DHBW Mannheim
Informatik

Mannheim, 16.11.2022
Mathematik II/1

Matrizen

Determinante einer (2,2)-Matrix Jeder quadratischen Matrix ist eine Zahl - ihre *Determinante* - zugeordnet. Sie wird zunächst für zweireihige Matrizen definiert. Die Determinante beliebiger Matrizen wird auf zweireihige Determinanten zurückgeführt.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow detA = ad - bc.$$

Determinante einer (3,3)-Matrix, Regel von SARRUS

$$det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - c_1b_2a_3 - c_2b_3a_1 - c_3b_1a_2.$$

Merkregel: Man schreibt die ersten beiden Spalten hinter die Determinante und addiert die drei Dreierprodukt von links oben nach rechts unten und subtrahiert die drei Dreierprodukte von links unten nach rechts oben.

Inverse einer (2,2)-Matrix

Eine (2,2)-Matrix A, mit $detA \neq 0$, wird invertiert, indem man

1. die Elemente der Hauptdiagonalen vertauscht,
2. die beiden anderen Elemente mit -1 multipliziert,
3. die entstehende Matrix mit $\frac{1}{detA}$ multipliziert

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{detA} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Eigenwerte und Eigenvektoren

jede (m, m)-Matrix M lässt sich als Matrix einer linearen Abbildung auffassen. Von besonderem Interesse sind häufig Vektoren $\overrightarrow{x}$, die beim Abbilden ihre Richtung nicht ändern, d.h. in ein Vielfaches von sich, ihrλ-faches, übergehen, für die also gilt:

$$M\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{x}$$

Vom Nullvektor verschiedene Vektoren $\overrightarrow{x}$, die obige Gleichung erfüllen heißen **Eigenvektoren** zum **Eigenwert** λ von M. Es ist $\lambda\overrightarrow{x} = \lambda E\overrightarrow{x}$ und folglich gilt:

$$M\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{x} \Leftrightarrow M\overrightarrow{x} - \lambda E\overrightarrow{x} = 0 \Leftrightarrow (M - \lambda E)\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}.$$

λ ist Eigenwert von M, wenn das homogene LGS $(M - \lambda E)\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ nichttriviale Lösungen (=Eigenvektoren) hat. Dies ist genau der Fall, wenn $det(M - \lambda E) = 0$ ist. Ist $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, so ist $M - \lambda E = \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix}$ und $det(M - \lambda E) = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc$ ein Polynom 2-ten Grades.

Aufgabe 1. Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Die Matrix A_1 hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 8$ mit zugehörigen Eigenvektoren

$$\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(jeweils mit Vielfachen).

Die Matrix A_2 hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$ mit zugehörigen Eigenvektoren

$$\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(jeweils mit Vielfachen).

Die Matrix A_3 hat die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 2-3i$ und $\lambda_2 = 2+3i$ mit zugehörigen Eigenvektoren

$$\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

(jeweils mit Vielfachen).

Die Matrix A_4 hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 4+i$ und $\lambda_2 = 4-i$ mit zugehörigen Eigenvektoren

$$\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 2-i \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 2+i \\ 5 \end{pmatrix}$$

(jeweils mit Vielfachen).

Aufgabe 2. Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Die Matrix A hat Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ mit Eigenvektor $\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (und nicht-triviale Vielfache), $\lambda_2 = 1$ mit Eigenvektor $\overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (und nicht-triviale Vielfache) und $\lambda_3 = 2$ mit Eigenvektor $\overrightarrow{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (und nicht-triviale Vielfache).

Die Matrix B hat Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ mit Eigenvektor $\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ (und nicht-triviale Vielfache), $\lambda_2 = 1$ mit Eigenvektor $\overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ (und nicht-triviale Vielfache) und $\lambda_3 = 4$ mit Eigenvektor $\overrightarrow{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ (und nicht-triviale Vielfache).