3. Уравнение вида:

$$F(y^{(n)}, y^{(n-2)}) = 0. \tag{21}$$

также интегрируются в квадратурах. Введение нового переменного z $= y^{(n-2)}$ приводит уравнение (21) к уравнению второго порядка:

$$F(z^{(n)}, z) = 0. \tag{22}$$

Если уравнение (22) разрешено относительно z^n, т.е. имеет вид:

$$z^n = f(z), \tag{21$'$}$$

то один из методов его интеграции таков: умножим обе части на $2z$‘, получаем:

$$2z'z^n = 2f(z)dz,$$

или в диференциалах:

$$d(z'^2) = 2f(z)dz,$$

откуда

$$z'^2 = 2{\textstyle\int} f(z)dz + C_1.$$

Последнее уравнение можно разрешить относительно производной и разделить переменные:

$$\frac{dz}{\sqrt{2\int f(z)dz + C_1}} = dx;$$

отсюда находим общий интеграл уравнения (22’):

$$\int \frac{dz}{\sqrt{2\int f(z)dz + C_1}} = x + C_2.$$

Этот интеграл, по замене z на $y^{(y-2)}$, получает вид:

$$\Phi(y^{(n-2)}, x, C_1, C_2) = 0,$$

т. е. уравнение вида (17$'$); оно интегрируется, как мы уже знаем, квадратурами, причем эта интеграция ведет еще $n-2$ произвольных постоянных, и мы получим общее решение уравнения (22$'$).

Если уравнение (21) дано в неразрешенном относительно $y^{(n)}$ виде и известно его параметрическое представление

$$y^{(n)} = \phi(t), \quad y^{(n-2)} = \psi(t), \tag{21$'$}$$

то интеграция совершается следующим образом. Мы имеем два равенства:

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx, \quad dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx,$$

связывающих две неизвестные функции от t, именно x и y; исключая деление dx, получаем диференциальное уравнение для $y^{(n-1)}$:

$$y^{(n-1)}dy^{(n-1)}dx = y^{(n)}dy^{(n-2)},$$

или в силу уравнений (21′)

$$y^{(n-1)}dy^{(n-1)} = \varphi(t)\psi'(t)dt,$$

откуда квадратурой находим $(y^{(n-1)})^2$; далее получим:

$$y^{(n-1)} = \sqrt{2\int \varphi(t)\psi'(t)dt + C.}$$

Имея параметрическое представление $y^{(n-1)}$ и $y^{(n-2)}$, мы свели задачу к типу (20″), рассмотренному в разделе 2 настоящего параграфа. Дальнейшие квадратуры введут n—1 новых произвольных постоянных.

Пример 5. $a^2\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d^2y}{dx^2}$. Полагая $y^n = z$, приходим к уравнению: $a^2z^n = z$, умножим обе части на $2z'$:

$$2a^2z'z^n = 2zz' \quad \text{или} \quad 2^2z'dz' = 2z\ dz.$$

Интегрируя, находим:

$$a^2{z'}^2 = z^2 + C_1,$$

откуда

$$\frac{dz}{\sqrt{z^2+C_1}} = \frac{dx}{a}.$$

Вторая интеграция дает:

$$ln(z + \sqrt{z^2+C_1}) = \frac{x}{a} + lnC_2$$

или

$$z + \sqrt{z^2+C_1} = C_2e^{\frac{x}{a}},$$

Чтобы разрешить последнее уравнение относительно z, выгодно поступить следующем образом: делим 1 на обе части последнего равенства:

$$\frac{1}{z+\sqrt{z^2+C_1}} = \frac{1}{C_2}e^{-\frac{x}{a}},$$

в левой части освобождаемся от иррациональности в знаменателе, затем умножаем обе части на $-C_1$:

$$z - \sqrt{z^2+C_1} = \frac{C_1}{C_2}e^{-\frac{x}{a}}.$$

Складывая это уравнение с исходным и деля на 2, получаем:

$$z = \frac{C_2}{2}e^{\frac{x}{a}} - \frac{C_1}{2C_2}e^{-\frac{x}{a}}.$$

Подставляя вместо z его значение y^n и интегрируя два раза, находим:

$$y = Ae^{\frac{x}{a}} + be^{-\frac{x}{a}} + Cx + D.$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные.