DHBW Mannheim
Informatik

Mannheim, 12.10.2022
Mathematik II/1

Lösungen zu Übungsblatt 1

Aufgabe 1.

a) Untersuchen Sie $(a_m)_{m\geq 1} = \left(\frac{10^{12}\cdot m^3+10^{15}\cdot m^2}{m^4-m^3+1}, \frac{4\cdot m^2-7\cdot m+1}{3\cdot m^2+99\,987\,654\,321}\right)_{m\geq 1}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie den Grenzwert der Folge, falls er existiert.

Lösung:

Gemäß den Ergebnissen aus der Vorlesung kann die Konvergenz der Folge komponentenweise untersucht werden, wir haben also die Folgen

$$\begin{aligned}(a_{m,1})_{m\geq 1} &= \left(\frac{10^{12}\cdot m^3+10^{15}\cdot m^2}{m^4-m^3+1}\right)_{m\geq 1},\\ (a_{m,2})_{m\geq 1} &= \left(\frac{4\cdot m^2-7\cdot m+1}{3\cdot m^2+99\,987\,654\,321}\right)_{m\geq 1}\end{aligned}$$

in $\mathbb{R}$ zu untersuchen. Bei beiden Folgen handelt es sich um rationale Ausdrücke mit Polynomen im Zähler und im Nenner. In diesem Fall ist zunächst der Grad der Polynome zu untersuchen, und gegebenfalls die Koeffizienten bei den Ausdrücken mit der höchsten Potenz:

1. Ist der Grad des Zählerpolynoms kleiner als der Grad des Nennerpolynoms, so ist die Folge konvergent mit Grenzwert 0.
2. Ist der Grad des Zählerpolynoms gleich dem Grad des Nennerpolynoms, etwa l, und steht im Zähler der Koeffizient a bei m^l und im Nenner der Koeffizient b bei m^l, so ist die Folge konvergent mit Grenzwert $\frac{a}{b}$.
3. Ist der Grad des Zählerpolynoms größer als der Grad des Nennerpolynoms, so ist die Folge divergent und der Grenzwert existiert nicht.

In unserem Fall ergibt sich daraus, dass die erste Komponentenfolge konvergent mit Grenzwert 0 und die zweite Komponentenfolge konvergent mit Grenzwert $\frac{4}{3}$ ist. Damit ist die gesamte Folge konvergent und

$$\lim_{m\to\infty} a_m = \left(0,\ \frac{4}{3}\right)$$

b) Untersuchen Sie $(a_m)_{m\geq 1} = \left(\sqrt[m]{m^3}, \frac{m^{50}}{e^m}\right)_{m\geq 1}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie den Grenzwert der Folge, falls er existiert.

Lösung:

Wir untersuchen wieder die beiden Komponentenfolgen

$$(a_{m,1})_{m\geq 1} = \left(\sqrt[m]{m^3}\right)_{m\geq 1},\ (a_{m,2})_{m\geq 1} = \left(\frac{m^{50}}{e^m}\right)_{m\geq 1}$$

getrennt. Wir behaupten, die erste Folge ist konvergent mit Grenzwert 1. Dazu betrachten wir zunächst die Folge $(\sqrt[m]{m})_{m\geq 1}$. Beachten Sie, dass $\sqrt[m]{m} \geq 1$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Schreibe also

$$\sqrt[m]{m} = 1 + b_m$$

mit $b_m \geq 0$ (da $m \geq 1$ ist auch $\sqrt[m]{m} > 1$). Dann gilt für $m \geq 3$:

$$\begin{aligned} m &= (\sqrt[m]{m})^m \\ &= (1+b_m)^m \\ &= 1 + m \cdot b_m + \tfrac{m(m-1)}{2} \cdot b_m^2 + \cdots \\ &= 1 + \tfrac{m\cdot(m-1)}{2} b_m^2 + c_m \end{aligned}$$

mit $c_m \geq 0$ (da $b_m \geq 0$). Also erhalten wir die Abschätzung

$$\frac{m\cdot(m-1)}{2} b_m^2 \leq m$$

und damit

$$b_m^2 \leq \frac{2m}{m\cdot(m-1)} = \frac{2}{m-1}$$

Da sicherlich $b_m^2 \geq 0$ folgt daraus, dass $(b_m^2)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, und damit auch $(b_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Damit gilt

$$\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{m} = \lim_{m\to\infty} (1+b_m) = 1 + \lim_{m\to\infty} b_m = 1$$

Nach den Regeln zum Rechnen mit Grenzwerten ist aber dann auch die Folge $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$ mit

$$c_m = \sqrt[m]{m^3} = \sqrt[m]{m}^3$$

konvergent und

$$\lim_{n\to\infty} c_m = \left(\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{m}\right)^3 = 1^{3i} = 1$$

Für die Betrachtung der zweiten Komponente beachten Sie, dass die Exponentialfunktion sehr viel schneller steigt als jedes Polynom. Die Regel von de l'Hospital besagt nämlich (wenn wir Sie fünfzig mal anwenden), dass die Folge $\frac{m^{50}}{e^m}$ den gleichen Grenzwert hat wie die Folge $\frac{50!}{e^m}$. Letztere ist offensichtlich konvergent mit Grenzwert 0, und daher ist auch die Folge $\frac{m^{50}}{e^m}$ eine Nullfolge, und wir erhalten

$$\lim_{m\to\infty} a_m = (1,\, 0)$$

Aufgabe 2.

a) Untersuchen Sie $(a_m)_{m\geq 1} = \left(\sqrt{m+\sqrt{m}}-\sqrt{m},\ \sqrt[m]{2^m\cdot m^3+2^m\cdot m^2}\right)_{m\geq 1}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie den Grenzwert der Folge, falls er existiert.

Lösung:

Auch hier sind wieder die einzelnen Komponentenfolgen $\sqrt{m+\sqrt{m}}-\sqrt{m}$ und $\sqrt[m]{2^m\cdot m^3+2^m\cdot m^2}$ zu untersuchen. Hierzu schreiben wir (mit der dritten binomischen Formel)

$$\begin{aligned}
\sqrt{m+\sqrt{m}}-\sqrt{m} &= \tfrac{\left(\sqrt{m+\sqrt{m}}-\sqrt{m}\right)\cdot\left(\sqrt{m+\sqrt{m}}+\sqrt{m}\right)}{\sqrt{m+\sqrt{m}}+\sqrt{m}}\\
&= \tfrac{(m+\sqrt{m})-m}{\sqrt{m+\sqrt{m}}+\sqrt{m}}\\
&= \tfrac{\sqrt{m}}{\sqrt{m+\sqrt{m}}+\sqrt{m}}\\
&= \tfrac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{m}}}+\sqrt{m}}\\
&= \tfrac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{m}}}+1\right)}\\
&= \tfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{m}}}+1}
\end{aligned}$$

Da (nach den bekannten Regeln aus der Analysis in einer Veränderlichen) $\lim\limits_{m\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{m}}}=1$, ist dieser Ausdruck konvergent mit Grenzwert $\frac{1}{2}$. Für die Untersuchung des zweiten Ausdrucks, beachten Sie zunächst, dass

$$\sqrt[m]{2^m\cdot m^3+2^m\cdot m^2} = \sqrt[m]{2^m\cdot(m^3+m^2)} = 2\cdot\sqrt[m]{m^3+m^2} = 3\cdot\sqrt[m]{m^2}\cdot\sqrt{m+1}$$

Die beiden Ausdrücke $\sqrt[m]{m^2}$ und $\sqrt[m]{m+1}$ unter der Wurzel konvergieren hierbei gegen 1. Bei $\sqrt[m]{m+1}$ beachten Sie, dass $1\leq\sqrt[m]{m+1}\leq\sqrt[m]{m^3}$, und da wir in Aufgabe 1 schon gezeigt haben, dass $\lim\limits_{m\to\infty}\sqrt[m]{m^3}=1$, folgt daraus, dass $\lim\limits_{m\to\infty}\sqrt[m]{m+1}=1$, und bei $\sqrt[m]{m^2}$ können wir genauso argumentieren. Damit konvergiert die zweite Teilfolge mit Grenzwert 2 und die gesamte Folge mit Grenzwert $\left(\frac{1}{2},2\right)$.

b) Untersuchen Sie $(a_m)_{m\geq 1} = \left(\sqrt{m+999\,999\,999}-\sqrt{m},\ \sqrt{m+\frac{m}{999\,999\,999}}-\sqrt{m}\right)_{m\geq 1}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie den Grenzwert der Folge, falls er existiert.

Lösung:

und schreiben

$$\sqrt{m+\frac{m}{999\,999\,999}}-\sqrt{m} = \sqrt{\frac{1\,000\,000\,000}{999\,999\,999}\cdot m}-\sqrt{m} = \left(\sqrt{\frac{1\,000\,000\,000}{999\,999\,999}}-1\right)\cdot\sqrt{m}$$

Bei dem Vorfaktor $\sqrt{\frac{1\,000\,000\,000}{999\,999\,999}}-1$ handelt es sich um eine (zwar sehr kleine aber) positive Zahl (etwa $5\cdot 10^{-10}$), und daher ist diese Komponentenfolge nicht konvergent. Damit ist auch die gesamte Folge $(a_m)_{m\geq 1}$ nicht konvergent (unabhängig vom Konvergenzverhalten der ersten Komponente).

Beachten Sie dabei, dass die erste Teilfolge konvergent ist mit Grenzwert 0, denn

$$\begin{aligned}\sqrt{m+999\,999\,999}-\sqrt{m} &= \frac{\left(\sqrt{m+999\,999\,999}-\sqrt{m}\right)\cdot\left(\sqrt{m+999\,999\,999}+\sqrt{m}\right)}{\sqrt{m+999\,999\,999}+\sqrt{m}}\\ &= \frac{999\,999\,999}{\sqrt{m+999\,999\,999}+\sqrt{m}}\end{aligned}$$

und dieser Ausdruck ist offensichtlich konvergent mit Grenzwert 0 (da der Nenner über alle Schranken wächst). Allerdings nützt das nichts, da ja die zweite Komponentenfolge nicht konvergent ist.

Aufgabe 3. Untersuchen Sie die Funktion $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ mit

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y+3xy+xy^2}{x^2+2y^2} & \text{für } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{für } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

auf Stetigkeit im Punkt $(0,0)$.

Lösung: Siehe Übungsblatt 2

Aufgabe 4. Untersuchen Sie die Funktion $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ mit

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{y^4-4y^3+6y^2-4y+1-x^4}{x^2+(y-1)^2} & \text{für } (x,y)\neq(0,1)\\ 0 & \text{für } (x,y)=(0,1)\end{cases}$$

auf Stetigkeit im Punkt $(0,1)$.

Lösung: Siehe Lösungsblatt 2

Aufgabe 5. Untersuchen Sie die Funktion $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ mit

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\frac{y^3x^3+y^3z^3+x^3z^6}{x^2+y^6+z^6} & \text{für } (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & \text{für } (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$$

auf Stetigkeit im Punkt $(0,0,0)$.

Lösung: Siehe Übungsblatt 2

Aufgabe 6. Wir betrachten zwei stetige Funktionen $f,g:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Funktion $h:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ mit

$$h(x,y)=\min\{f(x,y),g(x,y)\}$$

stetig ist.

Lösung: Siehe Übungsblatt 2