

Университет ИТМО

Дискретная Математика

**«Курсовая работа по дисциплине Дискретная
Математика»**

Студент: **Фарзекаев Артур Робертович**

Кафедра: **ВТ**

Дисциплина: **Дискретная Математика**

Факультет: **ПИиКТ**

Группа: **Р3100**

Вариант: **17**

Преподаватель: **Поляков Владимир Иванович.**

г. Санкт-Петербург

2017 г.

СИНТЕЗ КОМБИНАЦИОННЫХ СХЕМ, РЕАЛИЗУЮЩИХ ЗАДАННУЮ ФУНКЦИЮ

Задача:

Построить комбинационные схемы в различных базисах, реализующие не полностью определенную булеву функцию:

Номер варианта	Условия, при которых $f = 1$	Условия, при которых $f = d$
17	$(X_2X_3 + X_1) > X_4X_5$	$(X_2X_4X_5) = 3$

Составление таблицы истинности:

N	$X_1X_2X_3X_4X_5$	$X_2X_4X_5$	$(X_2X_4X_5)_{10}$	X_2X_3	X_4X_5	$(X_2X_3)_{10}$	$(X_4X_5)_{10}$	+	f
0	00000	000	0	00	00	0	0	0	0
1	00001	001	1	00	01	0	1	0	0
2	00010	010	2	00	10	0	2	0	0
3	00011	011	3	00	11	0	3	0	d
4	00100	000	0	01	00	1	0	1	1
5	00101	001	1	01	01	1	1	1	0
6	00110	010	2	01	10	1	2	1	0
7	00111	011	3	01	11	1	3	1	d
8	01000	100	4	10	00	2	0	2	1
9	01001	101	5	10	01	2	1	2	1
10	01010	110	6	10	10	2	2	2	0
11	01011	111	7	10	11	2	3	2	0
12	01100	100	4	11	00	3	0	3	1
13	01101	101	5	11	01	3	1	3	1
14	01110	110	6	11	10	3	2	3	1
15	01111	111	7	11	11	3	3	3	0
16	10000	000	0	00	00	0	0	1	1
17	10001	001	1	00	01	0	1	1	0
18	10010	010	2	00	10	0	2	1	0
19	10011	011	3	00	11	0	3	1	d
20	10100	000	0	01	00	1	0	2	1
21	10101	001	1	01	01	1	1	2	1
22	10110	010	2	01	10	1	2	2	0
23	10111	011	3	01	11	1	3	2	d
24	11000	100	4	10	00	2	0	3	1
25	11001	101	5	10	01	2	1	3	1
26	11010	110	6	10	10	2	2	3	1
27	11011	111	7	10	11	2	3	3	0
28	11100	100	4	11	00	3	0	4	1
29	11101	101	5	11	01	3	1	4	1
30	11110	110	6	11	10	3	2	4	1
31	11111	111	7	11	11	3	3	4	1

Представление булевой функции в аналитическом виде:

КДНФ: $f = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \bar{x}_5 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \bar{x}_5 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 x_5 \vee x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \vee x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 \vee x_1 x_2 x_3 x_4 \bar{x}_5 \vee x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$

ККНФ: $f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5)(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \bar{x}_5)(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4 \vee x_5)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4 \vee \bar{x}_5)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4 \vee x_5)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4 \vee x_5)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4 \vee \bar{x}_5)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \bar{x}_5)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4 \vee x_5)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4 \vee x_5)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5)$

Минимизация булевой функции методом Квайна–Мак-Класки.

Нахождение простых импликант (максимальных кубов). Получение кубов различной размерности кубического комплекса $K(f)$ и выделение из них простых импликант.

$K^0(f) \cup N(f)$	$K^1(f)$	$K^2(f)$	$K^3(f)$	$Z(f)$	
1. 00100 v 2. 01000 v 3. 10000 v	1. 0X100 v 1-6 2. X0100 v 1-7 3. 0100X v 2-5	1. XX100 1-16 2-14 2. 01X0X v 3-12 4-10 3. X100X v 3-17 5-11	X1X0X 2-11 3-8 4-7 $K^4(f)=\emptyset$	X1X0X XX100 1XX00 X0X11 X11X0 1X10X 11XX0 1X1X1 111XX	
4. 00011 v 5. 01001 v 6. 01100 v 7. 10100 v 8. 11000 v	4. 01X00 v 2-6 5. X1000 v 2-8 6. 10X00 v 3-7 7. 1X000 v 3-8	4. X1X00 v 4-19 5-14 5. 1XX00 6-19 7-16			
9. 00111 v 10. 01101 v 11. 01110 v 12. 10011 v 13. 10101 v 14. 11001 v 15. 11010 v 16. 11100 v	8. 00X11 v 4-9 9. X0011 v 4-12 10. 01X01 v 5-10 11. X1001 v 5-14 12. 0110X v 6-10 13. 011X0 v 6-11 14. X1100 v 6-16 15. 1010X v 7-13 16. 1X100 v 7-16 17. 1100X v 8-14 18. 110X0 v 8-15 19. 11X00 v 8-16	6. X0X11 8-23 9-20 7. X1X01 v 10-26 11-21 8. X110X v 12-28 14-21 9. X11X0 13-29 14-22 10. 1X10X 15-28 16-25 11. 11X0X v 17-28 19-26 12. 11XX0 18-29 19-27			
	20. X0111 v 9-17 21. X1101 v 10-18 22. X1110 v 11-19 23. 10X11 v 12-17 24. 101X1 v 13-17 25. 1X101 v 13-18 26. 11X01 v 14-18 27. 11X10 v 15-19 28. 1110X v 16-18 29. 111X0 v 16-19 30. 1X111 v 17-20 31. 111X1 v 18-20 32. 1111X v 19-20	13. 1X1X1 24-31 25-30 14. 111XX 28-32 29-31			
17. 10111 v 18. 11101 v 19. 11110 v		20. X0111 v 9-17 21. X1101 v 10-18 22. X1110 v 11-19 23. 10X11 v 12-17 24. 101X1 v 13-17 25. 1X101 v 13-18 26. 11X01 v 14-18 27. 11X10 v 15-19 28. 1110X v 16-18 29. 111X0 v 16-19			
20. 11111 v					

Составление импликантной таблицы.

Простые импликанты (максимальные кубы)	0-кубы															
	00100	01000	01001	01100	01101	01110	10000	10100	10101	11000	11001	11010	11100	11101	11110	11111
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
X1X0X		*	*	*	(*)					*	(*)		*	*		
XX100	(*)			*				*					*			
1XX00							(*)	*		*			*			
X0X11																
X11X0				*		(*)							*		*	
1X10X								*	*				*	*		
11XX0										*		(*)	*		*	
1X1X1									*					*		*
111XX													*	*	*	*

Определение существенных импликант

Простые импликанты (максималь- ные кубы)		0-кубы					
		10100	10101	11100	11101	11110	11111
		a	b	c	d	e	f
1X10X	A	*	*	*	*		
1X1X1	B		*		*		*
111XX	C			*	*	*	*

Множество существенных импликант образует ядро покрытия как его обязательную часть:

$$T = \left\{ \begin{matrix} X1X0X \\ XX100 \\ 1XX00 \\ X11X0 \\ 11XX0 \end{matrix} \right\}$$

Определение минимального покрытия. Метод Петрика.

$$Y = A (A \vee B) (A \vee C) (A \vee B \vee C) C (B \vee C)$$

$$Y = A \vee C$$

Возможны следующие варианты покрытия:

$$C_1 = \{T_A\} \qquad C_2 = \{T_C\}$$

$$S_1^a = 17 \qquad S_2^a = 17$$

$$S_1^b = 23 \qquad S_2^b = 23$$

Оба покрытия являются минимальными:

$$C_{\min 1}(f) = \left\{ \begin{array}{l} X1X0X \\ XX100 \\ 1XX00 \\ X11X0 \\ 11XX0 \\ 1X10X \end{array} \right\};$$

$$S_1^a = 17$$

$$S_1^b = 23$$

$$C_{\min 2}(f) = \left\{ \begin{array}{l} X1X0X \\ XX100 \\ 1XX00 \\ X11X0 \\ 11XX0 \\ 111XX \end{array} \right\};$$

$$S_2^a = 17$$

$$S_2^b = 23$$

Этим покрытиям соответствует МДНФ следующих видов, соответственно:

$$f = x_2 \bar{x}_4 \vee x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \vee x_1 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5 \vee x_2 x_3 \bar{x}_5 \vee x_1 x_2 \bar{x}_5 \vee x_1 x_3 \bar{x}_4$$

$$f = x_2 \bar{x}_4 \vee x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \vee x_1 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5 \vee x_2 x_3 \bar{x}_5 \vee x_1 x_2 \bar{x}_5 \vee x_1 x_2 x_3$$

Определение МКНФ:

Нахождение простых импликант (максимальных кубов)

[illegible]

Простые импликанты (максималь- ные кубы)	0-кубы											
	0000	0001	00010	00101	00110	01010	01011	01111	10001	10010	10110	11011
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X0X1X			*		*					*	*	
000XX	*	*	*									
00XX1		*		*								
X00X1		*							*			
0X01X			*			*	*					
0XX11							*	*				
XX011							*					*

Множество существенных импликант образует ядро покрытия как его обязательную часть:

$$T = \left\{ \begin{array}{l} X0X1X \\ 000XX \\ 00XX1 \\ X00X1 \\ 0X01X \\ 0XX11 \\ XX011 \end{array} \right\}$$

$$C_{\min}(\overline{f}) = \left\{ \begin{array}{l} X1X0X \\ XX100 \\ 1XX00 \\ X11X0 \\ 11XX0 \end{array} \right\} \quad S^a = 20, S^b = 27.$$

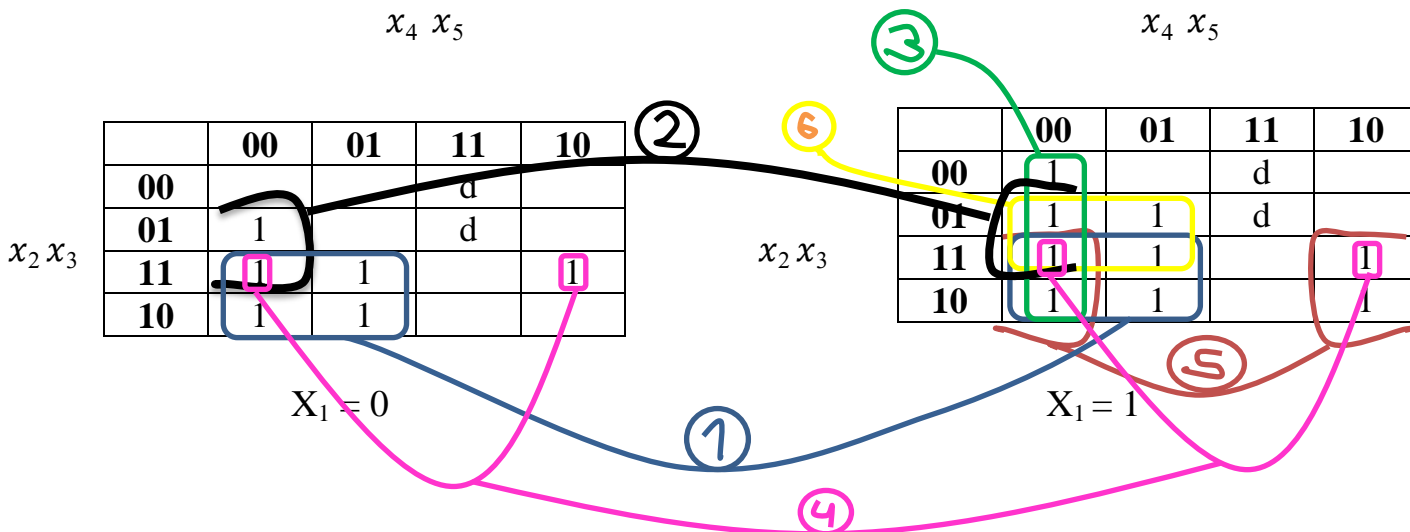
Этому покрытию соответствует МКНФ следующего вида:

$$f = (x_2 \vee \overline{x}_4)(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_5)(x_2 \vee x_3 \vee \overline{x}_5)(x_1 \vee x_3 \vee \overline{x}_4)(x_1 \vee \overline{x}_4 \vee \overline{x}_5)(x_3 \vee \overline{x}_4 \vee \overline{x}_5)$$

Минимизация булевой функции на картах Карно:

Определение МДНФ

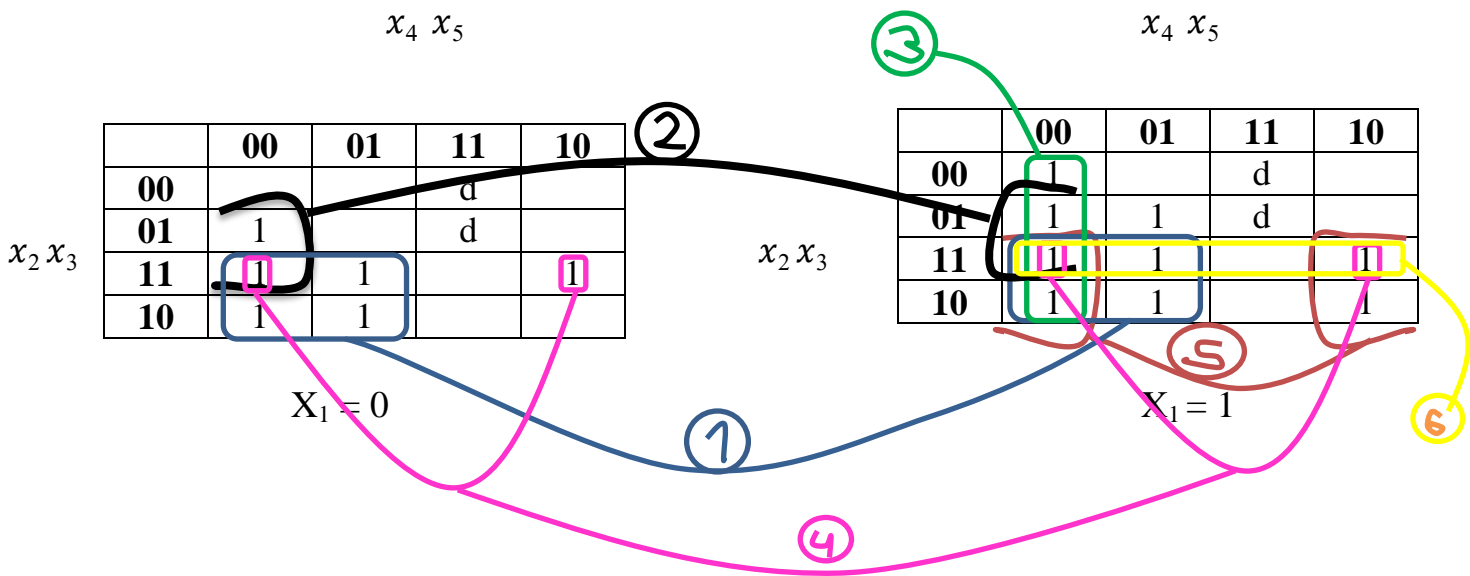
Для минимизации булевой функции от пяти переменных используется две четырехмерные карты Карно, различающиеся по переменной x_1 .



$$C_1 = \left\{ \begin{array}{l} X1X0X \\ XX100 \\ 1XX00 \\ X11X0 \\ 11XX0 \\ 1X10X \end{array} \right\} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad S_1^a = 17, \quad S_1^b = 23$$

МДНФ имеет следующий вид:

$$f = x_2 \bar{x}_4 \vee x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \vee x_1 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \vee x_2 x_3 \bar{x}_5 \vee x_1 x_2 \bar{x}_5 \vee x_1 x_3 \bar{x}_4$$

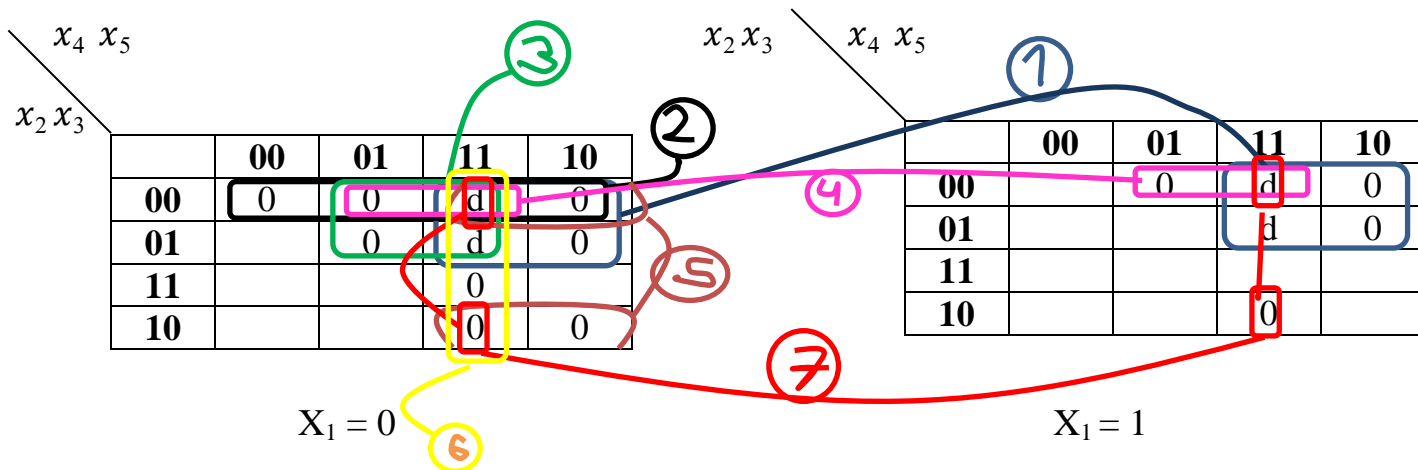


$$C_1 = \left\{ \begin{array}{l} X1X0X \\ XX100 \\ 1XX00 \\ X11X0 \\ 11XX0 \\ 111XX \end{array} \right\} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad S_1^a = 17, \quad S_1^b = 23$$

МДНФ имеет следующий вид:

$$f = x_2 \bar{x}_4 \vee x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \vee x_1 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \vee x_2 x_3 \bar{x}_5 \vee x_1 x_2 \bar{x}_5 \vee x_1 x_2 x_3$$

Определение МКНФ



$$C_{\min}(\overline{f}) = \left\{ \begin{array}{l} X0X1X \\ 000XX \\ 00XX1 \\ X00X1 \\ 0X01X \\ 0XX11 \\ XX011 \end{array} \right\} \quad \left(\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \right) \quad S^a = 20, S^b = 27.$$

МКНФ имеет следующий вид:

$$f = (x_2 \vee \overline{x}_4)(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_5)(x_2 \vee x_3 \vee \overline{x}_5)(x_1 \vee x_3 \vee \overline{x}_4)(x_1 \vee \overline{x}_4 \vee \overline{x}_5)(x_3 \vee \overline{x}_4 \vee \overline{x}_5)$$

Преобразование минимальных форм булевой функции

Факторное преобразование для МДНФ:

$$f = x_2 \overline{x}_4 \vee x_3 \overline{x}_4 \overline{x}_5 \vee x_1 \overline{x}_4 \overline{x}_5 \vee x_2 x_3 \overline{x}_5 \vee x_1 x_2 \overline{x}_5 \vee x_1 x_3 x_4 = \quad (S_Q = 23)$$

$$= \overline{x}_4(x_2 \vee x_3 \overline{x}_5 \vee x_1 \overline{x}_5 \vee x_1 x_3) \vee x_2(x_3 \overline{x}_5 \vee x_1 \overline{x}_5) = \quad (S_Q = 22)$$

$$= \overline{x}_4(x_2 \vee (\overline{x}_5(x_3 \vee x_1))) \vee x_1 \vee x_3 \vee x_2(\overline{x}_5(x_3 \vee x_1)) \quad (S_Q = 19)$$

Декомпозиция для МДНФ:

$$\varphi = \overline{x}_5(x_3 \vee x_1); \quad f = \overline{x}_4(x_2 \vee \varphi) \vee x_2(\varphi \vee x_1 x_3) \quad (S_Q^\varphi = 4; S_Q^f = 12)$$

Факторное преобразование для МКНФ:

$$f = (x_2 \vee \bar{x}_4)(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_5)(x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_5)(x_1 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)(x_1 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5)$$

$$(x_3 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5) = \quad (S_Q = 27)$$

$$= (x_2 \vee (\bar{x}_4(x_1 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_5)(x_3 \vee \bar{x}_5))) (\bar{x}_4 \vee ((x_1 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_5)(x_3 \vee \bar{x}_5))) \quad (S_Q = 25)$$

Декомпозиция для МКНФ:

$$\varphi = (x_1 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_5)(x_3 \vee \bar{x}_5); \quad f = (x_2 \vee (\bar{x}_4 \wedge \varphi))(\bar{x}_4 \wedge \varphi) \quad (S_Q^\varphi = 9; S_Q^f = 8)$$

$$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \vee$$

$$x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5$$

$$\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3 \vee \overline{x}_4 \vee \overline{x}_5$$