

$$1) \forall z \neq 0 \in K_3 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k < \infty \Rightarrow R_1 \geq R_3$$

$$2) \forall z \neq 0 \in K_1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} z^{k+1} < \infty \Rightarrow R_1 \leq R_2$$

В результате: $R_3 \leq R_1 \leq R_2$ Надо доказать, что $R_2 \leq R_3$ $z \in K_2 \exists \rho < R_2 : z \in K_\rho$ $|k c_k z^{k-1}| = |k c_k z^{k-1} \cdot \frac{k+1}{k+1} \cdot \frac{z^2}{z^2}| = |\frac{c_k}{k+1} \cdot z^{k+1} \cdot \frac{k(k+1)}{z^2}| =$

$$\left| \frac{c_k}{k+1} \cdot \rho^{k+1} \cdot \frac{k(k+1)}{z^2} \cdot \left(\frac{z}{\rho} \right)^{k+1} \right| \stackrel{\exists M > 0}{\leq} \leq \frac{M}{|z|^2} k(k+1) q_1^{k+1}, \text{ где } |q_1| < 1 \quad q_1 = \frac{z}{\rho}$$

$$\Downarrow \forall z \in K_2 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} k c_k z^{k-1} < \infty \Rightarrow R_3 \geq R_2$$

Тогда в сумме $R_1 = R_2 = R_3 = R$

12. Билет 12

12.1. Степенные ряды с действительными членами.

Теорема:. Если R – радиус сходимости степенного ряда и выполнено следующее:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - a)^k = f(x), \quad x \in (a - R, a + R), \quad x, a_k, a \in \mathbb{R}$$

то

1. f бесконечно дифференцируемая функция на $(a - R, a + R)$ и выполняется:

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{+\infty} k(k-1) \dots (k-(m-1)) a_k (x - a)^{k-m}$$

2. $\forall x \in (a - R, a + R) \mapsto \int_a^x f(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x - a)^{k+1}$

Доказательство: $\forall \rho : 0 < \rho < R$ на $[a - \rho; a + \rho]$ равномерная сходимость \Rightarrow всё можно делать.

Следствие. $a_n = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$

12.2. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда на интервале сходимости.

Покажем, что сумма степенного ряда дифференцируема в интервале сходимости. **Теорема:.** Сумма степенного ряда $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ дифференцируема в интервале сходимости и производная равна

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x - x_0)^{n-1},$$

причём ряды $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x - x_0)^{n-1}$ и $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ имеют одинаковый радиус сходимости. **Доказательство.** Члены ряда $c_n (x - x_0)^n$

являются непрерывно дифференцируемыми на всей числовой прямой функциями. Пусть $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$ радиус сходимости ряда

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ и точка x принадлежит интервалу сходимости $(x_0 - R, x_0 + R)$. Тогда существует отрезок $[a, b] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$, включающий точку x . Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x - x_0)^{n-1}$, полученный почленным дифференцированием ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$. Вычислим его радиус сходимости R'

$$R' = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n-1]{|n c_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n-1]{|c_n|} \cdot \sqrt[n-1]{n}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} (|c_n|^{\frac{1}{n}})^{\frac{n}{n-1}}} = R$$

Таким образом, ряды $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x - x_0)^{n-1}$ и $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ имеют одинаковый интервал сходимости, и, следовательно, на отрезке $[a, b]$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x - x_0)^{n-1}$ сходится равномерно. По теореме о дифференцируемости суммы функционального ряда сумма степенного ряда $f(x)$ дифференцируема в точке x и верна формула

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x - x_0)^{n-1}$$

что полностью доказывает теорему. \square Теперь в силу доказанной теоремы при дифференцировании суммы степенного ряда вновь получаем степенной ряд с тем же радиусом сходимости. Это позволяет нам сформулировать следующую теорему: **Теорема:.** Сумма степенного ряда $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ дифференцируема любое количество раз и верна формула

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1) (x - x_0)^{n-k}$$

причём радиусы сходимости всех получающихся рядов одинаковы. **Доказательство.** По предыдущей теореме функция $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ дифференцируема и $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x - x_0)^{n-1}$, причём радиусы сходимости обоих рядов совпадают. Далее, пусть существует

$$f^{(k-1)}(x) = \sum_{n=k-1}^{\infty} c_n n(n-1)(n-2) \dots (n-k+2) (x - x_0)^{n-k+1}$$

Применяя к функции $f^{(k-1)}(x)$ предыдущую теорему, получаем, что $f^{(k-1)}(x)$ дифференцируема и верна формула

$$f^{(k)}(x) = (f^{(k-1)}(x))' = \sum_{n=k}^{\infty} c_n n(n-1)(n-2) \dots (n-k+2)(n-k+1) (x - x_0)^{n-k},$$

причём радиусы сходимости рядов для $f^{(k-1)}(x)$ и $f^{(k)}(x)$ совпадают. Тем самым, следуя методу математической индукции, полностью доказывает эту теорему. \square

12.3. Единственность представления функции степенным рядом.

Определение: Регулярная функция. Пусть в каждой точке $z \in \mathbb{E}$, где \mathbb{E} – множество точек комплексной плоскости, поставлено в соответствие комплексное число ω . На множестве \mathbb{E} определена функция комплексного переменного, $\omega = f(z)$. Если $\forall \varepsilon > 0 \exists \sigma = \sigma_\varepsilon > 0 : \forall z : |z - a| < \sigma_\varepsilon \mapsto |f(z) - f(a)| < \varepsilon$, то функцию $f(z)$ называют непрерывной в точке a . И, наконец, Функция комплексного переменного $f(z)$ называется регулярной в точке a , если она определена в некоторой окрестности точки a и представима в некотором круге $|z - a| < \rho, \rho > 0$, сходящимся к $f(z)$ степенным рядом $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$ (*).

Теорема [Единственность представления функции степенным рядом]: Функция $f(z)$, регулярная в точке a , единственным образом представляется рядом (*).

Доказательство. Пусть функция $f(z)$ имеет два представления в виде степенного ряда в круге $K = \{z : |z - a| < \rho\}$, где $\rho > 0$, т.е.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_n(z-a)^n \quad (**)$$

Теперь покажем, что $c_n = \tilde{c}_n$, для $n = 0, 1, 2, \dots$. По условию ряды $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_n(z-a)^n$ сходятся в круге K , и поэтому эти ряды сходятся равномерно в круге $K_1 = \{z : |z - a| \leq \rho_1 < \rho\}$, а их общая сумма – непрерывная в круге K_1 функция. В частности, функция $f(z)$ непрерывна в точке a . Подходя к пределу при $z \rightarrow a$ в равенстве (**), получаем $c_0 = \tilde{c}_0$. Отбрасывая одинаковые слагаемые c_0 и \tilde{c}_0 в равенстве (**), получаем после деления на $(z-a)$ равенство:

$$c_1 + c_2(z-a) + c_3(z-a)^2 + \dots = \tilde{c}_1 + \tilde{c}_2(z-a) + \tilde{c}_3(z-a)^2 + \dots,$$

которое справедливо в круге K с выколотой точкой a . Ряды в левой и правой части сходятся равномерно в круге K_1 . Переходя в равенстве к пределу при $z \rightarrow a$, получаем $c_1 = \tilde{c}_1$. Справедливость равенства $c_n = \tilde{c}_n$ при любой $n \in \mathbb{N}$ устанавливается при помощи индукции.

12.4. Достаточные условия разложимости бесконечно дифференцируемой функции в степенной ряд

Теорема [Достаточные условия сходимости ряда Тейлора к функции]: Если f бесконечно дифференцируемая функция на $(a - \delta, a + \delta)$, $\delta > 0$ и $\exists M > 0 : \forall x \in (a - \delta, a + \delta) \mapsto |f^{(k)}(x)| \leq M$, $k = 0, 1, \dots$, то ряд Тейлора сходится к функции $f(x)$ в каждой точке x нашего интервала:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k, \quad \forall x \in (a - \delta, a + \delta)$$

Доказательство. Достаточные условия разложимости бесконечно дифференцируемой функции в степенной ряд.

$$\mathbf{r}_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}, \quad \text{где } \xi \text{ между } x \text{ и } a$$

$$|\mathbf{r}_n(x)| \leq M \cdot \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

т.к. $|x-a| \geq 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x-a|^k}{k!} = 0$, тогда справедливо следующее:

$$\forall x \in (a - \delta, a + \delta) \quad \forall n \in \mathbb{N} \mapsto |\mathbf{r}_n(x)| \leq M \cdot \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \square.$$

12.5. Ряд Тейлора

Пусть функция f – бесконечно дифференцируема в точке a (т.е. в этой точке у функции f существует производная любого порядка), тогда **Определение:** Рядом Тейлора функции f в точке a называется следующее выражение:

$$f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

Замечание. Если функция регулярна в точке a , то она раскладывается в степенной ряд и этот степенной ряд и есть ряд Тейлора, однако не все функции раскладываются в степенной ряд, поэтому справедливо следующее выражение:

$$f(x) \neq f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

Пример. Рассмотрим следующую функцию:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Эта функция непрерывная в нуле. Найдем ее производные:

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$f''(x) = \left[\left(\frac{2}{x^3} \right)^2 - \frac{6}{x^4} \right] \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$f'''(x) = \left[\left(\frac{2}{x^3} \right)^3 - \frac{12}{x^7} - \frac{2^4}{x^4} + \frac{24}{x^5} \right] \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$$

Таким образом $f^{(m)}(x) = Q_{3m}(\frac{1}{x}) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$, где $Q_{3m}(\frac{1}{x})$ – многочлен степени $3m$ от $\frac{1}{x}$. Тогда понятно, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^k} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{(m)}(x) = \begin{cases} Q_{3m}(\frac{1}{x}) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Тогда $\forall x \neq a$ ряд Тейлора будет представлять собой нулевой ряд, хотя сама функция не нулевая $\Rightarrow f(x) \neq f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$. \square

12.6. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

Функция f – бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности точки a , тогда этой функции соответствует некоторый ряд:

$$f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

Обозначение. $P_n(x) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$ – n -ая частичная сумма ряда Тейлора (многочлен Тейлора). Тогда, если $\mathbf{r}_n(x) = f(x) - P_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, то это означает, что ряд Тейлора сходится к функции f в точке x :

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

Теорема: Если $f^{(n+1)}$ непрерывна на $(a-\delta, a+\delta)$, $\delta > 0$, то:

1. $\mathbf{r}_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$, т.е. её остаточный член на этом интервале представим в интегральной форме.
2. $\mathbf{r}_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$

Доказательство.

1. Доказательство будем проводить при помощи мат. индукции:

(а) Мы знаем, что $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt$. Тогда:

$$\begin{cases} u = f'(t) , dv = dt \\ du = f''(t) dt , v = -(x-t), \text{ х - это константа} \end{cases}$$

получаем, что $f(x) - f(a) = -f'(t)(x-t) \Big|_a^x + \int_a^x (x-t) f''(t) dt =$

$$= f'(a)(x-a) + \frac{1}{1!} \int_a^x (x-t) f''(t) dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{1}{1!} \int_a^x (x-t) f''(t) dt.$$

Получили при $n = 1$ остаточный член в интегральной форме (получена база индукции).

(b) Предположим, что при $n - 1$ верно, тогда найдем для n :

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt$$

Тогда:

$$\begin{cases} u = f^n(t), & dv = (x-t)^{n-1} dt \\ du = f^{n+1}(t) dt, & v = -\frac{(x-t)^n}{n} \end{cases}$$

получаем, что $f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k - \frac{(x-t)^n f^{(n)}(t)}{n!} \Big|_a^x + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$. Тогда получаем, что:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \quad \square$$

2. Это просто остаточный член в форме Лагранжа (доказывалось в прошлом семестре).

13. Билет 13

13.1. Разложение в ряд Тейлора основных элементарных функций: e^x , $\cos x$, $\sin x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$.

1. Показательная и гиперболические функции.

$$y = e^x, \quad x \in \mathbb{R} \quad x \in (-\rho, \rho), \quad \rho > 0$$

Поскольку $(e^x)^{(k)} = e^x$, то $0 < f(x) < e^\rho$ и $0 < f(x)^{(k)} < e^\rho$. Ряд Тейлора функции $y = e^x$ сходится к ней на $(-\rho, \rho)$ по теореме о достаточном условии представимости функции её рядом Тейлора. $\forall \rho > 0 \Rightarrow R = +\infty$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$y = \operatorname{sh} x, \quad y = \operatorname{ch} x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad R = +\infty$$

2. Тригонометрические функции.

$$y = \sin x, y = \cos x, x \in \mathbb{R} \quad |f^{(k)}(x)| \leq 1, \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, \quad R = +\infty$$

3. Степенная функция.

$$y = (1+x)^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$1) \alpha = 0, y = 1 \quad 2) \alpha = n, n \in \mathbb{N}, f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_n^k x^k \text{ - бином Ньютона} \quad 3) \alpha \text{ - произвольное, } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$f^{(n+1)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-(n+1)}$$

$$r_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!} \int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{\alpha-1} dt$$

Пусть $t = x\tau$, $0 \leq \tau \leq 1$, тогда $dt = x d\tau$

$$r_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!} x^{n+1} \int_0^1 \left(\frac{1-\tau}{1+x\tau}\right)^n (1+x\tau)^{\alpha-1} d\tau$$

Пусть $|x| < 1$, тогда $|1+x\tau| \geq 1-\tau$

$$(1+x\tau)^{\alpha-1} \leq \beta(x) = \begin{cases} (1+|x|)^{\alpha-1}, & \alpha \geq 1 \\ (1-|x|), & \alpha < 1 \end{cases}$$

$|\alpha| \leq m, m \in \mathbb{N}$. Тогда $\forall n > m$

$$\left| \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!} \right| \leq \frac{m(m+1)\dots(m+n)}{n!} \leq \frac{(m+n)!}{n!} =$$

$$= (n+1)(n+2)\dots(n+m) \leq (2n)^m$$

В итоге

$$|r_n(x)| \leq 2^m \beta(x) |x| \frac{n^m}{\left(\frac{1}{|x|}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Так как

$$a = \frac{1}{|x|} > 1 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^m}{a^n} = 0$$

Следовательно

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} C_\alpha^k x^k, \quad C_\alpha^k = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(k-1))}{k!}, \quad |x| < 1, \quad R = 1$$

В частности:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k, \quad |x| < 1$$

4. Логарифмические функции.

$$y = \ln(1-x), \quad y' = -\frac{1}{1-x} = -\sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

$$y = \ln(1+x), \quad y' = \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$$

Раскладываем в интервалах сходимости каждую функцию в ряд Тейлора, а потом почленно интегрируем, и помним, что при почленном интегрировании радиус сходимости не меняется.

$$y = \ln(1-x) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}, \quad |x| < 1$$

$$y = \ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}, \quad |x| < 1$$

5. Обратные тригонометрические функции.

Обратные тригонометрические функции можно разложить в ряд Тейлора, сначала продифференцировав и воспользовавшись известными результатами.

13.2. Разложение в степенной ряд комплекснозначной функции e^z .

Докажем, что

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad R = +\infty$$

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad R = +\infty$$

Доказательство: Так как $z = x + iy$ и по формуле Эйлера: $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$, то

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \cos y = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin y = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\begin{aligned} e^{iy} = \cos y + i \sin y &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^k}{k!} = e^{iy} \end{aligned}$$

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^k}{k!}$$

Докажем, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_2^k}{k!}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \sum_{j=0}^k C_k^j z_1^j z_2^{k-j} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \frac{1}{k!} \cdot \frac{k!}{j! \cdot (k-j)!} z_1^j z_2^{k-j} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \frac{z_1^j}{j!} \cdot \frac{z_2^{k-j}}{(k-j)!} = \frac{z_1^0}{0!} \cdot \frac{z_2^0}{0!} + \left(\frac{z_1^0}{0!} \cdot \frac{z_2^1}{1!} + \frac{z_1^1}{1!} \cdot \frac{z_2^0}{0!} \right) + \\ &\quad + \left(\frac{z_1^0}{0!} \cdot \frac{z_2^2}{2!} + \frac{z_1^1}{1!} \cdot \frac{z_2^1}{1!} + \frac{z_1^2}{2!} \cdot \frac{z_2^0}{0!} \right) + \dots \end{aligned}$$

Это можно проиллюстрировать следующим образом: Мы обходим таблицу по диагоналям, так что сумма индексов элементов была константа для каждой группы слагаемых. Тогда действительно:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \frac{z_1^j}{j!} \cdot \frac{z_2^{k-j}}{(k-j)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_2^k}{k!}$$

Тогда по доказанной выше лемме:

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x + iy)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

	u_0	u_1	u_2	u_3	\dots
v_0	$u_0 \cdot v_0$	$u_1 \cdot v_0$	$u_2 \cdot v_0$	\dots	
v_1	$u_0 \cdot v_1$	$u_1 \cdot v_1$	\dots		
v_2	$u_0 \cdot v_2$	\dots			
v_3	\dots				
\dots					

Теперь

$$e^{iz} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$e^{-iz} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-iz)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-iz)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-iz)^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} - i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Что и требовалось доказать.

14. Анализ функции

Теперь можно перейти к анализу заданной функции:

$$f(x) = (\cos(x^3)) + ((\sin(15 \cdot x))^4) \quad (3)$$

Значение функции в точке $x_0 = 0$: $f(x_0) = 1$

14.1. Касательная к графику функции в точке

Уравнение касательной к графику функции в точке $x_0 = 0$:

$$y = 0 \cdot x + (1)$$

14.2. Производная 2-ой степени

Из предисловия нетрудно заметить, что

$$f^{(1)}(x) = (((-1) \cdot (\sin(x^3))) \cdot (3 \cdot (x^2))) + ((4 \cdot ((\sin(15 \cdot x))^3)) \cdot ((\cos(15 \cdot x)) \cdot 15)) \quad (4)$$

$$f^{(2)}(x) = (((((-1) \cdot ((\cos(x^3)) \cdot (3 \cdot (x^2)))) \cdot (3 \cdot (x^2)))) + ((((-1) \cdot (\sin(x^3))) \cdot (3 \cdot (2 \cdot x)))) + (((4 \cdot ((3 \cdot ((\sin(15 \cdot x))^2)) \cdot ((\cos(15 \cdot x)) \cdot 15))) \cdot ((\cos(15 \cdot x)) \cdot 15)))) \cdot ((\cos(15 \cdot x)) \cdot 15))$$

После небольшого количества элементарных преобразований получаем:

$$f^{(2)} = (((((-1) \cdot ((\cos(x^3)) \cdot (3 \cdot (x^2)))) \cdot (3 \cdot (x^2)))) + ((((-1) \cdot (\sin(x^3))) \cdot (3 \cdot (2 \cdot x)))) + (((4 \cdot ((3 \cdot ((\sin(15 \cdot x))^2)) \cdot ((\cos(15 \cdot x)) \cdot 15))) \cdot ((\cos(15 \cdot x)) \cdot 15)))) \cdot ((\cos(15 \cdot x)) \cdot 15))$$

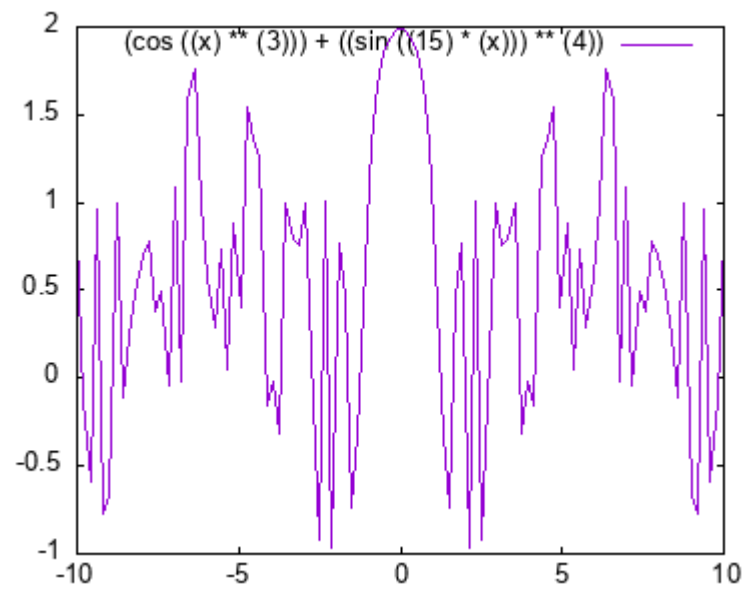
В точке $x_0 = 0$: $f^{(2)}(x_0) = 0$

14.3. Разложение по формуле Тейлора

Разложим функцию по формуле Тейлора в точке 0 до x^4 :

$$\begin{aligned} f(x) = (\cos(x^3)) + ((\sin(15 \cdot x))^4) = 1 \\ + \frac{-1.IND}{24} \cdot (x)^4 \\ + o((x)^4) \end{aligned} \quad (7)$$

14.4. График функции



15. Подсчет погрешности

Подсчитаем погрешность величины f :

$$f = \frac{((x^3) \cdot z)}{((y^2) - u)}$$

Для значений величин:

$$x = 5, \delta_x = 0.01$$

$$y = 2, \delta_y = 0.02$$

$$z = 3, \delta_z = 0.03$$

$$u = 2, \delta_u = 0.02$$

$$\delta_f = \sqrt{((112.5) \cdot 0.01)^2 + ((-375) \cdot 0.02)^2 + ((62.5) \cdot 0.03)^2 + ((93.75) \cdot 0.02)^2} = 8.03411$$