Aufgaben zu „Reihen“

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden unendlichen Reihen konvergent sind oder nicht. Im Falle der Konvergenz soll auch der Grenzwert bestimmt werden.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{n}$.

Lösung:

a) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{2^n} \right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(da beide Reihen konvergieren)}}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} =$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{3}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2} = 3{,}5 .$$

b) $\frac{\sqrt[3]{n}}{n} \geq \frac{1}{n} \Rightarrow$ Reihe divergent nach Minorantenkriterium
(Vergleich mit harmonischer Reihe) .

2. Welche der folgenden Reihen konvergieren ?

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$, b) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^k$, c) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2} \right)^k$,

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2}$, e) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k} \right)$, f) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right)$.

Lösung:

a) konvergent nach z. B. Quotientenkriterium,
b) konvergent als geometrische Reihe mit q = 2/3 < 1,
c) divergent als geometrische Reihe mit q = 3/2 bzw. weil notwendiges Kriterium verletzt ist,
d) $\frac{n!}{n^2} = \frac{(n-1)!}{n} \geq \frac{1}{n} \Rightarrow$ divergent nach Majorantenkriterium,
e) $$\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)\left(\sqrt{k+1} + \sqrt{k}\right)}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \frac{k+1-k}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \geq \frac{1}{2\sqrt{k+1}} .$$

Da $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{k+1}}$ divergent $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k} \right)$ divergent. (Majorantenkriterium).

Man kann die Divergenz der Reihe auch direkt durch Betrachten der Partialsummen nachweisen : („Teleskopsumme“) : $\sum_{k=0}^{n} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k} \right) = \sqrt{n+1} - \sqrt{0} = \sqrt{n+1}$

$\Rightarrow$ Reihe divergent, da Folge der Partialsummen unbeschränkt.

f) Teleskopsumme: $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$.

$\Rightarrow$ Die Reihe konvergiert und hat den Wert 1 .

3. Für welche reellen x konvergieren die Reihen

a) $\sum_{k=1}^{\infty} kx^k$, b) $\sum_{k=1}^{\infty} k^2x^k$?

Lösung:

a) $a_k = k\,x^k$, $|a_k| = k\,|x|^k$, $\sqrt[k]{|a_k|}=\sqrt[k]{k}\cdot|x|\to|x|$

$\Rightarrow$ nach Wurzelkriterium absolut konvergent für $|x|<1 \Rightarrow$ konvergent für $|x|<1$.

Für $|x|\geq 1$ divergent, da notwendige Bedingung verletzt: $|a_k|=k|x|^k\geq k$.

b) Begründung wie bei a) .

4. Welche der folgenden unendlichen Reihen sind konvergent, welche nicht ?

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n+1}-\frac{2n-1}{2n}\right)$.

Lösung:

a) konvergent, z.B. nach Quotientenkriterium

b) divergent. Da $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\neq 0$, ist die notwendige Konvergenzbedingung verletzt.

c) $\frac{2n}{2n+1}-\frac{2n-1}{2n}=\frac{2n\cdot 2n-(2n-1)(2n+1)}{(2n+1)\cdot 2n}=\frac{4n^2-4n^2+1}{(2n+1)2n}=\frac{1}{(2n+1)2n}\leq\frac{1}{4n^2}$,

$\Rightarrow$ Reihe konvergiert nach dem Majorantenkriterium .

5. Welche der folgenden unendlichen Reihen konvergieren ? Begründung ?

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-e}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+n^2}$, d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n}$.

Lösung:

a) Reihe konvergiert nach Majorantenkriterium ,
b) Reihe konvergiert nach Leibniz - Kriterium,
c) Reihe konvergiert nach Majorantenkriterium ,
d) Reihe divergiert nach Minorantenkriterium (Vergleich mit harmonischer Reihe).

6. Untersuchen Sie die folgenden unendlichen Reihen auf Konvergenz :

a) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$, b) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1000\cdot k-1}$

Lösung:

a) Die Reihe konvergiert nach dem Leibniz – Kriterium, da die Folge $\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ monoton gegen 0 strebt.

b) $\frac{1}{(1000k-1)} \geq \frac{1}{1000k}$ $\Rightarrow$ Reihe ist divergent nach dem Minorantenkriterium (Vergleich mit harmonischer Reihe).