Grundlagen der Informatik

1. Semester, 1996

1.2. Formeln umformen

1.2.1. Aussagenlogische Folgerung

1.2.2. Logische Folgerung

Aussagenlog. Folgerung: Beispiel

Logelei: Folgerungen:

- Aus $Wa(a) \rightarrow \neg Wa(e) \wedge \neg Wa(f) \wedge \neg Wa(g)$ und $Wa(a)$ folgt $\neg Wa(e)$ und $\neg Wa(f)$ und $\neg Wa(g)$.
- Aus $\neg Wa(g)$ und $Wa(g) \leftrightarrow \neg Wa(e)$ folgt $Wa(e)$.
- Aus $Wa (a) \vee Wa (e) \vee Wa(f) \vee Wa (g)$ und $\neg Wa(a)$ und $\neg Wa(e)$ und $\neg Wa(f)$ folgt $Wa(g)$.

π die logische Folgerung "aus A und B folgt C" gilt genau dann, wenn das zugehörige Konditional allgemeingültig ist.

Logische Folgerung (1)

Definition 1.15

Eine Formel B (bzw. eine Formelmenge Y)

- ist erfüllbar, wenn es eine Belegung gibt, unter der B (bzw. Y) wahr ist;
- ist allgemeingültig, wenn B (bzw. Y) unter allen Belegungen wahr ist;
- folgt aus einer Formel A (bzw. einer Formelmenge X), wenn unter jeder Belegung, unter der A (bzw. X) wahr ist, auch B (bzw. Y) wahr ist.

  Schreibweise: A |= B, bzw. X |= B, bzw. X |= Y

  A1, …,An |= B1,…,Bn

  X |° B, falls B nicht aus X folgt

- Zwei Formeln oder Formelmengen sind (logisch) äquivalent, wenn sie wechselseitig auseinander folgen.

Logische Folgerung (2)

Aufgaben:

welche der folgenden Formeln sind allgemeingültig, erfüllbar, unerfüllbar ? Unter welchen Belegungen sind erfüllbare Formeln erfüllbar?

A

$W \rightarrow F$

$P \wedge Q \rightarrow F$

$P \wedge Q \leftrightarrow F$

$(P1 \wedge P2 \wedge P3 \wedge \neg P2) \vee (Q1 \wedge \neg Q1)$

$(P1 \vee P2 \vee P3 \vee \neg P2) \wedge (Q1 \vee \neg Q1)$

$P \wedge (\neg P \rightarrow W)$

$(P \rightarrow Q) \rightarrow \neg (P \rightarrow \neg Q)$

$(((P \vee Q) \wedge \neg P) \rightarrow Q)$

$(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P)$

Logische Folgerung (3)

Aufgaben**:**

welche der Formelmengen V,…,Z folgen paarweise logisch auseinander und welche sind logisch äquivalent?

$V = \{P \to (P \lor Q), R \land S \to R \lor S\}$

$W = \{P, P \to Q, Q \to R, R \to S, \neg S\}$

$X = \{Q, Q \lor R \to S, \neg P \lor Q \to R, \neg(S \land P)\}$

$Y = \{\neg(S \land P), R \lor P, R, P \to Q, \neg P \to Q \lor S\}$

$Z = \{S, \neg P, Q, R\}$

Logische Folgerung (4)

Satz 1.1

Für beliebige Mengen X, Y, Z von Formeln gilt:

(1) Formeln folgen logisch aus sich selbst und anderen Formeln:

Wenn $X \subseteq Y$, dann $Y \models X$.

Insbesondere ist die logische Folgerung reflexiv:

$X \models X$.

(2) Die logische Folgerung ist transisitiv:

Wenn $X \models Y$ und $Y \models Z$, dann $X \models Z$.

(3) Aus mehr Formeln kann man mindestens genau so viel logisch folgern:

Wenn $X \subseteq Y$ und $X \models Z$, dann $Y \models Z$

Logische Folgerung (5)

Satz 1.2

In den folgenden Punkten seien A,B beliebige Formeln, X, Y bel. Formelmengen:

(1) Logische Folgerung und Allgemeingültigkeit:

A ist allgemeingültig genau dann wenn A aus der leeren Menge logisch folgt.

Ist A allgemeingültig, so gilt: X, A |= B genau dann wenn X |= B.

(2) Logische Folgerung und Erfüllbarkeit:

X |= A genau dann wenn X, ¬A unerfüllbar ist.

Insbesondere ist A allgemeingültig genau dann wenn ¬A unerfüllbar ist.

(3) Logische Folgerung und Konditional:

X |= $A \rightarrow B$ genau dann wenn X, A |= B.

Insbesondere ist $A \rightarrow B$ allgemeingültig genau dann wenn A |= B.

Entsprechendes gilt für das Bikonditional.

(4) Logische Folgerung und Konjunktion:

Die Formelmenge A1,…,An ist äquivalent zu $A1 \wedge \ldots \wedge An$. Daher:

X |= A1,…,An genau dann wenn X |= $A1 \wedge \ldots \wedge An$.

A1,…,An |= X genau dann wenn $A1 \wedge \ldots \wedge An$ |= X.

Logische Folgerung (6)

Aufgaben:

- Gelten auch die "Umkehrungen" der Aussagen aus Satz 1.1?
  - Wenn $Y \models X$, dann $X \subseteq Y$.
  - Wenn für alle Z gilt: wenn $Y \models Z$, dann $X \models Z$, dann gilt $X \models Y$.
  - Wenn für alle Z gilt: wenn $X \models Z$, dann $Y \models Z$, dann gilt $X \subseteq Y$?
- Welche der folgenden Folgerungen treffen zu?
  - $A \models B$
  - $A \models \neg B$
  - $A, A \to B \models B$
  - $P \wedge Q \to P \models P$
- Vergleichen Sie "$A \to B$ ist allgemeingültig" mit "Wenn A allgemeingültig, so auch B". Folgt die eine Behauptung aus der anderen für beliebige Formeln A und B?

Allgemeingültige Formeln (1)

Satz 1.3

Für beliebige Formeln A, B, C sind allgemeingültig:

(1) $A \vee \neg A$ — Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten

(2) **Negation**:

$\neg \neg A \leftrightarrow A$ — Weglassen der doppelten Negation

$A \wedge W \leftrightarrow A$, $A \wedge F \leftrightarrow F$, $A \vee W \leftrightarrow W$, $A \vee F \leftrightarrow A$ — Weglassen von W oder F

$(A \rightarrow W) \leftrightarrow W$, $(A \rightarrow F) \leftrightarrow \neg A$, $(W \rightarrow A) \leftrightarrow A$, $(F \rightarrow A) \leftrightarrow W$

$(A \leftrightarrow W) \leftrightarrow A$, $(A \leftrightarrow F) \leftrightarrow \neg A$, $\neg W \leftrightarrow F$, $\neg F \leftrightarrow W$

(3) **reflexiv, transitiv, kommutativ, assoziativ, distributiv und idempotent**:

$A \vee B \leftrightarrow B \vee A$, $A \vee (B \vee C) \leftrightarrow (A \vee B) \vee C$, $A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$, $A \wedge (B \wedge C) \leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$, $A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

$A \vee A \leftrightarrow A$, $A \wedge A \leftrightarrow A$

Disjunktion und Konjunktion sind kommutativ, assoziativ, distributiv und idempotent

$A \rightarrow A$, $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$ — Konditional ist reflexiv und transitiv

$A \leftrightarrow A$, $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (B \leftrightarrow A)$ — Bikonditional ist reflexiv und kommutativ

Allgemeingültige Formeln (2)

Satz 1.3 (Fortsetzung)

Für beliebige Formeln A, B, C sind allgemeingültig:

(4) **Ersetzungen**:

$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$	Ersetzen von $\leftrightarrow$ durch $\rightarrow$ und $\wedge$
$(A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg A \vee B$, $(A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg (A \wedge \neg B)$	Ersetzen von $\rightarrow$ durch $\neg$ und $\vee$ oder $\wedge$
$(A \wedge B) \leftrightarrow \neg (\neg A \vee \neg B)$, $(A \vee B) \leftrightarrow \neg (\neg A \wedge \neg B)$	Ersetzen von $\wedge$ und $\vee$ mit Hilfe von $\neg$

(5) **Abschwächungen**:

$A \rightarrow A \vee B$, $B \rightarrow A \vee B$	Abschwächung zu einer Disjunktion
$A \wedge B \rightarrow A$, $A \wedge B \rightarrow B$	Abschwächung einer Konjunktion

(6) **Umkehren und Vertauschen**

$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$	Umkehrung des Konditionals
$(A \rightarrow B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge \neg B \rightarrow C)$	Vertauschen von Prämisse u. Konklusion
$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \leftrightarrow (A \wedge B \rightarrow C)$	Verlagern einer Prämisse
$A \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow B$	Anwendung eines Konditionals

Beweis: durch Wahrheitstafeln

Beweisprinzipien (1)

- Beweis durch Kontraposition:

  Beweise "$\neg$ A folgt aus $\neg$ B" statt "B folgt aus A".

  Begründung:

  - nach Satz 1.2.(3) ist $A \models B$ gleichwertig dazu daß $A \rightarrow B$ allgemeingültig ist
  - nach Satz 1.3.(6) und Satz 1.2. c gilt: $\neg B \rightarrow \neg A$ äquivalent $A \rightarrow B$

- Beweis durch Widerspruch:

  Beweise aus "A und $\neg$B folgt ein Widerspruch" statt "B folgt aus A".

  Begründung:

  - setzt in Satz 1.3. (6) F für C ein: $(A \rightarrow B \vee F) \leftrightarrow (A \wedge \neg B \rightarrow F)$
  - nach Satz 1.2.(3) gilt: $(A \rightarrow B \vee F)$ äquivalent $(A \wedge \neg B \rightarrow F)$
  - nach Satz 1.3. (2) gilt $A \rightarrow B$ äquivalent $A \wedge \neg B \rightarrow F$

- Beweis durch Fallunterscheidung:

  Wenn B aus A und aus $\neg$A folgt, dann gilt B.

  Begründung:

  - nach Satz 1.3.(1) gilt: $(A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow B) \rightarrow B$

Beweisprinzipien (2)

- abschwächende Schlüsse:
  $A \to A \vee B$, $B \to A \vee B$
  $A \wedge B \to A$, $A \wedge B \to B$

- modus ponens: Wenn A und aus $A \to B$, dann gilt B

  Begründung: Satz 1.3.(6): $A \wedge (A \to B) \to B$ und Satz 1.2.(3)

- Abtrennen und Hineinziehen von Prämissen:

  Begründung: Satz 1.3.(6) :$(A \to (B \to C)) \leftrightarrow (A \wedge B \to C)$ und Satz 1.2.(3)

- Kettenschluß: Aus $(A \to B)$ und $(B \to C)$ folgt $(A \to C)$.

  Begründung: Satz 1.3.(3) : $(A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)$ und Satz 1.2.(3)

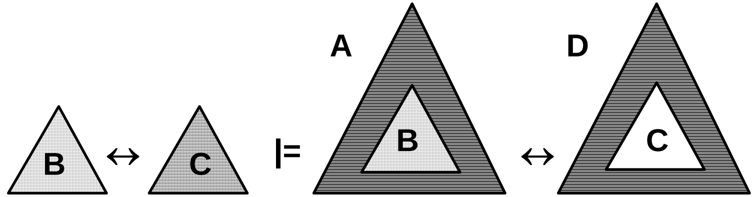
- …

Ersetzungssatz

Satz 1.4

Ersetzen wir in der Formel A die Teilformel B durch die Formel C, so ist das Ergebnis D eine Formel, und aus B $\leftrightarrow$ C folgt logisch A $\leftrightarrow$ D;

Graphische Darstellung:



Folgerung: Sind A, B, C, D Formeln wie im Satz 1.4 und sind B und C logisch äquivalent, so auch A und D.

Beispiel: Logelei:

Gegeben seien A: $Wa(e) \vee \neg Wa(e)$, B: $\neg Wa(e)$ und C: $Wa(g)$. Ersetze B in A durch C, so ergibt sich D: $Wa(e) \vee Wa(g)$. Also gilt nach Satz 1.4 $\neg Wa(e) \leftrightarrow Wa(g) \models Wa(e) \vee \neg Wa(e) \leftrightarrow Wa(e) \vee Wa(g)$.

Widersprüchlichkeit und Erfüllbarkeit

Definition 1.16

Eine Formelmenge X heißt widersprüchlich, wenn es eine Formel A gibt, so daß A und ¬A logisch aus X folgen; sonst heißt X widerspruchsfrei.

Satz 1.5

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(1) X ist widersprüchlich, d.h. es gibt eine Formel A mit X |= A und X |= ¬A;

(2) aus X folgt logisch etwas Falsches: X |= F;

(3) jede Formel folgt logisch aus X;

(4) X ist unerfüllbar: es gibt keine Belegung, unter der X wahr ist.

Folgerung: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(1) X ist widerspruchsfrei, d.h. für alle Formeln A gilt: wenn X |= A dann X |° ¬A;

(2) aus X folgt logisch nichts Falsches: X |° F;

(3) Es gibt Formeln, die nicht logisch aus X folgen;

(4) X ist erfüllbar.

Log. Folgerung & Widersprüchlickeit

Satz 1.6

Eine Formel A folgt logisch aus einer Formelmenge X genau dann wenn X, ¬A widersprüchlich ist.

$X \models A$ genau dann wenn $X, \neg A$ widersprüchlich

Verwendung von Satz 1.6: Theorembeweiser

Endlichkeit und Kompaktheit

Satz 1.7 Endlichkeitssatz

Wenn eine Formel A aus einer Formelmenge X folgt, folgt A aus einer endlichen Teilmenge von X.

Satz 1.8 Kompaktheitssatz

Ist jede endliche Teilmenge in einer Formelmenge X erfüllbar, so ist X selbst erfüllbar.

1.2. Formeln umformen

1.2.1. Aussagenlogische Folgerung

1.2.2. Logische Folgerung

erfüllbar, allgemeingültig, logisch (1)

Definition 1.17

Eine Formelmenge X

- ist erfüllbar, wenn X mindestens ein Modell hat;
- ist allgemeingültig, wenn X in allen Strukturen gilt;
- folgt aus einer Formelmenge Y, wenn jedes Modell von Y Modell von X ist;
- ist äquivalent mit Y, wenn X und Y wechselseitig auseinander folgen;

erfüllbar, allgemeingültig, logisch (2)

Satz 1.9

Für beliebige Formeln A, B und Variablen x,y sind allgemeingültig:

(1) **Vertauschen von Quantoren**

$\forall x\ \forall y\ A \leftrightarrow \forall y\ \forall x\ A$, $\exists x\ \exists y\ A \leftrightarrow \exists y\ \exists x\ A$, $\exists x\ \forall y\ A \rightarrow \forall y\ \exists x\ A$

(2) **Umbenennung gebundener Variablen**

$\forall x\ A \leftrightarrow \forall y\ A\{x/y\}$, $\exists x\ A \leftrightarrow \exists y\ A\{x/y\}$, falls y in A nicht vorkommt

(3) **Vertauschen von Quantoren mit aussagenlog. Verknüpfungen**

$\neg\forall x\ A \leftrightarrow \exists x\ \neg A$, $\neg\ \exists x\ A \leftrightarrow \forall x\ \neg A$

$\forall x\ (A \wedge B) \leftrightarrow (\forall x\ A \wedge \forall x\ B)$, $\exists x\ (A \vee B) \leftrightarrow (\ \exists x\ A \vee \exists x\ B)$

$(\forall x\ A \vee \forall x\ B) \rightarrow \forall x\ (A \vee B)$, $\exists x\ (A \wedge B) \rightarrow (\exists x\ A \wedge \exists x\ B)$

$\forall x\ (A \wedge B) \leftrightarrow (\forall x\ A \wedge B)$, $\exists x\ (A \wedge B) \leftrightarrow (\ \exists x\ A \wedge B)$, falls x nicht frei in B vorkommt

$\forall x\ (A \vee B) \leftrightarrow (\forall x\ A \vee B)$, $\exists x\ (A \vee B) \leftrightarrow (\ \exists x\ A \vee B)$, falls x nicht frei in B vorkommt

erfüllbar, allgemeingültig, logisch (3)

Aufgabe:

E1 $\forall G \exists p \ auf(G,p)$

E2 $\forall p \exists G \ auf(G,p)$

E3 $\forall G \forall p \ auf(G,p) \rightarrow \exists q \ (q°p \wedge auf(G,q))$

E4 $\forall p \forall q \forall G \forall H \ (p°q \wedge auf(G,p) \wedge auf(G,q) \wedge auf(H,p) \wedge auf(H,q) \rightarrow G = H)$

E5 $\forall G \forall H \forall p \forall q \ (G°H \wedge auf(G,p) \wedge auf(G,q) \wedge auf(H,p) \wedge auf(H,q) \rightarrow p = q)$

E6 $\forall p \forall q \forall r \ (zwischen(p,q,r) \rightarrow r°p \wedge r°q)$

E7 $\forall p \forall q \ (p°q \rightarrow \exists r \ zwischen(p,q,r))$

E8 $\forall p \forall q \forall r \forall G \ (auf(G,p) \wedge auf(G,q) \wedge zwischen(p,q,r) \rightarrow auf(G,r))$

E9 $\forall G \forall H \ (parallel(G,H) \leftrightarrow \neg\exists p \ (auf(G,p) \wedge auf(H,p)))$

E10 $\forall p \forall G \ (\neg \ auf(G,p) \rightarrow \exists H \ (parallel(H,G) \wedge auf(H,p))$

E11 $\forall p \forall G \forall H \forall I \ (\neg auf(G,p) \wedge auf(H,p) \wedge auf(I,p) \wedge parallel(H,G) \wedge parallel(G,I) \rightarrow H = I)$

- Zeigen Sie, daß die folgenden Formeln aus E1…E11 folgen:
  - $\forall G \forall H \ (parallel(G,H) \leftrightarrow parallel(H,G) \ )$
  - $\forall G \forall H \ (parallel(G,H) \rightarrow G ° H)$
  - $\exists G \forall p \ \ auf(G,p) \rightarrow \forall G \forall H \ \ G = H$
- Zeigen Sie, daß die folgende Formel **nicht** aus E1…E11 folgt:
  - $\forall p \forall q \exists G \ (auf(G,p) \wedge auf(G,q))$

Formeln abschließen oder öffnen

Bemerkung:

Sei A eine Formel mit freien Variablen x1,…,xn. Dann sind A und $\forall$x1,…,$\forall$xn A äquivalent. Die zweite Formel heißt Allabschluß von A.

Aufgabe:

Ist X eine Formelmenge und A eine Formel mit freien Variablen x1,…,xn. Dann folgt $\exists$x1,…,$\exists$xn A aus X genau dann, wenn X, ¬A widersprüchlich ist.

X |= $\exists$x1,…,$\exists$xn A gdw X,¬A |=F

Eigenschaften von Quantorenformeln

Definition 1.18

Ein Term t in eine Formel A einzusetzen ist zulässig, wenn dabei keine Variable in t durch einen Quantor in A gebunden wird.

Bemerkung:

Setzen wir auf zulässige Weise in eine Formel ein, so folgt das Resultat aus der Formel:

Ist A eine Formel und sind x1,…,xn Variablen und t1,…,tn Terme der passenden Sorten, so gilt

$A \models A\{x1/t1,\ldots,xn/tn\}$ falls die Substitution zulässig ist.

Beispiel:

In der Euklidischen Ebene **E** gilt: $\forall p\ \forall G\ \exists q\ (q°p \wedge auf(G,q))$

also auch: $\exists q\ (q°p \wedge auf(G,q))$

Falls in dieser Formel q für die freie Variable p eingesetzt wird, erhält man:

$\exists q\ (q°q \wedge auf(G,q))$. Diese Formel gilt aber nicht in **E**.

Eigenschaften von Quantorenformeln

Aufgaben:

Vervollständigen Sie die Axiomatisierung des Blockwelt-Beispiels:

C1 Block(x) $\wedge$ Pfeiler(u) $\wedge$ Pfeiler(v) $\wedge$ auf(x,v) $\wedge$ auf(x,u) $\rightarrow$ Bogen(x,v,u)

C2 Block(x) $\wedge$ auf-Boden(x) $\rightarrow$ Pfeiler(aus-einem(x))

C3 Block(x) $\wedge$ Pfeiler(u) $\wedge$ liegt-auf(x,u) $\rightarrow$ Pfeiler(aus-zwei(x,u))

C4 Block(x) $\wedge$ Block(y) $\wedge$ Pfeiler(aus-zwei(y,u)) $\wedge$ liegt-auf(x,aus-einem(y)) $\wedge$ liegt-auf(y,u) $\rightarrow$ liegt-auf(x,aus-zwei(y,u))

??

- Folgt die Formel liegt-auf(x,y) $\leftrightarrow$ auf-Boden(x) $\vee$ $\exists$z (z°y $\wedge$ auf(x,z)) aus Ihren Axiomen?
- Kann die Formel auch ohne Quantoren ausgedrückt werden?