Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)

Факультет информационных технологий и прикладной математики

Кафедра вычислительной математики и программирования

Лабораторная работа №2 по курсу «Численные методы»
Вариант №1

Студент: А. О. Дубинин
Преподаватель: И. Э. Иванов
Группа: М8О-306Б
Дата:
Оценка:
Подпись:

Москва, 2020

Лабораторная работа №1

Задача: Разработать методы решения задач линейной алгебры.

Вариант 1

1.1 Реализовать методы простой итерации и Ньютона решения нелинейных уравнений в виде программ, задавая в качестве входных данных точность вычислений. С использованием разработанного программного обеспечения найти положительный корень нелинейного уравнения (начальное приближение определить графически). Проанализировать зависимость погрешности вычислений от количества итераций.

1.2 Реализовать методы простой итерации и Ньютона решения систем нелинейных уравнений в виде программного кода, задавая в качестве входных данных точность вычислений. С использованием разработанного программного обеспечения решить систему нелинейных уравнений (при наличии нескольких решений найти то из них, в котором значения неизвестных являются положительными); начальное приближение определить графически. Проанализировать зависимость погрешности вычислений от количества итераций.

1 Решение

Согласно [1], численное решение нелинейных (алгебраических или трансцендентных) уравнений вида:

$$f(x) = 0$$

заключается в нахождении значений x, удовлетворяющих с заданной точностью данному уравнению, и состоит из следующих основных этапов:

- отделение (изоляция, локализация) корней уравнения;
- уточнение с помощью некоторого вычислительного алгоритма конкретного выделенного корня с заданной точностью.

Целью первого этапа является нахождение отрезков из области определения функции f(x), внутри которых содержится только один корень решаемого уравнения. Иногда ограничива ются рассмотрением лишь какой-нибудь части области определения, вызывающей по тем или иным соображениям интерес. Для реализации данного этапа используются графические или аналитические способы. При аналитическом способе отделения корней полезна следующая теорема.

Теорема 2.1.
Непрерывная строго монотонная функция f(x) имеет единственный нуль на отрезке [a, b] тогда и только тогда, когда на его концах она принимает значения разных знаков.

Достаточным признаком монотонности функции f(x) на отрезке [a, b] является сохранение знака производной функции.

Графический способ отделения корней целесообразно использовать в случае, когда имеется возможность построения графика функции y = f(x). Наличие графика исходной функции дает непосредственное представление о количестве и расположении нулей функции, что позволяет определить промежутки, внутри которых содержится только один корень.

Так или иначе, при завершении первого этапа должны быть определены промежутки, на каждом из которых содержится только один корень уравнения.

Для уточнения корня с требуемой погрешностью обычно применяется какой-либо итерационный метод, заключающийся в построении числовой последовательности $x^{(k)}, k = 0, 1, 2, ...$, сходящейся к искомому корню $x^{(*)}$ уравнения.

1.1.1 Метод ньютона для одного уравнения.
При нахождении корня уравнения методом Ньютона итерационный процесс определяется формулой

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$

Для начала вычислений требуется задание начального приближения $x^{(0)}$. Условия сходимости метода определяются следующей теоремой

Теорема 2.2.
Пусть на отрезке [a, b] функция f(x) имеет первую и вторую производные постоянного знака и пусть $f(a) * f(b) < 0$. Тогда, если точка $x^{(0)}$ выбрана на [a, b] так, что

$$f(x^{(0)}) * f'(x^{(0)}) > 0$$

то начатая с нее последовательность $x^{(0)}$, k = 0, 1, 2, ..., определяемая методом Ньютона, монотонно сходится к корню $x^{(*)} \in (a, b)$ уравнения.

В качестве условия окончания итераций в практических вычислениях часто используется правило $|x^{(k+1)} - x^{(k)}| < \epsilon => x^{(*)} \approx x^{(k+1)}$.

1.1.2 Метод простой итерации для одного уравнения.

При использовании метода простой итерации уравнение заменяется эквивалентным уравнением с выделенным линейным членом

$$x = \phi(x)$$

Решение ищется путем построения последовательности

$$x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)}), k = 0, 1, 2, ...,$$

начиная с некоторого заданного значения x(0). Если $\phi(x)$ – непрерывная функция, а $x^{(k)}$, k = 0, 1, 2, ..., – сходящаяся последовательность, то значение $x^{(*)} = \lim_{k\to\infty} x^{(k)}$ является решением уравнения. Условия сходимости метода и оценка его погрешности определяются теоремой, доказанной выше.

Теорема 2.3.
Пусть функция $\phi(x)$ определена и дифференцируема на отрезке [a, b]. Тогда, если выполняются условия

$$\phi(x) \in [a, b], \forall x \in [a, b],$$
$$\exists q : |\phi'(x)| \leqslant q < 1 \forall x \in [a, b],$$

то уравнение имеет единственный на [a, b] корень $x^{(*)}$ к этому корню сходится определяемая методом простой итерации последовательность $x^{(k)}, k = 0, 1, 2, ...,$ начинающаяся с любого $x^{(0)} \in [a, b]$. При этом справедливы оценки погрешности ($\forall k \in N$):

$$|x^{(*)} - x^{(k+1)}| \leq \frac{q}{1-q}|x^{(k+1)} - x^{(k)}|,$$
$$|x^{(*)} - x^{(k+1)}| \leq \frac{q^{(k+1)}}{1-q}|x^{(1)} - x^{(0)}|,$$

Систему нелинейных уравнений с n неизвестными можно записать в виде

$$f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0,$$
$$f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0,$$
$$.....$$
$$f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0,$$

или, более коротко, в векторной форме

$$f(x) = 0$$

где x — вектор неизвестных величин, f — вектор-функция

В редких случаях для решения такой системы удается применить метод последовательного исключения неизвестных и свести решение исходной задачи к решению одного нелинейного уравнения с одним неизвестным. Значения других неизвестных величин находятся соответствующей подстановкой в конкретные выражения. Однако в подавляющем большинстве случаев для решения систем нелинейных уравнений используются итерационные методы. В дальнейшем предполагается, что ищется изолированное решение нелинейной системы.

Замечание. Как и в случае одного нелинейного уравнения, локализация решения может осуществляться на основе специфической информации по конкретной решаемой задаче (например, по физическим соображениям) и с помощью методов математического анализа. При решении системы двух уравнений часто удобным является графический способ, когда месторасположение корней определяется как точки пересечения кривых $f_1(x_1, x_2) = 0, f_2(x_1, x_2) = 0$ на плоскости (x_1, x_2)

1.2.1 Метод Ньютона для системы уравнений.

Если определено начальное приближение $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)})^T$ итерационный процесс нахождения решения системы методом Ньютона можно представить в виде

$$x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} + \Delta x_1^{(k)}$$
$$x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} + \Delta x_2^{(k)}$$
$$.....$$
$$x_n^{(k+1)} = x_n^{(k)} + \Delta x_n^{(k)}$$

где значения приращений $\Delta x_1^{(k)}, \Delta x_2^{(k)}, ..., \Delta x_n^{(k)}$ определяются из решения системы линейных алгебраических уравнений, все коэффициенты которой выражаются через известное предыдущее приближение $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)})$

$$f_1(x^{(k)}) + \frac{\delta f_1(x^{(k)})}{\delta x_1}\Delta x_1^{(k)} + \frac{\delta f_1(x^{(k)})}{\delta x_2}\Delta x_2^{(k)} + ... + \frac{\delta f_1(x^{(k)})}{\delta x_n}\Delta x_n^{(k)} = 0$$

$$f_2(x^{(k)}) + \frac{\delta f_2(x^{(k)})}{\delta x_1}\Delta x_1^{(k)} + \frac{\delta f_2(x^{(k)})}{\delta x_2}\Delta x_2^{(k)} + ... + \frac{\delta f_2(x^{(k)})}{\delta x_n}\Delta x_n^{(k)} = 0$$

.....

$$f_n(x^{(k)}) + \frac{\delta f_n(x^{(k)})}{\delta x_1}\Delta x_1^{(k)} + \frac{\delta f_n(x^{(k)})}{\delta x_2}\Delta x_2^{(k)} + ... + \frac{\delta f_n(x^{(k)})}{\delta x_n}\Delta x_n^{(k)} = 0$$

В векторно-матричной форме расчетные формулы имеют вид

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}$$

где вектор приращений $\Delta x^{(k)}$ находится из решения уравнения

$$f(x^{(k)}) + J(x^{(k)})\Delta x^{(k)} = 0$$

Выражая вектор приращений и подставляя его , итерационный процесс нахождения решения можно записать в виде

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - J^{-1}(x^{(k)})f(x^{(k)})$$

Использование метода Ньютона предполагает дифференцируемость функций

$f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ и невырожденность матрицы Якоби. В случае, если начальное приближение выбрано в достаточно малой окрестности искомого корня, итерации сходятся к точному решению, причем сходимость квадратичная.

В практических вычислениях в качестве условия окончания итераций обычно используется критерий.

$$||x^{(k+1)} - x^{(k)}|| \leq \epsilon$$

1.2.2 Метод простых итераций для системы уравнений. При использовании метода простой итерации система уравнений приводится к эквивалентной системе специального вида

$$x_1 = \phi_1(x_1, x_2, ..., x_n)$$

$$x_2 = \phi_2(x_1, x_2, ..., x_n)$$

.....

$$x_n = \phi_n(x_1, x_2, ..., x_n)$$

или, в векторной форме

$$x = \phi(x)$$

Если выбрано некоторое начальное приближение $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)})^T$ последующие приближения в методе простой итерации находятся по формулам

в векторной форме

$$x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)}), k = 0, 1, 2, ...$$

Достаточное условие сходимости итерационного процесса формулируется следующим образом:

Теорема 2.4. Пусть вектор-функция $\phi(x), \phi'(x)$ в ограниченной выпуклой замкнутой области G и

$$max||\phi'(x^{(k)})|| \leq q < 1$$

где q - постоянная. Если $x^{(0)} \in G$ и все последовательные приближения

$$x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)}), k = 0, 1, 2, ...$$

также содержатся в G , то процесс итерации сходится к единственному решению уравнения

$$x = \phi(x)$$

в области G и справедливы оценки погрешности $\forall k \in N$:

$$||x^{(*)} - x^{(k+1)}|| \leq \frac{q^{k+1}}{1-q}||x^{(1)} - x^{(0)}||,$$

$$||x^{(*)} - x^{(k+1)}|| \leq \frac{q}{1-q}||x^{(k+1)} - x^{(k)}||,$$

2 Исходный код

1.1 Метод ньютона и простой итерации для одного уравнения.

```
import argparse
import numpy as np


class Solver:
    def __init__(self, eps, output_name, log_name):
        self.eps = eps
        self.out_file = output_name
        self.log_file = log_name
        if self.log_file:
            open(self.log_file, 'w').close()
        self.area = (1, 3)
        self.x0 = 1.25
        self.lmbd = self.calc_lambda()
        self.q = self.calc_q()
        self.k_iter = 0
        self.k_newton = 0
        self.check()
        self.iter_x = self.iter_method()
        self.newtons_x = self.newtons_method()

    def check(self):
        with open(self.log_file, 'a') as f_log:
            f_log.write(f'q = {self.q}\n')
            f_log.write(f'lambda = {self.lmbd}\n')
            x = np.linspace(self.area[0], self.area[1], 10000)
            y = [self.phi_derivative(i) for i in x]
            if all([i < 1 for i in y]):
                f_log.write('phi\' < 1\n')
            else:
                f_log.write('phi\' >= 1\n')
            if self.q < 1:
                f_log.write('q < 1\n')
            else:
                f_log.write('q >= 1\n')

    staticmethod
    def f(x):
        return 2**x - x**2 - 0.5

    def phi(self, x):
        return x - self.lmbd * self.f(x)

    def phi_derivative(self, x):
```

```
45          return 1 - self.lmbd * self.f_derivative(x)
46
47      staticmethod
48      def f_derivative(x):
49          return 2**x * np.log(2) - 2*x
50
51      staticmethod
52      def f_2derivative(x):
53          return 2**x * np.log(2)**2 + 2**x * 0.5 - 2
54
55      def calc_q(self):
56          x = np.linspace(self.area[0], self.area[1], 10000)
57          y = [abs(self.phi_derivative(i)) for i in x]
58          q = np.max(y)
59          return q
60
61      def calc_lambda(self):
62          flag = None
63          x = np.linspace(self.area[0], self.area[1], 10000)
64          y = [self.f_derivative(i) for i in x]
65
66          if all([np.sign(i) == -1 for i in y]):
67              flag = -1
68          elif all([np.sign(i) == 1 for i in y]):
69              flag = 1
70          else:
71              if self.log_file:
72                  with open(self.log_file, 'a') as fl:
73                      fl.write('Error: Derivative change sign\n')
74              exit(-1)
75
76          y = [abs(self.f_derivative(i)) for i in x]
77          return flag / np.max(y)
78
79      def iter_method(self):
80          x_old = self.x0
81          if self.log_file:
82              with open(self.log_file, 'a') as fl:
83                  fl.write(f'Iter:\nx{self.k_iter} = {x_old}\n')
84          while True:
85              self.k_iter += 1
86              x_new = self.phi(x_old)
87              if self.log_file:
88                  with open(self.log_file, 'a') as fl:
89                      fl.write(f'x{self.k_iter} = {x_new}\n')
90              if abs(x_new - x_old) * self.q / (1 - self.q) < self.eps:
91                  return x_new
92              else:
93                  x_old = x_new
```

```
94
95      def newtons_method(self):
96          x_old = self.x0
97          if self.log_file:
98              with open(self.log_file, 'a') as fl:
99                  fl.write(f'Newton\'s:\nx{self.k_iter} = {x_old}\n')
100         while True:
101             self.k_newton += 1
102             x_new = x_old - self.f(x_old) / self.f_derivative(x_old)
103             if self.log_file:
104                 with open(self.log_file, 'a') as fl:
105                     fl.write(f'x{self.k_newton} = {x_new}\n')
106             if abs(x_new - x_old) < self.eps:
107                 return x_new
108             else:
109                 x_old = x_new
110
111     def print_solution(self):
112         with open(self.out_file, 'w') as f_out:
113             f_out.write(f'EPS = {self.eps}\n')
114             f_out.write(f'Iter: x = {self.iter_x}\n')
115             f_out.write(f'Steps = {self.k_iter}\n')
116             f_out.write(f'Newton: x = {self.newtons_x}\n')
117             f_out.write(f'Steps = {self.k_newton}\n')
118
119
120 def main():
121     parser = argparse.ArgumentParser()
122     parser.add_argument('--eps', type=float, required=True, help='Accuracy')
123     parser.add_argument('--output', required=True, help='File for answer')
124     parser.add_argument('--log', help='Logging')
125     args = parser.parse_args()
126
127     sol = Solver(args.eps, args.output, args.log)
128     sol.print_solution()
129
130 if __name__ == "__main__":
131     main()
```

1.2 Метод ньютона и простой итерации для системы уравнений.

```
1  import argparse
2  import numpy as np
3  from numpy.linalg import norm, solve, det
4  from itertools import product
5
6
7  class Solver:
8      def __init__(self, eps, output_name, log_name):
```

```
9           self.eps = eps
10          self.out_file = output_name
11          self.log_file = log_name
12          if self.log_file:
13              open(self.log_file, 'w').close()
14          self.area = ((2.5, 3.25), (0.5, 0.75))
15          self.x0 = [2.5, 0.5]
16          self.k_iter = 0
17          self.k_newton = 0
18          self.lmbd = self.calc_lambda()
19          self.q = self.calc_q()
20          self.iter_x = self.iter_method()
21          self.newtons_x = self.newtons_method()
22
23      staticmethod
24      def f1(x1, x2):
25          return (x1**2 + 4) * x2 - 8
26
27      staticmethod
28      def f2(x1, x2):
29          return (x1 - 1)**2 + (x2 - 1)**2 - 4
30
31      staticmethod
32      def f11(x1, x2):
33          return 2 * x1 * x2
34
35      staticmethod
36      def f12(x1):
37          return x1**2 + 4
38
39      staticmethod
40      def f21(x1):
41          return 2 * x1 - 2
42
43      staticmethod
44      def f22(x2):
45          return 2 * x2 - 2
46
47      def phi1(self, x1, x2):
48          return x1 - (self.f1(x1, x2) * self.lmbd[0, 0] + self.f2(x1, x2) *
49                       self.lmbd[0, 1])
50
51      def phi2(self, x1, x2):
52          return x2 - (self.f1(x1, x2) * self.lmbd[1, 0] + self.f2(x1, x2) *
53                       self.lmbd[1, 1])
54
55      def phi11(self, x1, x2):
56          return 1 - (self.f11(x1, x2) * self.lmbd[0, 0] + self.f21(x1) *
57                      self.lmbd[0, 1])
```

```
58
59      def phi12(self, x1, x2):
60          return -(self.f12(x1) * self.lmbd[0, 0] + self.f22(x2) *
61                  self.lmbd[0, 1])
62
63      def phi21(self, x1, x2):
64          return -(self.f11(x1, x2) * self.lmbd[1, 0] + self.f21(x1) *
65                  self.lmbd[1, 1])
66
67      def phi22(self, x1, x2):
68          return 1 - (self.f12(x1) * self.lmbd[1, 0] + self.f22(x2) *
69                      self.lmbd[1, 1])
70
71      def phi_derivative(self, x):
72          return np.array([[self.phi11(*x), self.phi12(*x)],
73                           [self.phi21(*x), self.phi22(*x)]])
74
75      def j(self, x1, x2):
76          return [[self.f11(x1, x2), self.f12(x1)], [self.f21(x1), self.f22(x2)]]
77
78      def calc_lambda(self):
79          shape = len(self.area)
80          current_j = self.j(*self.x0)
81          inv_j = np.array([solve(current_j, i) for i in np.eye(shape)])
82          return np.transpose(inv_j)
83
84      def calc_q(self):
85          x1 = np.linspace(self.area[0][0], self.area[0][1], 100)
86          x2 = np.linspace(self.area[1][0], self.area[1][1], 100)
87          points = list(product(x1, x2))
88          vals = [norm(self.phi_derivative(point), np.inf) for point in points]
89          q = np.max(vals)
90          return q
91
92      def iter_method(self):
93          x_old = self.x0
94          if self.log_file:
95              with open(self.log_file, 'a') as fl:
96                  fl.write(f'Iter:\nx{self.k_iter} = {x_old}\n')
97          while True:
98              self.k_iter += 1
99              x_new = np.array([self.phi1(*x_old), self.phi2(*x_old)])
100             if self.log_file:
101                 with open(self.log_file, 'a') as fl:
102                     fl.write(f'x{self.k_iter} = {x_new}\n')
103             if norm(x_new - x_old, np.inf) * self.q / (1 - self.q) <= self.eps:
104                 return x_new
105             else:
106                 x_old = x_new
```

```
107
108     def newtons_method(self):
109         shape = len(self.area)
110         x_old = self.x0
111         if self.log_file:
112             with open(self.log_file, 'a') as fl:
113                 fl.write(f'Newton\'s:\nx{self.k_iter} = {x_old}\n')
114         while True:
115             current_j = self.j(*x_old)
116             if det(current_j) == 0:
117                 if self.log_file:
118                     with open(self.log_file, 'a') as fl:
119                         fl.write(f'Error: detJ({self.k_newton} == 0)\n')
120                 exit(-1)
121             self.k_newton += 1
122             inv_j = np.array([solve(current_j, i) for i in np.eye(shape)])
123             x_new = x_old - np.transpose(inv_j) np.array([self.f1(*x_old),
124                                                           self.f2(*x_old)])
125             if self.log_file:
126                 with open(self.log_file, 'a') as fl:
127                     fl.write(f'x{self.k_newton} = {x_new}\n')
128             if norm(x_new - x_old, np.inf) <= self.eps:
129                 return x_new
130             else:
131                 x_old = x_new
132
133     def print_solution(self):
134         if self.log_file:
135             with open(self.log_file, 'a') as f_log:
136                 f_log.write(f'q = {self.q}\n')
137                 f_log.write(f'Lambda:\n{self.lmbd}\n')
138         with open(self.out_file, 'w') as f_out:
139             f_out.write(f'EPS = {self.eps}\n')
140             f_out.write(f'Iter: x = {self.iter_x}\n')
141             f_out.write(f'Steps = {self.k_iter}\n')
142             f_out.write(f'Newton: x = {self.newtons_x}\n')
143             f_out.write(f'Steps = {self.k_newton}\n')
144
145
146 def main():
147     parser = argparse.ArgumentParser()
148     parser.add_argument('--eps', type=float, required=True, help='Accuracy')
149     parser.add_argument('--output', required=True, help='File for answer')
150     parser.add_argument('--log', help='Logging')
151     args = parser.parse_args()
152
153     sol = Solver(args.eps, args.output, args.log)
154     sol.print_solution()
155
```

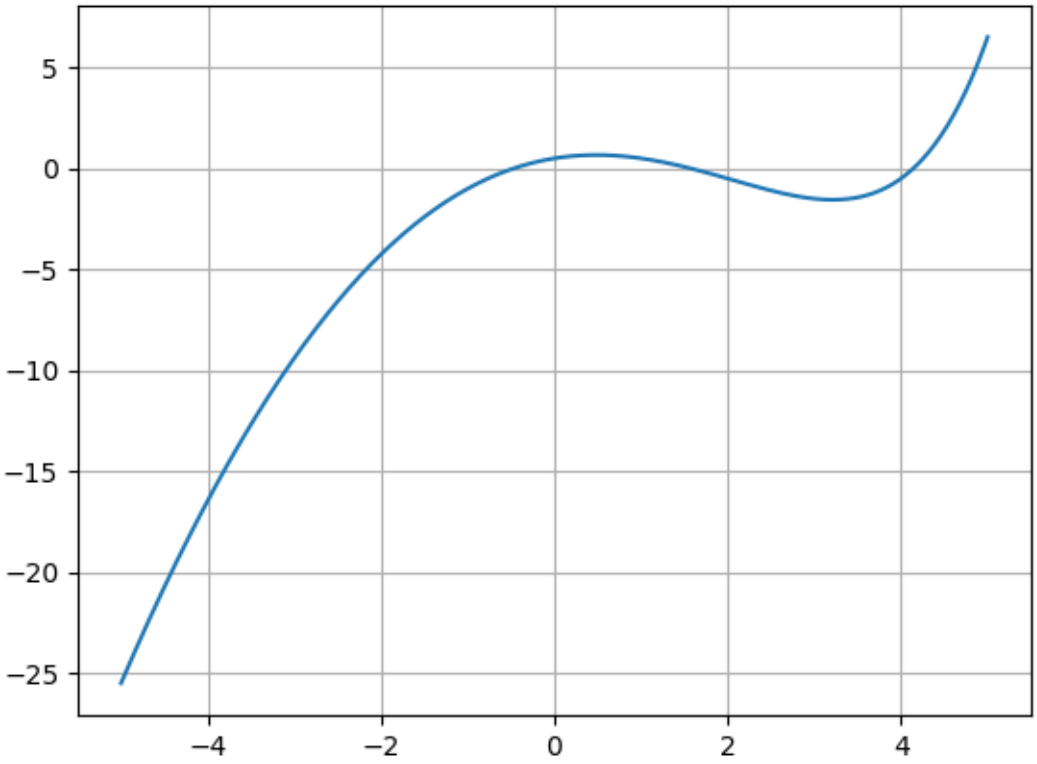
```
156 if __name__ == "__main__":
157     main()
```

3 Вывод программы

1.1 Метод ньютона и простой итерации для одного уравнения.
Начальное значение определим графически.

Заданная функция:

$$f(x) = 2^x - x^2 - 0.5$$



Будем находить корень в границах [1,3]

Для метода ньютона:

Производные функции:

$$f'(x) = 2^x log(2) - 2x$$

$$f''(x) = 2^x log(2)^2 - 2$$

Возьмем в качестве начального приближения $x^{(0)} = 1.25$

Так как для него выполняется неравенство

$$f(1.25) * f''(1.25) > 0$$

Для метода простой итерации:

Возьмем ϕ такого вида, чтобы оно подходило под условия теоремы на отрезке [1,3]

$$\phi(x) = \sqrt{2^x - \frac{1}{2}}$$

$$\phi'(x) = \frac{2^{x-1} log(2)}{\sqrt{(2^x - 0.5)}}$$

$$\phi(x) \in [1, 3] \forall x \in [1, 3]$$

$$|\phi'(x)| < 0.44 = q$$

В качестве начального приблежения возьмем $x^{(0)} = 1.25$

Входные данные: Эпсилон, файл для вывода, файл для логирования.

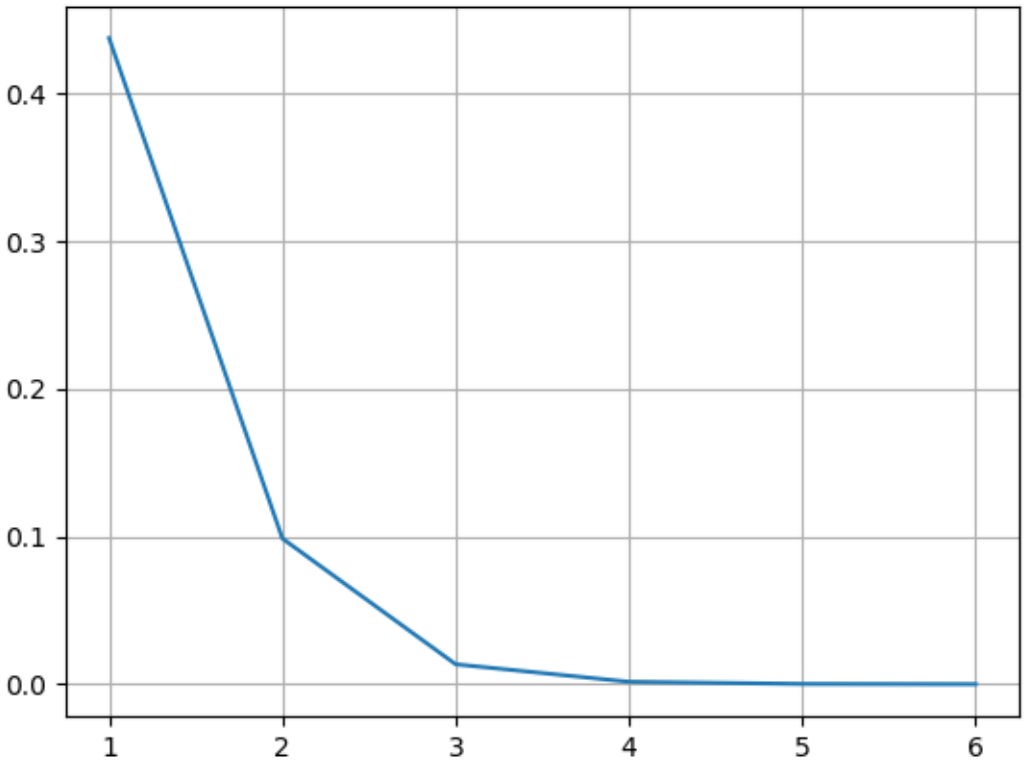
Выходные данные: Конечное значение и кол-во итераций для обоих методов в файле output. И в файле log значения на каждой итерации.

```
art@mars:~/study/NM/lab_2/p_1$ python3 Lw2_1.py --eps 0.0001 --output output
--log log
art@mars:~/study/NM/lab_2/p_1$ cat output
EPS = 0.0001
Iter: x = 1.5738271264645896
Steps = 6
Newton: x = 1.5738289236449503
Steps = 4
art@mars:~/study/NM/lab_2/p_1$ cat log
Iter:
x0 = 1.25
x1 = 1.5069086342344487
x2 = 1.5648348676802541
x3 = 1.5727460695657183
x4 = 1.5737005477535821
x5 = 1.573813732668428
x6 = 1.5738271264645896
Newton's:
x0 = 1.25
x1 = 1.6210487834750746
x2 = 1.574369411050435
```

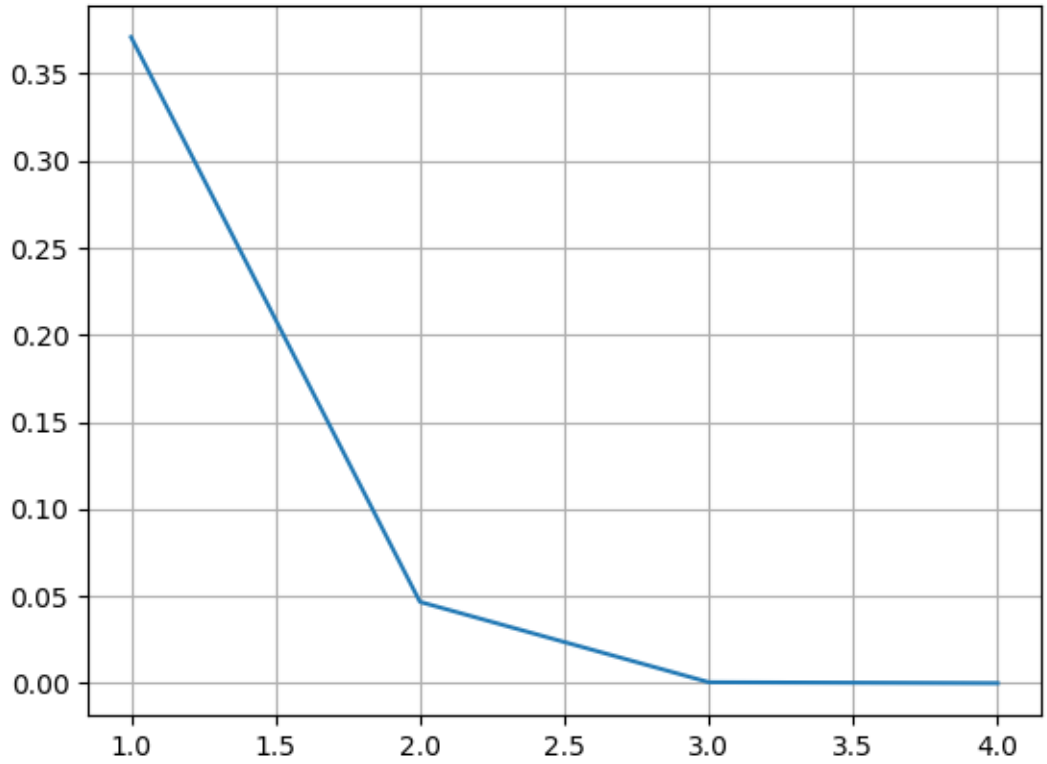
```
x3 = 1.5738290003277182
x4 = 1.5738289236449503
```

Зависимость погрешности от кол-ва итерации.

Метод простых итераций.

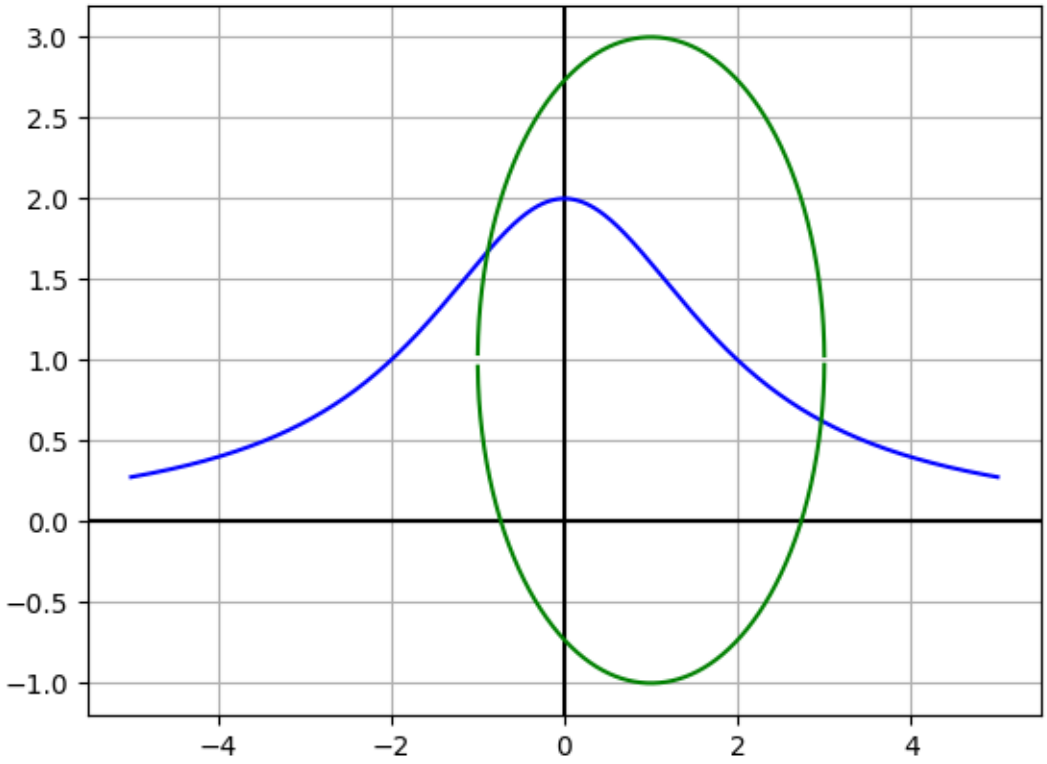


Метод ньютона.



1.2 Метод ньютона и простой итерации для системы уравнений.
Начальное значение определим графически.

$$f_1(x_1, x_2) = (x_1^2 + 4) * x_2 - 8 = 0,$$
$$f_2(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 - 4 = 0.$$



Будем искать наш корень в границах:
$x_1 \in [2.5, 3.25], x_2 \in [0.5, 1.25]$
В качестве начального приближения примем
Для метода ньютона:
$x_1^{(0)} = 2.5, x_2^{(0)} = 0.5$

$$\frac{df_1(x1, x2)}{dx_1} = 2 * x_1 * x_2$$
$$\frac{df_1(x1, x2)}{dx_2} = x_1^2 + 4$$
$$\frac{df_2(x1, x2)}{dx_1} = 2 * x_1 - 2$$
$$\frac{df_2(x1, x2)}{dx_2} = 2 * x_2 - 2$$

Для метода простой итерации:

$$\phi_1(x_1, x_2) = x_2 = \frac{8}{x_1^2 + 4}$$

$$\phi_2(x_1, x_2) = x_1 = 1 - \sqrt{-x_2^2 + 2x_2 + 3}$$

$$\frac{d\phi_1(x1, x2)}{dx_1} = -\frac{16 * x_1}{(x + 1^2 - 4)^2}$$

$$\frac{d\phi_1(x1, x2)}{dx_2} = 0$$

$$\frac{d\phi_2(x1, x2)}{dx_1} = 0$$

$$\frac{d\phi_2(x1, x2)}{dx_2} = \frac{x_2 - 1}{\sqrt{-x_2^2 + 2x_2 + 3}}$$

$$max||\phi'(x)|| \leq 0.68 = q$$

Входные данные: Эпсилон, файл для вывода, файл для логирования.

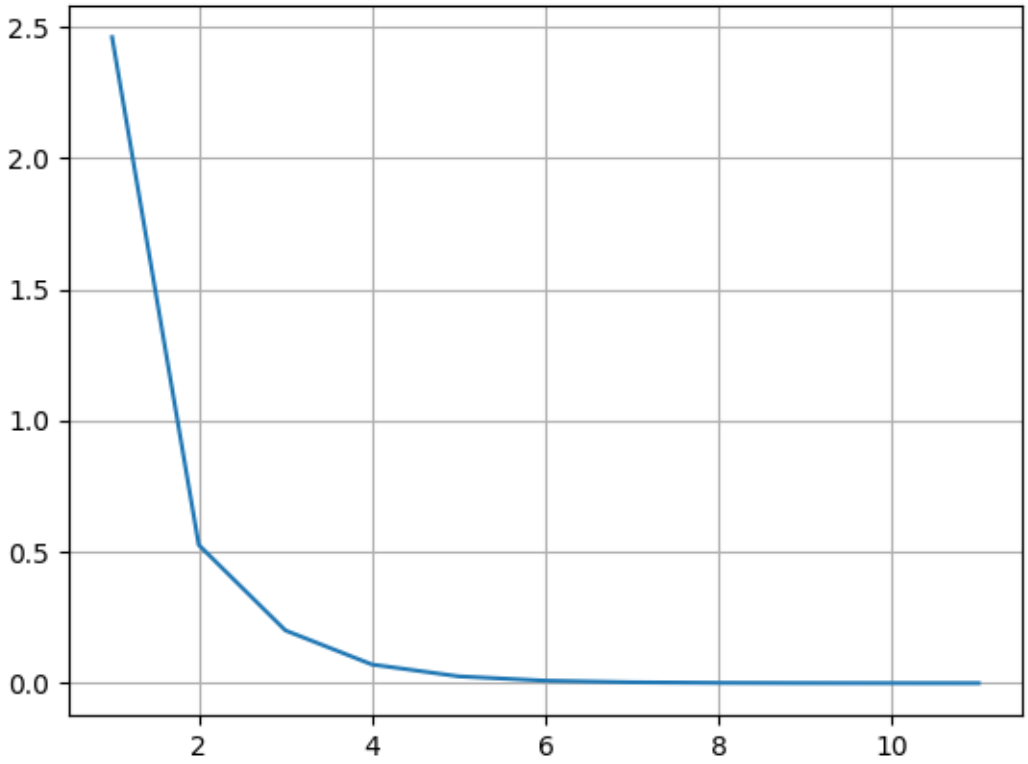
Выходные данные: Конечное значение и кол-во итераций для обоих методов в файле output. И в файле log значения на каждой итерации.

```
art@mars:~/study/NM/lab_2/p_2$ python3 Lw2_2.py --eps 0.0001 --output output
--log log
art@mars:~/study/NM/lab_2/p_2$ cat output
EPS = 0.0001
Iter: x = [2.96463486 0.62553655]
Steps = 11
Newton: x = [2.96463138 0.62553565]
Steps = 4
art@mars:~/study/NM/lab_2/p_2$ cat log
Iter:
x0 = [2.5,0.5]
x1 = [3.04887218 0.64661654]
x2 = [2.93141567 0.6170041 ]
x3 = [2.97623247 0.62850686]
x4 = [2.96037651 0.62444091]
x5 = [2.96616616 0.62593055]
x6 = [2.96407427 0.62539219]
x7 = [2.96483316 0.62558762]
```

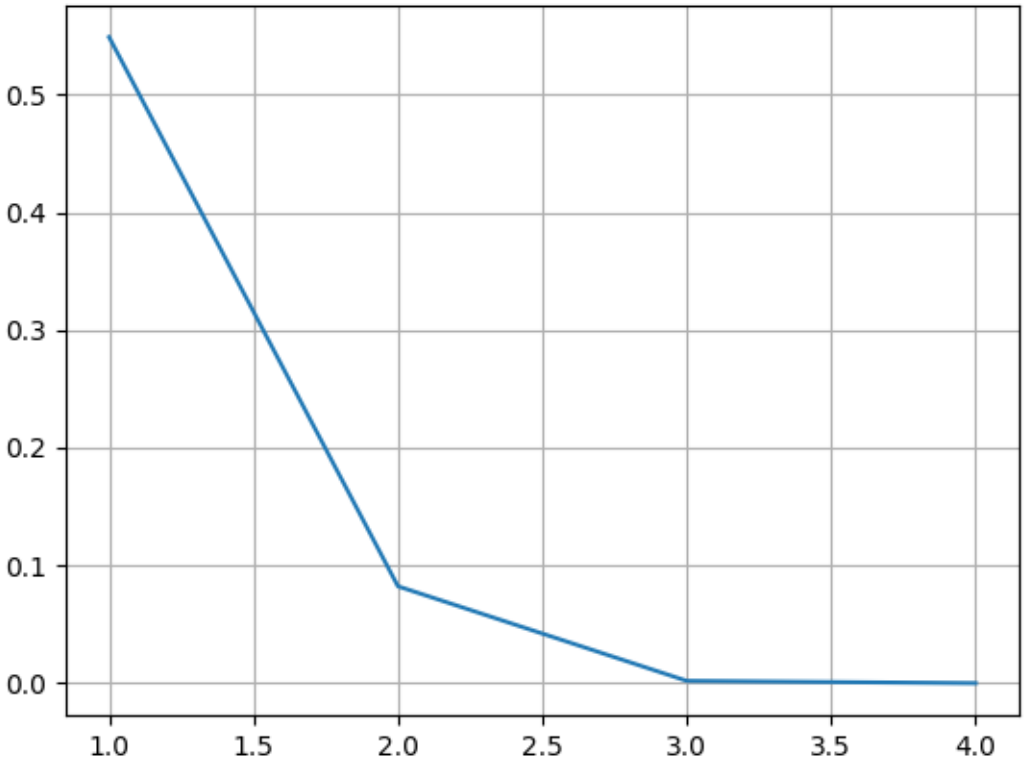
```
x8 = [2.96455823 0.62551681]
x9 = [2.96465789 0.62554248]
x10 = [2.96462177 0.62553318]
x11 = [2.96463486 0.62553655]
Newton's:
x0 = [2.5,0.5]
x1 = [3.04887218 0.64661654]
x2 = [2.96657052 0.62610893]
x3 = [2.96463249 0.62553603]
x4 = [2.96463138 0.62553565]
q = 0.8176691729323308
Lambda:
[[ 0.03007519  0.30827068]
[ 0.09022556 -0.07518797]]
```

Зависимость погрешности от кол-ва итерации.

Метод простых итераций.



Метод ньютона.


0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
4.0

4 Выводы

Благодаря этой лабораторной работе, я узнал, что можно быстро с помощью компьютера находить решения нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений методом Ньютона и простой итерации.

Список литературы

[1] *Численные методы. Учебник*
Пирумов Ульян Гайкович, Гидаспов Владимир Юрьевич
(ISBN 978-5-534-03141-6)