

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Самарский национальный исследовательский университет  
имени академика С.П. Королева»

Институт информатики и кибернетики

Кафедра технической кибернетики

**Отчет по курсовой работе**  
Дисциплина: «Уравнения математической физики»

**Тема: «АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ  
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ»**

Вариант № 23

Выполнили студенты: Долгих Д.Ю., Дробин Р.Р., Степанов Н.А.

Группа 6308-010302D

Преподаватель

Дегтярев А.А.

### **Задание к курсовой работе:**

1. Осуществить математическую постановку краевой задачи для физического процесса, описанного в предложенном варианте курсовой работы.
2. Используя метод разделения переменных (метод Фурье) получить решение краевой задачи в виде разложения в ряд Фурье, соответствующим краевым условиям задачи.
3. Исследовать сходимость ряда Фурье, получить оценку остатка ряда.
4. Разработать компьютерную программу расчета функции-решения краевой задачи (суммирования ряда Фурье) с требуемой точностью. При расчете коэффициентов ряда использовать метод численного интегрирования, если это необходимо. Обеспечить контроль погрешности численного интегрирования. Если необходимо, то разработать специальный программный модуль для вычисления используемых собственных чисел оператора Лапласа. Обеспечить контроль погрешности вычисления собственных чисел. Компьютерная программа должна обеспечивать возможность диалогового режима ввода физических, геометрических параметров задачи, числа суммируемых элементов ряда, графическую визуализацию рассчитанного решения задачи.
5. Используя разработанную программу, провести экспериментальное исследование качества полученной аналитической оценки остатка ряда Фурье.
6. Оформить отчет о выполненной курсовой работе в соответствии с требованиями, изложенными в подразделе 3.2 настоящих методических указаний.

### **Условие задачи:**

Разработать программу численного моделирования теплового процесса в тонкой плоскопараллельной однородной прямоугольной пластине на временном промежутке  $0 < t \leq T$ . Пластина имеет длину  $l_x$ , ширину  $l_y$ .

Начальное распределение температуры пластины описывается функцией  $u(x, y, t = 0) = \psi(x)\eta(y) + u_0$ ,  $0 \leq x \leq l_x$ ,  $0 \leq y \leq l_y$ .

На краях пластины  $x = 0$  и  $x = l_x$  происходит теплообмен с окружающей средой, описываемый законом Ньютона с коэффициентом теплообмена  $\alpha$ . Температура окружающей среды постоянна и равна  $u_0$ . Края пластины  $y = 0$  и  $y = l_y$ , а также её грани теплоизолированы. Интенсивность распределенных внутренних источников тепла предполагается равной нулю.

Коэффициенты теплопроводности и объёмной теплоёмкости материала пластины равны  $k$  и  $c$  соответственно.

Для численного моделирования теплового процесса в пластине использовать представления решения описанной задачи математической физики в виде ряда Фурье по собственным функциям оператора Лапласа, удовлетворяющим краевым условиям задачи.

При проведении расчетов использовать значения параметров, представленных в таблице 1 и выражения функций  $\psi(x)$  и  $\eta(y)$ :

$$\psi(x) = 5 \sin \frac{\pi x}{l_x}; \eta(y) = \begin{cases} 4, & y \in \left[0, \frac{l_y}{2}\right], \\ 0, & y \notin \left[0, \frac{l_y}{2}\right]. \end{cases}$$

Таблица 1 – Заданные значения для расчёта суммы ряда

$T$	$l_x$	$l_y$	$\alpha$	$k$	$c$	$u_0$
200	10	6	0,004	0,13	1,84	0

## РЕФЕРАТ

Отчет по курсовой работе: 40 с., 4 рисунка, 9 таблиц, 1 источник, 3 приложения.

*УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, КРАЕВАЯ ЗАДАЧА, УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ, МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ, РЯД ФУРЬЕ, ОЦЕНКА ОСТАТКА РЯДА*

Целью курсовой работы является получение решения краевой задачи теплопроводности для остывающей тонкой круговой пластины в виде разложения в ряд Фурье по собственным функциям оператора Лапласа, и создание компьютерной программы численного моделирования для расчета функции-решения с заданной точностью.

Для получения аналитического решения краевой задачи использован метод разделения переменных. Решение задачи получено в виде бесконечного ряда Фурье, также получена оценка остатка ряда.

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	6
1 Математическая постановка краевой задачи .....	7
2 Решение краевой задачи методом разделения переменных .....	9
2.1 Расщепление на подзадачи.....	9
2.2 Аналитическое решение первой подзадачи (Степанов Н.А.).....	11
2.3 Аналитическое решение второй подзадачи (Долгих Д.Ю.) .....	16
3 Аналитическая оценка остатка ряда.....	19
3.1 Оценка первой подзадачи (Дробин Р.Р.) .....	19
3.2 Оценка второй подзадачи (Долгих Д.Ю.).....	22
4 Построение графиков.....	24
4.1 Построение графиков для первой подзадачи (Дробин Р.Р., Степанов Н.А.).....	24
4.2 Построение графиков для второй подзадачи (Долгих Д.Ю.) .....	25
5 Экспериментальное исследование качества полученной аналитической оценки остатка ряда Фурье .....	28
5.1 Экспериментальное исследование качества оценки для первой подзадачи .....	28
5.2 Экспериментальное исследование качества оценки для второй подзадачи .....	29
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	30
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ .....	31
Приложение А (Дробин Р.Р., Степанов Н.А.) .....	32
Приложение В (Долгих Д.Ю.) .....	34
Приложение С.....	37

## ВВЕДЕНИЕ

Метод разделения переменных относится к классу аналитических методов решения краевых задач математической физики. Характеризуя этот метод, необходимо выделить его достоинства и недостатки в сравнении с другими методами.

К достоинствам метода разделения переменных следует отнести возможность получения точного решения краевой задачи в виде ряда Фурье. Такая форма решения задачи часто и вполне успешно используется для теоретического исследования свойств этого решения. В случае достаточно быстрой сходимости ряда Фурье она может с успехом использоваться для численного моделирования физического процесса.

К числу недостатков метода следует отнести его невысокую универсальность. Этот метод очень проблематично использовать для решения нелинейных уравнений математической физики, уравнений с переменными операторными коэффициентами, а также для решения краевых задач в областях со сложными границами.

Суть метода разделения переменных состоит в факторизации по каждой независимой переменной функции, определяющей решение уравнения математической физики. Далее осуществляется переход к задаче Штурма-Лиувилля, решение которой заключается в получении собственных функций и соответствующих им собственных чисел оператора Лапласа. Затем решение исходной задачи ищется в виде ряда Фурье по этим собственным функциям.

В настоящей работе метод разделения переменных применен для получения аналитической формы расчета теплового процесса. На основе этого результата разработан алгоритм и компьютерная программа численного моделирования теплового процесса в тонкой плоскопараллельной однородной прямоугольной пластине.

## 1 Математическая постановка краевой задачи

Введём обозначения:  $\frac{\partial u}{\partial t} = u_t$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x} = u_x$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = u_y$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_{yy}$ .

В общем виде уравнение теплопроводности выглядит следующим образом:

$$cu_t = k(u_{xx} + u_{yy}), \quad 0 < t \leq T, \quad (1.1)$$

где  $\varphi = \varphi(x, y, t)$  – функция температуры пластины в точке  $(x, y)$  в момент времени  $t$  [1].

Начальное условие имеет вид

$$u|_{t=0} = \psi(x)\eta(y) + u_0, \quad 0 \leq x \leq l_x, \quad 0 \leq y \leq l_y. \quad (1.2)$$

Будем считать, что тепловой процесс проходит в изотропной среде, т.е.  $k$  – скаляр. У нас происходит теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона, значит для граней  $x = 0$  и  $x = l_x$  имеем краевые условия третьего рода. Запишем закон Ньютона:

$$Q = \alpha(u - u_0), \quad (1.3)$$

где  $\alpha$  – коэффициент теплообмена [1].

Запишем закон Фурье в общем виде:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = -\frac{1}{k}Q, \quad (1.4)$$

где 
$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_x}) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_y}) \quad [1]. \quad (1.5)$$

Рассмотрим проекцию пластины на плоскость  $z = 0$ . Проведём внешние нормали к проекциям граней пластины  $x = 0$  и  $x = l_x$ .

Пусть  $x = 0$ . Тогда

$$\widehat{\vec{n}, \vec{e}_x} = \pi, \quad \widehat{\vec{n}, \vec{e}_y} = \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\pi) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Пользуясь двумя выражениями для теплового потока, получим

$$(-k) \left( -\frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = \alpha(u|_{x=0} - u_0) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = h(u|_{x=0} - u_0), \quad (1.6)$$

где  $h = \frac{\alpha}{k}$  – коэффициент теплообмена.

Аналогично для  $x = l_x$  получим:

$$\begin{aligned} \widehat{\vec{n}, \vec{e}_x} &= 0, \widehat{\vec{n}, \vec{e}_y} = \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos(0) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\partial u}{\partial x}, \\ (-k) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l_x} &= \alpha(u|_{x=l_x} - u_0) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l_x} = -h(u|_{x=l_x} - u_0). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Так как пластины  $y = 0$  и  $y = l_y$  теплоизолированы, то теплообмена между ними и окружающей средой не происходит. Значит краевые условия для них имеют вид:

$$u_y|_{y=0} = 0,$$

$$u_y|_{y=l_y} = 0.$$

Таким образом, постановка краевой задачи будет выглядеть следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = \beta(u_{xx} + u_{yy}), 0 < t \leq T, \beta = \frac{k}{c}, \\ u|_{t=0} = \psi(x)\varphi(y) + u_0, 0 \leq x \leq l_x, 0 \leq y \leq l_y, \\ u_x|_{x=0} = h(u|_{x=0} - u_0), \\ u_x|_{x=l_x} = -h(u|_{x=l_x} - u_0), \\ u_y|_{y=0} = u_y|_{y=l_y} = 0. \end{array} \right. \quad (1.8)$$



## 2 Решение краевой задачи методом разделения переменных

### 2.1 Расщепление на подзадачи

Рассмотрим краевую задачу (1.8) и для удобства сделаем замену

$$\varphi = u - u_0.$$

Получим новую краевую задачу относительно  $\varphi = \varphi(x, y, t)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_t = \beta(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}), 0 < t \leq T, \beta = \frac{k}{c}, \\ \varphi|_{t=0} = \psi(x)\eta(y), 0 \leq x \leq l_x, 0 \leq y \leq l_y, \\ \varphi_x|_{x=0} = h\varphi|_{x=0}, \\ \varphi_x|_{x=l_x} = -h\varphi|_{x=l_x}, \\ \varphi_y|_{y=0} = \varphi_y|_{y=l_y} = 0. \end{array} \right. \quad (2.1.1)$$

Будем искать решение  $\varphi$  в виде  $\varphi(x, y, t) = v(x, t)w(y, t)$ . Подставим эту замену во все соотношения задачи (2.1.1).

Преобразуем уравнение теплопроводности:

$$\varphi_t = v_t w + \omega_t v, \varphi_{xx} = v_{xx} \omega, \varphi_{yy} = v \omega_{yy}, v_t w + \omega_t v = \beta(v_{xx} \omega + v \omega_{yy});$$

$\frac{\omega_t - \beta \omega_{yy}}{\omega} = \frac{\beta v_{xx} - v_t}{v} = \theta(t)$ , где  $\theta(t)$  – некоторая функция, так как левая часть зависит от  $y$  и  $t$ , а правая часть зависит от  $x$  и  $t$ . В силу того, что наша задача корректно поставлена, то ее решение  $\varphi$  существует и единственно. Тогда произведение  $vw$  инвариантно относительно функции  $\theta(t)$ , значит её можно взять любую. Для простоты положим  $\theta(t) \equiv 0 \Rightarrow \begin{cases} v_t = \beta v_{xx}, \\ \omega_t = \beta \omega_{yy}. \end{cases}$

Преобразуем начальное условие:

$$\varphi(x, y, 0) = v(x, 0)\omega(y, 0) = \psi(x)\eta(y) \Leftrightarrow \frac{v(x, 0)}{\psi(x)} = \frac{\eta(y)}{\omega(y, 0)} = K,$$

где  $K$  – некоторая константа, так как левая и правая части зависят от разных переменных. Для простоты положим  $K = 1 \Rightarrow \begin{cases} v(x, 0) = \psi(x), \\ \omega(y, 0) = \eta(y). \end{cases}$

Путем несложных преобразований получим выражения для краевых условий:

$$\varphi_x|_{x=0} = v_x(0, t)\omega(y, t) = h v(0, t)\omega(y, t) \Rightarrow v_x(0, t) = h v(0, t);$$

$$\varphi_x|_{x=l_x} = v_x(l_x, t)\omega(y, t) = -hv(l_x, t)\omega(y, t) \Rightarrow v_x(l_x, t) = -hv(l_x, t);$$

$$\varphi_y|_{y=0} = v(x, t)w(0, t) = 0 \Rightarrow \omega_y(0, t) = 0;$$

$$\varphi_y|_{y=l_y} = v(x, t)w(l_y, t) = 0 \Rightarrow \omega_y(l_y, t) = 0.$$

В итоге получим две краевые подзадачи относительно  $x, t$  и  $y, t$  соответственно:

$$\begin{cases} v_t = \beta v_{xx}, 0 < t \leq T, \beta = \frac{k}{c}, \\ v(x, 0) = \psi(x), 0 \leq x \leq l_x, \\ v_x(0, t) = hv(0, t), \\ v_x(l_x, t) = -hv(l_x, t). \end{cases} \quad (2.1.2)$$

$$\begin{cases} \omega_t = \beta \omega_{yy}, 0 < t \leq T, \beta = \frac{k}{c}, \\ \omega(y, 0) = \eta(y), 0 \leq y \leq l_y, \\ \omega_y(0, t) = 0, \\ \omega_y(l_y, t) = 0. \end{cases} \quad (2.1.3)$$

## 2.2 Аналитическое решение первой подзадачи (Степанов Н.А.)

Нетрудно заметить, что заданная функция  $\psi(x) = 5 \sin \frac{\pi x}{l_x}$  симметрична относительно  $x = \frac{l_x}{2}$ . Решим задачу (2.1.2) с учётом этого условия. Сделаем замену  $z = x - \frac{l_x}{2}$ . Тогда можно рассматривать эту краевую задачу на отрезке  $0 \leq z \leq \frac{l_x}{2}$ . Первое краевое условие при  $z = 0$  станет нулевым в силу того, что значение производной в точке симметрии равно нулю. После замены задача (2.1.2) примет вид:

$$v_t = \beta v_{zz}, 0 < t \leq T, \beta = \frac{k}{c}, \quad (2.2.1)$$

$$v(z, 0) = \psi\left(z + \frac{l_x}{2}\right), 0 \leq x \leq \frac{l_x}{2}, \quad (2.2.2)$$

$$v_z(0, t) = 0, \quad (2.2.3)$$

$$v_z\left(\frac{l_x}{2}, t\right) = -hv\left(\frac{l_x}{2}, t\right). \quad (2.2.4)$$

Для решения задачи (2.2.1 – 2.2.4) применим метод разделения переменных. Будем искать решение в виде

$$v(z, t) = Z(z)T(t). \quad (2.2.5)$$

Подставив (2.2.5) в уравнение (2.2.1), получим:

$$Z(z)\dot{T}(t) = \beta Z''(z)T(t) \Leftrightarrow \frac{Z''(z)}{Z(z)} = \frac{\dot{T}(t)}{\beta T(t)} = -\lambda.$$

Так как левая и правая части зависят от разных переменных, то они равны некоторой константе  $-\lambda$ . Получим два уравнения относительно каждой переменной:

$$Z''(z) + \lambda Z(z) = 0, \quad (2.2.5)$$

$$\dot{T}(t) + \beta \lambda T(t) = 0. \quad (2.2.6)$$

Подставив 2.2.5 в условия 2.2.3 и 2.2.4, получим:

$$\begin{aligned} v_z(0, t) = Z'(0)T(t) = 0 &\Rightarrow \\ \Rightarrow Z'(0) = 0, &\end{aligned} \quad (2.2.7)$$

где  $T(t) \neq 0$ .

$$\begin{aligned}
v_z\left(\frac{l_x}{2}, t\right) &= Z'\left(\frac{l_x}{2}\right) T(t), \\
-hv\left(\frac{l_x}{2}, t\right) &= -hZ\left(\frac{l_x}{2}\right) T(t), \\
v_z\left(\frac{l_x}{2}, t\right) = -hv\left(\frac{l_x}{2}, t\right) &\Leftrightarrow Z'\left(\frac{l_x}{2}\right) T(t) = -hZ\left(\frac{l_x}{2}\right) T(t) \Rightarrow \\
&\Rightarrow Z'\left(\frac{l_x}{2}\right) = -hZ\left(\frac{l_x}{2}\right),
\end{aligned} \tag{2.2.8}$$

где  $T(t) \neq 0$ .

Объединяя (2.2.5), (2.2.7), (2.2.8), получим задачу Штурма Лиувилля:

$$\begin{cases} Z''(z) + \lambda Z(z) = 0, \\ Z'(0) = 0, \\ Z'\left(\frac{l_x}{2}\right) = -hZ\left(\frac{l_x}{2}\right). \end{cases} \tag{2.2.9}$$

Обозначим  $\lambda = p^2$  для удобства. Рассмотрим отдельно случай  $p = 0$ .

Тогда  $\lambda = 0$  и функцию  $Z$  будем искать в виде

$$\begin{aligned}
Z(z) &= C_1 z + C_2, \\
Z'(z) &= C_1.
\end{aligned}$$

Подставим полученные выражения в краевые условия задачи (2.2.9).

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_1 = -h\left(C_1 \frac{l_x}{2} + C_2\right) \Rightarrow C_1 = C_2 = 0. \end{cases}$$

Так как мы получили тривиальное решение  $Z(z) \equiv 0$ , то  $\lambda = 0$  не является собственным числом. Далее будем считать, что  $p \neq 0$ .

По методу Эйлера будем искать функцию  $Z$  в виде

$$\begin{aligned}
Z(z) &= A \cos(pz) + B \sin(pz), \\
Z'(z) &= -pA \sin(pz) + pB \cos(pz).
\end{aligned}$$

Подставим полученные выражения в краевые условия задачи (2.2.9).

$$\begin{cases} Bp = 0, \\ -Ap \sin \frac{pl_x}{2} + Bp \cos \frac{pl_x}{2} = -hA \cos \frac{pl_x}{2} - hB \sin \frac{pl_x}{2}, \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B = 0, p \neq 0, \\ Ap \sin \frac{pl_x}{2} = hA \cos \frac{pl_x}{2}, \Rightarrow \\ \Rightarrow tg \frac{pl_x}{2} = \frac{h}{p}. \end{cases} \quad (2.2.10)$$

Таким образом, мы получили трансцендентное уравнение (2.2.10), которое не имеет аналитического решения. Пусть  $\{p_n\}$  – корни уравнения (2.2.10), тогда  $\{\lambda_n\}$  – собственные числа задачи Штурма Лиувилля (2.2.9), где  $\lambda_n = p_n^2$ . Заметим, что каждый корень уравнения 2.2.10 удовлетворяет условию:

$$\frac{\pi}{l_x}(2n-1) < p_n < \frac{\pi}{l_x}(2n+1), n \geq 1. \quad (2.2.10.1)$$

В таблице 2 приведены значения корней уравнения (2.2.10), найденные численно методом дихотомии с точностью  $10^{-12}$ .

Таблица 2 – Корни уравнения (2.2.10)

n	$p_n$	N	$p_n$	N	$p_n$	n	$p_n$
1	0.028190335274673517	26	15.708014197364541	51	31.41595200066806	76	47.12390678036802
2	0.6295891834820697	27	16.336330769270862	52	32.04427003207759	77	47.752225087710855
3	1.2572733568735566	28	16.96464748627309	53	32.67258808269125	78	48.38054340085564
4	1.8853799091818786	29	17.592964332825407	54	33.300906151422	79	49.0088617195792
5	2.5135923921851715	30	18.221281295526186	55	33.929224237263355	80	49.637180043669716
6	3.1418472807235407	31	18.84959836276072	56	34.55754233928202	81	50.26549837292592
7	3.7701233788752697	32	19.47791552441291	57	35.18586045661134	82	50.8938167071565
8	4.3984115988174874	33	20.106232771631174	58	35.8141785884455	83	51.522135046179415
9	5.02670739561419	34	20.734550096636863	59	36.44249673403422	84	52.5045338982151
10	5.655008243959484	35	21.362867492566412	60	37.070814892678186	85	52.778771737917765
11	6.283312628536846	36	21.99118495334069	61	37.699133063724574	86	53.407090090311
12	6.911619584995732	37	22.61950247355598	62	38.327451246563456	87	54.035408446851335
13	7.539928470407851	38	23.24782004839278	63	38.95576944062424	88	54.66372680739575
14	8.168238839654734	39	23.876137673538917	64	39.58408764537252	89	55.29204517180774
15	8.79655037478667	40	24.504455345124402	65	40.21240586030733	90	55.92036353995694
16	9.424862842636124	41	25.132773059666373	66	40.84072408495854	91	56.548681911718774
17	10.053176068324788	42	25.761090814021653	67	41.469042318884505	92	57.177000286974135
18	10.681489918120441	43	26.38940860534645	68	42.0973605616699	93	57.805318665609136
19	11.30980428800816	44	27.017726431061515	69	42.72567881292389	94	58.43363704751472
20	11.938119095870157	45	27.646044288822086	70	43.353997072278275	95	59.061955432586544
21	12.566434276011758	46	28.274362176491753	71	43.98231533938588	96	59.690273820724585
22	13.194749775251196	47	28.902680092119933	72	44.61063361391915	97	60.31859221183302
23	13.823065550075913	48	29.530998033922113	73	45.23895189556862	98	60.94691060582001

Продолжение таблицы 2.

n	$p_n$	N	$p_n$	N	$p_n$	n	$p_n$
24	14.451381564540654	49	30.15931600026239	74	45.8672701840419	99	61.57522900259744
25	15.079697788690837	50	30.787633989638397	75	46.495588479062334	100	62.203547402080716

Собственные функции задачи (2.2.9) имеют вид  $Z_n(z) = A \cos p_n z$ .

Без ограничения общности положим  $A = 1$ . Тогда

$$Z_n(z) = \cos p_n z. \quad (2.2.11)$$

Так как нетривиальные решения уравнения (2.2.5) существуют только при  $\lambda = \lambda_n$ , имеет смысл рассматривать уравнение (2.2.6) только при  $\lambda = \lambda_n$ :

$$\dot{T}_n(t) + \beta \lambda_n T_n(t) = 0. \quad (2.2.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT_n(t)}{dt} = -\beta \lambda_n T_n(t) &\Leftrightarrow \frac{dT_n(t)}{T_n(t)} = -\beta \lambda_n dt \Leftrightarrow \int \frac{dT_n(t)}{T_n(t)} = -\beta \lambda_n \int dt \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln|T_n(t)| = -\beta \lambda_n t + \ln|C_n| \Leftrightarrow \ln|T_n(t)| = \ln|C_n e^{-\beta \lambda_n t}| \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow T_n(t) = C_n e^{-\beta \lambda_n t}. \end{aligned}$$

Тогда общее решение уравнения (2.2.12) имеет вид

$$T_n(t) = C_n e^{-\beta \lambda_n t}. \quad (2.2.13)$$

Подставим решения (2.2.11) и (2.2.13) в уравнение (2.2.5), которое рассматриваем при  $\lambda = \lambda_n$ :

$$v_n(z, t) = Z_n(z) T_n(t) = C_n e^{-\beta \lambda_n t} \cos p_n z.$$

Будем искать решение задачи в виде ряда Фурье по собственным функциям  $Z_n(z)$ :

$$v(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\beta \lambda_n t} \cos p_n z.$$

По построению функция  $v(z, t)$  удовлетворяет уравнению (2.2.1) и краевым условиям (2.2.3) и (2.2.4) при любом  $C_n$ . Теперь выберем коэффициент  $C_n$  так, чтобы  $v(z, t)$  удовлетворяла и начальному условию (2.2.2).

$$v(z, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\beta \lambda_n t} \cos p_n z = \psi\left(z + \frac{l_x}{2}\right).$$

$$\psi\left(z + \frac{l_x}{2}\right) = 5 \sin \frac{\pi}{l_x} \left(z + \frac{l_x}{2}\right) = 5 \sin \left(\frac{\pi z}{l_x} + \frac{\pi}{2}\right) = 5 \cos \frac{\pi z}{l_x}.$$

Посчитаем квадрат нормы собственной функции  $Z_n(z)$ :

$$\begin{aligned} \gamma_n = \|Z_n(z)\|^2 &= \int_0^{\frac{l_x}{2}} \cos^2(p_n z) dz = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{l_x}{2}} (1 + \cos(2p_n z)) dz = \\ &= \frac{1}{2} \left( z + \frac{\sin(2p_n z)}{2p_n} \right) \Big|_0^{\frac{l_x}{2}} = \frac{l_x}{4} + \frac{\sin(p_n l_x)}{4p_n}. \end{aligned}$$

Пользуясь общей формулой для нахождения коэффициентов Фурье функции  $\psi(z)$  по системе собственных функций  $\{Z_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ :

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{\gamma_n} \int_0^{\frac{l_x}{2}} \psi(z) Z_n(z) dz = \frac{5}{\gamma_n} \int_0^{\frac{l_x}{2}} \cos\left(\frac{\pi z}{l_x}\right) \cos(p_n z) dz = \\ &= \frac{5}{2\gamma_n} \int_0^{\frac{l_x}{2}} \cos\left(\left(\frac{\pi}{l_x} + p_n\right) z\right) + \cos\left(\left(\frac{\pi}{l_x} - p_n\right) z\right) dz = \\ &= \frac{5}{2\gamma_n} \left( \frac{\sin\left(\left(\frac{\pi}{l_x} + p_n\right) z\right)}{\frac{\pi}{l_x} + p_n} \Big|_0^{\frac{l_x}{2}} + \frac{\sin\left(\left(\frac{\pi}{l_x} - p_n\right) z\right)}{\frac{\pi}{l_x} - p_n} \Big|_0^{\frac{l_x}{2}} \right) = \\ &= \frac{5}{2\gamma_n} \left( \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{p_n l_x}{2}\right)}{\frac{\pi}{l_x} + p_n} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{p_n l_x}{2}\right)}{\frac{\pi}{l_x} - p_n} \right) = \frac{5}{2\gamma_n} \left( \frac{\cos\left(\frac{p_n l_x}{2}\right)}{\frac{\pi}{l_x} + p_n} + \frac{\cos\left(-\frac{p_n l_x}{2}\right)}{\frac{\pi}{l_x} - p_n} \right) = \\ &= \frac{5l_x^2}{2\gamma_n} \left( \frac{2\pi \cos\left(\frac{p_n l_x}{2}\right)}{l_x(\pi^2 - l_x^2 \lambda_n)} \right) = \frac{5\pi l_x}{\gamma_n(\pi^2 - l_x^2 \lambda_n)} \cos\left(\frac{p_n l_x}{2}\right). \end{aligned}$$

В итоге получаем

$$C_n = \frac{5\pi l_x}{\gamma_n(\pi^2 - l_x^2 \lambda_n)} \cos\left(\frac{p_n l_x}{2}\right). \quad (2.2.14)$$

### 2.3 Аналитическое решение второй подзадачи (Долгих Д.Ю.)

Для решения задачи (2.1.3) применим метод разделения переменных.

Будем искать решение в виде:

$$\omega(y, t) = Y(y)T(t). \quad (2.3.1)$$

Подставив (2.3.1) в наше уравнение, получим:

$$Y(y)\dot{T}(t) + \beta Y''(y)T(t) = 0,$$

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \frac{\dot{T}(t)}{\beta T(t)} = -\lambda.$$

Решим следующую задачу Штурма-Лиувилля:

$$Y''(y) + \lambda Y(y) = 0,$$

$$Y'(0) = Y'(l_y) = 0,$$

где краевые условия получены из подстановки  $\omega(y, t) = Y(y)T(t)$  в краевые условия уравнения.

$$\omega_y(0, t) = \omega_y(l_y, t) = 0,$$

$$Y'(0)T(t) = Y'(l_y)T(t) = 0.$$

Так как мы ищем нетривиальные решения задачи, то  $T(t)$  не может равняться нулю, значит, можем на нее сократить и получить краевые условия для задачи Штурма-Лиувилля:

$$Y'(0) = Y'(l_y) = 0.$$

Решим задачу Штурма-Лиувилля:

$$Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \quad (2.3.2)$$

$$Y'(0) = Y'(l_y) = 0. \quad (2.3.3)$$

Обозначим  $\lambda = \rho^2$  для удобства. Будем считать, что  $\rho \neq 0$ .

$$Y(y) = A\cos(\rho y) + B\sin(\rho y),$$

$$Y'(y) = -\rho A\sin(\rho y) + \rho B\cos(\rho y).$$

Подставим эти выражения в краевые условия 2.3.3:

$$Y'(0) = 0 = \rho B,$$

$$B = 0,$$



$$Y'(l) = \rho A \sin(l_y y) = 0,$$

$$\sin(\rho l_y) = \pi n, n \in Z,$$

$$\rho_n = \frac{\pi n}{l_y}, n \in Z.$$

Рассмотрим отдельно случай  $\rho = 0$ .

$$\begin{cases} Y(y) = A + By, \\ Y'(y) = B; \end{cases}$$

$$Y'(0) = Y'(l_y) = 0 = B,$$

$$A = const.$$

Следовательно,  $\lambda = 0$  является собственным числом, и соответствующая ему собственная функция имеет вид  $Y_0(y) \equiv 1$ . Получаем следующие собственные числа:

$$\lambda_n = \rho_n^2 = \left(\frac{\pi n}{l_y}\right)^2, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (2.3.4)$$

И соответствующие им собственные функции:

$$Y_n(y) = \cos \frac{\pi n y}{l_y}. \quad (2.3.5)$$

Так как нетривиальные решения второго уравнения существуют только при  $\lambda = \lambda_n$ , имеет смысл рассматривать второе уравнение только при  $\lambda = \lambda_n$ .

$$\dot{T}(t) + \beta \lambda_n T(t) = 0. \quad (2.3.6)$$

Путем несложных преобразований получаем знакомое общее решение уравнения (2.3.6):

$$T_n(t) = A_n e^{-\beta \lambda_n t}. \quad (2.3.7)$$

Подставим решения (2.3.5) и (2.3.7) в уравнение (2.3.1), которое рассматриваем при  $\lambda = \lambda_n$ :

$$\omega_n(y, t) = Y_n(y) T_n(t) = A_n e^{-\beta \lambda_n t} \cos \frac{\pi n y}{l_y}.$$

Будем искать решение задачи в виде ряда Фурье по собственным функциям  $Y_n(y)$ :

$$\omega(y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\beta \lambda_n t} \cos \frac{\pi n y}{l_y}.$$

По построению функция  $\omega(y, t)$  удовлетворяет уравнению и краевым условиям при любом  $A_n$ . Теперь выберем коэффициент  $A_n$  так, чтобы  $\omega(y, t)$  удовлетворяла и начальному условию.

$$\omega(y, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{\pi n y}{l_y} = \eta(y).$$

Пользуясь общей формулой для нахождения коэффициентов Фурье функции  $\eta(y)$  по системе собственных функций  $\{Y_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$ :

$$A_n = \frac{1}{\|Y_n(y)\|^2} \int_0^{l_y} \eta(y) Y_n(y) dy,$$

$$\|Y_n(y)\|^2 = \frac{2}{l_y} \int_0^{l_y} \cos^2 \frac{\pi n y}{l_y} dy = \frac{l_y}{2}.$$

Вычисляем:

$$A_n = \frac{8}{l_y} \int_0^{\frac{l_y}{2}} \cos \frac{\pi n y}{l_y} dy = \frac{8}{l_y} \frac{l_y}{\pi n} \sin \frac{\pi n y}{l_y} \Big|_0^{\frac{l_y}{2}} = \frac{8}{\pi n} (-1)^{\frac{n-1}{2}}, n \in \{1, 3, 5, \dots\}.$$

Для случая  $n = 0$ :

$$A_0 = \frac{8}{l_y} \int_0^{\frac{l_y}{2}} dy = \frac{8}{l_y} \frac{l_y}{2} = 4.$$

В итоге мы получаем решение краевой задачи в виде ряда Фурье:

$$\omega(y, t) = 4 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\beta \lambda_n t} \cos \frac{\pi n y}{l_y},$$

где коэффициенты  $A_n$  находятся по формуле:

$$A_n = \frac{8}{\pi n} (-1)^{\frac{n-1}{2}}, n \in \{1, 3, 5, \dots\}.$$

### 3 Аналитическая оценка остатка ряда

#### 3.1 Оценка первой подзадачи (Дробин Р.Р.)

Имеем ряд Фурье:

$$v(z, t) = v(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\beta \lambda_n t} \cos p_n z, \quad (4.1.1)$$

где коэффициенты  $C_n$  находятся по формуле (2.2.14).

Частичная сумма:

$$v_N(z, t) = \sum_{n=1}^N C_n e^{-\beta \lambda_n t} \cos(p_n z). \quad (4.1.2)$$

Возникшая погрешность усеченного ряда совпадает с остатком ряда:

$$R_N(z, t) = \sum_{n=N+1}^{\infty} C_n e^{-\beta \lambda_n t} \cos(p_n z). \quad (4.1.3)$$

Фактическая погрешность, возникшая при усечении ряда:

$$\varepsilon_{\text{факт}}(z, t) = |v(z, t) - v_N(z, t)| = |R_N(z, t)|, \quad (4.1.4)$$

$$|R_N(z, t)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |C_n| |e^{-\beta \lambda_n t}| |\cos(p_n z)|.$$

Заметим, что  $|e^{-\beta \lambda_n t}| \leq 1$  и  $0 \leq |\cos(p_n z)| \leq 1$ . Тогда:

$$\begin{aligned} |v(z, t)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |C_n|; \\ |R_N(z, t)| &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |C_n| = \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \frac{5\pi l_x}{\gamma_n (\pi^2 - l_x^2 \lambda_n)} \cos\left(\frac{p_n l_x}{2}\right) \right| = \\ &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \frac{5\pi l_x}{\left(\frac{l_x}{4} + \frac{\sin(p_n l_x)}{4p_n}\right) (\pi^2 - l_x^2 \lambda_n)} \cos\left(\frac{p_n l_x}{2}\right) \right|. \end{aligned}$$

Заметим, что  $0 \leq \left| \cos\left(\frac{p_n l_x}{2}\right) \right| \leq 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow |R_N(z, t)| \leq 20\pi l_x \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \frac{1}{\left(l_x + \frac{\sin(p_n l_x)}{p_n}\right)} \right| \left| \frac{1}{(\pi^2 - l_x^2 p_n^2)} \right|.$$

Из уравнения (2.2.10) при  $p = p_n$  имеем:

$$tg \frac{p_n l_x}{2} = \frac{h}{p_n} \Leftrightarrow \cos \frac{p_n l_x}{2} = \frac{p_n}{h} \sin \frac{p_n l_x}{2},$$

$$\sin(p_n l_x) = 2 \sin \frac{p_n l_x}{2} \cos \frac{p_n l_x}{2} = \frac{2p_n}{h} \sin^2 \frac{p_n l_x}{2};$$

Подставим выражение для  $\sin(p_n l_x)$  в оценку  $R_N$ :

$$|R_N(z, t)| \leq 20\pi l_x \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \frac{1}{\left(l_x + \frac{2}{h} \sin^2 \frac{p_n l_x}{2}\right)} \right| \left| \frac{1}{(\pi^2 - l_x^2 p_n^2)} \right|.$$

$$\sin^2 \frac{p_n l_x}{2} \geq 0 \Leftrightarrow l_x + \frac{2}{h} \sin^2 \frac{p_n l_x}{2} \geq l_x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{l_x + \frac{2}{h} \sin^2 \frac{p_n l_x}{2}} \leq \frac{1}{l_x} \Leftrightarrow \left| \frac{1}{\left(l_x + \frac{2}{h} \sin^2 \frac{p_n l_x}{2}\right)} \right| \leq \frac{1}{l_x};$$

Тогда оценка остатка ряда примет вид:

$$|R_N(z, t)| \leq 20\pi \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \frac{1}{\pi^2 - l_x^2 p_n^2} \right| = 20\pi \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{l_x^2 p_n^2 - \pi^2};$$

Положим  $q = \frac{\pi}{l_x}$ . Тогда

$$\begin{aligned} |R_N(z, t)| &\leq \frac{20\pi}{l_x^2} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{p_n^2 - q^2} \leq \frac{20\pi}{l_x^2} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{(p_n - q)(p_n + q)} \leq \\ &\leq \frac{20q}{l_x} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{(p_n - q)p_n}; \end{aligned}$$

Применяя оценку (2.2.10.1), получим:

$$\begin{aligned} p_n > q(2n - 1) &\Leftrightarrow p_n - q > q(2n - 1) - q = q(2n - 2) = 2q(n - 1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{p_n - q} < \frac{1}{2q(n - 1)}; \\ p_n > q(2n - 1) &\Leftrightarrow \frac{1}{p_n} < \frac{1}{q(2n - 1)}; \end{aligned}$$

Подставив оценки эти оценки в  $R_N$ , получим:

$$\begin{aligned} |R_N(z, t)| &< \frac{20q}{l_x} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2q(n - 1)q(2n - 1)} = \frac{10}{\pi} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{(n - 1)(2n - 1)} < \\ &< \frac{10}{\pi} \int_N^{\infty} \frac{ds}{(s - 1)(2s - 1)} = \frac{10}{\pi} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_N^a \frac{ds}{(s - 1)(2s - 1)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{10}{\pi} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_N^a \left( \frac{1}{s-1} - \frac{2}{2s-1} \right) ds = \frac{10}{\pi} \lim_{a \rightarrow \infty} \left[ \ln|s-1|_N^a - \ln|2s-1|_N^a \right] = \\
&= \frac{10}{\pi} \lim_{a \rightarrow \infty} \left[ \ln \left| \frac{s-1}{2s-1} \right|_N^a \right] = \frac{10}{\pi} \lim_{a \rightarrow \infty} \left[ \ln \left| \frac{a-1}{2a-1} \right| - \ln \left| \frac{N-1}{2N-1} \right| \right] = \\
&= \frac{10}{\pi} \left( \lim_{a \rightarrow \infty} \ln \left| \frac{1 - \frac{1}{a}}{2 - \frac{1}{a}} \right| - \ln \left| \frac{N-1}{2N-1} \right| \right) = \frac{10}{\pi} \left( \ln \frac{1}{2} - \ln \left| \frac{N-1}{2N-1} \right| \right).
\end{aligned}$$

Получаем мажоранту  $\Phi(N)$ :

$$\Phi(N) = \frac{10}{\pi} \left( \ln \frac{1}{2} - \ln \left| \frac{N-1}{2N-1} \right| \right). \quad (4.1.5)$$

Чтобы оценка не была слишком грубой, для функции  $\Phi(N)$  должно выполняться свойство:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Phi(N) = 0.$$

Проверим это свойство:

$$\begin{aligned}
\lim_{N \rightarrow \infty} \Phi(N) &= \frac{10}{\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \ln \frac{1}{2} - \ln \left| \frac{N-1}{2N-1} \right| \right) = \frac{10}{\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \ln \frac{1}{2} - \ln \left| \frac{1 - \frac{1}{N}}{2 - \frac{1}{N}} \right| \right) = \\
&= \frac{10}{\pi} \left( \ln \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{2} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Требуем:

$$\Phi(N) \leq \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  – заданный пользователем уровень погрешности.

Из (4.1.4) получаем  $N(\varepsilon)$  – число слагаемых в (2), гарантирующее выполнение условия:

$$\varepsilon_{\text{факт}}(z, t) \leq \varepsilon.$$

### 3.2 Оценка второй подзадачи (Долгих Д.Ю.)

Ряд Фурье:

$$\omega(y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\beta \lambda_n t} \cos \frac{\pi n y}{l_y},$$

где коэффициент  $A_n$  находится по формуле:

$$A_0 = 4, \quad A_n = \frac{8}{\pi n} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \quad n \in \{1, 3, 5, \dots\}.$$

Частичная сумма:

$$\omega_N(y, t) = \sum_0^N A_n e^{-\beta \lambda_n t} \cos \frac{\pi n y}{l_y}. \quad (4.2.1)$$

Возникшая погрешность усеченного ряда совпадает с остатком ряда:

$$R_N(y, t) = \sum_{N+1}^{\infty} A_n e^{-\beta \lambda_n t} \cos \frac{\pi n y}{l_y}.$$

Фактическая погрешность, возникшая при усечении ряда:

$$\varepsilon_{\text{факт}}(y, t) = |\omega(y, t) - \omega_N(y, t)| = |R_N(y, t)|,$$

$$|R_N(y, t)| \leq \sum_{N+1}^{\infty} |A_n| |e^{-\beta \lambda_n t}| \left| \cos \frac{\pi n y}{l_y} \right|.$$

Заметим, что  $0 \leq \left| \cos \frac{\pi n y}{l_y} \right| \leq 1$  и  $e^{-\beta \lambda_n t} > 0$ . Тогда:

$$|R_N(y, t)| \leq \sum_{N+1}^{\infty} \frac{8}{\pi n} e^{-\beta \lambda_n t} < \int_N^{\infty} \frac{8}{\pi x} e^{-\beta \left(\frac{\pi x}{l_y}\right)^2 t} dx,$$

$$\int_N^{\infty} \frac{8}{\pi x} e^{-\beta \left(\frac{\pi x}{l_y}\right)^2 t} dx = \int_N^{\infty} \frac{8x}{\pi x^2} e^{-\beta \left(\frac{\pi x}{l_y}\right)^2 t} dx.$$

Так как выполняется неравенство  $\frac{1}{x^2} < \frac{1}{N^2}$ , то

$$\begin{aligned} \int_N^\infty \frac{8x}{\pi x^2} e^{-\beta \left(\frac{\pi x}{l_y}\right)^2 t} dx &< \frac{1}{N^2} \int_N^\infty \frac{8x}{\pi} e^{-\beta \left(\frac{\pi x}{l_y}\right)^2 t} dx = \frac{4}{\pi N^2} \int_N^\infty e^{-\beta \left(\frac{\pi x}{l_y}\right)^2 t} dx^2 \\ &= \frac{4l_y^2}{-\beta \pi^3 N^2 t} \int_N^\infty e^{-\beta \left(\frac{\pi x}{l_y}\right)^2 t} d\left(\frac{-\beta \pi^2 x^2 t}{l_y^2}\right) = \frac{4l_y^2}{\beta \pi^3 N^2 t} e^{-\beta \left(\frac{\pi N}{l_y}\right)^2 t}. \end{aligned}$$

Получаем мажоранту  $\Phi(N)$ :

$$\Phi(N) = \frac{4l_y^2}{\beta \pi^3 N^2 t} e^{-\beta \left(\frac{\pi N}{l_y}\right)^2 t}. \quad (4.2.2)$$

Для нее выполняется свойство:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Phi(N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{4l_y^2}{\beta \pi^3 N^2 t} e^{-\beta \left(\frac{\pi N}{l_y}\right)^2 t} = 0.$$

Требуем:

$$\Phi(N) \leq \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  – заданный пользователем уровень погрешности.

Из неравенства, указанного выше, получаем  $N(\varepsilon)$  – число слагаемых в (4.2.1), гарантирующее выполнение условия:

$$\varepsilon_{\text{факт}}(y, t) \leq \varepsilon.$$

## 4 Построение графиков

### 4.1 Построение графиков для первой подзадачи (Дробин Р.Р., Степанов Н.А.)

На рисунке 1 представлен график зависимости температуры  $v(z, t)$  от координаты  $z$  при фиксированном времени  $t$ .

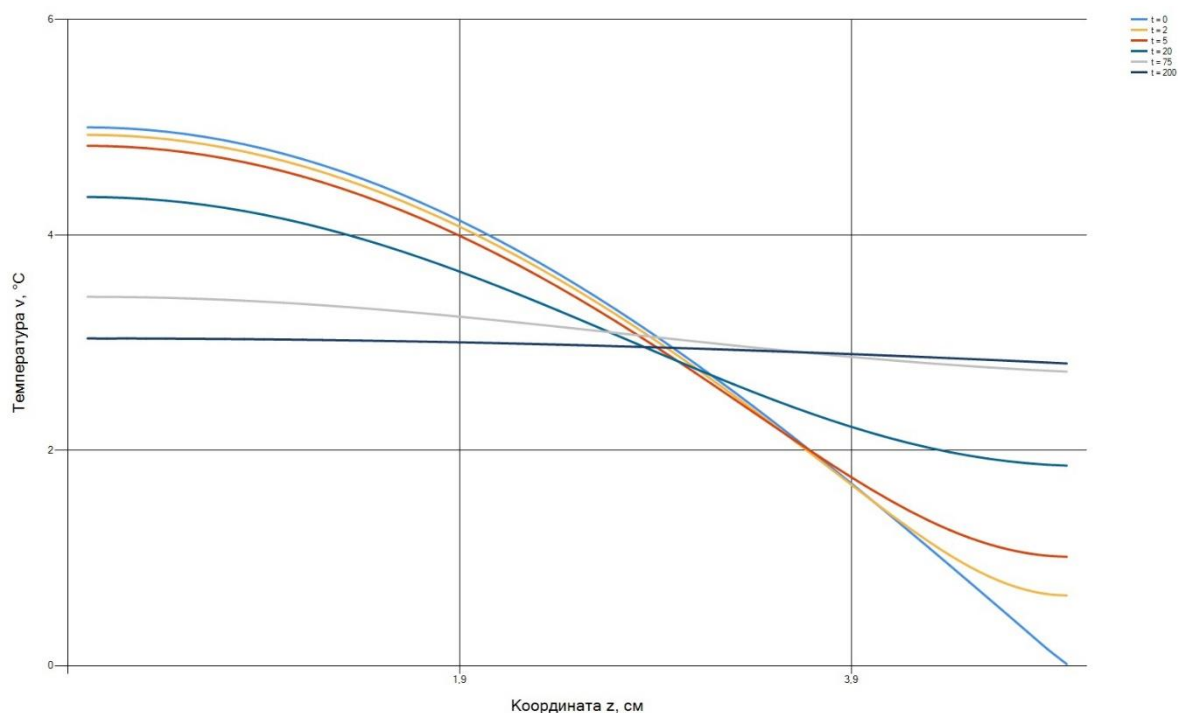


Рисунок 1 – график зависимости температуры  $v(z, t)$  от  $z$

На рисунке 2 представлен график зависимости температуры  $v(z, t)$  от температуры  $t$  при фиксированной координате  $z$ .



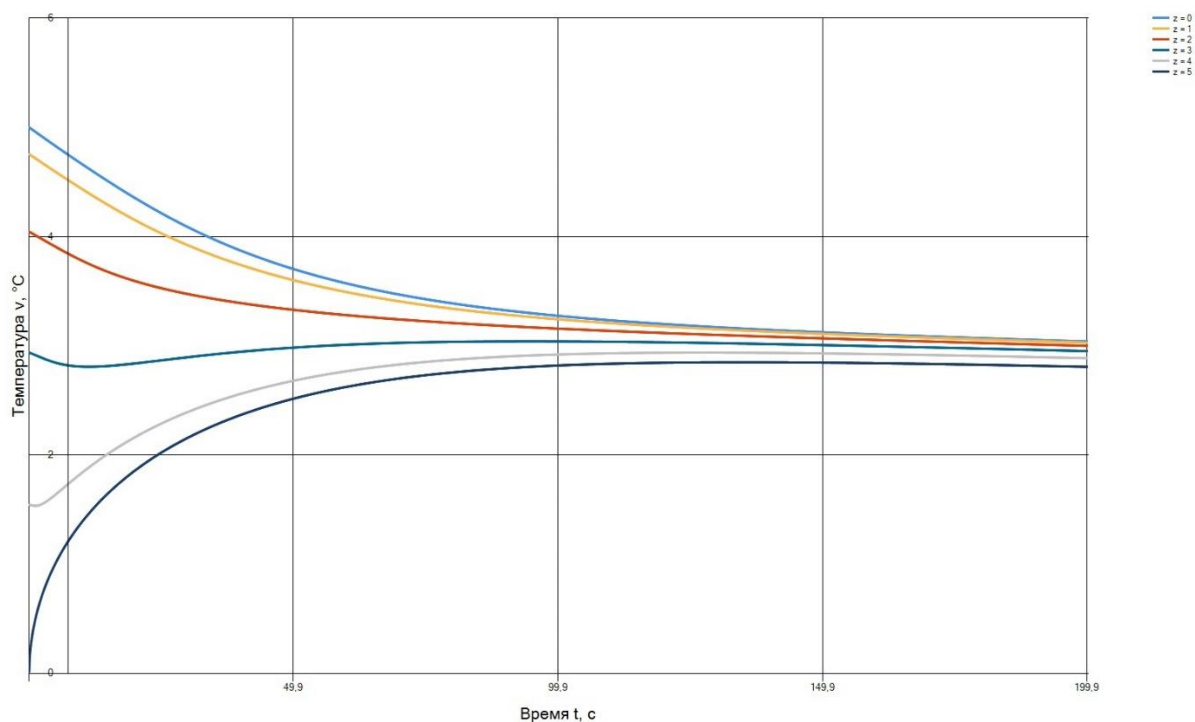


Рисунок 2 – график зависимости температуры  $v(z, t)$  от  $t$

Как видно из рисунков 1 и 2, на границах пластины температуры были разные, когда в ее середине температура равнялась 3 градусам (средняя температура по  $z$ ). В итоге, с течением времени температура для любого  $z$  стремится к 3 градусам.

#### 4.2 Построение графиков для второй подзадачи (Долгих Д.Ю.)

На рисунке 3 представлен график зависимости температуры  $\omega(y, t)$  от координаты  $y$  при фиксированном времени  $t$ .

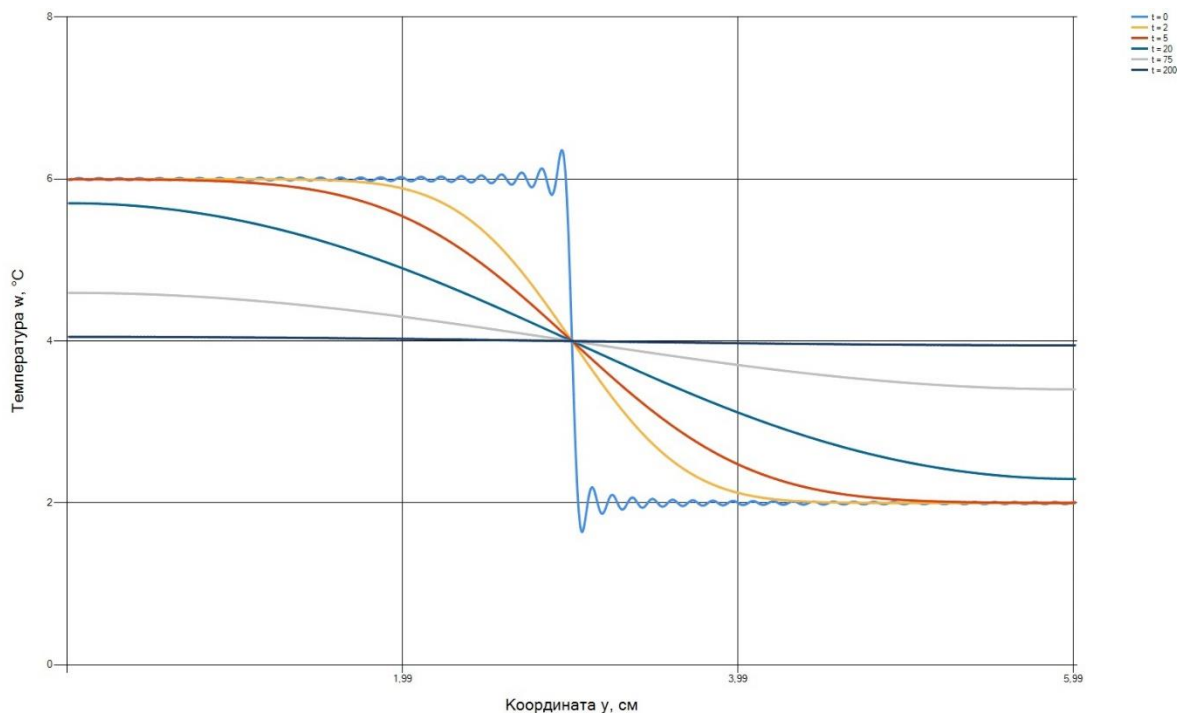


Рисунок 3 – график зависимости температуры  $\omega(y, t)$  от  $y$

На рисунке 4 представлен график зависимости температуры  $\omega(y, t)$  от температуры  $t$  при фиксированной координате  $y$ .

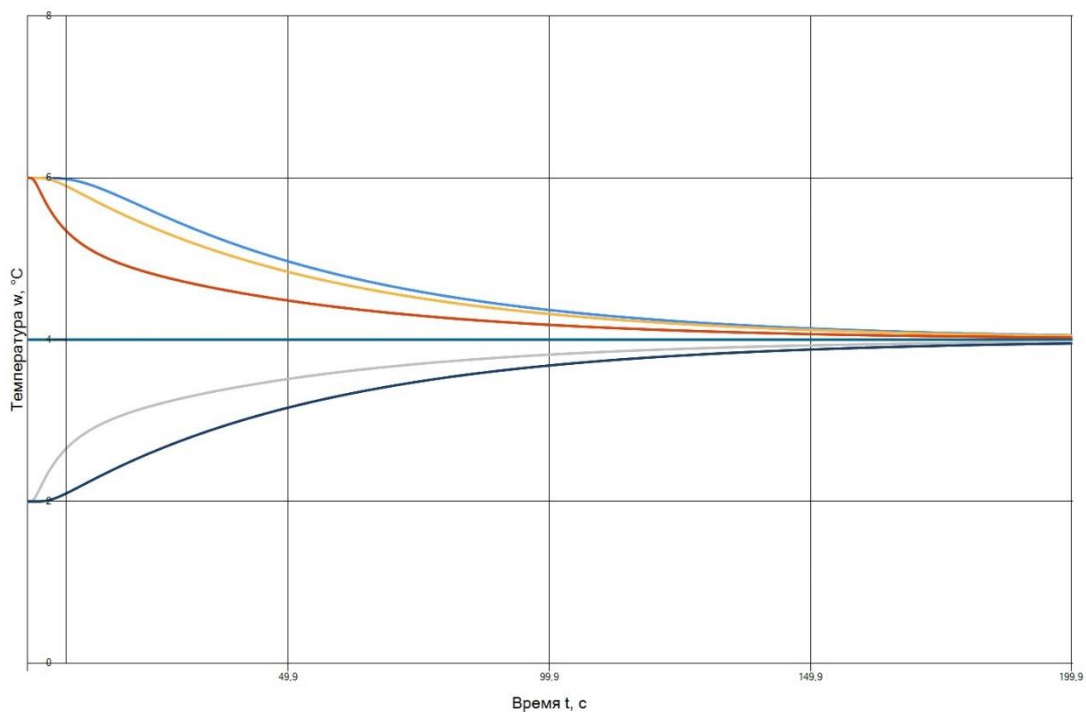


Рисунок 4 – график зависимости температуры  $\omega(y, t)$  от  $t$

Как видно из рисунков 3 и 4, на границах пластины температуры были разные, когда же в ее середине температура равнялась 4 градусам (средняя

температура по  $y$ ). В итоге, с течением времени температура для любого  $y$  стремится к 4 градусам.

## 5 Экспериментальное исследование качества полученной аналитической оценки остатка ряда Фурье

### 5.1 Экспериментальное исследование качества оценки для первой подзадачи

Для исследования качества полученной оценки был разработан программный модуль, результаты приведены в таблицах ниже: для первой подзадачи расчёты производились при  $z = 0$  и  $t = 0.01, 5, 100$ . Можно заметить, что мажоранта (4.1.5) не зависит ни от  $z$  ни от  $t$ , поэтому числа  $N_\varepsilon$  одинаковы для всех  $t$ . Все исследования ниже производились при  $z = 0$ .

Таблица 3 - Исследование качества полученной оценки при  $t = 0.01$

$\varepsilon$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$10^{-7}$	$10^{-8}$
$N_\varepsilon$	160	1593	15917	159156	1591551	15915496	159154941
$N_{\text{эксп}}$	10	27	58	91	121	147	170

Таблица 4 - Исследование качества полученной оценки при  $t = 5$

$\varepsilon$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$10^{-7}$	$10^{-8}$
$N_\varepsilon$	160	1593	15917	159156	1591551	15915496	159154941
$N_{\text{эксп}}$	4	6	7	8	9	10	11

Таблица 5 - Исследование качества полученной оценки при  $t = 100$

$\varepsilon$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$10^{-7}$	$10^{-8}$
$N_\varepsilon$	160	1593	15917	159156	1591551	15915496	159154941
$N_{\text{эксп}}$	2	2	2	2	3	3	3

Таким образом, можно сделать вывод о том, что найденная нами оценка остатка ряда Фурье обладает низким качеством для получения расчета процесса остывания приемлемой погрешности.

## 5.2 Экспериментальное исследование качества оценки для второй подзадачи

Для исследования качества полученной оценки был разработан программный модуль, результаты приведены в таблицах ниже: для первой подзадачи расчёты производились при  $y = 0$  и  $t = 0.01, 5, 15, 100$ . Можно заметить, что мажоранта (4.2.2) не зависит от  $y$ , поэтому числа  $N_\varepsilon$  одинаковы для всех  $y$ . Все исследования ниже производились при  $y = 0$ .

Таблица 6 - Исследование качества полученной оценки при  $t = 0.01$

$\varepsilon$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$10^{-7}$	$10^{-8}$
$N_\varepsilon$	136	168	197	222	245	267	287
$N_{\text{эксп}}$	32	57	77	93	107	120	132

Таблица 7 - Исследование качества полученной оценки при  $t = 5$

$\varepsilon$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$10^{-7}$	$10^{-8}$
$N_\varepsilon$	7	8	9	10	11	12	13
$N_{\text{эксп}}$	4	5	4	6	7	7	8

Таблица 8 - Исследование качества полученной оценки при  $t = 15$

$\varepsilon$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$10^{-7}$	$10^{-8}$
$N_\varepsilon$	4	5	6	6	7	7	8
$N_{\text{эксп}}$	3	3	4	4	4	5	5

Таблица 9 - Исследование качества полученной оценки при  $t = 100$

$\varepsilon$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$10^{-7}$	$10^{-8}$
$N_\varepsilon$	3	3	3	3	3	3	4
$N_{\text{эксп}}$	3	3	3	2	2	2	4

Таким образом, можно сделать вывод о том, что найденную оценку остатка ряда Фурье можно использовать для расчета нужной нам погрешности, начиная с  $t \geq 15$ .

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В результате выполнения работы осуществлена постановка краевой задачи, расщепление её на подзадачи для каждой из независимых переменных, получено аналитическое решение каждой из подзадач в виде бесконечного ряда Фурье.

Получена оценка остатка ряда, которая была использована в компьютерной программе численного моделирования и позволила обеспечить контроль погрешности усечения бесконечного ряда.

В результате серии вычислительных экспериментов установлено, что использование в программе полученной оценки остатка ряда для первой подзадачи может приводить к существенной избыточности числа суммируемых элементов ряда, т.е. оценка низкого качества, вследствие чего использовать её на практике не рекомендуется.

Оценка для второй подзадачи может приводить к несущественной избыточности числа суммируемых элементов ряда, т.е. оценка высокого качества, вследствие чего имеет место применение её на практике.

## **СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики [Текст]: учеб. пособие для университетов / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1972. – 736 с.

## Приложение А (Дробин Р.Р., Степанов Н.А.)

В этом приложении описаны классы и методы для экспериментального исследования оценки ряда, а также для суммирования конечного числа членов полученного ряда, относящиеся к первой подзадаче.

```
using MTP;
using System;
using System.Collections.Generic;
using System.Linq;

namespace MPE.Classes
{
    public class Task1
    {
        public double T;
        public double lx;
        public double a;
        public double k;
        public double c;
        public double b;
        public int N;
        public static double eps = Math.Pow(10, -12);

        //public static int pCounter = 0;
        public static double d = Math.Pow(10, -7);
        public static double l = d;

        public List<double> pn;
        public List<double> gn;
        public List<double> cn;
        public List<Func<double, double, double>> functions;

        public Task1(InputHelper inputHelper)
        {
            T = inputHelper.T;
            lx = inputHelper.l_x;
            a = inputHelper.a;
            k = inputHelper.k;
            a /= k;
            c = inputHelper.c;
            N = inputHelper.N;
        }
    }
}
```



```

        b = k / c;
        pn = GetPn();
        gn = GetGn();
        cn = GetCn();
        functions = GetFunctions();
    }

    public double GetRoot(double left, double right, double eps)
    {
        double mid = (left + right) / 2;
        while (Math.Abs(right - left) > 2 * eps)
        {
            mid = (left + right) / 2;
            if (F(mid) * F(right) <= 0)
                left = mid;
            else
                right = mid;
        }
        return mid;
    }

    public double F(double x) //2.2.10
    {
        return Math.Tan(lx * x / 2) - a / x;
    }

    public List<double> GetPn()
    {
        var result = new List<double>();
        for (int i = 0; i < N; ++i)
        {
            double rAsymp = Math.PI * (2 * i + 1) / lx;
            result.Add(GetRoot(l, rAsymp - d, eps));
            l = rAsymp + d;
        }
        return result;
    }

    public List<double> GetGn()
    {
        var result = new List<double>();
        for (int i = 0; i < N; ++i)
        {

```

```

        result.Add((lx / 4) + Math.Sin(pn[i] * lx) / (4 * pn[i]));
    }
    return result;
}

public List<double> GetCn()
{
    var result = new List<double>();
    for (int i = 0; i < N; ++i)
    {
        result.Add(5 * Math.PI * lx * Math.Cos(pn[i] * lx / 2) / (gn[i] *
(Math.PI * Math.PI - lx * lx * pn[i] * pn[i])));
    }
    return result;
}

public List<Func<double, double, double>> GetFunctions()
{
    var result = new List<Func<double, double, double>>();
    for (int i = 0; i < N; ++i)
    {
        var c = cn[i];
        var p = pn[i];
        result.Add((z, t) => c * Math.Exp(-b * p * p * t) * Math.Cos(p * z));
    }
    return result;
}

public double GetFunctionValue(double z, double t)
{
    return functions.Select(f => f(z, t)).Sum();
}
}
}

```

## Приложение В (Долгих Д.Ю.)

В этом приложении описаны классы и методы для экспериментального исследования оценки ряда, а также для суммирования конечного числа членов полученного ряда, относящиеся ко второй подзадаче.

```

using MTP;
using System;
using System.Runtime.InteropServices;
using System.Windows.Forms;

namespace MPE
{
    public class Task2Solver
    {
        private double B ;//TODO: посмотреть знак констант
        private double Ly ;
        private int N ;
        private double Tr;
        private double t;
        private double y;
        private double[] An;

        public Task2Solver(InputHelper input) {
            B = input.k / input.c;
            Ly = input.l_y;
            N = input.N;
            Tr = input.T;
            An = InitAn(input.N);
        }

        public double GetLy()
        {
            return Ly;
        }

        public void SetLy(double Ly)
        {
            if (Ly < 0)
                throw new Exception("Ly < 0");
            this.Ly = Ly;
        }

        public double GetTr()
        {
            return Tr;
        }

        public void SetTr(double Tr)
    }

```

```

{
    if (Tr < 0)
        throw new Exception("Tr < 0");
    this.Tr = Tr;
}

public double GetY() {
    return y;
}

public void SetY(double y) {
    if (y < 0 || y > Ly)
        throw new Exception("y<0 or y>Ly");
    this.y = y;
}

public double GetT()
{
    return t;
}

public void SetT(double t)
{
    if (t < 0 || t > Tr)
        throw new Exception("t<0 or t>T");
    this.t = t;
}

public void SetN(int N) {
    if (this.N != N)
    {
        this.N = N;
        InitAn(N);
    }
    if(N<1)
        throw new Exception("N<1");//TODO
}

public int GetN()
{
    return N;
}

private double[] InitAn(int N)

```

```

    {
        double[] An = new double[N / 2 + 2];
        An[0] = 4;
        for (int i = 1, j = 1; i <= N; i += 2, ++j)
        {
            An[j] = (8 / (Math.PI * i)) * Math.Pow(-1, (i - 1) / 2);
        }
        return An;
    }

    public double GetPartialSum()
    {
        double sum = An[0];
        for (int i = 1, j = 1; i <= N; i += 2, ++j)
        {
            sum += An[j] * Math.Exp(-B * Math.Pow(Math.PI * i / Ly, 2) * t)
                * Math.Cos(Math.PI * i * y / Ly);
        }
        return sum;
    }
}
}

```

## Приложение С

В этом приложении описаны классы и методы для построения серии точек графика и его отрисовки на экране.

```

using System;
using System.Collections.Generic;
using System.ComponentModel;
using System.Windows.Forms;
using System.Windows.Forms.DataVisualization.Charting;
using MPE.Classes;
using MTP;

namespace MPE
{
    public partial class DrawingForm : Form
    {

```

```

public Button taskButton;
public Task1 solver;
public Task2Solver task2;
public DrawingForm(Button taskButton, InputHelper inputHelper)
{
    this.taskButton = taskButton;
    solver = new Task1(inputHelper);
    task2 = new Task2Solver(inputHelper);
    InitializeComponent();
}
public void Draw1(Chart chart1, Chart chart2)
{
    chart1.ChartAreas[0].AxisX.ScaleView.Zoomable = true;
    chart1.ChartAreas[0].AxisY.ScaleView.Zoomable = true;
    double[] tValues = { 0, 2, 5, 20, 75, 200 }; //Фиксируем t, x = z, y =
f(x,t)
    for(int i = 0; i < 6; ++i)
    {
        chart1.Series[i].LegendText = string.Format("t = {0}", tValues[i]);
        double a = 0, b = solver.lx / 2, h = 0.1, x, y; // 0 < z < 5
        chart1.Series[i].Points.Clear();
        x = a;
        while (x <= b)
        {
            y = solver.GetFunctionValue(x, tValues[i]);
            chart1.Series[i].Points.AddXY(x, y);
            x += h;
        }
    }
    chart2.ChartAreas[0].AxisX.ScaleView.Zoomable = true;
    chart2.ChartAreas[0].AxisY.ScaleView.Zoomable = true;
    double[] zValues = { 0, 1, 2, 3, 4, 5 }; //Фиксируем z, x = t, y = f(z,x)
    for (int i = 0; i < 6; ++i)
    {
        chart2.Series[i].LegendText = string.Format("z = {0}", zValues[i]);
        double a = 0, b = solver.T, h = 0.1, x, y; // 0 < t < 200
        chart2.Series[i].Points.Clear();
        x = a;
        while (x <= b)
        {
            y = solver.GetFunctionValue(zValues[i], x);
            chart2.Series[i].Points.AddXY(x, y);
            x += h;
        }
    }
}

```

```

        }
    }
}

public void Draw2(Chart chart1, Chart chart2)
{
    var valuesForT = new List<int> { 0, 2, 5, 20, 75, 200 };
    for (int i = 0; i < valuesForT.Count; ++i)
    {
        chart1.Series[i].LegendText = string.Format("t = {0}",
valuesForT[i]);
        double a = 0, b = task2.GetLy(), h = 0.01, x, y;
        chart1.Series[i].Points.Clear();
        x = a;
        task2.SetT(valuesForT[i]);
        while (x <= b)
        {
            task2.SetY(x);
            y = task2.GetPartialSum();
            chart1.Series[i].Points.AddXY(x, y);
            x += h;
        }
    }
    var valuesForY = new List<int> {0, 1, 2, 3, 4, 5};
    for (int i = 0; i < valuesForY.Count; ++i)
    {
        chart2.Series[i].LegendText = string.Format("y = {0}",
valuesForY[i]);
        double a = 0, b = task2.GetTr(), h=0.1, x, y;
        chart2.Series[i].Points.Clear();
        x = a;
        task2.SetY(valuesForY[i]);
        while (x <= b)
        {
            task2.SetT(x);
            y = task2.GetPartialSum();
            chart2.Series[i].Points.AddXY(x, y);
            x+=h;
        }
    }
}

private void btnAddTable_Click(object sender, EventArgs e)
{

```

```

Axis ax = new Axis
{
    Title = "Время t, с"
};
chart2.ChartAreas[0].AxisX = ax;
string temp, coord;
if (taskButton.Text == " 2 подзадача")
{
    temp = "Температура w, °C";
    coord = "Координата y, см";
}
else
{
    temp = "Температура v, °C";
    coord = "Координата z, см";
}
Axis ay = new Axis
{
    Title = temp
};
ay.TitleFont = new System.Drawing.Font("Microsoft Sans Serif", 15.75F,
System.Drawing.FontStyle.Regular, System.Drawing.GraphicsUnit.Point, 204);
ax.TitleFont = new System.Drawing.Font("Microsoft Sans Serif", 15.75F,
System.Drawing.FontStyle.Regular, System.Drawing.GraphicsUnit.Point, 204);
chart2.ChartAreas[0].AxisY = ay;
Axis ax2 = new Axis
{
    Title = coord
};
ax2.TitleFont = new System.Drawing.Font("Microsoft Sans Serif", 15.75F,
System.Drawing.FontStyle.Regular, System.Drawing.GraphicsUnit.Point, 204);
chart1.ChartAreas[0].AxisX = ax2;
chart1.ChartAreas[0].AxisY = ay;
if (taskButton.Text == " 2 подзадача")
{
    Draw2(chart1, chart2);
}
else
{
    Draw1(chart1, chart2);
}
}
}

```