УДК: 517.984
MSC2010: 34L20

ЗАДАЧА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С УСЛОВИЕМ РАЗРЫВА

© Р. Р. Дробин, Н. П. Бондаренко

Саратовский национальный исследовательский государственный университет
имени Н. Г. Чернышевского
кафедра математической физики и вычислительной математики
ул. Астраханская, 83, Саратов, 410012, Российская Федерация

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева
кафедра прикладных математики и физики
Московское шоссе, 34, Самара, 443086, Российская Федерация
e-mail: *satyrareddit@gmail.com, bondarenkonp@sgu.ru*

The Sturm-Liouville problem with a discontinuity condition.

Drobin R. R., Bondarenko N. P.

Abstract. This paper deals with spectral analysis for the Sturm-Liouville problem with distribution potential of class $W_2^{-1}(0,T)$ and with a discontinuity inside the interval. The class of generalized functions $W_2^{-1}(0,T)$ includes, in particular, potentials with the Dirac δ-function-type singularities and with the Coulomb singularities $\frac{1}{x-c}$, which are used in models of quantum mechanics.

The Sturm-Liouville boundary value problems arise when solving equations of mathematical physics by variable separation method. They are widely used in various fields of mathematics, mechanics, physics, etc. The properties of the eigenvalues and eigenfunctions of the Sturm-Liouville problem play an important role in this case.

Boundary value problems with discontinuities inside an interval are related to discontinuous properties of medium. In particular, such problems arise in geophysical models of the Earth and in radio electronics. A large number of studies are concerned with solving inverse spectral problems with discontinuity conditions.

At the same time, spectral theory for the Sturm-Liouville operators with distribution potentials has been rapidly developing. Considering distribution coefficients in the inverse problem theory has led to spectral data characterization for new classes of differential operators. It is promising to transfer that approach to problems with discontinuities, which explains the interest to studying the discontinuous Sturm-Liouville problem with singular potential. The problem, which is considered in this paper, is essentially new. To the best of the authors' knowledge, this problem was not investigated before.

This paper aims to study some spectral properties of the generalized Sturm-Liouville problem. In particular, we obtain the asymptotic formulas for its eigenvalues. Our methods are based on spectral theory of differential operators and on the theory of analytic functions. In the future, we plan to apply the obtained results to formulation and investigation of inverse spectral problems that consist in the recovery of the boundary value problem coefficients for spectral characteristics.

Keywords: *Sturm-Liouville problem, jump condition, singular potential, characteristic function, eigenfunctions, eigenvalue asymptotics*

Введение

Статья посвящена исследованию спектральных свойств краевой задачи $\mathcal{L}$ для уравнения второго порядка

$$-(y^{[1]})' - \sigma(x)y^{[1]} - \sigma^2(x)y = \lambda y, \quad x \in (0, d) \cup (d, T), \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$U(y) := y^{[1]}(0) - hy(0) = 0, \quad V(y) := y^{[1]}(T) + Hy(T) = 0 \tag{2}$$

и условиями разрыва внутри интервала:

$$y(d + 0) = ay(d - 0), \quad y^{[1]}(d + 0) = a^{-1}y^{[1]}(d - 0). \tag{3}$$

Здесь $\sigma(x) \in L_2(0, T)$ — вещественная функция, λ — спектральный параметр, $d \in (0, T)$ — точка разрыва, $a > 0$, $h, H \in \mathbb{R}$, $y^{[1]} = y' - \sigma y$ — квазипроизводная.

Отметим, что уравнение (1) эквивалентно уравнению Штурма-Лиувилля с сингулярным потенциалом $q = \sigma' \in W_2^{-1}(0, T)$ (см.[1]):

$$-y'' + q(x)y = \lambda y,$$

где $W_2^{-1}(0, T)$ — пространство функций, которые являются производными функций из $L_2(0, T)$ в обобщённом смысле. Класс $W_2^{-1}(0, T)$ включает в себя, в частности, потенциалы с особенностями типа δ-функции Дирака и кулоновскими особенностями $\frac{1}{x-c}$, которые используются в задачах квантовой механики (см. [2]).

Краевые задачи Штурма-Лиувилля возникают при решении уравнений математической физики методом разделения переменных. Они широко применяются в различных областях математики, механики, физики и других естественных наук. Важную роль при этом играют свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма-Лиувилля.

Краевые задачи с условиями разрыва внутри интервала связаны с разрывными свойствами среды. В частности, такие задачи возникают в геофизических моделях земного шара (см. [3]) и в радиоэлектронике (см. [4]). Большое количество исследований посвящено решению обратных спектральных задач для операторов Штурма-Лиувилля с условием разрыва (см., например, [5, 6, 7, 8, 9]).

В то же время, интенсивно развивается спектральная теория операторов Штурма-Лиувилля с потенциалами-распределениями (см. [1, 10, 11, 12, 13, 14] и другие работы в данном направлении). Переход к исследованию коэффициентов-распределений в теории обратных спектральных задач позволил получить характеризацию спектральных данных для новых классов дифференциальных операторов (см. [15]). Представляется перспективным перенос данного подхода на задачи с условиями разрыва, что обуславливает интерес к изучению задачи (1)–(3). Отметим, что задача с сингулярным потенциалом и условиями разрыва внутри интервала, рассмотренная в данной работе, является принципиально новой и, насколько известно авторам, ранее не исследовалась.

Целью работы является изучение спектральных свойств обобщённой задачи Штурма-Лиувилля (1)–(3) и, в частности, получение асимптотических формул для собственных значений данной задачи. Исследование основано на использовании методов спектральной теории дифференциальных операторов и теории аналитических функций. В разделе 1 приводятся вспомогательные леммы о решениях дифференциального уравнения (1), необходимые для получения основных результатов. В разделе 2 построена характеристическая функция, т.е. целая аналитическая функция, нули которой совпадают с собственными значениями задачи $\mathcal{L}$, и изучено ее поведение при $|\lambda| \to \infty$. В разделе 3 вводится связанный с задачей (1)–(3) дифференциальный оператор в пространстве $L_2(0,T)$ и показана его симметричность. В разделе 4 доказана простота нулей характеристической функции. В разделе 5 рассматривается задача $\mathcal{L}_0$ с нулевыми коэффициентами: $\sigma(x) \equiv 0$, $h = H = 0$, и приводятся некоторые свойства ее собственных значений и собственных функций, необходимые для получения основного результата. В разделе 6 сформулирована и доказана теорема об асимптотическом поведении собственных значений задачи $\mathcal{L}$. В дальнейшем авторы планируют применить полученные результаты для постановки и исследования обратных спектральных задач, состоящих в восстановлении коэффициентов краевой задачи (1)–(3) по ее спектральным характеристикам.

1. Вспомогательные леммы

Нам понадобятся некоторые вспомогательные леммы, касающиеся асимптотических оценок, на которые мы будем опираться при получении асимптотик характеристической функции и собственных значений.

Пусть $\varphi(x,\lambda)$ — решение уравнения (1) на отрезке $[0,d]$, удовлетворяющее следующим начальным условиям:

$$\varphi(0,\lambda) = 1, \quad \varphi^{[1]}(0,\lambda) = 0. \tag{4}$$

Для простоты изложения далее будем опускать формальный аргумент в виде спектрального параметра λ, но будем подразумевать, что функция φ, вообще говоря, зависит от λ.

Введем обозначения $\lambda = p^2$, $\tau = \operatorname{Im} p$. Сформулируем лемму о представлении решения φ и его квазипроизводной через оператор преобразования.

Лемма 1 ([14]). *Имеют место следующие соотношения:*

$$\varphi(x) = \cos px + \int\limits_0^x K_1(x,t)\cos pt\,dt,$$

$$\varphi^{[1]}(x) = -p\sin px + p\int\limits_0^x K_2(x,t)\sin pt\,dt + B(x),$$

где функции $K_j(x,t)$, $\quad j=1,2$, при каждом фиксированном $x \in (0,d]$ принадлежат пространству $L_2(0,x)$.

Аналогично лемме Римана-Лебега (см. [16, с. 427]) можно доказать следующую обобщенную лемму Римана-Лебега:

Лемма 2. *Пусть для фиксированного $x > 0$ функция $f(t) \in L_2(0,x)$. Тогда*

$$\int\limits_0^x f(t)\cos pt\,dt = o\left(e^{|\tau|x}\right), \quad \int\limits_0^x f(t)\sin pt\,dt = o\left(e^{|\tau|x}\right), \quad |p| \to \infty.$$

Так как функции $K_j(x,.)$, $j=1,2$ из леммы 1 удовлетворяют условию леммы (2), получаем следующую лемму об асимптотическом представлении φ и $\varphi^{[1]}$.

Лемма 3. *Для любого фиксированного $x \in (0,d]$ имеют место следующие соотношения:*

$$\varphi(x) = \cos px + o\left(e^{|\tau|x}\right), \quad |p| \to \infty,$$
$$\varphi^{[1]}(x) = -p\sin px + o\left(pe^{|\tau|x}\right), \quad |p| \to \infty.$$

Пусть $\psi(x,\lambda)$ — решение уравнения (1) на отрезке $[d,T]$, удовлетворяющее следующим начальным условиям:

$$\psi(T,\lambda) = 1, \quad \psi^{[1]}(T,\lambda) = -H. \tag{5}$$

Получим формулы, аналогичные представлениям из леммы 1, для функций ψ и $\psi^{[1]}$. Используем замену переменных $z := T - x$:

$$\psi(x) = \psi_1(z), \quad \frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi_1}{dz}\frac{dz}{dx} = -\frac{d\psi_1}{dz}, \quad \psi(T) = \psi_1(0).$$

Функция ψ_1 имеет другую квазипроизводную:

$$\psi_1^{[1]}(z) = \psi_1'(z) + \sigma(T-z)\psi_1(z),$$

но краевая задача относительно переменной z будет иметь тот же вид. Получаем

$$\psi^{[1]}(T) = \psi'(T) - \sigma(T)\psi(T) = -\psi_1'(0) - \sigma(T)\psi_1(0) = -\psi_1^{[1]}(0).$$

Таким образом, условия (5) относительно ψ_1 примут вид:

$$\psi_1(0) = 1, \quad \psi_1^{[1]}(0) = H,$$

а асимптотики леммы 3 соответственно:

$$\psi_1(z) = \cos pz + o\left(e^{|\tau|z}\right), \quad |p| \to \infty,$$
$$\psi_1^{[1]}(z) = p\sin pz + o\left(pe^{|\tau|z}\right) + A(T-z), \quad |p| \to \infty,$$

где $A(x)$ — некоторая непрерывная функция на отрезке $[0, T-d]$. Выполняя обратную замену, приходим к следующей лемме об асимптотическом представлении решения ψ и его квазипроизводной.

Лемма 4. *Для любого фиксированного $x \in [d, T)$ имеют место следующие соотношения:*

$$\psi(x) = \cos p(T-x) + o\left(e^{|\tau|(T-x)}\right), \quad |p| \to \infty,$$
$$\psi^{[1]}(x) = p\sin p(T-x) + o\left(pe^{|\tau|(T-x)}\right), \quad |p| \to \infty.$$

2. Характеристическая функция и её асимптотика

Определение 1. Характеристической функцией краевой задачи $\mathcal{L}$ называется целая аналитическая функция, нули которой совпадают с собственными значениями этой задачи.

В данном разделе получено представление для характеристической функции задачи $\mathcal{L}$ и исследовано ее асимптотическое поведение при $|\lambda| \to \infty$.

Пусть λ — собственное значение задачи $\mathcal{L}$. Тогда соответствующая собственная функция имеет вид

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x), & x < d, \\ y_2(x), & x > d, \end{cases} \tag{6}$$

где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — решения уравнения (1) на отрезках $[0, d]$ и $[d, T]$ соответственно, причем $y_1(x)$ удовлетворяет краевому условию (2) в точке $x = 0$, а $y_2(x)$ — краевому условию (2) в точке $x = T$. Учитывая (4) и (5), имеем

$$y_1(x) = A\varphi(x), \quad x \le d,$$
$$y_2(x) = B\psi(x), \quad x \ge d,$$

где $A, B \in \mathbb{C}$. Принимая во внимание, что

$$y(d-0) = y_1(d), \quad y(d+0) = y_2(d),$$

подставим решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ в условия разрыва (3). Получим систему линейных однородных уравнений относительно двух неизвестных A, B:

$$\begin{cases} B\psi(d) = aA\varphi(d), \\ B\psi^{[1]}(d) = a^{-1}A\varphi^{[1]}(d), \end{cases} \tag{7}$$

Матрица этой системы имеет вид:

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} a\varphi(d,\lambda) & -\psi(d,\lambda) \\ a^{-1}\varphi^{[1]}(d,\lambda) & -\psi^{[1]}(d,\lambda) \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Таким образом, система (7) имеет нетривиальные решения (соответствующие собственным функциям) тогда и только тогда, когда $\det M(\lambda) = 0$. Поэтому приходим к следующей лемме.

Лемма 5. *Собственные значения краевой задачи $\mathcal{L}$ совпадают с нулями целой аналитической функции $\Delta(\lambda) = \det M(\lambda)$, где матрица $M(\lambda)$ определяется формулой* (8).

Перейдем к получению асимптотики для функции $\Delta(\lambda)$ при $|\lambda| \to \infty$. Введём обозначения:

$$b_1 = \frac{a + a^{-1}}{2}, \quad b_2 = \frac{a - a^{-1}}{2}, \quad k = T - d.$$

Применяя леммы 3 и 4 для φ и ψ, получим:

$$\begin{gathered} \Delta(\lambda) = a^{-1}\varphi^{[1]}(d)\psi(d) - a\varphi(d)\psi^{[1]}(d) = \\ = a^{-1}\left[-p\sin pd + o\left(pe^{|\tau|d}\right)\right]\left[\cos pk + o\left(e^{|\tau|k}\right)\right] - \\ -a\left[\cos pd + o\left(e^{|\tau|d}\right)\right]\left[p\sin pk + o\left(pe^{|\tau|k}\right)\right] = \\ = -p\left[a^{-1}\sin pd\cos pk + a\cos pd\sin pk + o\left(e^{|\tau|T}\right)\right]. \end{gathered}$$

Приведём это выражение к более удобному виду:

$$\begin{gathered} -\left[a^{-1}\sin pd\cos pk + a\cos pd\sin pk)\right] = \\ = -\left[\frac{a^{-1}}{2}\left[\sin pT + \sin p(2d - T)\right] + \frac{a}{2}\left[\sin pT + \sin p(T - 2d)\right]\right] = \\ = -\left[b_1\sin pT - b_2\sin p(2d - T)\right]. \end{gathered}$$

Таким образом, приходим к асимптотической формуле:

$$\Delta(\lambda) = -p\left[b_1\sin pT - b_2\sin p(2d - T) + o(e^{|\tau|T})\right], \quad |p| \to \infty, \tag{9}$$

3. Симметричность оператора Штурма-Лиувилля

Обозначим через L обобщённый оператор Штурма-Лиувилля, действующий по правилу

$$Ly := -(y^{[1]})' - \sigma(x)y^{[1]} - \sigma^2(x)y.$$

Его область определения $\operatorname{dom} L$ состоит из функций $y(x)$, абсолютно непрерывных вместе со своими квазипроизводными на $[0, d]$ и на $[d, T]$ и удовлетворяющих условиям (2) и (3). Ясно, что собственные значения и собственные функции краевой задачи $\mathcal{L}$ совпадают с собственными значениями и собственными функциями оператора L.

Определение 2. Оператор L, действующий в пространстве $L_2(0,T)$, называется симметрическим, если для любых функций $f, g \in \operatorname{dom} L$ справедливо равенство:

$$(Lf, g) = (f, Lg),$$

где $(.,.)$ — скалярное произведение в $L_2(0,T)$.

Теорема 1. *Оператор L является симметрическим.*

Доказательство. Пусть f и g — произвольные функции из $\operatorname{dom} L$. Рассмотрим выражение

$$(Lf,g) = \int\limits_0^T \left[-\left(f^{[1]}\right)' - \sigma f^{[1]} - \sigma^2 f\right] \overline{g} dx = -\int\limits_0^d \left(f^{[1]}\right)' \overline{g} dx - \int\limits_0^d \sigma f^{[1]} \overline{g} dx -$$
$$-\int\limits_0^d \sigma^2 f \overline{g} dx - \int\limits_d^T \left(f^{[1]}\right)' \overline{g} dx - \int\limits_d^T \sigma f^{[1]} \overline{g} dx - \int\limits_d^T \sigma^2 f \overline{g} dx =$$
$$= -\left(f^{[1]}\overline{g}\right)\Big|_0^d + \int\limits_0^d f^{[1]}\overline{g'} dx - \int\limits_0^d \sigma f' \overline{g} dx + \int\limits_0^d \sigma^2 f\overline{g} dx - \int\limits_0^d \sigma^2 f \overline{g} dx -$$
$$-\left(f^{[1]}\overline{g}\right)\Big|_0^d + \int\limits_d^T f^{[1]}\overline{g'} dx - \int\limits_d^T \sigma f' \overline{g} dx + \int\limits_d^T \sigma^2 f\overline{g} dx - \int\limits_d^T \sigma^2 f \overline{g} dx =$$
$$= -\left(f^{[1]}\overline{g}\right)\Big|_0^d + \int\limits_0^d f^{[1]}\overline{g}' dx - \int\limits_0^d \sigma f' \overline{g} dx - \left(f^{[1]}\overline{g}\right)\Big|_d^T + \int\limits_d^T f^{[1]}\overline{g}' dx - \int\limits_d^T \sigma f' \overline{g} dx.$$

Аналогично для выражения (f, Lg) получим:

$$(f,Lg) = \left(-f\overline{g^{[1]}}\right)\Big|_0^d + \int\limits_0^d f'\overline{g^{[1]}} dx - \int\limits_0^d f\overline{\sigma g'} dx - \left(f\overline{g^{[1]}}\right)\Big|_d^T + \int\limits_d^T f'\overline{g^{[1]}} dx - \int\limits_d^T f\overline{\sigma g'} dx.$$

Рассмотрим разность $(Lf,g)-(f,Lg)$. Нетрудно убедиться, что при выполнении условий (2) и (3) сумма слагаемых с подстановками равна нулю:

$$-\left(f^{[1]}\overline{g}\right)\Big|_0^d - \left(f^{[1]}\overline{g}\right)\Big|_d^T + \left(f\overline{g^{[1]}}\right)\Big|_0^d + \left(f\overline{g^{[1]}}\right)\Big|_d^T = 0.$$

Используя определение квазипроизводной $y^{[1]} = y' - \sigma y$ получим:

$$\int\limits_0^d f^{[1]}\overline{g'} dx - \int\limits_0^d \sigma f' \overline{g} dx - \int\limits_0^d f'\overline{g^{[1]}} dx + \int\limits_0^d \sigma f \overline{g'} dx +$$

$$+\int_d^T f^{[1]\prime}\overline{g}dx - \int_d^T \sigma f'\overline{g}dx - \int_d^T f'\overline{g^{[1]}}dx + \int_d^T \sigma f\overline{g'}dx =$$

$$= \int_0^d \left[\left(f^{[1]} + \sigma f\right)\overline{g'} - f'\left(\sigma\overline{g} + \overline{g^{[1]}}\right)\right] dx + \int_d^T \left[\left(f^{[1]} + \sigma f\right)\overline{g'} - f'\left(\sigma\overline{g} + \overline{g^{[1]}}\right)\right] dx =$$

$$= \int_0^d \left(f'\overline{g'} - f'\overline{g'}\right) dx + \int_d^T \left(f'\overline{g'} - f'\overline{g'}\right) dx = 0.$$

Таким образом, в силу произвольности выбора функций f и g оператор L является симметрическим. □

Отметим некоторые следствия из этого факта.

Следствие 1. *Спектр оператора L является вещественным.*

Следствие 2. *Собственные функции оператора L, соответствующие разным собственным значениям, ортогональны в $L_2(0, T)$.*

4. Простота нулей характеристической функции

В данном разделе мы покажем, что все нули характеристической функции $\Delta(\lambda)$ простые. Предварительно сформулируем несколько определений и вспомогательных лемм, доказательства которых вытекают из предыдущих рассуждений.

Определение 3. Обобщённый вронскиан для функций $y(x), z(x)$ определяется следующим образом:

$$\langle y(x), z(x)\rangle = \det\begin{pmatrix} y(x) & z(x) \\ y^{[1]}(x) & z^{[1]}(x)\end{pmatrix}.$$

Доопределим решение $\varphi(x, \lambda)$ на интервал $(d, T]$, а решение $\psi(x, \lambda)$ — на интервал $[0, d)$ так, чтобы в точке d данные решения удовлетворяли условиям разрыва (3).

Лемма 6. *При $x \in [0, d) \cup (d, T]$ справедливо соотношение*

$$\Delta(\lambda) = \langle \psi(x, \lambda), \varphi(x, \lambda)\rangle.$$

Поскольку $\Delta(\lambda)$ — целая функция, она имеет не более чем счётное множество нулей $\{\lambda_n\}$.

Определение 4. Весовые числа α_n определяются следующей формулой:

$$\alpha_n := \int_0^d \varphi^2(x, \lambda_n)dx + \int_d^T \varphi^2(x, \lambda_n)dx.$$

Согласно лемме 5 и следствию 1, собственные значения $\{\lambda_n\}$ вещественные. Отсюда вытекает, что $\alpha_n > 0$.

Лемма 7. *Существует такая последовательность чисел β_n, что при $x \in [0, d) \cup (d, T]$ верно соотношение:*

$$\psi(x, \lambda_n) = \beta_n \varphi(x, \lambda_n).$$

Перейдём к основному результату данного раздела.

Лемма 8. *Нули функции $\Delta(\lambda)$ являются простыми.*

Доказательство. Вычислим значение характеристической функции, подставляя во вронскиан значения функций ψ и φ при $x = 0$:

$$\Delta(\lambda) = \psi(0, \lambda)\varphi^{[1]}(0, \lambda) - \psi^{[1]}(0, \lambda)\varphi(0, \lambda) = \psi(0, \lambda)h\varphi(0, \lambda) - \psi^{[1]}(0, \lambda)\varphi(0, \lambda) =$$
$$= \varphi(0, \lambda)\left[h\psi(0, \lambda) - \psi^{[1]}(0, \lambda)\right] = \psi^{[1]}(0, \lambda) - h\psi(0, \lambda) = -U(\psi).$$

Аналогично вычислим значение характеристической функции, подставляя значения функций ψ и φ при $x = T$:

$$\Delta(\lambda) = \psi(T, \lambda)\varphi^{[1]}(T, \lambda) - \psi^{[1]}(T, \lambda)\varphi(T, \lambda) = \psi(T, \lambda)\varphi^{[1]}(T, \lambda) + H\psi(T, \lambda)\varphi(T, \lambda) =$$
$$= \psi(T, \lambda)\left[\varphi^{[1]}(T, \lambda) + H\varphi^{(}T, \lambda)\right] = \varphi^{[1]}(T, \lambda) + H\varphi(T, \lambda) = V(\varphi).$$

Вычислим производную по переменной x от следующего вронскиана:

$$\frac{d}{dx}\langle\psi(x, \lambda), \varphi(x, \lambda_n)\rangle = \frac{d}{dx}\left[\psi(x, \lambda)\varphi^{[1]}(x, \lambda_n) - \psi^{[1]}(x, \lambda)\varphi(x, \lambda_n)\right] =$$
$$= \psi'(x, \lambda)\varphi^{[1]}(x, \lambda_n) + \psi(x, \lambda)\left(\varphi^{[1]}(x, \lambda_n)\right)' - \left(\psi^{[1]}(x, \lambda)\right)'\varphi(x, \lambda_n) -$$
$$-\psi^{[1]}(x, \lambda)\varphi'(x, \lambda_n) = \psi'(x, \lambda)\varphi^{[1]}(x, \lambda_n) - \psi^{[1]}(x, \lambda)\varphi'(x, \lambda_n) -$$
$$-\psi(x, \lambda)\left[\sigma(x)\varphi^{[1]}(x, \lambda_n) + \sigma^2(x)\varphi(x, \lambda_n) + \lambda_n\varphi(x, \lambda_n)\right] +$$
$$+\varphi(x, \lambda_n)\left[\sigma(x)\psi^{[1]}(x, \lambda) + \sigma^2(x)\psi(x, \lambda) + \lambda\psi(x, \lambda)\right] =$$
$$= \psi'(x, \lambda)\varphi^{[1]}(x, \lambda_n) - \psi^{[1]}(x, \lambda)\varphi'(x, \lambda_n) - \sigma(x)\psi(x, \lambda)\varphi^{[1]}(x, \lambda_n) -$$
$$-\sigma^2(x)\psi(x, \lambda)\varphi(x, \lambda_n) - \lambda_n\psi(x, \lambda)\varphi(x, \lambda_n) +$$
$$+\sigma(x)\varphi(x, \lambda_n)\psi^{[1]}(x, \lambda) + \sigma^2(x)\varphi(x, \lambda_n)\psi(x, \lambda) + \lambda\varphi(x, \lambda_n)\psi(x, \lambda) =$$
$$= (\lambda - \lambda_n)\psi(x, \lambda)\varphi(x, \lambda_n) + Z(\psi, \varphi).$$

Нетрудно убедиться, что $Z(\psi, \varphi) = 0$. Таким образом, имеем:

$$\frac{d}{dx}\big\langle\psi(x, \lambda), \varphi(x, \lambda_n)\big\rangle = (\lambda - \lambda_n)\psi(x, \lambda)\varphi(x, \lambda_n). \qquad (10)$$

Интегрируя левую и правую части равенства (10) по переменной x на отрезке $[0,T]$ и учитывая разрыв в точке $x=d$ получим:

$$\langle \psi(x,\lambda), \varphi(x,\lambda_n) \rangle \left(\Big|_0^{d-0} + \Big|_{d+0}^{T} \right) = (\lambda - \lambda_n) \left(\int_0^d + \int_d^T \right) \psi(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n)dx. \tag{11}$$

В силу условий разрыва (3) подстановки в $d-0$ и $d+0$ уничтожаются. Следовательно, левая часть (11) принимает вид

$$V(\varphi) - \big(- U(\psi) \big) = \Delta(\lambda_n) - \Delta(\lambda).$$

Деление на $(\lambda - \lambda_n)$ даёт

$$-\frac{\Delta(\lambda) - \Delta(\lambda_n)}{\lambda - \lambda_n} = \left(\int_0^d + \int_d^T \right) \psi(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n)dx.$$

Тогда при $\lambda \to \lambda_n$ получим:

$$\left.\frac{d\Delta}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_n} = -\left(\int_0^d + \int_d^T \right) \psi(x,\lambda_n)\varphi(x,\lambda_n)dx.$$

С учётом определения 4 и леммы 7, приходим к соотношению

$$\left.\frac{d\Delta}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_n} = -\alpha_n\beta_n \neq 0.$$

$\square$

5. Исследование краевой задачи с нулевым потенциалом

Обозначим через $\mathcal{L}_0$ задачу $\mathcal{L}$ (1)–(3) с нулевыми коэффициентами: $\sigma(x) \equiv 0$, $h = H = 0$. Краевые условия в этом случае становятся условиями второго рода, а квазипроизводная совпадает с обычной производной: $y^{[1]} = y'$.

5.1. **Получение характеристической функции и собственных функций.** Решения $\varphi(x,\lambda)$ и $\psi(x,\lambda)$, определенные в разделе 1, для задачи $\mathcal{L}_0$ принимают вид

$$\varphi_0(x,\lambda) = \cos px, \quad \psi_0(x,\lambda) = \cos p(T-x).$$

Согласно лемме 5 собственные значения задачи $\mathcal{L}_0$ совпадают с нулями характеристической функции, которая в данном случае имеет вид

$$\Delta_0(\lambda) = -p\left[b_1 \sin pT - b_2 \sin p(2d-T)\right], \tag{12}$$

т.е. совпадает с главной частью асимптотики (9).

Из рассуждений раздела 2 вытекает, что собственные функции задачи $\mathcal{L}_0$ имеют вид (6), где

$$y_1(x) = A\cos px, \quad x < d,$$
$$y_2(x) = B\cos p(T-x), \quad x > d.$$

Пусть p_n^0 — один из нулей функции (12). Матрица системы (7) для задачи $\mathcal{L}_0$ при $p = p_n^0$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} a\cos p_n^0 d & -\cos p_n^0 k \\ a^{-1}p_n^0 \sin p_n^0 d & p_n^0 \sin p_n^0 k \end{pmatrix}.$$

Так как мы рассматриваем такие значения $p = p_n^0$, при которых определитель этой матрицы обращается в ноль, то ранг системы должен быть строго меньше 2. При $\cos p_n^0 d \neq 0$ отсюда следует, что

$$A = \frac{1}{a} B \frac{\cos p_n^0 k}{\cos p_n^0 d},$$

где B — свободная переменная. Обозначим

$$\chi_n = \frac{\cos p_n^0 k}{\cos p_n^0 d}. \tag{13}$$

Без ограничения общности положим $B = a$. Тогда собственная функция $y_n(x)$ задачи $\mathcal{L}_0$, отвечающая собственному значению $\lambda_n^0 = \left(p_n^0\right)^2$ примет вид:

$$y_n(x) = \begin{cases} \chi_n \cos p_n^0 x, & x < d, \\ a\cos p_n^0 (T-x), & x > d. \end{cases} \tag{14}$$

5.2. **Неотрицательность собственных значений.** Рассмотрим оператор L_0, являющийся частным случаем оператора L для задачи $\mathcal{L}_0$. Согласно результатам раздела 3 оператор L_0 является симметрическим и все его собственные значения вещественны. Покажем, что справедливо более сильное утверждение:

Лемма 9. *Спектр оператора L_0 является неотрицательным.*

Доказательство. Возьмём произвольную функцию f, удовлетворяющую краевым условиям (2) и условиям разрыва (3), и рассмотрим следующее выражение:

$$(L_0 f, f) = -\int_0^T f''\overline{f}dx = -\int_0^d f''\overline{f}dx - \int_d^T f''\overline{f}dx =$$

$$= -\left(f'\overline{f}\right)\Big|_0^d + \int_0^d f'\overline{f'}dx - \left(f'\overline{f}\right)\Big|_d^T + \int_d^T f'\overline{f'}dx =$$

$$= -\left(f'\overline{f}\right)\Big|_0^d - \left(f'\overline{f}\right)\Big|_d^T + \int\limits_0^d f'\overline{f'}dx + \int\limits_d^T f'\overline{f'}dx.$$

Нетрудно убедиться, что при выполнении условий (2) и (3) сумма слагаемых с подстановками равна нулю:

$$-\left(f'\overline{f}\right)\Big|_0^d - \left(f'\overline{f}\right)\Big|_d^T = 0.$$

Для оставшихся слагаемых получим:

$$(L_0 f, f) \ = \int\limits_0^d f'\overline{f'}dx + \int\limits_d^T f'\overline{f'}dx = \int\limits_0^d |f'|^2\, dx + \int\limits_d^T |f'|^2\, dx \geq 0.$$

Из уравнения (1) имеем:

$$L_0 f = \lambda f,$$

где f — собственная функция, соответствующая собственному значению λ. Следовательно

$$(L_0 f, f) = (\lambda f, f) = \lambda(f, f).$$

Так как $(f, f) \geq 0$, то $\lambda \geq 0$, и утверждение теоремы доказано. □

5.3. **Лемма о разделимости нулей.** Для получения асимптотики собственных значений нам также понадобится факт разделимости нулей функции (12), доказываемый по аналогии с леммой 1 из статьи [6].

Лемма 10. *Пусть* $\{p_n^0\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *— нули функции* (12). *Тогда существует такое число* $c > 0$, *что для любых* $n, m \in \mathbb{Z}$ *справедливо равенство*

$$\inf |p_n^0 - p_m^0| = c.$$

Доказательство. Докажем лемму от противного. Пусть последовательность нулей главной части $\{p_n^0\}$ содержит такие две подпоследовательности $\{p_{n_s}^0\}$ и $\{\hat{p}_{n_s}^0\}$, что

$$p_{n_s}^0 \neq \hat{p}_{n_s}^0, \quad \lim_{|s|\to\infty} |p_{n_s}^0 - \hat{p}_{n_s}^0| = 0,$$

т.е. $\inf |p_{n_s}^0 - \hat{p}_{n_s}^0| = 0$.

Принимая во внимание симметричность оператора L_0 и, как следствие, ортогональность собственных функций $y_n(x, p_{n_s}^0)$ и $y_n(x, \hat{p}_{n_s}^0)$, определяемых формулой (14), задачи $\mathcal{L}_0$ в пространстве $L_2(0, T)$, имеем:

$$0 = \int\limits_0^T y_n(x, p_{n_s}^0)\overline{y_n(x, \hat{p}_{n_s}^0)}dx =$$

$$= \int\limits_0^T y_n(x,p^0_{n_s})\overline{y_n(x,p^0_{n_s})}dx + \int\limits_0^T y_n(x,p^0_{n_s})\overline{\left[y_n(x,\hat{p}^0_{n_s}) - y_n(x,p^0_{n_s})\right]}dx \geq$$

$$\geq \int\limits_d^T y_n(x,p^0_{n_s})\overline{y_n(x,p^0_{n_s})}dx + \int\limits_0^T y_n(x,p^0_{n_s})\overline{\left[y_n(x,\hat{p}^0_{n_s}) - y_n(x,p^0_{n_s})\right]}dx =$$

$$= \int\limits_d^T a^2\cos^2 p^0_{n_s}(T-x)dx + \int\limits_0^T y_n(x,p^0_{n_s})\overline{\left[y_n(x,\hat{p}^0_{n_s}) - y_n(x,p^0_{n_s})\right]}dx.$$

Вычислим первый интеграл:

$$a^2\int\limits_d^T \cos^2 p^0_{n_s}(T-x)dx = \frac{a^2}{2}\left(k + \frac{\sin 2p^0_{n_s}k}{2p^0_{n_s}}\right).$$

Таким образом, имеем следующее соотношение:

$$\frac{a^2}{2}\left(k + \frac{\sin 2p^0_{n_s}k}{2p^0_{n_s}}\right) + \int\limits_0^T y_n(x,p^0_{n_s})\overline{\left[y_n(x,\hat{p}^0_{n_s}) - y_n(x,p^0_{n_s})\right]}dx \leq 0.$$

Выполним предельный переход при $s \to \infty$ в левой и правой частях неравенства. Заметим, что последовательность нулей целой функции $\Delta_0(p^2)$ не может иметь конечной предельной точки, поэтому $|p^0_{n_s}| \to \infty$. Следовательно, предел слагаемого с синусом будет равен нулю как предел произведения ограниченной величины на бесконечно малую.

Рассмотрим отдельно слагаемое $\left|y_n(x,\hat{p}^0_{n_s}) - y_n(x,p^0_{n_s})\right|$, используя представление (14) собственной функции $y_n(x)$. При $x > d$ также получим предел произведения ограниченной величины на бесконечно малую:

$$\lim_{s\to\infty}\left|y_n(x,\hat{p}^0_{n_s}) - y_n(x,p^0_{n_s})\right| = \lim_{s\to\infty}\left|a\cos\hat{p}^0_{n_s}(T-x) - a\cos p^0_{n_s}(T-x)\right| =$$

$$= 2a\lim_{s\to\infty}\left|\sin\frac{(T-x)(\hat{p}^0_{n_s}+p^0_{n_s})}{2}\sin\frac{(T-x)(\hat{p}^0_{n_s}-p^0_{n_s})}{2}\right| = 0$$

При $x < d$ получим:

$$\lim_{s\to\infty}\left|y_n(x,\hat{p}^0_{n_s}) - y_n(x,p^0_{n_s})\right| = \left|\frac{\cos\hat{p}^0_{n_s}k}{\cos\hat{p}^0_{n_s}d}\cos\hat{p}^0_{n_s}x - \frac{\cos p^0_{n_s}k}{\cos p^0_{n_s}d}\cos p^0_{n_s}x\right| =$$

$$= \left|\frac{\cos\hat{p}^0_{n_s}(k-x) + \cos\hat{p}^0_{n_s}(k+x)}{2\cos\hat{p}^0_{n_s}d} - \frac{\cos p^0_{n_s}(k-x) + \cos p^0_{n_s}(k+x)}{2\cos p^0_{n_s}d}\right|.$$

Приведя это выражение к общему знаменателю и сгруппировав слагаемые с разными знаками, в числителе получим:

$$\frac{1}{2}\left[\cos\left(\hat{p}^0_{n_s}(k-x)-p^0_{n_s}d\right)-\cos\left(p^0_{n_s}(k-x)-\hat{p}^0_{n_s}d\right)\right]+$$
$$+\frac{1}{2}\left[\cos\left(\hat{p}^0_{n_s}(k-x)+p^0_{n_s}d\right)-\cos\left(p^0_{n_s}(k-x)+\hat{p}^0_{n_s}d\right)\right]+$$
$$+\frac{1}{2}\left[\cos\left(\hat{p}^0_{n_s}(k+x)-p^0_{n_s}d\right)-\cos\left(p^0_{n_s}(k+x)-\hat{p}^0_{n_s}d\right)\right]+$$
$$+\frac{1}{2}\left[\cos\left(\hat{p}^0_{n_s}(k+x)+p^0_{n_s}d\right)-\cos\left(p^0_{n_s}(k+x)+\hat{p}^0_{n_s}d\right)\right].$$

Рассмотрим первую скобку:

$$\cos\left(\hat{p}^0_{n_s}(k-x)-p^0_{n_s}d\right)-\cos\left(p^0_{n_s}(k-x)-\hat{p}^0_{n_s}d\right)=$$
$$=-2\sin\frac{(k-x-d)(\hat{p}^0_{n_s}+p^0_{n_s})}{2}\sin\frac{(k-x+d)(\hat{p}^0_{n_s}-p^0_{n_s})}{2}.$$

При $s\to\infty$ выражение в этой скобке является произведением ограниченной величины на бесконечно малую, т.е. является бесконечно малой величиной. Выражения в остальных скобках являются бесконечно малыми величинами при $s\to\infty$ по такому же принципу. Получаем бесконечно малую величину в числителе, и ограниченную величину в знаменателе, поэтому искомый предел будет равен нулю. Таким образом,

$$\lim_{s\to\infty}\left(y_n(x,\hat{p}^0_{n_s})-y_n(x,p^0_{n_s})\right)=0,$$

равномерно по x на промежутке $[0,d)\cup(d,T]$.

В итоге приходим к неравенству:

$$\frac{a^2(T-d)}{2}\leq 0,$$

что противоречит определению краевой задачи $\mathcal{L}_0$. □

6. Асимптотика собственных значений

Данный раздел посвящен доказательству основной теоремы об асимптотическом поведении собственных значений задачи $\mathcal{L}$. Нам потребуется следующий результат из теории почти-периодических функций (см. [18, с. 342]).

Лемма 11 ([18]). *Пусть $f(z)$ — не равная тождественно нулю почти-периодическая функция в полосе $|\tau|<\tau_0$. Тогда для любого $\delta>0$ существует такое число $C_\delta>0$, что верно неравенство:*

$$|f(z)|\geq C_\delta$$

при z, лежащем в полосе $|\tau|\leq\tau_0-\delta$ и вне кругов радиуса δ с центрами в нулях функции $f(z)$.

Отметим, что почти-периодической функцией является любой обобщённый тригонометрический полином вида

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k e^{i\beta_k z},$$

где $\alpha_k \in \mathbb{C}, \beta_k \in \mathbb{R}$ — некоторые числа. В частности, лемма 11 применима к функции

$$f(p) := \frac{\Delta_0(p^2)}{p} = b_1 \sin pT - b_2 \sin pK, \quad K = 2d - T. \tag{15}$$

Ввиду формулы (12), следствия 1 и леммы 10, нули функции $\Delta_0(p^2)$ вещественные и могут быть пронумерованы в порядке возрастания: $p^0_{n-1} < p^0_n$, $n \in \mathbb{Z}$, причем $p_{-n} = -p_n$ и $p_0 = 0$ — двукратный ноль. Очевидно, нули функции $f(p)$, определенной в (15), совпадают с $\{p^0_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Следующая лемма дает оценку характеристической функции $\Delta_0(p^2)$ снизу в области, не содержащей нулей этой функции.

Лемма 12. *В области*

$$G_\delta = \{p : |p - p^0_n| \geq \delta,\, n \in \mathbb{Z}\} \tag{16}$$

справедлива оценка:

$$|\Delta_0(\lambda)| \geq C_\delta |p| e^{|\tau| T}, \tag{17}$$

где δ — достаточно малое положительное число, C_δ — положительная константа, зависящая от δ.

Доказательство. Ясно, что $T > K$. Зафиксируем такое значение $\tau_0 > 0$, что при $|\tau| \geq \tau_0$ выполняется неравенство:

$$|b_1 \sin pT| \geq 2\, |b_2 \sin pK|\,. \tag{18}$$

Далее разобьём область G_δ на две части:

$$G_{\delta,1} := \{p : |\mathrm{Im}\ p| \geq \tau_0\},$$
$$G_{\delta,2} := G_\delta \cap \{p : |\mathrm{Im}\ p| < \tau_0\}.$$

Для доказательства леммы достаточно показать, что оценка (17) справедлива в областях $G_{\delta,1}$ и $G_{\delta,2}$.

В области $G_{\delta,1}$ выполняется неравенство (18), из которого следует оценка для функции $f(p)$, определённой формулой (15):

$$|f(p)| \geq \frac{1}{2} |b_1 \sin pT|.$$

Учитывая, что $b_1 \geq 1$ для всех значений параметра a, имеем:

$$|f(p)| \geq \frac{1}{2} |\sin pT|.$$

Используя стандартную оценку снизу для синуса из доказательства теоремы 1.1.3 в книге [5], при $\tau \geq \tau_0$ получим требуемую оценку:

$$|f(p)| \geq \frac{1}{2} C_\delta e^{|\tau| T}$$

или

$$|\Delta_0(p^2)| \geq \frac{1}{2} C_\delta |p| e^{|\tau| T} = C'_\delta |p| e^{|\tau| T}.$$

При $p \in G_{\delta,2}$ по лемме 11 справедливо неравенство:

$$|f(p)| \geq C_\delta$$

или

$$|\Delta_0(p^2)| \geq C_\delta |p|.$$

При $|\tau| < \tau_0$ имеет место следующее неравенство:

$$e^{|\tau| T} < e^{\tau_0 T} = C \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, приходим к оценке (17) в области $G_{\delta,2}$, что завершает доказательство леммы. $\square$

Нули функции $\Delta_0(\lambda)$ в λ-плоскости имеют вид $\lambda_n^0 = (p_n^0)^2$, $n \geq 0$. Поведение нулей функции $\Delta(\lambda)$, являющихся собственными значениями задачи $\mathcal{L}$, описывается следующей теоремой.

Теорема 2. *Спектр краевой задачи $\mathcal{L}$ представляет собой счётное множество вещественных собственных значений $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$, для которых справедливо асимптотическое соотношение*

$$p_n = \sqrt{\lambda_n} = p_n^0 + o(1), \quad n \to \infty. \tag{19}$$

Доказательство. По лемме 5 собственные значения $\mathcal{L}$ совпадают с нулями функции $\Delta(\lambda)$. Согласно асимптотической формуле (9) справедлива оценка

$$\Delta(\lambda) - \Delta_0(\lambda) = o\left(p e^{|\tau| T}\right), \quad |p| \to \infty. \tag{20}$$

В силу леммы 10

$$c = \inf |p_n^0 - p_m^0| > 0.$$

Рассмотрим область G_δ, определённую формулой (16) с $\delta \in \left(0, \frac{c}{2}\right)$. Выбирая значение δ таким образом, мы гарантируем, что для каждого $n \in \mathbb{Z}$ в круге $|p - p_n^0| \leq \delta$ будет находиться только один нуль функции $\Delta_0(\lambda)$. Рассмотрим следующие контуры:

$$\Gamma_n = \left\{ \lambda : |\lambda| = \left(\frac{p_n^0 + p_{n+1}^0}{2} \right)^2 \right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Из $\lambda = p^2 \in \Gamma_n$ следует, что $p \in G_\delta$ при достаточно малых значениях $\delta > 0$, а значит на контурах Γ_n по лемме 12 справедлива оценка (17). В силу (17) и (20) при достаточно больших n $(n > n^*)$ имеет место неравество:

$$|\Delta_0(\lambda)| > |\Delta(\lambda) - \Delta_0(\lambda)|, \quad \lambda \in \Gamma_n.$$

Следовательно, по теореме Руше (см. [17, с. 225]) число нулей функции $\Delta(\lambda)$ внутри контура Γ_n совпадает с числом нулей функции $\Delta_0(\lambda)$ и равно $(n+1)$. Будем обозначать эти нули $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Таким образом, множество собственных значений задачи $\mathcal{L}$ счётное.

Применяя теорему Руше для функций $\Delta(p^2)$ и $\Delta_0(p^2)$ на следующих контурах в p-плоскости:

$$\gamma_n(\delta) := \{p : \left|p - p_n^0\right| = \delta\}$$

заключаем, что при достаточно больших n внутри $\gamma_n(\delta)$ лежит ровно один нуль функции $\Delta(p^2)$, а именно $p_n := \sqrt{\lambda_n}$. В силу произвольности выбора δ приходим к асимптотической формуле (19). □

Эта теорема говорит о том, что начиная с некоторого номера n^* собственные значения задачи $\mathcal{L}$ будут сколь угодно близки к нулям главной части в асимптотике (9), то есть к собственным значениям задачи $\mathcal{L}_0$.

Заключение

В данной работе исследованы спектральные свойства краевой задачи Штурма-Лиувилля с сингулярным потенциалом из класса обобщённых функций $W_2^{-1}(0,T)$ и с условиями разрыва внутри интервала.

Построена характеристическая функция данной задачи, получена ее асимптотика и доказана простота нулей. Рассмотрен соответствующий краевой задаче оператор в гильбертовом пространстве $L_2(0,T)$. Доказана симметричность этого оператора. Основным результатом работы является теорема 2 об асимптотике собственных значений задачи Штурма-Лиувилля с сингулярным потенциалом и условиями разрыва.

В дальнейшем результаты, полученные в данной работе, могут быть использованы для постановки и исследования обратной спектральной задачи, а также для разработки конструктивного алгоритма её решения.

Благодарность. Работа выполнена в Саратовском государственном университете при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 21-71-10001, https://rscf.ru/project/21-71-10001/).

Список литературы

1. Савчук, А. М. Операторы Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами / А. М. Савчук, А. А. Шкаликов // Математические заметки. — 1999. — Т. 66, № 6. — С. 897-912.

SAVCHUK, A. M. & SHKALIKOV, A. A. (1999) Sturm-Liouville operators with singular potentials. *Mathematical Notes*. 66 (6). p. 741-753.

2. ALBEVERIO, S., GESZTESY, F., HOEGH-KROHN, R. & HOLDEN, H. (2005) *Solvable Models in Quantum Mechanics*. 2nd ed.. Providence, RI: AMS Chelsea Publishing.
3. HALD, O. H. (1984) Discontinuous inverse eigenvalue problem. *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 37. p. 539-577.
4. Литвиненко, О. Н. Теория неоднородных линий и их применение в радиотехнике / О. Н. Литвиненко, В. И. Сошников. — М.: Сов. Радио, 1964. — 536 с.

   LITVINENKO, O. N. & SOSHNIKOV, V. I. (1964) *The Theory of Heterogenious Lines and their Applications in Radio Engineering*. Moscow: Radio.
5. FREILING, G. & YURKO, V. (2001) *Inverse Sturm–Liouville Problems and Their Applications*. NY: Nova Science Publishers.
6. AMIROV, R. (2006) On Sturm–Liouville operators with discontinuity conditions inside an interval. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 317. p. 163-176.
7. SHIEH, C.-T. & YURKO, V.A. (2008) Inverse nodal and inverse spectral problems for discontinuous boundary value problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 347. p. 266-272.
8. SHAHRIARI, M., AKBARFAM, A.J. & TESCHL, G. (2012) Uniqueness for inverse Sturm-Liouville problems with a finite number of transmission conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 395. p. 19-29.
9. YANG, C.-F. & BONDARENKO, N. (2020) Reconstruction and solvability for discontinuous Hochstadt-Lieberman problems. *Journal of Spectral Theory*. 10 (4). p. 1445-1469.
10. HRYNIV, R. O. & MYKYTYUK, Y. V. (2003) Inverse spectral problems for Sturm-Liouville operators with singular potentials. *Inverse Problems*. 19 (3). p. 665-684.
11. FREILING, G., IGNATIEV, M. Y. & YURKO, V. A. (2008) An inverse spectral problem for Sturm-Liouville operators with singular potentials on star-type graph. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*. 77. p. 397-408.
12. Савчук, А. М. Обратные задачи для оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева. Равномерная устойчивость / А. М. Савчук, А. А. Шкаликов // Функциональный анализ и его приложения. — 2010. — Т. 44, № 4. — С. 34-53.

    SAVCHUK, A. M. & SHKALIKOV, A. A. (2010) Inverse problems for Sturm-Liouville operators with potentials in Sobolev spaces: uniform stability. *Functional Analysis and Its Applications*. 44 (4). p. 270-285.
13. Мирзоев, К. А. Операторы Штурма-Лиувилля / К. А. Мирзоев // Труды Московского математического общества. — 2014. — Т. 75, № 2. — С. 335-359.

    MIRZOEV, K. A. (2014) Sturm-Liouville operators. *Transactions of the Moscow Mathematical Society*. 75. p. 281-299.
14. BONDARENKO, N. (2021) Solving an inverse problem for the Sturm-Liouville operator with singular potential by Yurko's method. *Tamkang Journal of Mathematics*. 52. p. 125-154.
15. BONDARENKO, N. P. (2024) Necessary and sufficient conditions for solvability of an inverse problem for higher-order differential operators. *Mathematics*. 12 (1) (Article Id 61). p. 1-27.

16. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 572 с.

    Kolmogorov, A. N. & Fomin, S. V. (2004) *Elements of the theory of functions and functional analysis.* Moscow: FIZMATLIT.

17. Привалов, И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного / И. И. Привалов. — М.: Издательство Юрайт, 2023. — 402 с.

    Privalov, I. I. (2023) *Introduction to the theory of functions of a complex variable* . Moscow: Yurayt Publishing House.

18. Левин, Б. Я. Распределение корней целых функций / Б. Я. Левин. — М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. — 632 с.

    Levin, B. Y. (1956) *Distribution of the roots of whole functions.* Moscow: State Publishing House of Technical and Theoretical Literature.

Дробин Роман Равильевич — лаборант кафедры математической физики и вычислительной математики Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского, г. Саратов; студент Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева, г. Самара, РФ
e-mail: satyrareddit@gmail.com

Бондаренко Наталья Павловна — д. ф.-м. н., доцент, старший научный сотрудник кафедры математической физики и вычислительной математики Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского, г. Саратов; профессор кафедры прикладных математики и физики Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева, г. Самара, РФ
e-mail: bondarenkonp@sgu.ru