



CETO-4: Spring 2022

Зламаний коник

Команда 13

Дніпровський науковий ліцей
інформаційних технологій при ДНУ



Умова задачі

Зламаний коник

Колега доктора Біодольського, професор Комашевський, досліджує родину незвичайних коників (усі коники з цієї родини мають однакові біологофізичні характеристики). Він випускає їх у відкрите поле та спостерігає за їх стрибками. Довжина кожного стрибку складає **30 см**. Після кожного стрибку з ймовірністю $p=0,2$ коник підвертає ногу. Якщо коник підвертає ногу, то йому необхідно $t=0,5$ **хвилини** на відпочинок, після чого він знову може продовжити стрибати (якщо коник ногу не підвертає, то відпочинок не потрібен). Знайдіть середню швидкість v коника з такої родини.



Реалізація коду

```
# Average velocity calculator
```

```
def v(N, probability):
```

```
    t = 0 # Time in seconds
```

```
    dist = 0 # Distance in meters
```

```
    for i in range(0,N):
```

```
        # Jump
```

```
        t+=1          # 1 second for jumping
```

```
        dist += 0.3 # move for 0.3 meters
```

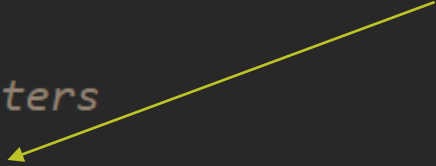
```
        # random.random() returns value from 0 to 1
```

```
        if random.random() <= probability: # if cracked the leg, wait 30 seconds
```

```
            t+=30
```

```
    return dist/t    # calculate average velocity
```

Цикл, який ітерує по кількості стрибків коника N.



Реалізація коду

```
# Average velocity calculator
```

```
def v(N, probability):
```

```
    t = 0 # Time in seconds
```

```
    dist = 0 # Distance in meters
```

```
    for i in range(0,N):
```

```
        # Jump
```

```
        t+=1          # 1 second for jumping
```

```
        dist += 0.3 # move for 0.3 meters
```

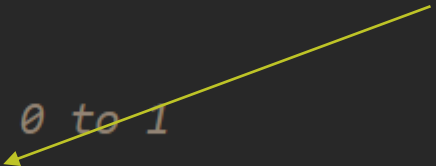
```
        # random.random() returns value from 0 to 1
```

```
        if random.random() <= probability: # if cracked the leg, wait 30 seconds
```

```
            t+=30
```

```
    return dist/t    # calculate average velocity
```

Якщо випадкове число в межах від 0 до 1 менше ймовірності підвертання ноги, то коник відпочиває 30 секунд.



Реалізація коду

```
# Average velocity calculator
```

```
def v(N, probability):
```

```
    t = 0 # Time in seconds
```

```
    dist = 0 # Distance in meters
```

```
    for i in range(0,N):
```

```
        # Jump
```

```
        t+=1          # 1 second for jumping
```

```
        dist += 0.3 # move for 0.3 meters
```

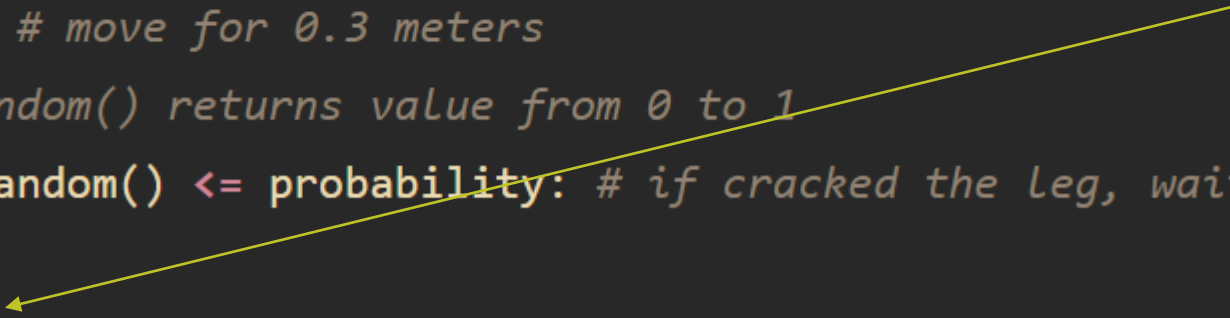
```
        # random.random() returns value from 0 to 1
```

```
        if random.random() <= probability: # if cracked the leg, wait 30 seconds
```

```
            t+=30
```

```
    return dist/t # calculate average velocity
```

Середня швидкість: $V = S/t$



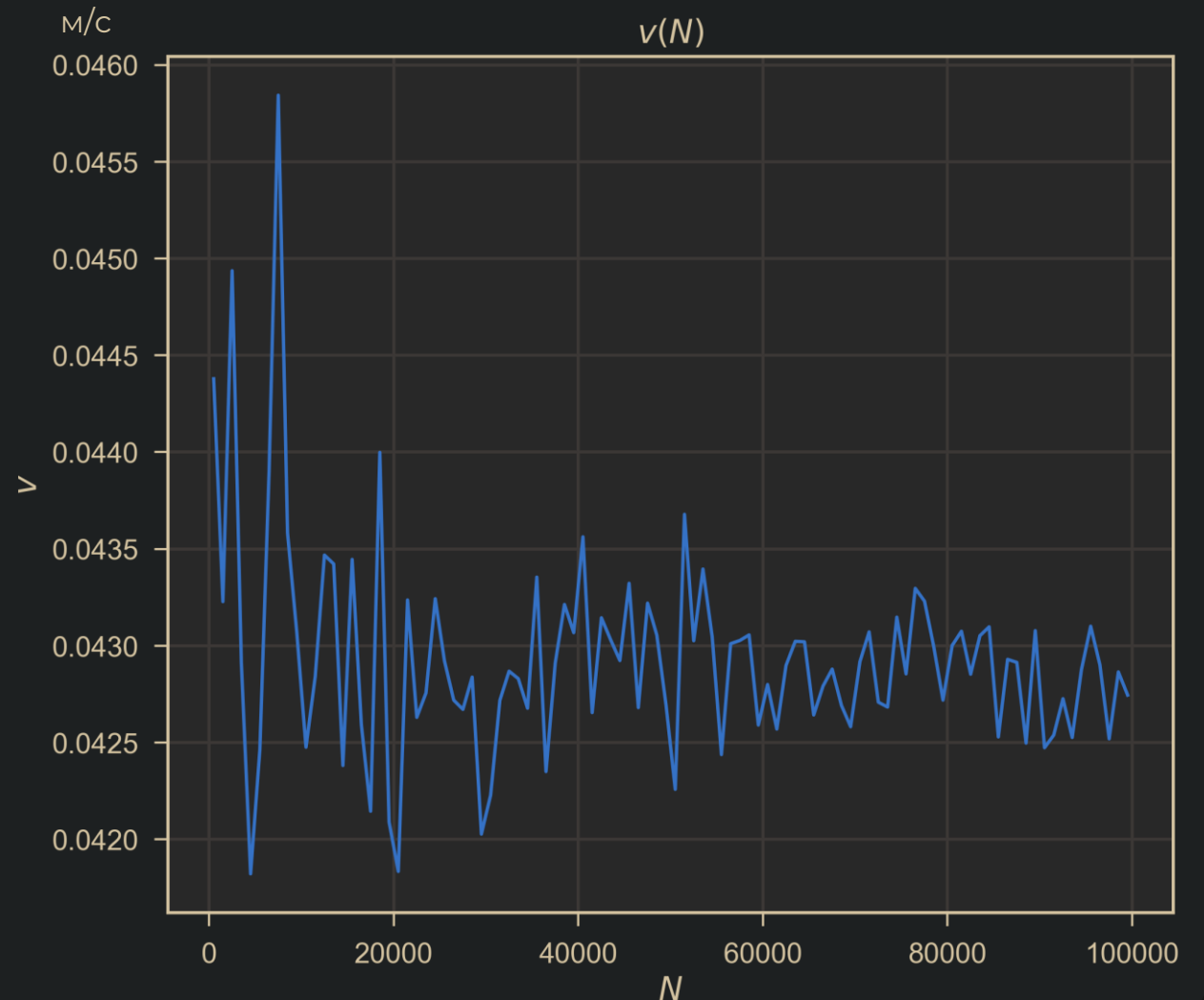
Завдання 1

Вважаючи що час стрибка коника 1 с (і надалі вважайте час стрибку 1 с, якщо це не уточнюється), знайдіть середню швидкість для $N = 500, 1000, 1500, \dots$ стрибків (чим більше експериментів, тим краще), побудуйте графік залежності $v(N)$.

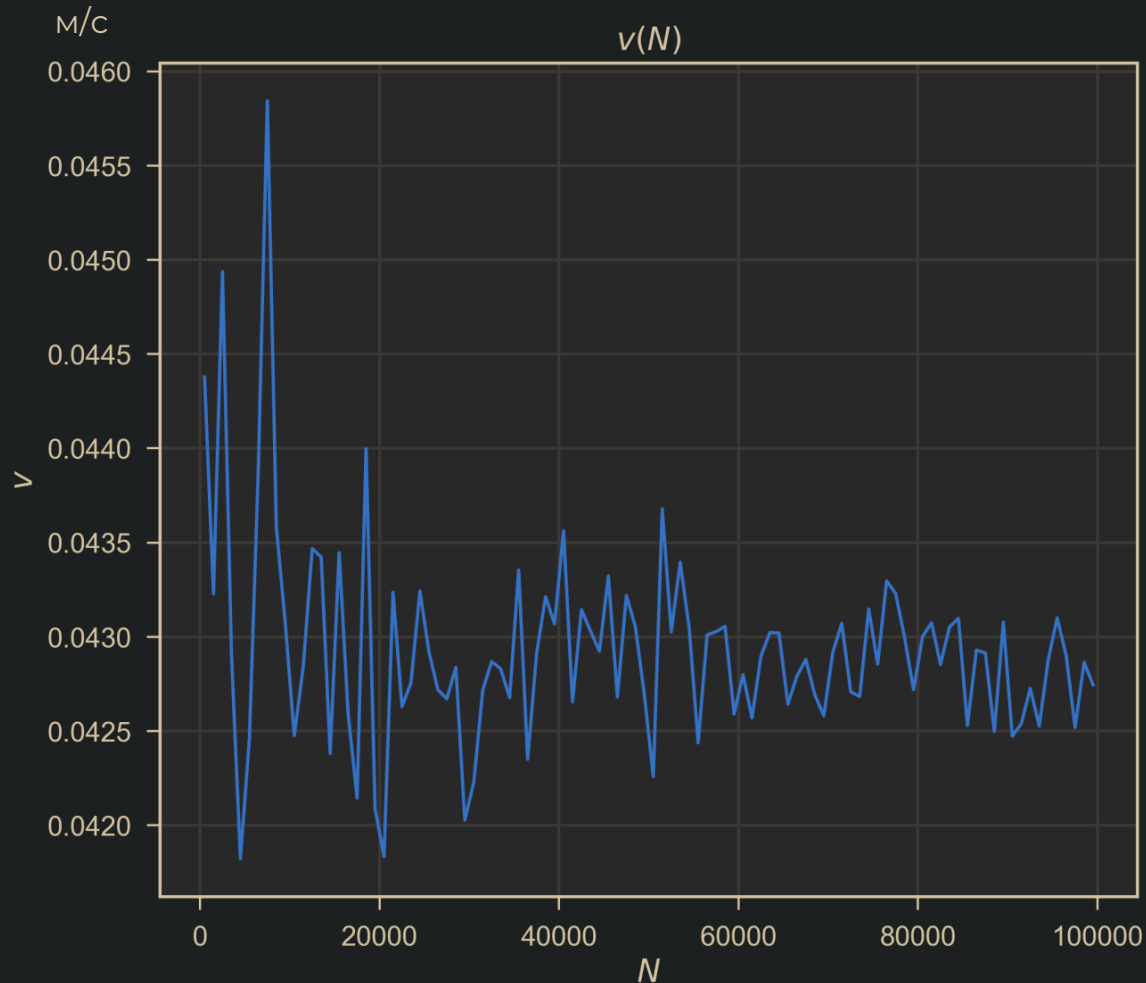
```
N = 100
x = []
x = [i*1000+500 for i in range(N)]

v = np.vectorize(v)
vs = v(x, 0.2)

plt.plot(x, vs)
```



Завдання 1



Очікуване значення швидкості коника:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{t_{\text{стрибка}} + p \cdot t}.$$

Тут Δx – довжина стрибку, $t_{\text{стрибка}}$ – час стрибку, p – ймовірність підвертання ноги, t – час, який коник відпочиває після підвертання ноги.

Маємо:

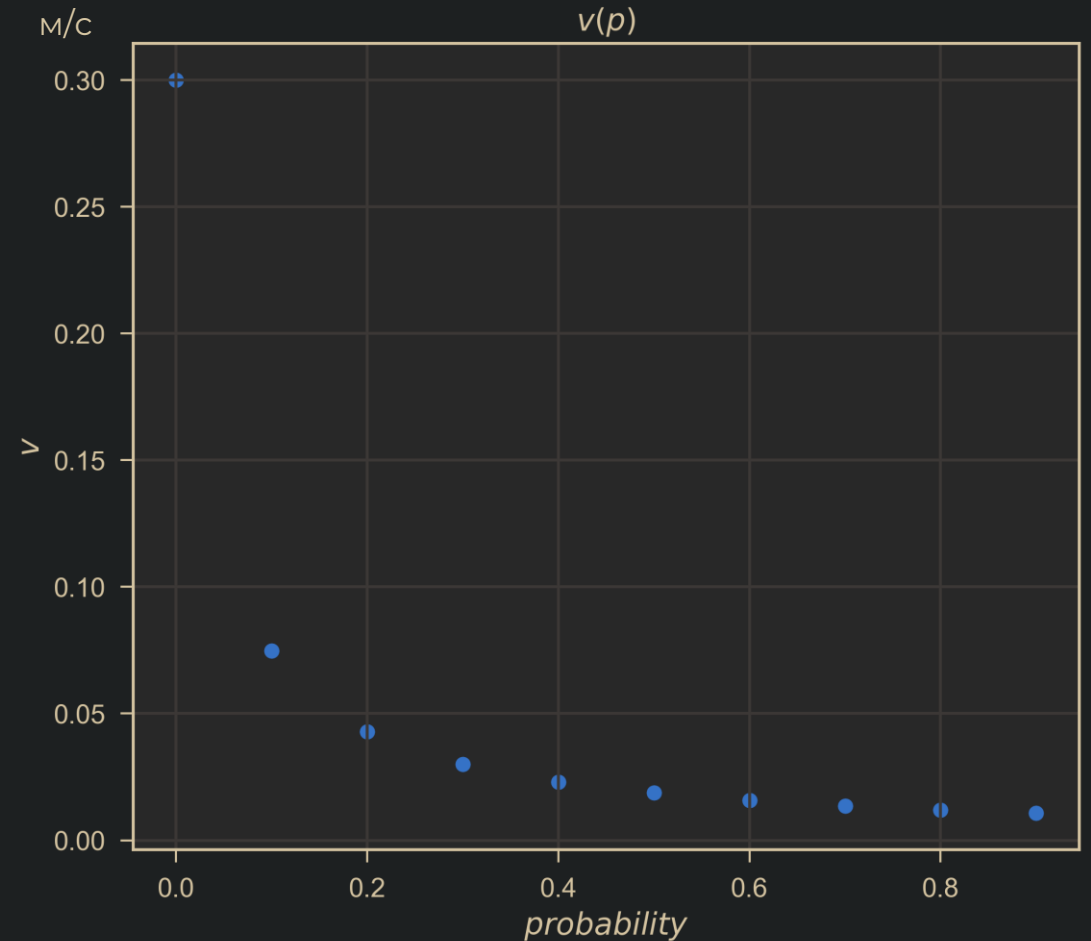
$$v = \frac{0.3}{1 + 30 \cdot 0.2} \approx 0.04285 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Із збільшенням кількості стрибків середнє значення швидкості буде прямувати до очікуваного значення.

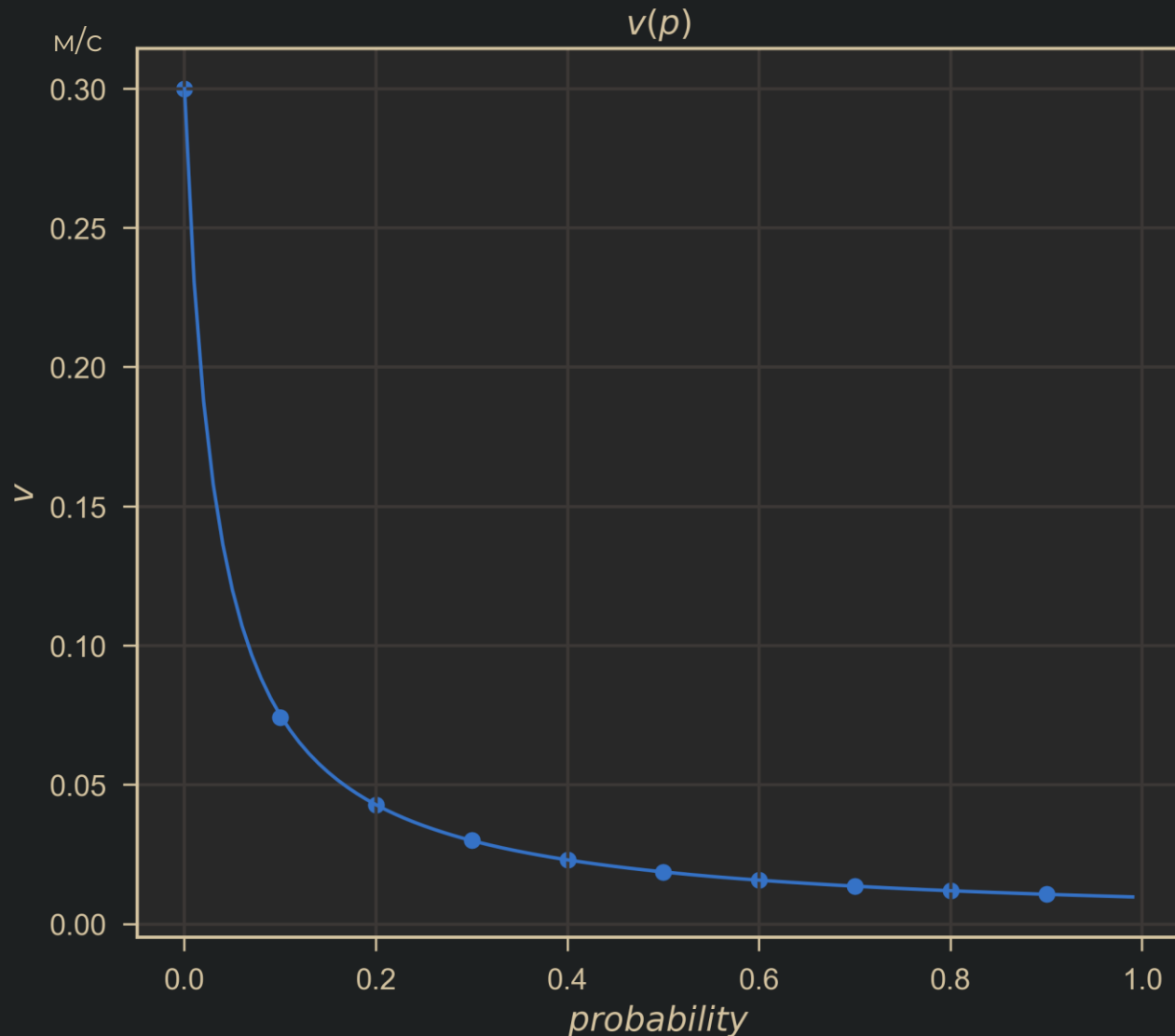
Завдання 2

Знайдіть залежність середньої швидкості v від ймовірності p підвертання ноги.

```
v = np.vectorize(v)
vs = v(100000, x)
vtestgr = vtest(x1)
plt.title("$v(p)$")
plt.ylabel('$v$')
plt.xlabel('$probability$')
plt.scatter(x, vs)
```



Завдання 2



Залежність можна побачити на графіку зліва. Легко збагнути, що середня швидкість обернено пропорційна ймовірності підвертання ноги.

Розберемо крайні випадки. Коли $p \rightarrow 0$, то:

$$v = \frac{0.3}{1 + 30 \cdot 0} = 0.3 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Коли $p \rightarrow 1$, то:

$$v = \frac{0.3}{1 + 30 \cdot 1} \approx 0.00968 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Синім намальовано графік функції

$$v(p) = \frac{0.3}{1 + 30 \cdot p}.$$

Точки графіків збігаються.

Завдання 3

Нехай коник зламався і почав стрибати з ймовірністю $p_s = 0,3$ на відстань 15 см і з ймовірністю $p_s = 1 - 0,3 = 0,7$ на відстань 30 см. За умови що він після кожного стрибка з ймовірністю $p = 0,2$ підвертає ногу, знайдіть середню швидкість коника.

Якщо випадкове число в межі від 0 до 1 менше ймовірності 0.3, то коник пригає на 15 см, інакше - пригає на 30 см.

```
## Third task - broken horse
```

```
def brokenV(N):
```

```
    t = 0 # Time in seconds
```

```
    dist = 0 # Distance in meters
```

```
    for i in range(0,N):
```

```
        # Jump
```

```
        t+=1
```

```
        if random.random() <= 0.3:
```

```
            dist += 0.15
```

```
        else:
```

```
            dist += 0.3
```

```
        if random.random() <= 0.2: # if cracked the leg, wait 30 seconds
```

```
            t+=30
```

```
    return dist/t
```

```
brokenV(5000000) # Result - average velocity: 0.0364 m/s
```

Завдання 3

Нехай коник зламався і почав стрибати з ймовірністю $p_s = 0,3$ на відстань 15 см і з ймовірністю $p_s = 1 - 0,3 = 0,7$ на відстань 30 см. За умови що він після кожного стрибка з ймовірністю $p = 0,2$ підвертає ногу, знайдіть середню швидкість коника.

Очікуване значення швидкості коника:

$$v = \frac{0.3 \cdot 0.15 + 0.7 \cdot 0.3}{1 + 0.2 \cdot 30} = 0.036429 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Чим більша кількість стрибків передається у функцію, тим ближче значення функції до очікуваного.

Результат роботи функції brokenV:

$$\text{brokenV}(5000000) = 0.036371 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Завдання 4

Нехай коник зовсім з'їхав з глузду і стрибаючи на відстань 15 см, він почав підвертати ногу з ймовірністю 0,2, а стрибаючи на відстань 30 см — з ймовірністю 0,3. Враховуючи що ймовірність стрибка на 15 см $p_s = 0,3$, а на відстань 30 см: $p_s = 1 - 0,3 = 0,7$, знайдіть середню швидкість коника.

```
## Fourth task - mad horse
```

```
def madV(N):
```

```
    t = 0 # Time in seconds
```

```
    dist = 0 # Distance in meters
```

```
    for i in range(0,N):
```

```
        # Jump
```

```
        t+=1
```

```
        if random.random() <= 0.3:
```

```
            dist += 0.15
```

```
            if random.random() <= 0.2: # if cracked the leg, wait 30 seconds
```

```
                t+=30
```

```
        else:
```

```
            dist += 0.3
```

```
            if random.random() <= 0.3: # if cracked the leg, wait 30 seconds
```

```
                t+=30
```

```
    return dist/t
```

```
madV(5000000) # Result - average velocity: 0.028 m/s
```

Завдання 4

Нехай коник зовсім з'їхав з глузду і стрибаючи на відстань 15 см, він почав підвертати ногу з ймовірністю 0,2, а стрибаючи на відстань 30 см — з ймовірністю 0,3. Враховуючи що ймовірність стрибка на 15 см $p_s = 0,3$, а на відстань 30 см: $p_s = 1 - 0,3 = 0,7$, знайдіть середню швидкість коника.

Очікуване значення швидкості коника:

$$v = 0.3 \cdot \frac{0.15}{1 + 0.2 \cdot 30} + 0.7 \cdot \frac{0.3}{1 + 0.3 \cdot 30} = 0.02743 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Результат роботи функції madV:

$$\text{madV}(5000000) = 0.02803 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Завдання 5

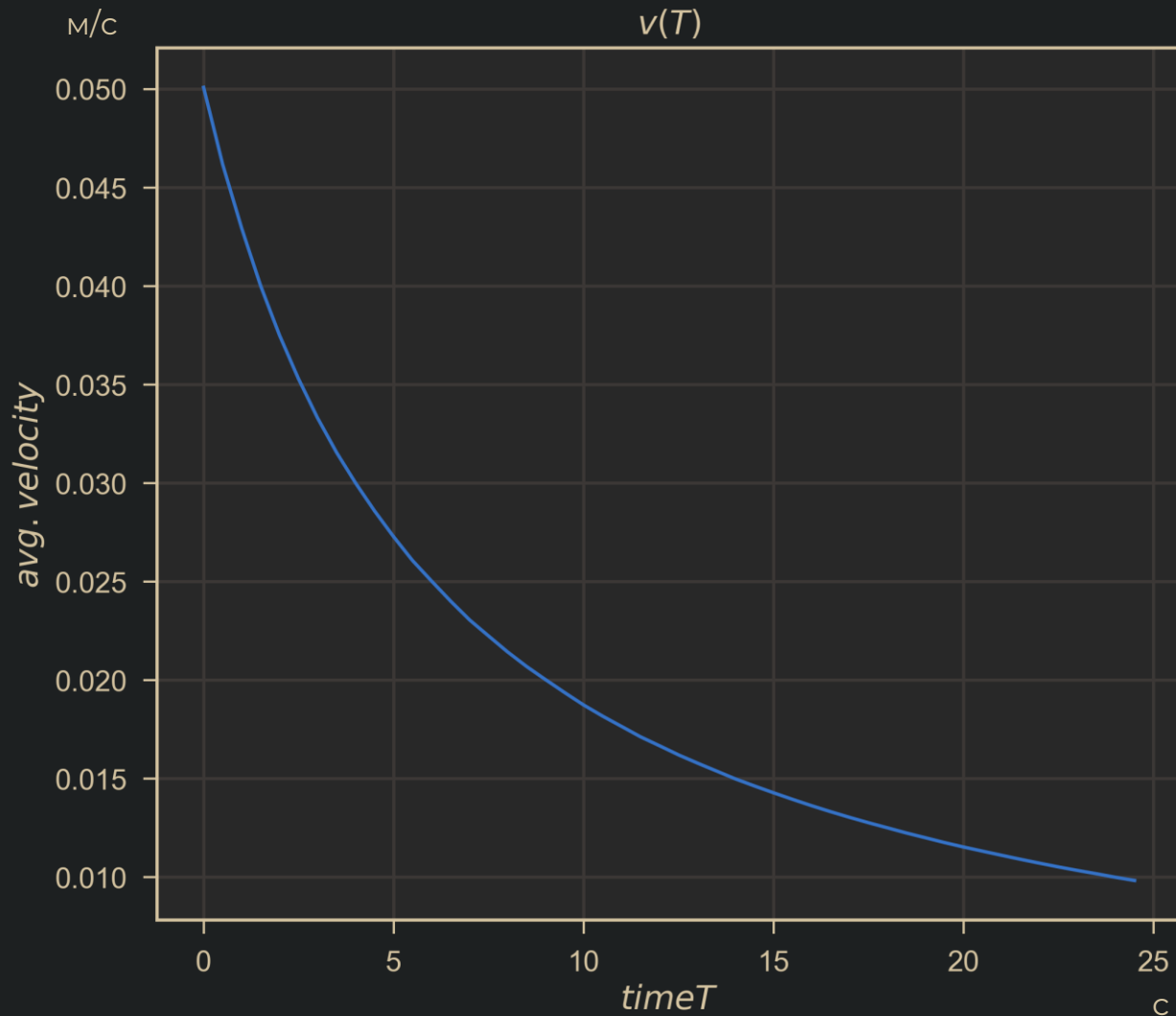
Нехай час стрибка коника рівний T , причому $T < 1$ с. Розв'яжіть пункт 1 за різних значень параметра T , зокрема дослідіть як поводить ся середня швидкість при $T \rightarrow 0$.

```
T = np.arange(0, 25, 0.5)
v5 = np.vectorize(v5)
vs = v5(2000000, T)
plt.title("$v(T)$")
plt.ylabel('$avg. velocity$')
plt.xlabel('$time T$')
plt.plot(T, vs)
```

```
def v5(N, T):
    t = 0 # Time in seconds
    dist = 0 # Distance in meters
    for i in range(0, N):
        # Jump
        t+=T
        dist += 0.3

        if random.random() <= 0.2:
            t+=30
    return dist/t
```

Завдання 5



Залежність можна побачити на графіку зліва. Швидкість обернено пропорційно залежить від часу T . Спробуємо знайти формулу:

$$v = \frac{\Delta x}{T + p \cdot t} \rightarrow$$

$$v(T) = \frac{0.3}{T + 6}.$$

При $T \rightarrow 0$ маємо:

$$v(0) = \frac{0.3}{6} = 0.05 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$



Дякуємо за увагу!

Презентацію і розв'язок підготував:
Шеламанов Артем



Дніпровський науковий ліцей
інформаційних технологій при ДНУ