Analysis , Angewandte Informatik , DHBW
Skript in Stichworten ,
H. Siebert , Technische Hochschule Mittelhessen

§ 0. Einführung

Diese Vorlesung wird von einem Mathematiker für Sie als angehende Informatiker*innen gehalten.

Dieser Mathematiker hat nicht das Ziel, Sie entgegen Ihrem ausdrücklichen Wunsch , Informatiker*innen zu werden , zu Mathematiker*innenn auszubilden. Trotzdem müssen Sie sich mit einem gewissen Teil der Mathematik vertraut machen, weil sie ein wichtiges Hilfsmittel auch für Informatiker ist. In welchem Umfang Sie in Ihrer späteren Berufspraxis die Mathematik brauchen werden, hängt von der Stelle und Ihrem Tätigkeitsfeld ab. Über die Frage, wie viel Mathematik Sie brauchen , ist viel diskutiert worden. Ein weit verbreiteter Spruch hierzu ist „ Man braucht nur 20 % der Mathematik, die man auf der Hochschule lernt - nur man weiß nicht von vornherein, welche 20 % des Stoffes das sind “.

Weitere Aspekte :

Mathematik soll das Lösen von Problemen einüben. Dabei ist der Inhalt der Probleme gar nicht entscheidend.

Es kann vorkommen, dass Ihnen eine mathematische Problemstellung unterkommt, die Sie selbst nicht lösen können. Für diesen Fall gibt es Mathematiker, die Sie ja nicht überflüssig machen sollen. Sie sollten aber die Sprache der Mathematik so weit beherrschen, dass Sie die Frage mit einem Mathematiker besprechen können. Dazu müssen Sie dessen Sprache ausreichend beherrschen, wie auch umgekehrt der Mathematiker Ihre Sprache kennen sollte.

Die Notwendigkeit, sich an eine spezifische Fachsprache zu gewöhnen , besteht im übrigen bei fast jedem Studium . Insofern geht es Ihnen nicht schlechter als dem angehenden Juristen , der sich an Formulierungen wie diese gewöhnen muss:

Tritt der Wille, in fremdem Namen zu handeln, nicht erkennbar hervor, so kommt der Mangel des Willens , im eigenen Namen zu handeln, nicht in Betracht (BGB § 164 (2)).

Alles klar ?

In der Mathematik bauen viele Dinge auf einander auf, so dass eine regelmäßige Teilnahme an der Vorlesung dem Verständnis durchaus dient.

Mathematik lernt man nicht ausschließlich vom Zuhören und Zusehen. Mathematik kann man eigentlich gar nicht „**lernen**“. Man muss sie **verstehen** und **üben**. Darum ist eine regelmäßige Bearbeitung der Übungsaufgaben wichtig für den Erfolg.

Dies „Skript in Stichworten“ soll weder Lehrbücher noch den Besuch der Vorlesung ersetzen. Es soll Ihnen bei der Nachbereitung des Stoffes als „roter Faden“ dienen.

Geschrieben habe ich dieses Skript für eine Präsenzveranstaltung, in der die fehlenden Details wie Skizzen und Rechnungen Schritt für Schritt an der Tafel entwickelt und erläutert werden. Das halte ich immer noch für die beste Form der Vermittlung mathematischer Inhalte. Da die Corona – Pandemie (dies Wort hat die Gesellschaft für deutsche Sprache zum Wort des Jahres 2020 gewählt) das zur Zeit nicht durchweg erlaubt, habe ich einen großen Teil dessen, was sonst an der Tafel entstehen würde, mit der Hand geschrieben bzw. gezeichnet, eingescannt und in das Skript integriert. Sie erkennen das Skript mit diesen Zusätzen in Ihrem Moodle – Account an der Ergänzung „plus“ im Dateinamen.

§ 1. Mengen

Die Mengenlehre ist eine ernsthafte mathematische Disziplin , die von Georg Cantor (1845 - 1918) begründet wurde und deren Entwicklung eng mit der Entwicklung der mathematischen Logik und Grundlagenforschung zusammenhängt . Wir werden in diesem Sinne keine Mengenlehre betreiben , sondern nur einige Begriffe und Schreibweisen der Mengenlehre einführen, um sie als Teil unserer mathematischen Fachsprache zu verwenden.

Die Definition , die G. Cantor 1895 für den Mengenbegriff vorschlug , war :

> **Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente von M genannt werden) zu einem Ganzen .**

Schreibweisen, Begriffsbildungen:

1. $\mathbf{m \in M}$; (m ist Element von M) ,
   $\mathbf{m \notin M}$; (m ist kein Element von M) .

2. Mengen beschreiben wir gewöhnlich durch Aufzählung ihrer Elemente oder Angabe der Eigenschaft(en) der Elemente. Beispiele :
   $M_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $M_2 = \{x, (x \in M_1$ und x gerade$)\}$.

3. $\mathbf{M_1 = M_2}$; („ M_1 gleich M_2 “) drückt aus , dass M_1 und M_2 dieselben Elemente haben.

4. $\mathbf{M_1 \subset M_2}$; („ M_1 enthalten in M_2 “, „M_1 ist Teilmenge von M_2 “) ; drückt aus , dass jedes Element von M_1 auch Element von M_2 ist.

5. $\mathbf{M_1 \cup M_2}$; („ M_1 vereinigt mit M_2 “) bezeichnet die Menge, die alle Elemente von M_1 und alle Elemente von M_2 enthält;

6. $\mathbf{M_1 \cap M_2}$; („ M_1 geschnitten mit M_2 “) bezeichnet die Menge aller Elemente, die sowohl in M_1 als auch in M_2 enthalten sind;

7. $\mathbf{M_1 \setminus M_2}$; („ M_1 minus M_2 “) bezeichnet die Menge aller Elemente, die in M_1 , aber nicht in M_2 enthalten sind;

8. $\varnothing$; („ die leere Menge “) bezeichnet die Menge, die kein Element enthält.

Beispiele , Bemerkungen:

1. „ $M_1 \cap M_2 = \varnothing$ “ drückt aus, dass M_1 und M_2 keine gemeinsamen Elemente besitzen.

2. $\varnothing$ ist nicht „nichts“ , sondern „ein Behälter mit nichts drin“.

3. Die von Bertrand A. W. Russell (1872 - 1970) entdeckte „Russellsche Antinomie (1901)“ :
   $M = \{ x, x \notin x \}$ ist nach der Cantorschen Definition eine zulässige Menge, es lässt sich aber nicht entscheiden , ob $M \in M$ oder $M \notin M$ ist.

   Vergleiche die strukturgleiche Aussage des Barbiers eines Dorfes „ich rasiere alle Männer des Dorfes, die sich nicht selbst rasieren“. Die Frage, ob der Barbier sich selbst rasiert oder nicht, lässt sich nicht beantworten.

   Die Russellsche Antinomie war der Ausgangspunkt für die Mengenlehre als ernsthaftes mathematisches Forschungsgebiet. Die Mengen , die wir betrachten , sind stets Teilmengen fest gewählter Mengen wie Mengen reeller Zahlen , Mengen von Matrizen usw. Bei dieser Verwendung des Mengenbegriffs sind keine solchen Widersprüche zu befürchten .

§ 2. Zahlen

Zahlen sind ohne Zweifel die wichtigsten mathematischen Objekte, mit denen wir zu tun haben. Wir werden in diesem Kurs mit natürlichen, ganzen, rationalen , reellen und komplexen Zahlen arbeiten , die (evtl. mit Ausnahme der komplexen Zahlen) aus der Schule bekannt sind. Wir stellen diese Zahlenmengen mit ihren Eigenschaften kurz zusammen und geben jeweils Motivationen für die Notwendigkeit der Erweiterung des Zahlbereichs zum nächst umfassenderen.

§ 2.1 Die Menge der natürlichen Zahlen ($\mathbb{N}$)

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$. In $\mathbb{N}$ kann man addieren und multiplizieren; das Ergebnis dieser Operationen ist wieder eine natürliche Zahl.

Die natürlichen Zahlen kann man sich als eine „Kette“ mit einem Anfang, aber ohne Ende vorstellen. Jedes $n \in \mathbb{N}$ hat genau einen Nachfolger n+1 und jedes n außer 1 hat genau einen Vorgänger.

Die Gleichungen $n + x = m$ besitzen in $\mathbb{N}$ aber nicht immer eine Lösung x bei gegebenen n und m. Dieser Defekt ist in der Menge der ganzen Zahlen nicht mehr vorhanden:

§ 2.2 Die Menge der ganzen Zahlen ($\mathbb{Z}$)

$\mathbb{Z} = \{ ... , -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ... \}$. In $\mathbb{Z}$ kann man addieren und multiplizieren; das Ergebnis ist wieder eine ganze Zahl.

Die Gleichungen $n + x = m$ besitzen für gegebene $n, m \in \mathbb{Z}$ immer eine eindeutige Lösung

$$x = m - n \in \mathbb{Z}.$$

Die Gleichungen $m \cdot x = n$ besitzen manchmal eine eindeutige ganzzahlige Lösung (Bsp.: $4 \cdot x = 12$, $x = 3$) , manchmal gar keine (Bsp. $4 \cdot x = 5$, $0 \cdot x = 1$) und manchmal unendlich viele ganzzahlige Lösungen (Bsp. : $0 \cdot x = 0$). Dies Bild wird einheitlicher in der Menge der rationalen Zahlen.

§ 2.3 Die Menge der rationalen Zahlen ($\mathbb{Q}$)

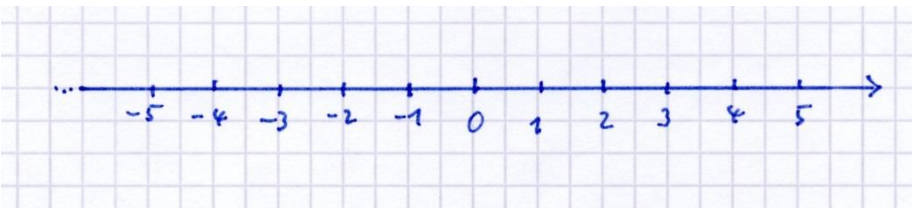
$\mathbb{Q} = \{ r/s \,;\, s \in \mathbb{N} , r \in \mathbb{Z}\}$. In $\mathbb{Q}$ kann man unbegrenzt addieren und multiplizieren.

Die Gleichungen $a \cdot x = b$ besitzen für gegebene $a , b \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$ eine eindeutig bestimmte Lösung $x = b/a$, für $a = 0$ entweder gar keine oder unendlich viele Lösungen , weshalb man das Symbol b/a für a = 0 nicht definieren kann. Es ist also nicht „verboten“ , durch 0 zu dividieren , sondern es verbietet sich von selbst.

§ 2.4 Die Menge der reellen Zahlen ($\mathbb{R}$) .

Für das Verständnis des zentralen Begriffs „**Grenzwert**“ der Analysis ist es wichtig, den Unterschied zwischen der Menge der rationalen und der reellen Zahlen zu verstehen, und warum es nicht ausreicht, mit rationalen Zahlen zu arbeiten.

Sie kennen aus der Schule wahrscheinlich die „**Zahlengerade**“ .



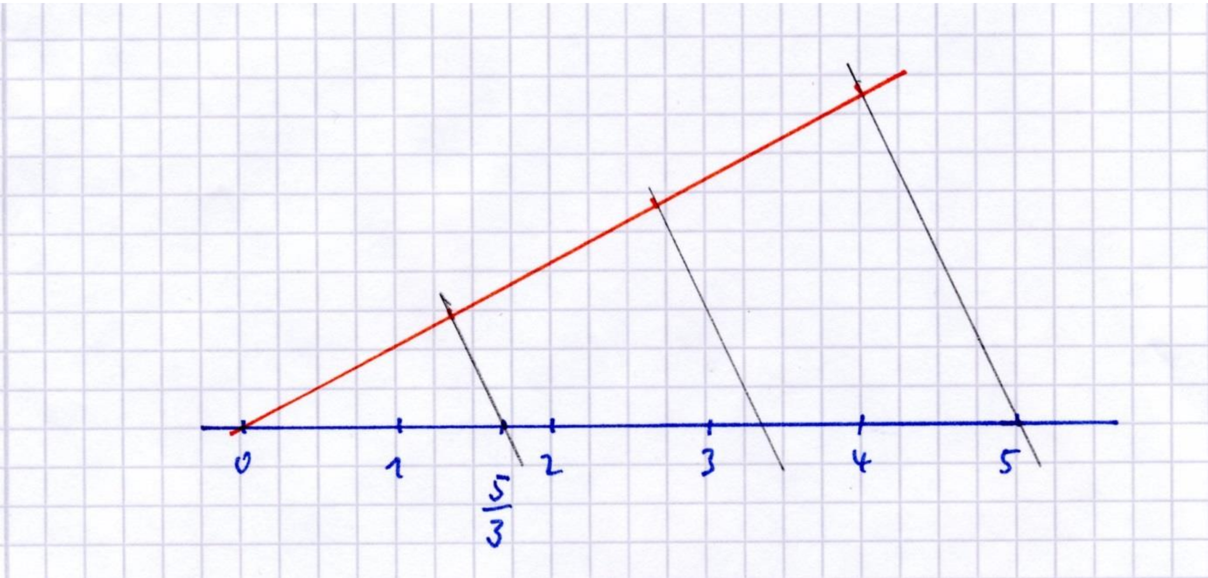
Die Menge der reellen Zahlen soll so festgelegt werden, dass jedem Punkt der Zahlengeraden genau eine reelle Zahl entspricht.

Wir stellen zwei Tatsachen fest:

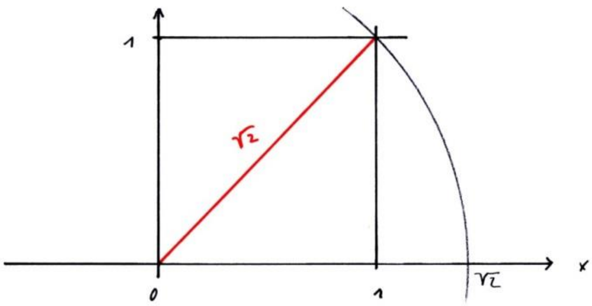
1. jede rationale Zahl entspricht einem Punkt der Zahlengeraden.

2. Es gibt Punkte der Zahlengeraden, die keiner rationalen Zahl entsprechen.

Zu 1. Zu jeder rationalen Zahl können wir den entsprechenden Punkt auf der Geraden durch eine Strahlensatzfigur konstruieren, hier am Beispiel 5/3.



Zu 2. Wir konstruieren einen Punkt der Geraden, der keiner rationalen Zahl entspricht.



Nach dem Satz des Pythagoras hat die Diagonale im Quadrat mit der Seitenlänge 1 die Länge $\sqrt{2}$.
Wir werden weiter unten zeigen, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist.

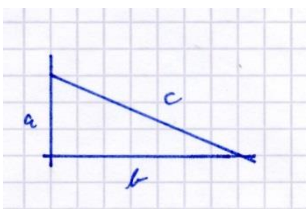
Kleiner Exkurs zum Satz von Pythagoras und dem eleganten Beweis von Abu Nasr Muhammad al-Farabi, ca. 870 bis 950) .

Satz (Pythagoras) : In einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypothenuse c gilt

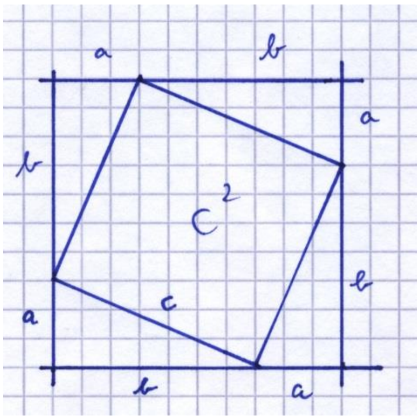
$$a^2 + b^2 = c^2 \ .$$

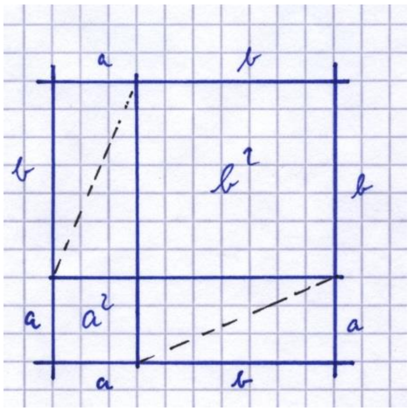
Beweis:

Ergänze das Dreieck



zu dem Quadrat, ordne die Teile neu an :





… und vergleiche !

Zurück zum Nachweis, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist. (Widerspruchsbeweis !)

Annahme: $\sqrt{2}$ ist rational, etwa $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ mit $b \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$. O.B.d.A. können wir annehmen, dass a und b teilerfremd sind.

Quadrieren von $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ und multiplizieren mit b^2 liefert $a^2 = 2b^2$. Also ist a^2 und folglich a gerade, also etwa $a = 2n$ mit ganzzahligem n .

Aus $a^2 = 2b^2$ folgt dann $4n^2 = 2b^2$ und daraus $2n^2 = b^2$. Also ist auch b gerade, und das ist ein Widerspruch zur Annahme. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Sie kennen die Darstellung von reellen Zahlen durch Dezimalbrüche. Dabei darf man sich auch vorstellen, die Zahl der Nachkommastellen sei unendlich, obwohl noch nie jemand unendlich viele Dezimalstellen geschrieben hat.

Die Dezimalbrüche rationaler Zahlen lassen sich dann so charakterisieren:

Die Zahlen von $\mathbb{Q}$ sind genau die, deren Dezimalbruchdarstellung abbricht oder periodisch ist. Wir erläutern das anhand von Beispielen.

1. Jeder abbrechende oder periodische Dezimalbruch ist eine rationale Zahl

$$x = 3,74 = \frac{374}{100} \in \mathbb{Q}$$

$$x = 2,\overline{431} = 2,431431431\ldots$$

$$\left.\begin{aligned} 1000\,x &= 2431,431431431\ldots \\ x &= 2,431431431\ldots \end{aligned}\right\} -$$

$$999\,x = 2429$$

$$x = \frac{2429}{999} \in \mathbb{Q}$$

Umgekehrt ist auch jede rationale Zahl ein abbrechender oder periodischer Dezimalbruch :

$$x = \frac{23}{25} = \frac{23 \cdot 4}{100} = \frac{92}{100} = 0,92$$

$$x = \frac{6}{7} :$$

$$\begin{array}{l} 6 : 7 = 0,\overline{857142} \\ 60 \\ \underline{56} \\ \quad 40 \\ \quad \underline{35} \\ \qquad 50 \\ \qquad \underline{49} \\ \qquad\quad 10 \\ \qquad\quad\ \underline{7} \\ \qquad\qquad 30 \\ \qquad\qquad \underline{28} \\ \qquad\qquad\quad 20 \\ \qquad\qquad\quad \underline{14} \\ \qquad\qquad\qquad 60 \end{array}$$

Sie sehen an dieser Stelle schon, dass es „viel mehr“ reelle als rationale Zahlen gibt. Ein Beispiel eines weder abbrechenden noch periodischen Dezimalbruchs kennen wir schon, nämlich $\sqrt{2}$, denn wir haben gezeigt, dass $\sqrt{2}$ nicht rational ist. Mit Taschenrechnergenauigkeit ist $\sqrt{2}$ = 1,414213562 . Je nachdem, nach welcher Nachkommastelle wir den Dezimalbruch abbrechen, schränken wir den Wert von $\sqrt{2}$ auf Intervalle der Länge 1/10 , 1/100 , 1/1000 usw. ein :

$$\sqrt{2} = 1{,}414213562\ldots$$

$$\begin{array}{ccccc}
1{,}4 & < & \sqrt{2} & < & 1{,}5 \\
1{,}41 & < & \sqrt{2} & < & 1{,}42 \\
1{,}414 & < & \sqrt{2} & < & 1{,}415 \\
1{,}4142 & < & \sqrt{2} & < & 1{,}4143 \\
 & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

Eine solche Folge von Intervallen, bei der jeweils das nächste in dem vorigen enthalten ist und deren Intervall – Länge gegen 0 strebt, nennen wir eine „Intervallschachtelung“. Dieser Begriff wird bei der strengen axiomatischen Definition der Menge der reellen Zahlen eine Rolle spielen.

§ 2.5 Ein Axiomensystem der reellen Zahlen.

Die bisherige Vorstellung der Zahlen durch schrittweise Erweiterung der Zahlenmengen folgt grob der historischen Entwicklung des Zahlbegriffs . Eine andere Möglichkeit der Einführung ist die sogenannte „axiomatische Methode“ , die Ende des 19. Jahrhunderts / Anfang des 20 Jahrhunderts propagiert wurde. Bei der axiomatischen Methode beschreibt man die Objekte , die man einführen will (hier z.B. die Menge der reellen Zahlen) durch ihre „Struktureigenschaften“ . Man versucht nicht , zu definieren , was <u>eine</u> reelle Zahl ist , sondern beschreibt die Menge der reellen Zahlen als Ganzes durch wenige Grundeigenschaften (Axiome) , die nicht weiter bewiesen werden . Von den Axiomen verlangt man , dass sie widerspruchsfrei und unabhängig sind , d.h. dass keines von ihnen aus den anderen gefolgert werden kann.

Die kennzeichnenden Eigenschaften der Menge der reellen Zahlen sind die „ **Körpereigenschaften** “ (sie beschreiben das Rechnen mit „ + “ und „ · “) , die „ **Anordnungseigenschaften** “ (sie beschreiben den Umgang mit dem < - Zeichen) und die „ **Vollständigkeit** “ . Die Vollständigkeit lässt sich auf sehr viele verschiedene Arten formulieren, z.B. als „Prinzip der Intervallschachtelung“. Es drückt aus , dass jedem Punkt der Zahlengerade eine reelle Zahl entspricht und umgekehrt.

Eine auch nur halbwegs angemessene Diskussion der Fragen nach Unabhängigkeit und Widerspruchsfreiheit würde die Möglichkeiten dieser Vorlesung und die Bedürfnisse von Ingenieurstudiengängen erheblich überschreiten.

Def. 2.1 : Eine Menge K mit mindestens zwei Elementen 0 , 1 heißt „ **Körper** “ , wenn je zwei ihrer Elemente $a, b \in K$ Elemente $a + b \in K$ und $a \cdot b \in K$ (genannt Summe bzw. Produkt) so zugeordnet sind , dass die folgenden Regeln gelten :

(A1) $x + (y + z) = (x + y) + z$ für alle $x, y , z \in K$,
(Assoziativgesetz)

(A2) $x + y = y + x$ für alle $x, y \in K$,
(Kommutativgesetz)

(A3) $0 + x = x$ für alle $x \in K$,

(A4) zu jedem $x \in K$ gibt es ein Element $-x \in K$ mit $x + (-x) = 0$

(M1) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ für alle $x, y , z \in K$,
(Assoziativgesetz)

(M2) $x \cdot y = y \cdot x$ für alle $x, y \in K$,
(Kommutativgesetz)

(M3) $1 \cdot x = x$ für alle $x \in K$,

(M4) zu jedem $x \in K$ mit $x \neq 0$ gibt es ein Element $x^{-1} \in K$ mit $x \cdot x^{-1} = 1$

(D) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ für alle $x, y, z \in K$,
(Distributivgesetz)

Def. 2.2 : Ein Körper K heißt „ **angeordnet** “ , wenn gilt :

(O1) zwischen je zwei seiner Elemente besteht genau eine der Relationen
$a < b$, $a = b$, $b < a$,
(Trichotomiegesetz)

(O2) aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$,
(Transitivgesetz)

(O3) aus $a < b$ folgt $a + c < b + c$ für jedes $c \in K$,
(Montoniegesetz der Addition)

(O4) aus $a < b$ und $0 < c$ folgt $a \cdot c < b \cdot c$.
(Montoniegesetz der Multiplkation) .

Def. 2.3 : Ein angeordneter Körper K heißt „ **vollständig** “ , wenn es zu jeder „ **Intervallschachtelung** “ in K ein Element $m \in K$ gibt , das in allen ihren Intervallen enthalten ist .

Dabei verstehen wir unter einer Intervallschachtelung eine Folge von „Intervallen“ $a_1 < x < b_1$, $a_2 < x < b_2$, $a_3 < x < b_3$, ... , bei der jedes Intervall im vorhergehenden enthalten ist und die Intervalllängen $b_n - a_n$ beliebig klein werden , wenn n nur groß genug gewählt wird.

Es lässt sich zeigen , dass die Menge der reellen Zahlen durch die Forderung , ein vollständiger angeordneter Körper zu sein , eindeutig charakterisiert wird. Anders ausgedrückt : In jedem solchen Körper kann man genauso rechnen wie mit reellen Zahlen . Die Elemente können sich nur durch ihre Schreibweise unterscheiden.

Aus den Körpereigenschaften lassen sich alle bekannten Rechenregeln für den Umgang mit „+“ und „ · “ ableiten wie z.B. die binomischen Formeln. Formeln wie z.B. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ werden wir nicht in jedem Falle beweisen, bevor wir sie verwenden. Es sollte aber klar sein , dass zu ihrem Beweis nichts außer den Körperaxiomen (A1) - (D) benötigt wird.

§ 2.6 Größenordnungen.

Zur Bezeichnung von sehr großen bzw. sehr kleinen Zahlen und Maßeinheiten, wie sie z.B. in der Astronomie bzw. der Atomphysik oder der Mikrosystemtechnik vorkommen , haben sich besondere Namensbestandteile durchgesetzt , die Sie mindestens zum Teil schon kennen und die in der folgenden Tabelle noch einmal aufgeführt sind :

Zahlwort	Vorsilbe	Kurzzeichen	Zehnerpotenz
	yocto	y	10^{-24}
	zepto	z	10^{-21}
1 trillionstel	atto	a	10^{-18}
1 billiardstel	femto	f	10^{-15}
1 billionstel	piko	p	10^{-12}
1 milliardstel	nano	n	10^{-9}
1 millionstel	mikro	µ	10^{-6}
1 tausendstel	milli	m	10^{-3}
1 hundertstel	centi	c	10^{-2}
1 zehntel	dezi	d	10^{-1}
zehn	Deka	da	$10^{1} = 10$
hundert	Hekto	h	$10^{2} = 100$

tausend	Kilo	k	10^3 = 1000
1 Million	Mega	M	10^6
1 Milliarde	Giga	G	10^9
1 Billion	Tera	T	10^{12}
1 Billiarde	Peta	P	10^{15}
1 Trillion	Exa	E	10^{18}
	Zetta	Z	10^{21}
	Yotta	Y	10^{24}

Bemerkungen :

1. das englische Wort „billion“ steht für „Milliarde“ , nicht für Billion .
2. in der Informatik haben sich zur Bezeichnung von Speicherkapazitäten abweichende Bedeutungen durchgesetzt, weil dort Zweierpotenzen natürlicher sind als Zehnerpotenzen, z.B. 1kB = 1 kiloByte = 1024 Byte = 2^{10} Byte ,
   1MB = 1 MegaByte = 1 048 576 Byte = 2^{20} Byte ,
   1GB = 1 GigaByte = 1 073 741 824 Byte = 2^{30} Byte

§ 2.7 Komplexe Zahlen

In 2.1 bis 2.4 haben wir den Zahlbereich in mehreren Schritten von der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen zur Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen erweitert. Anlass zur Erweiterung war jedesmal die Unmöglichkeit, gewisse Gleichungen im bisherigen Zahlbereich zu lösen. Die Erfahrung mit quadratischen Gleichungen und der „p-q-Formel“ zeigt, dass Gleichungen wie $x^2 - 10x + 40 = 0$ oder $x^2 = -1$ keine reellen Lösungen besitzen. Das nimmt man zum Anlass , ein neues Element i mit der Eigenschaft $i^2 = -1$ einzuführen, mit dem man ansonsten nach denselben Regeln (nämlich wie in einem Körper) rechnen können soll wie mit reellen Zahlen. In der Geschichte der Mathematik hat man sich diesen Schritt nicht so leicht gemacht, wie es jetzt vielleicht klingt. Die Unmöglichkeit der Lösung gewisser quadratischer Gleichungen in reellen Zahlen wurde schon um 820 von Muhammed ibn Musa Alchwarizmi (ca. 780 - 850) erkannt, aber erst 1545 hat Hieronimo Cardano (1501 - 1576) es in seiner Schrift „Ars magna“ gewagt, eine Zahl i mit dem Quadrat -1 einzuführen, war sich aber nicht sicher, ob das auch erlaubt ist. Die Bezeichnung „imaginäre“ (nur in der Einbildung vorhandene) Zahl scheint von Descartes zu stammen. Heute sind solche Skrupel nicht mehr gerechtfertigt. Auf weitere historische Aspekte und die Möglichkeit einer exakten Einführung ohne Skrupel gehen wir später ein.

Bezeichnungen, Bemerkungen:

1. Zahlen der Form $a + b\cdot i$, $a, b \in \mathbb{R}$, heißen „**komplexe Zahl**“.
2. Zahlen der Form $b\cdot i$, $b \in \mathbb{R}$, heißen „**rein imaginäre Zahl**“.
3. Die Menge $\{ z = a + b\cdot i , a, b \in \mathbb{R} \}$ der komplexen Zahlen bezeichnen wir mit $\mathbb{C}$.
4. Ist $z = a + b\cdot i$, $a, b \in \mathbb{R}$, so heißen $a = \operatorname{Re} z$ der „**Realteil**“ von z uns $b = \operatorname{Im} z$ der „**Imaginärteil**“ von z.
5. Achtung: nach 4. ist der Imaginärteil von z eine reelle Zahl !
6. Zwei komplexe Zahlen nennt man genau dann gleich, wenn sie in Real- und Imaginärteil übereinstimmen.

Wie man aus der p – q - Formel sieht, treten bei quadratischen Gleichungen der Form $x^2 + px + q = 0$ im Fall $p, q \in \mathbb{R}$, $p^2 - 4q < 0$, immer zwei komplexe Lösungen auf, die sich nur im Vorzeichen des Imaginärteils unterscheiden. Paare solcher Zahlen nennt man „**konjugiert komplex**“:

Begriffe, Rechenregeln:

1. Ist $z = a + b\cdot i$, $a, b \in \mathbb{R}$, so heißt $\bar{z} = a - b\cdot i$ die „**zu z konjugiert komplexe Zahl**“.

2. $\bar{\bar{z}} = z$.

3. $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$, $z - \bar{z} = 2i \cdot \operatorname{Im} z$, $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$.

Aus dem Prinzip, dass man mit komplexen Zahlen nach den gleichen Regeln wie bei reellen Zahlen rechnen können soll, ergeben sich folgende Regeln für die vier Grundrechenarten: (jeweils a, b, c, d reell)

1. Addition, Subtraktion: (a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i , (a+bi) - (c+di) = (a-c) + (b-d)i .

2. Multiplikation: (a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i .

3. Division: $\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(ac + bd)}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i$. (Herleitung z.B. mit Cramerscher Regel) .

4. Die Formel in 3. muss man sich nicht merken. Man deutet die rechte Seite am besten als durch Erweiterung des Bruchs links mit der zum Nenner konjugiert komplexen Zahl entstanden.

Die reellen Zahlen kann man bekanntlich den Punkten einer Geraden zuordnen. Da jede komplexe Zahl z durch Angabe eines geordneten Paares (a, b) reeller Zahlen, ihrem Real- und Imaginärteil, beschrieben werden kann, kann man die komplexen Zahlen den Punkten einer Ebene zuordnen. Wir kommen auf diese Zuordnung zurück, wenn wir die Funktionen sin x und cos x zur Verfügung haben. Dann können wir auch gut erklären, warum die komplexen Zahlen überall da so beliebt sind, wo Schwingungsvorgänge mathematisch beschrieben werden.

§ 3. Aussagen , Beweismethoden

In diesem § 3 lernen wir einige Grundbegriffe der Logik kennen. Den Begriff „Aussage“ , der zentrale Bedeutung für die Logik hat , werden wir ebensowenig wie den Begriff „Menge“ exakt einführen. Für unsere Zwecke genügt die Festlegung , dass eine Aussage ein sprachliches Gebilde ist , von dem es sinnvoll ist zu sagen, es sei „wahr“ oder es sei „falsch“.

Beispiele:

	Aussage , ja / nein ?	Wahrheitswert
3 ist eine Primzahl	ja	wahr
4 ist kleiner als 3	ja	falsch
Der Rhein fließt durch Heidelberg	ja	falsch
Barbier : „ich rasiere alle Männer meines Dorfes , die sich nicht selbst rasieren“	nein	entfällt

<u>Was</u> eine Aussage ist , werden wir nicht weiter vertiefen (ebenso wenig wie wir das in § 1 mit dem Begriff der Menge getan haben) . Stattdessen werden wir besprechen, <u>wie</u> man Aussagen zueinander in Beziehung setzt, nach welchen Regeln man aus Aussagen andere folgern kann usw.

§ 3.1. Verneinung , Verknüpfungen von Aussagen

Def. 3.1 : Unter der „ **Verneinung** “ oder der „ **Negation** “ einer Aussage A verstehen wir die Aussage B , die genau dann falsch ist , wenn A wahr ist. Schreibweisen : $B = \neg A$ oder auch $B = \overline{A}$. (lies : „B ist nicht A“ oder „B gleich nicht A“) .

Man kann die Def. 3.1 auch kurz durch folgende Tabelle ausdrücken :

A	$\neg$ A
w	f
f	w

Dabei steht „w“ für den Wahrheitswert „wahr“ und „f“ für den Wahrheitswert „falsch“ . Tabellarische Darstellungen dieser Art heißen „Wahrheitstafeln“ . Die Definitionen der folgenden Begriffe werden wir in Textform und in Form solcher Wahrheitstafeln angeben.

Def. 3.2 : Unter der „ **Oder- Verknüpfung** “ oder der „ **Disjunktion** “ $C = A \vee B$ zweier Aussagen A , B verstehen wir die Aussage , die genau dann wahr ist , wenn mindestens eine der Aussagen A , B wahr ist . (Sprechweise : A oder B) .

Def. 3.3 : Unter der „ **Und - Verknüpfung** “ oder der „ **Konjunktion** “ $C = A \wedge B$ zweier Aussagen A , B verstehen wir die Aussage , die genau dann wahr ist , wenn beide Aussagen A , B wahr sind . (Sprechweise : A und B) .

Definitionen 3.2 und 3.3 in Tabellenform :

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$
w	w	w	w
w	f	w	f
f	w	w	f
f	f	f	f

Def. 3.4 : Unter der „ **Subjunktion** " $C = A \Rightarrow B$ bzw. der „ **Bijunktion** " $D = A \Leftrightarrow B$ zweier Aussagen A , B verstehen wir die Aussagen , deren Wahrheitswerte durch folgende Tabelle festgelegt werden :

A	B	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w	w
w	f	f	f
f	w	w *)	f
f	f	w *)	w

*) siehe unten Bemerkung 6

Sprechweisen : $C = A \Rightarrow B$ (wenn A dann B)
$D = A \Leftrightarrow B$ (A genau dann wenn B)

Beispiele , Bemerkungen (ausführliche Erläuterungen in der Vorlesung) :

1. „Wenn Du nur Einser im Zeugnis hast , fresse ich einen Besen" .

2. Gedicht

Bona fide

Palmström geht durch eine fremde Stadt ...
Lieber Gott, so denkt er, welch ein Regen !
Und er spannt den Schirm auf, den er hat.

Doch am Himmel tut sich nichts bewegen,
Und kein Windhauch rührt ein Blatt.
Gleichwohl darf man jenen Argwohn hegen.

Denn das Pflaster, über das er wandelt,
ist vom Magistrat voll List - gesprenkelt.
Bona fide hat der Gast gehandelt.

(aus: Christian Morgenstern: Palmström , Palma Kunkel . dtv Band 4 S. 19;
Lizenzausgabe des Insel-Verlags ; Originalausgabe : Insel-Bücherei , Nr. 318)
(Bona fide (lat.) = guten Glaubens , in gutem Glauben)

(Dies Gedicht handelt davon , dass $A \Rightarrow B$ logisch nicht dasselbe ist wie $B \Rightarrow A$, dass man das im Alltag aber gerne übersieht . A = „es regnet" , B = „die Straße ist nass")

3. „Wenn der Hahn kräht auf dem Mist , ändert sich das Wetter oder es bleibt wie es ist". Begriff „Tautologie".

4. Höhere Programmiersprachen arbeiten mit den gleichen logischen Verknüpfungen wie wir sie definiert haben. Insbesondere ist das „OR" der Programmiersprachen immer das nicht ausschließende (mathematische) „oder" .

5. Mathematische Sätze sind in der Regel von der Form $A \Rightarrow B$;
Anwenden eines Satzes : $A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$. Ist die Voraussetzung A erfüllt , dann gilt auch die Folgerung B.

6. Die beiden Festlegungen für die Wahrheitswerte von $A \Rightarrow B$ in den Zeilen 3 und 4 der obigen Tabelle machen erfahrungsgemäß die größten Schwierigkeiten beim Verständnis. Diese Festlegungen trifft man, weil man aus Falschem Falsches (wenn 0 = 1 , dann 1 = 2), aber auch Richtiges schließen kann (wenn 0 = 1 , dann 0 = 0) . „**Aus Falschem folgt Beliebiges**" .

7. In der deutschen Sprache lässt sich manchmal nicht klar zwischen dem ausschließenden und dem nicht ausschließenden „oder“ unterscheiden. („Kommst Du jetzt endlich oder nicht ?“) . Andere Sprachen unterscheiden da konsequenter. Im Lateinischen steht „vel“ für das nicht ausschließende und „aut ... aut“ für das ausschließende „oder“ . Das lateinische „vel“ stand Pate für das Symbol „$\vee$“ .

§ 3.2. Beweismethoden

Wir haben in § 2 beim Nachweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ schon einmal einen **Widerspruchsbeweis** kennengelernt. Er wird gerechtfertigt durch $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$, also durch die logische Gleichwertigkeit der Aussagen „ wenn A dann B “ und „ wenn $\neg B$ dann $\neg A$ “.

Als nächstes lernen wir das „ **Prinzip der vollständigen Induktion** “ kennen , das sich auf Aussagen A(n) bezieht, die von einer ganzen oder natürlichen Zahl n abhängen . Bei solchen Aussagen spricht man auch von „Aussageformen“ .

Satz 3.1 (Prinzip der vollständigen Induktion) : Für die Aussageform A(n) gelte

1. A (1) ist wahr .
2. $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Dann ist A(n) wahr für alle alle $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkungen , Beispiele :

1. Man kann das Prinzip der vollständigen Induktion ohne Bezugnahme auf eine Aussageform auch als Aussage über Mengen ganzer Zahlen auffassen : enthält eine Menge $M \subset \mathbb{N}$ die Zahl 1 und mit jeder Zahl n auch die Zahl n+1 , so ist $M = \mathbb{N}$.

2. Um zu zeigen, dass A(n) für alle natürlichen n wahr ist , genügt es zu zeigen , dass A(1) wahr ist („Induktionsanfang“) , und dass für jedes n aus der Richtigkeit von A(n) die Richtigkeit von A(n+1) folgt. („Induktionsschluss“) .

3. Der Induktionsanfang kann auch bei einer anderen Zahl als 1 liegen :

Satz 3.1´ (Prinzip der vollständigen Induktion) : Für die Aussageform A(n) gelte

1. $A(n_0)$ ist wahr für ein $n_0 \in \mathbb{Z}$
2. $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq n_0$,

Dann ist A(n) wahr für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq n_0$.

4. $1 + 2 + ... + n = n(n+1) / 2$; Beweis mit vollständiger Induktion ;

$A(n): \quad 1+2+\dots+n = \frac{1}{2}n(n+1) \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$

<u>Induktionsanfang</u>

$A(1): \quad l.S. = 1 \; ; \; r.S. = \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot 2 = 1 \quad \checkmark$

<u>Induktionsschluss</u>

Zu zeigen : $A(n) \Rightarrow A(n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Induktionsvoraussetzung

$$A(n): \quad 1+2+\dots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

Induktionsbehauptung

$$A(n+1): 1+2+\dots+n+(n+1) = \frac{1}{2}(n+1)\cdot(n+2)$$

Beweis

$$1+2+\dots+n+(n+1) = \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1)\cdot\frac{2}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \quad \checkmark$$

$$1+2+\dots+n = \sum_{k=1}^{n} k$$

Beweisidee ohne vollständige Induktion .

ohne vollständige Induktion

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & \cdots & + & 50 \\
 & 50 & + & 49 & + & 48 & + & 47 & + & \cdots & + & 1 \\
\hline
 & 51 & + & 51 & + & 51 & + & 51 & + & \cdots & + & 51
\end{array}$$

$$\frac{1}{2}\cdot 50 \cdot 51 = 1275$$

5. Erläuterung des Summenzeichens .

$$1+2+\cdots+n = \sum_{k=1}^{n} k$$

$\sum$: Summenzeichen

1, n untere bzw. obere Summationsgrenze

k Summand

6. 4. entspricht $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

7. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

$A(1)$: l.S. $= 1^2 = 1$, r.S. $= \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1$ ✓

$A(n) \Rightarrow A(n+1)$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)\left(n(2n+1) + 6(n+1)\right)$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)\left(2n^2 + 7n + 6\right)$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) \quad ✓$$

8. $1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, für $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Beweis mit vollständiger Induktion und ohne .

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad , \quad x \in \mathbb{R} \, , \; x \neq 1 \, , \; n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$n = 0 \qquad \text{l.S.} = x^0 = 1 \quad , \quad \text{r.S.} = \frac{1-x}{1-x} = 1 \quad \checkmark$$

$$n \to n+1$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} \cdot \frac{1-x}{1-x}$$

$$= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + \frac{x^{n+1}-x^{n+2}}{1-x} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x} \quad \checkmark$$

$$\text{Bsp.} \quad \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 2 - \frac{1}{2^n}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} S & = & 1 + x + x^2 + \dots + x^n \\ S \cdot x & = & \phantom{1 +{}} x + x^2 + \dots + x^n + x^{n+1} \end{array}\right\} -$$

$$S(1-x) = 1 - x^{n+1}$$

$$S = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \qquad \text{falls } x \neq 1$$

9. Bernoullische Ungleichung : Für jedes $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$, und alle $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$ ist $(1+x)^n \geq 1 + nx$.
(Die Bernoullische Ungleichung wurde von Jakob Bernoulli (1654 - 1705) , vor ihm aber auch schon von Isaac Barrow (1630 - 1677) bewiesen) .

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad , \quad x \geq -1 \quad , \quad n \geq 0$$

$$n=0 \qquad \left.\begin{array}{l} \text{l.S.} = (1+x)^0 = 1 \\ \text{r.S.} = 1 \end{array}\right\} \checkmark$$

„ $n \to n+1$ “

$$(1+x)^n \geq 1+n\cdot x \qquad | \cdot (1+x)$$

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+n\cdot x)(1+x)$$

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x+\underbrace{nx^2}_{\geq 0}$$

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x \quad \checkmark$$

Das Prinzip der vollständigen Induktion kann man auch zur Definition von Größen benutzen , die von einer ganzen (oder natürlichen) Zahl n abhängen :

Beispiele :

1. Die n te Potenz a^n einer reellen Zahl a wird für $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$ definiert durch $a^0 = 1$, $a^{n+1} = a \cdot a^n$ für $n \geq 0$.

2. Für $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$ wird $n!$ (sprich : n Fakultät) definiert durch $0! = 1$, $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$.

   Zahlenwerte :

0! = 1		5! = 120		10! = 3 628 000
1! = 1		6! = 720		11! = 39 916 800
2! = 2		7! = 5 040		12! = 479 001 600
3! = 6		8! = 40 320		13! = 6 227 020 800
4! = 24		9! = 362 800		...

Mit Hilfe des Symbols $n!$ definieren wir noch die folgende , für Analysis und Wahrscheinlichkeitsrechnung wichtige Größe :

Def. 3.5 : Für $k , n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq n$, wird der „ **Binomialkoeffizient** “ $\binom{n}{k}$ (sprich „ n über k “)

definiert durch $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Zahlenwerte für den Binomialkoeffizienten ordnet man am übersichtlichsten im sogenannte „Pascal´schen Dreieck“ an (Blaise Pascal , (1623 - 1662)) :

n = 0							1							
n = 1						1		1						
n = 2					1		2		1					
n = 3				1		3		3		1				
n = 4			1		4		6		4		1			
n = 5		1		5		10		10		5		1		
n = 6	1		6		15		20		15		6		1	

.   .
.   .
.   .

$$n = 0 \qquad \binom{0}{0} = \frac{0!}{0!\,0!} = 1$$

$$n = 1 \qquad \binom{1}{0} = \frac{1!}{0!(1-0)!} = 1 \, , \quad \binom{1}{1} = \frac{1!}{1!(1-1)!} = 1$$

$$n = 2 \qquad \binom{2}{0} = \frac{2!}{0!(2-0)!} = \frac{2}{1\cdot 2} = 1$$

$$\binom{2}{1} = \frac{2!}{1!(2-1)!} = \frac{2}{1\cdot 1} = 2$$

In den Zeilen stehen jeweils alle Binomialkoeffizienten für das angegebene n , von links nach rechts angeordnet für k von 0 bis n .

Eigenschaften des Binomialkoeffizienten:

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ für alle ganzen $n \geq 0$,

2. $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ für alle ganzen $n \geq 1$,

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1 \, , \quad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n\cdot(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

3. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ für alle ganzen k , n mit $0 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}$$

4. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ für alle ganzen k , n mit $0 \le k \le n - 1$.

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{k+1}{k+1} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \cdot \frac{n-k}{n-k}$$

$$= \frac{n! \cdot (k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!}$$

$$= \frac{n!(\cancel{k}+1+n-\cancel{k})}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!}$$

$$= \binom{n+1}{k+1} \quad \checkmark$$

Alle genannten Eigenschaften ergeben sich durch direkte Rechnung aus der Definition 3.5 und der Formel $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$.

Als Verallgemeinerung der binomischen Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ergibt sich der folgende Satz durch vollständige Induktion :

Satz 3.2 (Binomischer Lehrsatz) : Für beliebige reelle a und b und ganzes $n \ge 0$ gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} .$$

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b$$

$$(a+b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot a \cdot b + 1 \cdot b^2$$

$$(a+b)^3 = (a+b) \cdot (a+b)^2 = (a+b)(a^2 + 2ab + b^2)$$

$$= \underline{1} \cdot a^3 + \underline{2} \cdot a^2 b + \underline{1} \cdot a b^2$$

$$+ \underline{1} \cdot a^2 b + \underline{2}\, a b^2 + \underline{1} \cdot b^3$$

$$= 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2 b + 3\, a b^2 + 1 \cdot b^3$$

§ 4. Folgen

Die Begriffe „Folge“ und „Konvergenz“ , die in diesem § vorgestellt werden, sind für den weiteren Aufbau der höheren Mathematik in diesem Kurs von zentraler Bedeutung.

Def. 4.1 : Ist jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ durch eine Vorschrift eine reelle Zahl a_n zugeordnet , so sagt man , dass diese Zahlen a_n , also a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 , ... eine „ **Folge** “ bilden . Für die Folge als Ganzes verwendet man auch das Symbol (a_n) . Die Zahlen a_n heißen die „ **Glieder** “ der Folge (a_n) .

Bemerkungen :

1. Die zur Numerierung der Folgenglieder a_n benutzte Zahl n nennt man auch „**Index**“.
2. Die Numerierung kann auch bei einer anderen Zahl als 1 anfangen.
3. An Stelle der Buchstaben a bzw. n kann man natürlich auch andere Buchstaben verwenden.

Beispiele :

1. $a_n = \frac{1}{n}$, also $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_4 = \frac{1}{4}$, $a_5 = \frac{1}{5}$, ...
2. $b_n = 2^n$, also $b_1 = 2$, $b_2 = 4$, $b_3 = 8$, $b_4 = 16$, $b_5 = 32$, ...
3. $c_n = (-1)^n$, also $c_1 = -1$, $c_2 = 1$, $c_3 = -1$, $c_4 = 1$, $c_5 = -1$, ...
4. $d_n = \frac{(-1)^n}{n}$, also $d_1 = -1$, $d_2 = \frac{1}{2}$, $d_3 = -\frac{1}{3}$, $d_4 = \frac{1}{4}$, $d_5 = -\frac{1}{5}$ ...
5. $e_n = (1+\frac{1}{n})^n$, also $e_1 = 2$, $e_2 = \frac{9}{4} = 2.25$, $e_3 = \frac{64}{27} = 2{,}370\,370\ ...$,
   $e_4 = \frac{625}{256} = 2.441\,406\,25$, $e_5 = \frac{7776}{3125} = 2.488\,32$, ...

Die Definition der Folge erfordert nicht zwingend , die Vorschrift , durch die die Folgenglieder festgelegt werden , in Form einer Formel anzugeben wie in den Beispielen 1 - 5 . Es kommt nur darauf an, dass die Vorschrift eindeutig ist . Das kann z.B. auch in Form einer „ **Rekursionsformel** “ geschehen wie in den folgenden zwei Beispielen:

6. $f_1 = 2$, $f_{n+1} = \frac{1}{2}(f_n + 2 / f_n)$ für $n \geq 1$. Hier wird das Folgenglied f_1 explizit festgelegt, während alle weiteren Folgenglieder mit Hilfe der angegebenen Formel jeweils aus dem vorangehenden Folgenglied berechnet werden . Die ersten Folgenglieder sind
   2 , 1.5 , 1.416 666 666 ... , 1.414 215 686 ... , 1.414 213 562 ... , 1.414 213 562 ... .
   (Im Rahmen der Genauigkeit des Taschenrechners, mit dem diese Werte berechnet wurden , bleiben die Folgenglieder ab dem 5. Glied konstant)

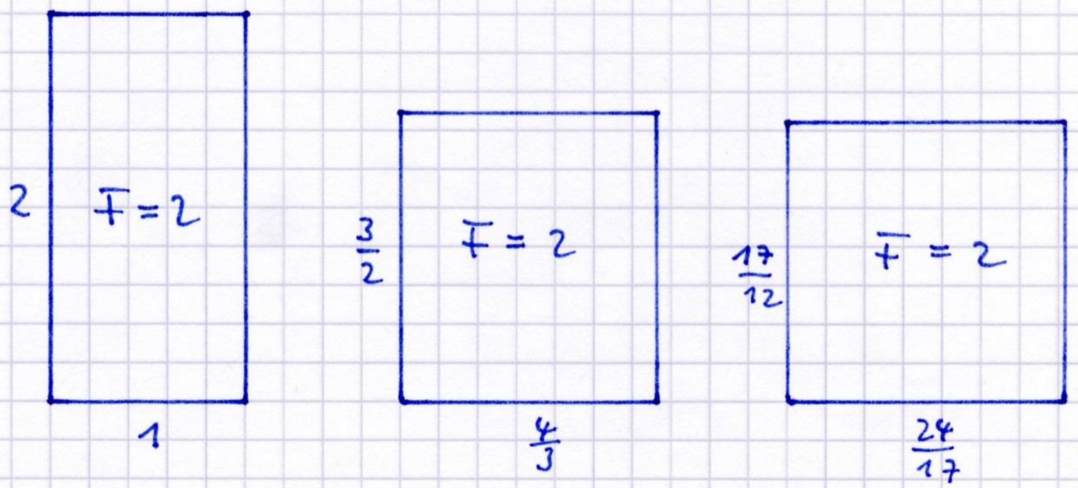
$$f_1 = 2 \;, \quad f_2 = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{2}\right) = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

$$f_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{17}{12} = 1{,}41\overline{6}$$

$$f_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{2}{\frac{17}{12}}\right) = 1{,}4215\ldots$$

$$\vdots$$

Geometrische Deutung :



7. $g_1 = 1$, $g_{n+1} = 2\,g_n + 1$ für $n \geq 1$. Die ersten Folgenglieder sind 1 , 3 , 7, 15 , 31 , 63 , ... Die Glieder dieser Folge könnte man auch durch eine explizite Formel ausdrücken wie in den Beispielen 1 - 5 , nämlich $g_n = 2^n - 1$. (Die Zahl g_n ist die Anzahl der erforderlichen Züge bei dem Spiel „Türme von Hanoi“ mit n Scheiben) .

$g_1 = 1 , \quad g_{n+1} = 2 g_n + 1 \;, \; n \geq 1$

$h_n = 2^n - 1 \;, \; n \geq 1$

Beh.: $\quad g_n = h_n$ für alle $n \geq 1$

$n = 1$: $\quad g_1 = 1 \;; \; h_1 = 2^1 - 1 = 1$ ✓

„$n \to n+1$“ $\quad g_{n+1} = 2 g_n + 1 = 2 h_n + 1$

$\qquad = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$ ✓

Besonders interessant für uns sind solche Folgen wie (f_n) in Beispiel 6 , wo sich die Folgenglieder für wachsendes n an eine feste Zahl annähern oder „gegen diese Zahl streben“ . Im Beispiel 6 streben die Folgenglieder gegen die Zahl $\sqrt{2} = 1.\,414\,213\,562\ldots$, wie wir sehen werden. Dies Verhalten nennen wir die „Konvergenz“ einer Folge. Zur exakten Definition dieses Begriffes brauchen wir ein paar Vorbereitungen :

Def. 4.2 : Unter dem „ **Betrag** “ $|x|$ einer reellen Zahl x verstehen wir die Zahl

$$|x| = \begin{cases} x & ,\text{falls } x \geq 0 \\ -x & ,\text{falls } x < 0 \end{cases} \quad .$$

Beispiele , Bemerkungen , Eigenschaften :

1. $|2| = 2$, $|-3| = 3$, $|-1{,}5| = 1{,}5$.
2. $|-x| = |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
3. $x \leq |x|$, $-x \leq |x|$, $-|x| \leq x \leq |x|$ jeweils für alle $x \in \mathbb{R}$,
4. $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$ für alle $x , a \in \mathbb{R}$.
5. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ für alle $x , y \in \mathbb{R}$,
6. „Dreiecksungleichung“ : $|x + y| \leq |x| + |y|$ für alle $x , y \in \mathbb{R}$.

Zu 6. : Aus 4. $\Rightarrow -|x| \leq x \leq |x|$

$-|y| \leq y \leq |y|$

Mehrfache Anwendung von (O3) :

$\Rightarrow -|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|$

$\Rightarrow -(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$

$\underset{4.}{\Rightarrow} \quad |x + y| \leq |x| + |y|$

Die Beweise zu 1. bis 6. ergeben sich mehr oder weniger direkt aus der Definition 4.2 .

7. Der Betrag $|x - y|$ lässt sich geometrisch deuten als der Abstand der Punkte x und y bzw. der Abstand der Punkte , die den reellen Zahlen auf der Zahlengeraden entsprechen. Ist $|x - y|$ klein , so liegen die beiden Punkte nahe beieinander ; ist $|x - y|$ groß , so ist der Abstand groß. Diese anschauliche Vorstellung fließt in die folgende Definitionen ein :

Def. 4.3 : Eine Folge (a_n) heißt „ **konvergent zum Grenzwert a** “ (oder „ **konvergent gegen den Grenzwert a** “), wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon)$ gibt mit der Eigenschaft

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n > n_0(\varepsilon) \ .$$

Def. 4.4 : Eine Folge (a_n) heißt „ **konvergent** “ , wenn es ein a gibt derart , dass Definition 4.3 erfüllt ist , andernfalls heißt die Folge „ **divergent** “ .

Bemerkungen , Beispiele :

1. Man könnte in der Definition 4.3 die unterstrichenen Worte „ ... wenn es zu jedem <u>noch so kleinen</u> $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon)$ gibt ... “ einfügen, um den Sinn zu unterstreichen. Die Def. erfordert , dass der Abstand zwischen den Zahlen a_n und a beliebig klein wird und bleibt , wenn man den Index nur groß genug wählt .

2. Die Folge (a_n), $a_n = \frac{1}{n}$, (s. einführendes Beispiel 1.) konvergiert gegen den Grenzwert $a = 0$. (nachrechnen) .

zu 2. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Suche $n_0(\varepsilon)$ mit $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ für alle $n > n_0(\varepsilon)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$ — " —

$\Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$. Wähle $n_0(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$ ✓

3. Die Folge (a_n) , $a_n = \frac{n}{n+1}$ konvergiert gegen den Grenzwert $a = 1$. (nachrechnen) .

zu 3. $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-(n+1)}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$

weiter wie bei 2.

4. Die Folge (c_n) , $c_n = (-1)^n$, (s. einführendes Beispiel 3.) konvergiert gegen keinen Grenzwert , ist also divergent. Beweis : durch Widerspruch .

Annahme : Die Folge (a_n) besitzt einen Grenzwert a. Aus Def. 4.4 mit $\varepsilon = 1$ folgt: es existiert ein $n_0 = n_0(1)$ mit der Eigenschaft : $|a_n - a| < 1$ für alle $n > n_0$. Da es oberhalb von n_0 sowohl gerade als auch ungerade n gibt , folgt : $|1 - a| < 1$ und : $|-1 - a| < 1$ und weiter $-1 < 1 - a < 1$ und $-1 < -1 - a < 1$ und daher $-2 < -a < 0$ und $0 < -a < 2$. Das ist ein Widerspruch.

Anschaulich ist die Aussage ohnehin einleuchtend, weil es keine Zahl a geben kann, die sowohl „nahe“ bei 1 als auch „nahe“ bei -1 liegt.

5. Auch die Folge (b_n) , $b_n = 2^n$, aus Beispiel 2. ist divergent . Wir zeigen das im folgenden gleich etwas allgemeiner :

Def. 4.5 : Eine Folge (a_n) heißt „ **beschränkt** “ , wenn es eine Zahl K gibt derart , dass $|a_n| \le K$ ist für alle n .

Satz 4.1 : Jede konvergente Folge ist beschränkt (mit Beweis) .

Bemerkungen , Beispiele :

1. Aus Satz 4.1 folgt umgekehrt : ist eine Folge nicht beschränkt , so ist sie auch (erst recht) nicht konvergent.
2. Die Folge (b_n) , $b_n = 2^n$ aus Beispiel 2 ist also divergent , da sie nicht einmal beschränkt ist.

Diejenigen unter Ihnen , die den Begriff der Konvergenz von Folgen schon aus der Schule kennen , vermissen vielleicht die Bezeichnung $a = \lim_{n \to \infty} a_n$ für den Grenzwert der Folge (a_n) . Die Rechtfertigung für die Einführung dieses Symbols ergibt sich erst aus dem folgenden Satz , der aus einem Grenzwert einer Folge den Grenzwert einer Folge macht :

Satz 4.2 : Besitzt eine Folge (a_n) überhaupt einen Grenzwert , so ist dieser eindeutig durch die Folge bestimmt .

Beweis : Widerspruchsbeweis . Man nehme an , es gebe zwei verschiedene Grenzwerte a und b .

Zu Satz 4.2

a ist Grenzwert $\Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > n_0(\varepsilon)$

b —"— $\Rightarrow |a_n - b| < \varepsilon \quad \forall n > n_1(\varepsilon)$

Wähle $\varepsilon = \frac{1}{2}|b - a|$

$$\begin{aligned} |b-a| &= |(b-a_n)+(a_n-a)| \\ &\leq |b-a_n| + |a_n-a| \\ &= |a_n-b| + |a_n-a| \\ &< \tfrac{1}{2}|b-a| + \tfrac{1}{2}|b-a| \quad \forall n > \mathrm{Max}(n_0, n_1) \end{aligned}$$

$\Rightarrow |b-a| < |b-a| \qquad \Rightarrow\Leftarrow$

Satz 4.2 rechtfertigt die

Def. 4.6 : ist die Folge (a_n) konvergent zum Grenzwert a , so nennen wir a „ **den Grenzwert** “ der Folge (a_n) und schreiben $a = \lim_{n \to \infty} a_n$ oder $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$.

(sprich : a gleich limes a n für n gegen unendlich , a n strebt gegen a)

Eine weitere wichtige Eigenschaft von Folgen, die im Zusammenhang mit der Konvergenz eine Rolle spielt, ist die der „Monotonie“ :

Def. 4.7 : Eine Folge (a_n) heißt

(i) „ **monoton wachsend** “, falls $a_n \leq a_{n+1}$ für alle n ,
(ii) „ **streng monoton wachsend** “ , falls $a_n < a_{n+1}$ für alle n ,
(iii) „ **monoton fallend** “ , falls $a_n \geq a_{n+1}$ für alle n ,
(iv) „ **streng monoton fallend** “ , falls $a_n > a_{n+1}$ für alle n .

Eine Folge, die (mindestens) eine dieser Eigenschaften hat , heißt „ **monoton** “ .

Beispiele :

1. $a_n = \frac{1}{n}$, Folge ist beschränkt und monoton fallend ,
2. $b_n = 2^n$, Folge ist streng monoton wachsend , nicht beschränkt
3. $c_n = (-1)^n$, Folge ist beschränkt , nicht monoton

4. $e_n = (1+\frac{1}{n})^n$, Folge ist beschränkt und monoton wachsend. Den Beweis dazu führen wir etwas später . Warum die Kombination aus „beschränkt“ und „monoton“ so interessant ist , zeigt der folgende Satz :

Satz 4.3 („Hauptsatz über monotone Folgen“) : Jede monotone und beschränkte Folge ist konvergent .

Auf den Beweis von Satz 4.3 können wir hier verzichten. Er beruht auf einer Anwendung des Prinzips der Intervallschachtelung. Tatsächlich ist die Aussage von Satz 4.3 sogar logisch gleichwertig mit dem Prinzip der Intervallschachtelung.

Als Beispiele zu Satz 4.3 behandeln wir ausführlich die einführenden Beispiele 6 und 5 (s. u.) .

Will man mit Hilfe der Definition 4.3 eine Folge als konvergent nachweisen , müsste man ihren Grenzwert kennen oder erraten können. Mit Satz 4.3 haben wir eine Möglichkeit kennengelernt , eine Folge als konvergent nachzuweisen, ohne den Grenzwert gleichzeitig angeben zu müssen . Satz 4.3 erspart die direkte Anwendung der etwas spröde zu handhabenden Definition 4.3 . Auch der nächste Satz erspart häufig die Anwendung der Def. 4.3 . Er erlaubt , Grenzwerte von komplizierteren Ausdrücken auf Grenzwerte von einfacheren Ausdrücken zurückzuführen .

Satz 4.4 : Die Folgen (a_n) und (b_n) seien konvergent , die Grenzwerte seien

$a = \lim_{n\to\infty} a_n$ bzw. $b = \lim_{n\to\infty} b_n$. Dann gilt :

(i) die Folge $(a_n + b_n)$ konvergiert gegen den Grenzwert $a + b$,

(ii) die Folge $(a_n \cdot b_n)$ konvergiert gegen den Grenzwert $a \cdot b$,

(iii) falls $b_n \neq 0$ für alle n und $b \neq 0$, so konvergiert die Folge (a_n / b_n) gegen den Grenzwert a / b .

Die Beweise ergeben sich aus der Def. 4.3 und (für Teil (ii) und (iii)) aus Satz 4.1 .
Beispiele :

1. $a_n = \frac{2n^2+3n}{4n^2+5}$, (ausführlich) ,

Bsp. 1

$$a_n = \frac{2n^2+3n}{4n^2+5} = \frac{2+\frac{3}{n}}{4+\frac{5}{n^2}}$$

Zähler $\xrightarrow[n\to\infty]{} 2$, Nenner $\xrightarrow[n\to\infty]{} 4 \neq 0$

$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

2. (a_n) sei rekursiv definiert durch $a_1 = 1/4$ und $a_{n+1} = (a_n)^2 + 1/4$. Wir zeigen , dass (a_n) konvergiert und $\lim_{n\to\infty} a_n = 1/2$ ist . Dazu weisen wir nacheinander nach :

a) (a_n) ist beschränkt ; genauer : $0 < a_n < 1/2$ (durch vollständige Induktion) .

b) (a_n) ist streng monoton wachsend ; (durch vollständige Induktion) .

c) Aus a) und b) folgt mit Satz 4.3 , dass die Folge konvergent ist ; aus der Rekursionsformel folgt , dass der Grenzwert a die Gleichung $a = a^2 + 1/4$ erfüllen muss. Aus alledem folgt $a = 1/2$.

Bsp. 2

a) $0 < a_n < \frac{1}{2} \quad \forall\, n \geq 1$

$n = 1 \quad \checkmark$

„$n \to n+1$“ : $a_n < \frac{1}{2} \Rightarrow a_n^2 < \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \underbrace{a_n^2 + \frac{1}{4}}_{a_{n+1}} < \frac{1}{2}$$

b) $a_n < a_{n+1} \Leftrightarrow a_n < a_n^2 + \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow a_n^2 - a_n + \frac{1}{4} > 0$

$\Leftrightarrow \left(a_n - \frac{1}{2}\right)^2 > 0 \quad \checkmark$ wegen a)

c) $a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} a_{n+1}$

$a = \lim\limits_{n \to \infty} \left(a_n^2 + \frac{1}{4}\right) = a^2 + \frac{1}{4}$

$a = a^2 + \frac{1}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

Wir können jetzt nach dem Muster der vorigen Rechnung auch die Konvergenz der Folgen (e_n) und (f_n) aus den einführenden Beispielen 5 und 6 nachweisen :

3. Zu (f_n) :

a) $f_n > 0$ für alle n , (vollständige Induktion) ,

b) $(f_n)^2 > 2$, (aus Rekursionsformel) ,

c) (f_n) monoton fallend , (betrachte $f_{n+1} - f_n$ und verwende die Rekursionsformel) .

d) aus a) bis c) kann man auf die Konvergenz von (f_n) schließen. Aus der Rekursionsformel sieht man , dass der Grenzwert f der Folge die Gleichung $f^2 = 2$ erfüllen muss.

zu Bsp. 3

a) $f_n > 0 \quad \forall n \geq 1$ folgt aus $f_1 = 2$

und $\quad f_{n+1} = \frac{1}{2}\left(f_n + \frac{2}{f_n}\right)$

b) $f_n^2 \geq 2$

$n = 1: \quad f_1 = 2, \; f_1^2 = 4 > 2 \quad \checkmark$

$n \geq 1:$

$$f_{n+1}^2 = \frac{1}{4}\left(f_n + \frac{2}{f_n}\right)^2 \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \quad f_n^2 + 4 + \frac{4}{f_n^2} \geq 8 \quad \Big| -8$$

$$\Leftrightarrow \quad f_n^2 - 4 + \frac{4}{f_n^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(f_n - \frac{2}{f_n}\right)^2 \geq 0 \quad \checkmark$$

c) $f_{n+1} \leq f_n \quad \forall n \geq 1:$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(f_n + \frac{2}{f_n}\right) \leq f_n$$

$$\Leftrightarrow \quad f_n + \frac{2}{f_n} \leq 2 f_n \quad \Big| - f_n$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2}{f_n} \leq f_n \quad \Leftrightarrow \quad 2 \leq f_n^2$$

$\checkmark$ wegen b)

Fazit: (f_n) ist beschränkt: $0 < f_n \le f_1$

und monoton $\Rightarrow (f_n)$ konvergent

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(f_n + \frac{2}{f_n}\right)$$

$$f = \frac{1}{2}\left(f + \frac{2}{f}\right) \Rightarrow f^2 = 2 .$$

Bemerkung:

Verwendet man allgemeiner für ein $x > 0$ die Rekursionsformel $f_{n+1} = \frac{1}{2}(f_n + x / f_n)$ mit einem beliebigen Startwert $f_1 > 0$, so erhält man eine Folge (f_n), die gegen $\sqrt{x}$ konvergiert. („babylonisches Wurzelziehen") .

4. Zu (e_n) :

a) (e_n) ist monoton wachsend. Das zeigen wir in der Form $\frac{e_n}{e_{n-1}} \ge 1$ für $n \ge 2$ mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung.

Zu Bsp. 4a)

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}}$$

$$= \frac{n}{n-1}\left(\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}\right)^n = \frac{n}{n-1}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n$$

$$= \frac{n}{n-1}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \ge \frac{n}{n-1}\left(1-n\cdot\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{n}{n-1}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1 .$$

Also $\frac{e_n}{e_{n-1}} \ge 1$; $e_n \ge e_{n-1}$ $\forall n \ge 2$

b) (e_n) ist beschränkt ; genauer : $2 \le e_n \le 3$; Beweis mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes .

zu Bsp. 4 b)   Für $n \geq 2$:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \underset{(k=0)}{1} + \underset{(k=1)}{1} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$$

$$k \geq 2 : \quad \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k}$$

$$\leq \frac{1}{k!} \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}$$

$$= \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \left(1-\frac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

$$\leq \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \leq 2 + 1 = 3$$

c) Aus a) und b) folgt wieder die Konvergenz der Folge (e_n) . Dieser Grenzwert wird üblicherweise als die „(Eulersche) Zahl e “ bezeichnet .

Es ist also $e = \lim\limits_{n \to \infty} (1+\frac{1}{n})^n$. Die Zahl e liegt in $2 \le e \le 3$ und spielt für den weiteren Aufbau der Analysis eine zentrale Rolle.

Satz 4.4 nützt nur dann etwas , wenn man genügend viele unterschiedliche Folgen und ihr Konvergenzverhalten kennt. Um einen kleinen „Vorrat“ von bekannten Folgen anzulegen , behandeln wir noch folgende

Beispiele :

1. Die Folge (q^n) konvergiert für $-1 < q \le 1$ und divergiert für alle anderen $q \in \mathbb{R}$. Im Falle der Konvergenz ist der Grenzwert $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{, falls } |q|<1 \\ 1 & \text{, falls } q=1 \end{cases}$.
(mit Beweis) .

Zu Bsp. 1

1. $q = 0$, $q = 1$, $q = -1$ ✓

2. $|q| > 1$. $|q| = 1 + h$, $h > 0$

$|q|^n = (1+h)^n \geq 1 + n \cdot h$

$(|q|^n)$ nicht beschränkt $\Rightarrow$ divergent

3. $0 < |q| < 1$

$\frac{1}{|q|} = 1 + h$, $h > 0$

$\frac{1}{|q^n|} = \frac{1}{|q|^n} = (1+h)^n \geq 1 + n \cdot h \geq n \cdot h$

$0 < |q|^n \leq \frac{1}{n \cdot h} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} q^n = 0$

2. $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Zu Bsp. 2

$\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$, $h_n > 0$ $n \geq 2$

$n = (1 + h_n)^n \geq \sum_{k=0}^{\cancel{n}\, 2} \binom{n}{k} h_n^k$

$n \geq 1 + n \cdot h_n + \binom{n}{2} h_n^2$

$n \geq \frac{n(n-1)}{2} h_n^2$, $0 < h_n^2 \leq \frac{2}{n-1}$,

$h_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

(Das Rechnen mit negativen und gebrochenen Exponenten und mit Wurzeln setzen wir ab jetzt voraus .)

Der Vollständigkeit halber erwähnen wir noch das nach Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857) „Cauchy ´sche Konvergenzkriterium“ , das wir im nächsten Paragraphen für die Theorie der unendlichen Reihen verwenden werden. Es ist sowohl notwendig als auch hinreichend und erlaubt es , die Konvergenz einer Folge festzustellen , ohne dass man wie bei Def. 4.3 den Grenzwert kennen muss.

Satz 4.5 (Cauchy ´sches Konvergenzkriterium) : Eine Folge (a_n) ist genau dann konvergent , wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon)$ gibt mit der Eigenschaft

$$| a_n - a_m | < \varepsilon \quad \text{für alle } n , m > n_0(\varepsilon) .$$

Der Beweis kann z.B. wieder mit Hilfe des Prinzips der Intervallschachtelung geführt werden. Er ist sehr technisch und kann hier entfallen. (Wer darüber enttäuscht ist, dem zeige ich gerne den Beweis in meiner Sprechstunde) .

§ 5. Unendliche Reihen

Wir beginnen mit einer bekannten Denksportaufgabe :

Ein Förster befindet sich mit seinem Hund auf dem Heimweg und ist noch 1 km von seinem Haus entfernt. Der Hund läuft bis zum Haus vor , dreht um und läuft zurück bis zum Förster , läuft wieder vor bis zum Haus , zurück zum Förster usw. bis schließlich auch der Förster zu Hause ankommt. Frage: welche Strecke legt der Hund insgesamt zurück, wenn er doppelt so schnell läuft wie der Förster ?

Die Antwort ergibt sich aus der einfachen Überlegung, dass der Hund bei der doppelten Geschwindigkeit in der gleichen Zeit die doppelte Strecke , also 2 km , zurücklegt .

Wir wollen nachprüfen , ob das gleiche Ergebnis auch durch Aufsummieren aller Teilstrecken herauskommt.

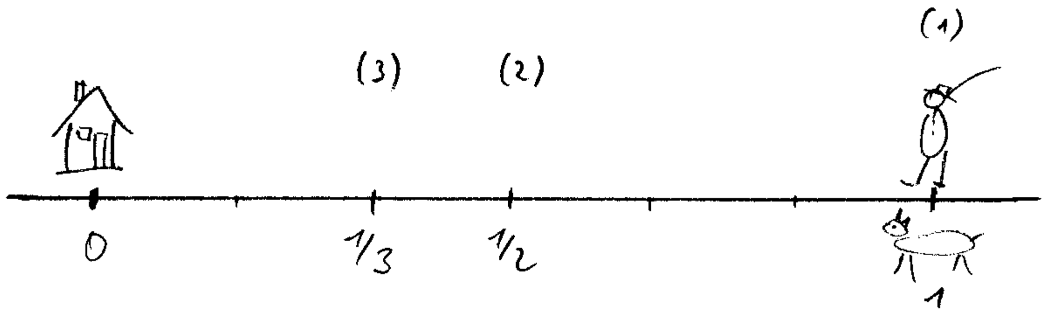


Abbildung 5.1 : Förster und Hund

Beim Start (1) sind Förster und Hund 1 km vom Haus entfernt. Ist der Hund zum erstenmal beim Haus, hat der Förster (2) die Hälfte der Strecke zurückgelegt . Förster und Hund treffen sich bei (3) wieder, da der Treffpunkt die verbleibende Strecke der Länge 0,5 km im Verhältnis 2 : 1 teilen muss. Bis zum ersten Treffen hat der Hund also $\left(1+\frac{1}{3}\right)\text{km} = \frac{4}{3}\text{km}$ zurückgelegt. Bis zu jedem weiteren Treffen wiederholt sich der gesamte Vorgang , wobei alle Strecken jeweils um den Faktor $\frac{1}{3}$ verkürzt werden. Bis zum n. Treffen hat der Hund also die Strecke $s_n = \frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4}{27} + \ldots + \frac{4}{3^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{3^k}$ zurückgelegt . Wir benutzen Beispiel 8 aus § 3 , um s_n auszurechnen :

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{3^k} = \frac{4}{3} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{4}{3} \frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}} = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) .$$

Wie erwartet , ist $\lim_{n \to \infty} s_n = 2$.

In diesem Beispiel haben wir, ohne es so zu nennen , die Konvergenz einer „unendlichen Reihe“ nachgewiesen und deren Wert bestimmt. Die damit zusammenhängenden Begriffe und Schreibweisen führen wir in folgender Definition ein :

Def. 5.1 : Sei die Folge (a_k) , $k \in \mathbb{N}$, gegeben. Die Folge (s_n) , $n \in \mathbb{N}$, mit $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ heißt die mit den „ **Summanden** “ a_k gebildete „ **unendliche Reihe** “ , die Zahlen s_n die „ **Partialsummen** “ dieser Reihe. Wir nennen die Reihe „ **konvergent** “ genau dann , wenn die Folge (s_n) konvergiert , sonst „ **divergent** “. Im Falle der Konvergenz schreiben wir für den Grenzwert $s = \lim_{n \to \infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Bemerkungen , Beispiele :

1. Das Symbol $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ wird auch als Symbol für die Folge (s_n) benutzt. Es ist also üblich und sinnvoll , danach zu fragen , ob $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert. Im Falle der Konvergenz bezeichnet dasselbe Symbol, wie in der Definition 5.1 festgelegt , auch den Wert der Reihe. Durch diese doppelte Bedeutung ist keine Verwechslung zu befürchten , da aus dem Zusammenhang immer klar wird , ob die Rede von einer Folge oder deren Grenzwert ist.

2. In dem einführenden Beispiel mit dem Förster und dem Hund ist $a_k = \frac{4}{3^k}$ und $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{3^k}$.

   Nachgewiesen wird die Konvergenz der unendlichen Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{3^k}$ und deren Wert als 2 bestimmt.

3. Wie bei Folgen kann die Nummerierung der Summanden einer Reihe auch bei einer von 1 verschiedenen Zahl beginnen.

Ein auch für den weiteren Aufbau der Theorie der unendlichen Reihen wichtiges Beispiel ist die „geometrische Reihe“ $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$, $q \in \mathbb{R}$. Über die Konvergenz der geometrischen Reihe gibt der folgende Satz Auskunft :

Satz 5.1 : Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ ist für $|q| < 1$ konvergent und für $|q| \geq 1$ divergent.

Für $|q| < 1$ ist der Grenzwert der geometrischen Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$.

Der Beweis ergibt sich wie im einführenden Beispiel aus § 3 , Beispiel 8 .

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q} \text{ , falls } q \neq 1$$

1. $|q| < 1$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1-q}$

2. $|q| > 1$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$ nicht beschränkt $\Rightarrow$ divergent

3. $q = -1$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^n = \frac{1}{2}\left(1-(-1)^{n+1}\right)$

   abwechselnd 1 und 0

4. $q = 1$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1^k = n+1$, nicht beschränkt $\Rightarrow$ divergent

Beispiele , Bemerkungen :

1. $1{,}11111... = 1{,}\bar{1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{10}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9}$.

2. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$

3. Die Summenformel für die geometrische Reihe aus Satz 5.1 wird in der Literatur in sehr unterschiedlicher Form geschrieben. Am einfachsten merkt man sich die Formel in der Gestalt
$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots = \frac{a}{1-q} = \frac{\text{Anfangssummand}}{1-\text{Quotient}} \quad , \ a \in \mathbb{R} \, , |q| < 1 \, .$$

4. Der Name „geometrische Reihe“ hat damit zu tun , dass jeder ihrer Summanden , jedenfalls für positives q , das geometrische Mittel seiner beiden Nachbarn ist : $q^k = \sqrt{q^{k-1} \cdot q^{k+1}}$.

5. Ein Beispiel einer nicht geometrischen Reihe : Wir zeigen , dass $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ konvergiert und den Wert 1 hat .

   Da $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ ist , ist $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = 1$.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \quad ; \quad \text{Blatt 2, Aufg. 5b}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 .$$

6. Summen , deren Summanden sich wie in Beispiel 5. in der Form $a_k = b_k - b_{k+1}$ schreiben lassen , nennt man „ **Teleskopsummen** ", da sie sich wie ein Teleskop zusammenschieben lassen , so dass nur das erste und letzte Glied übrig bleibt .

Wir haben den Begriff der unendlichen Reihe zurückgeführt auf den Begriff der Folge . Es liegt daher nahe , all unser Wissen über Folgen für unendliche Reihen nutzbar zu machen. Wir werden dies Konzept in den Abschnitten 5.1 bis 5.3 verfolgen und „ **Konvergenzkriterien** “ für unendliche Reihen beweisen ; das sind Sätze , die es erlauben , aus den Eigenschaften der Summanden a_k auf Konvergenz oder Divergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ zu schließen .

§ 5.1 Notwendiges Konvergenzkriterium

Satz 5.2 (Notwendiges Konvergenzkriterium) :

Ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent , so ist $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Beweis : Sei $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Dann existiert nach Voraussetzung $s = \lim_{n\to\infty} s_n$, also ist auch

$$s = \lim_{n\to\infty} s_{n-1} \; . \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = s - s = 0 \; .$$

Nach Satz 5.2 kann eine Reihe also nur dann konvergieren , wenn ihre Summanden , als Folge betrachtet , gegen 0 streben. Das legt die Frage nahe , ob jede Reihe konvergiert , deren Summanden gegen 0 streben , also ob die Bedingung $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ auch hinreichend ist. Die Antwort heißt „nein“ , wie folgendes Gegenbeispiel zeigt .

Satz 5.3 : Die „harmonische Reihe“ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ **ist divergent .**

Beweis : wir betrachten die Partialsumme

$$\sum_{n=1}^{2^m} \frac{1}{n} = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \ldots + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} + \ldots + \tfrac{1}{16} + \ldots + \left(\tfrac{1}{2^{m-1}+1} + \ldots + \tfrac{1}{2^m}\right)$$

$$\geq 1 + \tfrac{1}{2} + 2\cdot\tfrac{1}{4} + 4\cdot\tfrac{1}{8} + 8\cdot\tfrac{1}{16} + \ldots + 2^{m-1}\cdot\tfrac{1}{2^m} = 1 + \tfrac{m}{2} \; .$$

⇒ Die Folge der Partialsummen ist unbeschränkt , also die Reihe divergent .

$$h_{2^m} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{\geq \frac{2}{4}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{\geq \frac{4}{8}} + \cdots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^m}\right)}_{\geq \frac{2^{m-1}}{2^m}}$$

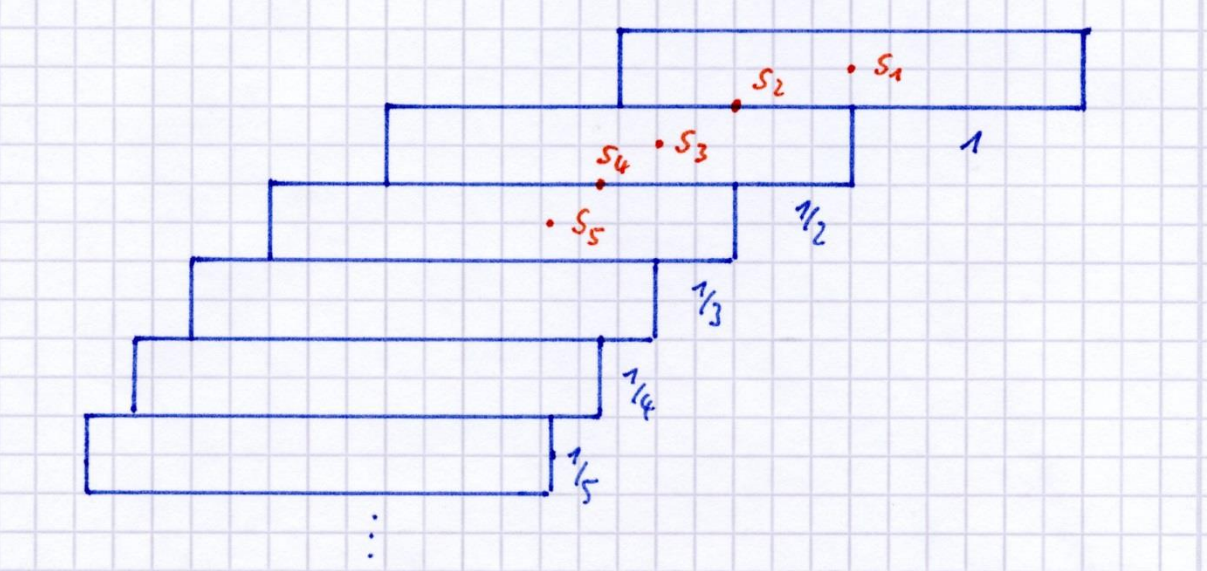
$$\geq 1 + \frac{m}{2} \; ; \quad \text{nicht beschränkt} \quad ✓$$

Bemerkungen :

1. Die harmonische Reihe heißt so , weil jeder ihrer Summanden das harmonische Mittel seiner Nachbarn ist .

$$H\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k+2}\right) = \frac{2}{\frac{1}{1/k} + \frac{1}{1/(k+2)}} = \frac{2}{k+k+2} = \frac{1}{k+1}$$

2. Die Divergenz der harmonischen Reihe lässt sich illustrieren durch die überraschende Antwort auf die Frage „Lassen sich gleichartige quaderförmige Bausteine so aufeinander stapeln , dass die Projektion des obersten auf die Standfläche des untersten sich nicht mit dem untersten überschneidet ? “



§ 5.2 Reihen mit positiven Summanden

Wir werden einige hinreichende Konvergenzkriterien kennenlernen , d.h. Sätze , die aus Eigenschaften der Summanden a_k auf die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{n} a_k$ schließen lassen. Bei den Beweisen werden wir unsere Kenntnisse über Folgen ausnutzen. Wir beschränken uns zunächst auf Reihen mit $a_k > 0$ oder wenigstens mit $a_k \geq 0$, da deren Partialsummen monoton sind und wir über die Konvergenz von monotonen Folgen gut Bescheid wissen (Satz 4.3) .

Satz 5.4 : Sei die Folge (a_k) mit $a_k \geq 0$ gegeben. Ist die Folge (s_n) der Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{beschränkt , so ist die Reihe} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{konvergent.}$$

Beweis : Folgt aus der Definition 5.1 und Satz 4.3.

Wie bei Folgen legen wir uns Werkzeuge zurecht , die uns die Konvergenz unbekannter Reihen auf die bekannter Reihen zurückführen . Sätze dieser Art nennt man auch „ **Vergleichskriterien** “ .

Satz 5.5 (Majorantenkriterium) : Sei die Folge (a_k) mit $a_k \geq 0$ gegeben. Dann gilt :

(i) gibt es eine konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ mit $a_k \leq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so ist auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent .

(ii) gibt es eine divergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ mit $0 \leq c_k \leq a_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so ist auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent .

Beweis : (i) ergibt sich aus Satz 5.4 , (ii) ergibt sich durch Widerspruchsbeweis aus (i) .

$$B := \sum_{k=1}^{\infty} b_k \quad , \quad s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \quad , \quad t_n := \sum_{k=1}^{n} b_k$$

$s_n \leq t_n \leq B \Rightarrow (s_n)$ beschränkt

Außerdem (s_n) monoton wachsend wegen $a_k \geq 0$

$\Rightarrow (s_n)$ konvergent $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv.

Bemerkungen , Beispiele :

1. Zur Bezeichnung : gilt die Ungleichung $0 \leq c_k \leq a_k \leq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so nennt man die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ eine „ **Majorante** “ und $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ eine „ **Minorante** “ von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.
2. Die Aussagen von Satz 5.5 bleiben richtig, wenn die Ungleichungen $a_k \leq b_k$ bzw. $0 \leq c_k \leq a_k$ erst von einer Stelle $k \geq k_0$ an gelten .
3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ ist konvergent ; Vergleich mit Beispiel 5 (s.o.) .

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \text{ konv.} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)} \text{ konv.}$$

$$\frac{1}{k^2} \le \frac{2}{k(k+1)} \Leftrightarrow \cancel{k}(k+1) \le 2k^{\cancel{2}}$$

$$\Leftrightarrow k+1 \le 2k \Leftrightarrow k \geq 1 \quad \checkmark$$

4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ ist divergent ; Vergleich mit harmonischer Reihe .

$$c_k = \frac{1}{k}, \quad a_k = \frac{1}{\sqrt{k}} ; \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ diverg.}$$

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k} = c_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \text{ div.}$$

Aus Satz 5.5 ergeben sich das folgende „ **Quotientenkriterium** “ und das „ **Wurzelkriterium** “ , indem man als Majorante die geometrische Reihe benutzt .

Satz 5.6 (Quotientenkriterium) : Sei die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_k > 0$ gegeben. Gibt es eine feste Zahl q mit $0 < q < 1$ und ein $k_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $\frac{a_{k+1}}{a_k} \le q$ für alle $k \ge k_0$ gilt ,

so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent .

(mit Beweis)

$$a_{k_0+1} \le q \cdot a_{k_0}$$

$$a_{k_0+2} \le q \cdot a_{k_0+1} \le q^2 \cdot a_{k_0}$$

$$a_{k_0+3} \le q \cdot a_{k_0+2} \le q^3 \cdot a_{k_0}$$

allgemein : $\quad a_{k_0+i} \le q^i \cdot a_{k_0} \quad i = 0, 1, 2, \ldots$

$$a_k \le q^{k-k_0} a_{k_0} \quad k \geq k_0$$

Für $n \geq k_0$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{k_0-1} a_k + \sum_{k=k_0}^{n} a_k$$

$$\leq \sum_{k=1}^{k_0-1} a_k + \sum_{k=k_0}^{n} q^{k-k_0} a_{k_0}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{k_0-1} a_k + a_{k_0} \sum_{m=0}^{\infty} q^m = \sum_{k=1}^{k_0-1} a_k + a_{k_0} \cdot \frac{1}{1-q}$$

$\Rightarrow (s_n)$ beschränkt (und monoton)

$\Rightarrow (s_n)$ konvergent ✓

Beispiele , Bemerkungen :

1. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ ist konvergent . (ausführlich vorrechnen) .

$$a_k = \frac{1}{k!} \; , \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{2}$$

für $k \geq 1$

Satz 5.6 mit $k_0 = 1$, $q = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ Reihe konv.

2. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\binom{2k}{k}}$ ist konvergent . (-„-) .

$$a_k = \frac{1}{\binom{2k}{k}} = \frac{1}{\frac{(2k)!}{(k!)^2}} = \frac{(k!)^2}{(2k)!}$$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{((k+1)!)^2}{(2k+2)!}}{\frac{(k!)^2}{(2k)!}} = \frac{((k+1)!)^2}{(k!)^2} \cdot \frac{(2k)!}{(2k+2)!}$$

$$= \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+2)} = \frac{(k+1)^{\cancel{2}}}{(2k+1)\,2\,\cancel{(k+1)}} \xrightarrow[k \to \infty]{} \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow$ es existiert k_0 : $\frac{a_{k+1}}{a_k} \le \frac{1}{2}$, f. alle $k \geq k_0$

k_0 explizit (muss aber nicht sein):

$$\frac{k+1}{2\cdot(2k+1)} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow k+1 \le 2k+1$$
$$\Leftrightarrow k \geq 0$$

3. Für die Konvergenz genügt es nicht, dass $\frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$ ist für alle k. Gegenbeispiel: harmonische Reihe.

4. Das Quotientenkriterium wird nach Jean Baptiste le Rond d´Alembert (1717 - 1783) auch d´Alembertsches Kriterium genannt.

Satz 5.7 (Wurzelkriterium) : Sei die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_k > 0$ gegeben. Gibt es eine feste Zahl q mit $0 < q < 1$ und ein $k_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $\sqrt[k]{a_k} \le q$ für alle $k \geq k_0$ gilt, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.

Beweis : ähnlich wie bei Satz 5.6

Bemerkungen, Beispiele :

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ ist konvergent.

2. $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^k$ ist für jedes q mit $0 < q < 1$ konvergent.

$$a_k = k \cdot q^k \,, \quad \sqrt[k]{k q^k} = \sqrt[k]{k} \cdot q \xrightarrow[k \to \infty]{} q < 1$$

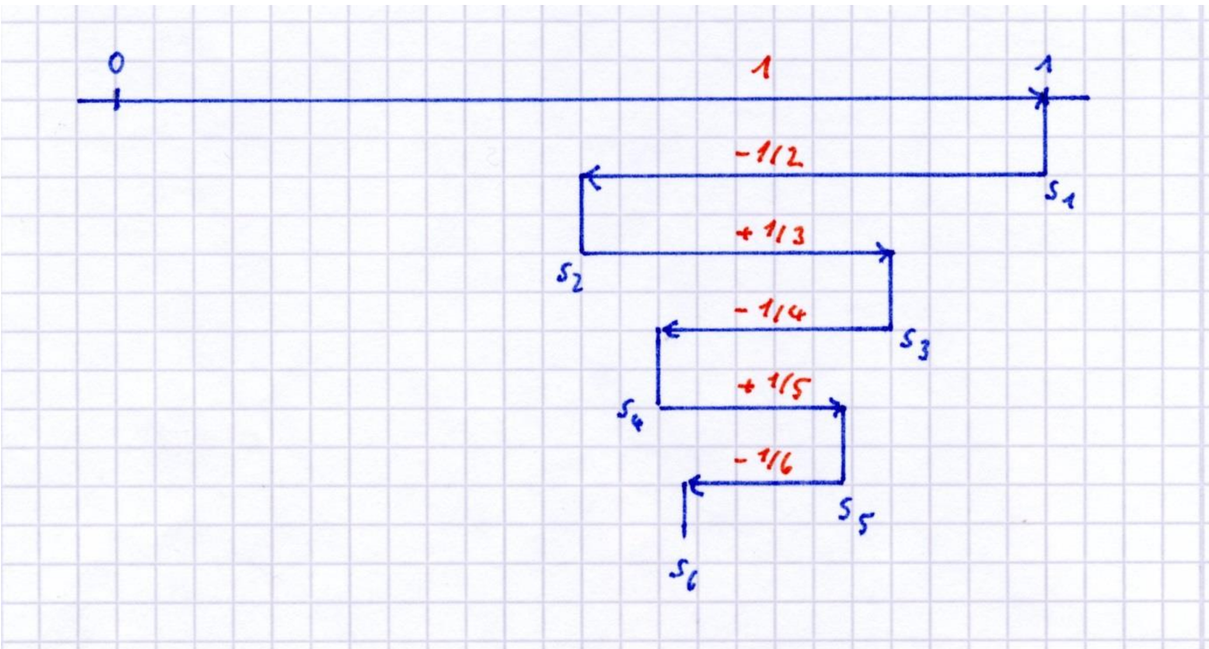
$$\Rightarrow \text{es ex. } k_0 : \; a_k \le \frac{1+q}{2} < 1 \,, \; k \ge k_0$$

§ 5.3 Reihen mit beliebigen Summanden

Wir lassen jetzt die Voraussetzung fallen , dass unsere Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nur positive Summanden haben. Für solche Reihen , deren Summanden beiderlei Vorzeichen haben können, haben wir nicht mehr die Monotonie der Folge der Partialsummen zur Verfügung und können deshalb nicht mehr so bequem argumentieren wie im vorigen Abschnitt. Als erstes Beispiel einer Reihe mit positiven und negativen Summanden untersuchen wir die „ **alternierende harmonische Reihe** “

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - + \ldots \quad .$$

Bezeichnen wir wie gehabt die Partialsummen $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ mit s_n , so lässt sich zeigen , dass die Folge (s_{2n}) der Partialsummen mit gerader Nummer monoton wächst und nach oben beschränkt ist , während die Folge (s_{2n+1}) der Partialsummen mit ungerader Nummer monoton fällt und nach unten beschränkt ist . Beide Folgen sind also nach Satz 4.3 konvergent.
Wegen $s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$ haben beide Folgen den gleichen Grenzwert . Also ist (s_n) und damit auch $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ konvergent . (in der Vorlesung etwas ausführlicher und anschaulicher) .



Die gleiche Idee wie zum Nachweis der Konvergenz der alternierenden harmonischen Reihe greift nicht nur in diesem speziellen Beispiel, sondern immer dann, wenn die Vorzeichen der Summanden abwechselnd + und - sind und wenn die Beträge der Summanden monoton gegen 0 fallen. Diese Aussage ist enthalten in dem nach Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) benannten

Satz 5.8 (Leibniz - Kriterium) : Sei die Folge (b_k) monoton fallend , $b_k > 0$, $\lim\limits_{k \to \infty} b_k = 0$.

Dann ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} b_k$ konvergent .

Der Schluss dieses § kann bei der ersten Beschäftigung mit Reihen übergangen werden.

Sind die Vorzeichen der Summanden ganz unregelmäßig verteilt , helfen in der Regel nur spezielle Überlegungen weiter. Allgemein können noch folgende Begriffe und Sätze helfen :

Def. 5.2 : Eine unendliche Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt „**absolut konvergent**“,

wenn $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergent ist.

Def. 5.3 : Eine konvergente unendliche Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt „ **bedingt konvergent** “ ,

wenn $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ divergent ist .

Satz 5.9 : Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.

Zum Beweis von Satz 5.9 schreibt man am besten das Cauchy´ sche Konvergenzkriterium (Satz 4.5) auf Reihen um (s. u. Satz 5.10) und verwendet die Dreiecksungleichung.

Satz 5.10 (Cauchy´ sches Konvergenzkriterium für Reihen) : Die unendliche Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ist

genau dann konvergent , wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon)$ existiert mit der Eigenschaft

$$\left| \sum_{l=n+1}^{n+m} a_k \right| < \varepsilon \quad \text{für alle } n > n_0 \text{ und alle } m \in \mathbb{N} .$$

Zurück zur alternierenden harmonischen Reihe : aus der Herleitung ist zu sehen, dass der Wert der Reihe zwischen ½ und 1 liegt. Es lässt sich zeigen, dass der Reihenwert = ln 2 = 0,693147 … ist.

Mit konvergenten Reihen kann man fast so rechnen wie mit endlichen Summen, z.B. „durchmultiplizieren mit einem Faktor“ , „gliedweise Addition“ u.ä.

Bei endlichen Summen kann man die Reihenfolge der Summanden beliebig ändern, ohne dass sich der Summenwert ändert. Das gilt auch bei absolut konvergenten Reihen, nicht aber bei bedingt konvergenten Reihen, wie man am Beispiel der alternierenden harmonischen Reihe sehen kann.

Sortiert man die Summanden so, dass man immer einen positiven und zwei negative nimmt, würde sich der Wert halbieren. Das ist wegen $s \neq 0$ ein Widerspruch.

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} \cdots$$

$$? = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + - - \cdots$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + - \cdots$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots \right)$$

$$= \frac{1}{2} S$$