Lineare Algebra
Matrizen

Reinhold Hübl

Wintersemester 2020/21

DHBW
Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Mannheim

Matrizenaddition und -subtraktion

Wir betrachten zwei $m \times n$–Matrizen $A = (a_{i,j})$ und $B = (b_{i,j})$.

Definition

Die $m \times n$–Matrix

$$A + B = (c_{i,j}) \qquad \text{mit } c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j} \forall\, i,j$$

heißt **Summe** von A und B.

Matrizenaddition und -subtraktion

Wir betrachten zwei $m \times n$–Matrizen $A = (a_{i,j})$ und $B = (b_{i,j})$.

Definition

Die $m \times n$–Matrix

$$A + B = (c_{i,j}) \qquad \text{mit } c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j} \forall\, i, j$$

heißt **Summe** von A und B. Die $m \times n$–Matrix

$$A - B = (c_{i,j}) \qquad \text{mit } c_{i,j} = a_{i,j} - b_{i,j} \forall\, i, j$$

heißt **Differenz** von A und B.

Matrizenaddition und -subtraktion

Wir betrachten zwei $m \times n$–Matrizen $A = (a_{i,j})$ und $B = (b_{i,j})$.

Definition

Die $m \times n$–Matrix

$$A + B = (c_{i,j}) \qquad \text{mit } c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j} \forall\, i, j$$

heißt **Summe** von A und B. Die $m \times n$–Matrix

$$A - B = (c_{i,j}) \qquad \text{mit } c_{i,j} = a_{i,j} - b_{i,j} \forall\, i, j$$

heißt **Differenz** von A und B.

Beispiel

Beispiel

Für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

gilt

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+2 & 2+1 & 3+3 & 4+2 \\ 5+1 & 6+4 & 5+1 & 4+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 & 6 \\ 6 & 10 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

und

$$A - B = \begin{pmatrix} 1-2 & 2-1 & 3-3 & 4-2 \\ 5-1 & 6-4 & 5-1 & 4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Skalarmultiplikation

Für eine $m \times n$–Matrizen $A = (a_{i,j})$ und ein $r \in \mathbb{R}$ ist die Skalarmultiplikaton $r \cdot A$ definiert als

$$r \cdot A = (c_{i,j}) \qquad textmit c_{i,j} = r \cdot a_{i,j} \forall\, i, j$$

Beispiel

$$\frac{3}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 5 & 4 \\ 1 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & 6 \\ 3 & \frac{12}{5} \\ \frac{3}{5} & 9 \end{pmatrix}$$

Skalarmultiplikation

Für eine $m \times n$–Matrizen $A = (a_{i,j})$ und ein $r \in \mathbb{R}$ ist die Skalarmultiplikaton $r \cdot A$ definiert als

$$r \cdot A = (c_{i,j}) \qquad textmit c_{i,j} = r \cdot a_{i,j} \forall\, i, j$$

Beispiel

$$\frac{3}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 5 & 4 \\ 1 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & 6 \\ 3 & \frac{12}{5} \\ \frac{3}{5} & 9 \end{pmatrix}$$

Regel

Der Raum $\mathcal{M}atr(m, n)$ der reellen $m \times n$–Matrizen ist ein Vektorraum der Dimension $m \cdot n$.

Skalarmultiplikation

Für eine $m \times n$–Matrizen $A = (a_{i,j})$ und ein $r \in \mathbb{R}$ ist die Skalarmultiplikaton $r \cdot A$ definiert als

$$r \cdot A = (c_{i,j}) \qquad text mit c_{i,j} = r \cdot a_{i,j} \forall\, i, j$$

Beispiel

$$\frac{3}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 5 & 4 \\ 1 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & 6 \\ 3 & \frac{12}{5} \\ \frac{3}{5} & 9 \end{pmatrix}$$

Regel

Der Raum $\mathit{Matr}(m, n)$ der reellen $m \times n$–Matrizen ist ein Vektorraum der Dimension $m \cdot n$.

Matrizenmultiplikation

Definition

Für eine $m \times n$–Matrix $A = (a_{i,j})$ und eine $n \times l$–Matrix $B = (b_{i,j})$ definieren wir das **Matrizenprodukt** $A \cdot B$ von A und B als diejenige $m \times l$–Matrix $C = (c_{i,j})$ mit

$$c_{i,j} = a_{i,1} \cdot b_{1,j} + a_{i,2} \cdot b_{2,j} + \cdots + a_{i,n} \cdot b_{n,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \cdot b_{k,j}$$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 26 \\ 15 & 18 \end{pmatrix}$$

Matrizenmultiplikation

Definition

Für eine $m \times n$–Matrix $A = (a_{i,j})$ und eine $n \times l$–Matrix $B = (b_{i,j})$ definieren wir das **Matrizenprodukt** $A \cdot B$ von A und B als diejenige $m \times l$–Matrix $C = (c_{i,j})$ mit

$$c_{i,j} = a_{i,1} \cdot b_{1,j} + a_{i,2} \cdot b_{2,j} + \cdots + a_{i,n} \cdot b_{n,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \cdot b_{k,j}$$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 26 \\ 15 & 18 \end{pmatrix}$$

Matrizenmultiplikation

Übung

Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Matrizenmultiplikation

Übung

Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -20 & 22 \\ 3 & -2 & 5 \\ -7 & 8 & -10 \end{pmatrix}$$

Matrizenmultiplikation

Übung

Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -20 & 22 \\ 3 & -2 & 5 \\ -7 & 8 & -10 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Eine $m \times n$–Matrix kann auch mit einem Vektor $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ multipliziert werden.

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Eine $m \times n$–Matrix kann auch mit einem Vektor $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ multipliziert werden.

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = A_{\bullet,1}$$

und generell ist $A \cdot \overrightarrow{e_j} = A_{\bullet,j}$ die j–te Spalte von A.

Beispiel

Eine $m \times n$–Matrix kann auch mit einem Vektor $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ multipliziert werden.

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = A_{\bullet,1}$$

und generell ist $A \cdot \overrightarrow{e_j} = A_{\bullet,j}$ die j–te Spalte von A.

Matrizenmultiplikation

Regel

Ist $A = (a_{i,j})$ eine $m \times n$–Matrix mit den Spaltenvektoren $\overrightarrow{a_1} = A_{\bullet,1}, \ldots, \overrightarrow{a_n} = A_{\bullet,n}$, und ist $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ ein n–dimensionaler Vektor, so gilt

$$A \cdot \overrightarrow{v} = v_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \cdots + v_n \cdot \overrightarrow{a_n}$$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matrizenmultiplikation

Regel

Ist $A = (a_{i,j})$ *eine* $m \times n$*–Matrix mit den Spaltenvektoren* $\overrightarrow{a_1} = A_{\bullet,1}, \ldots, \overrightarrow{a_n} = A_{\bullet,n}$, *und ist* $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ *ein* n*–dimensionaler Vektor, so gilt*

$$A \cdot \overrightarrow{v} = v_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \cdots + v_n \cdot \overrightarrow{a_n}$$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matrizenmultiplikation

Regel

Ist A eine $n \times n$–Matrix und sind $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{w}$ zwei n–dimensonale Vektoren, so gilt

$$\langle A \cdot \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{v}, A^\top \cdot \overrightarrow{w} \rangle$$

Ist also speziell A eine symmetrische Matrix, ist also $A^\top = A$, so gilt

$$\langle A \cdot \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{v}, A \cdot \overrightarrow{w} \rangle$$

Matrizenmultiplikation

Regel

Ist A eine $n \times n$–Matrix und sind $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{w}$ zwei n–dimensonale Vektoren, so gilt

$$\langle A \cdot \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{v}, A^\top \cdot \overrightarrow{w} \rangle$$

Ist also speziell A eine symmetrische Matrix, ist also $A^\top = A$, so gilt

$$\langle A \cdot \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{v}, A \cdot \overrightarrow{w} \rangle$$

Folgerung

Genau dann ist eine $n \times n$–Matrix symmetrisch, wenn für alle n–Vektoren $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{w}$ gilt

$$\langle A \cdot \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{v}, A \cdot \overrightarrow{w} \rangle$$

Matrizenmultiplikation

Regel

Ist A eine $n \times n$–Matrix und sind $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{w}$ zwei n–dimensonale Vektoren, so gilt

$$\langle A \cdot \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{v}, A^\top \cdot \overrightarrow{w} \rangle$$

Ist also speziell A eine symmetrische Matrix, ist also $A^\top = A$, so gilt

$$\langle A \cdot \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{v}, A \cdot \overrightarrow{w} \rangle$$

Folgerung

Genau dann ist eine $n \times n$–Matrix symmetrisch, wenn für alle n–Vektoren $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{w}$ gilt

$$\langle A \cdot \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{v}, A \cdot \overrightarrow{w} \rangle$$

Matrizenmultiplikation

Betrachten wir ein allgemeines lineares Gleichungssystem mit n Unbekannten und mit Koeffizientenmatrix A und Ergbnisvektor $\overrightarrow{b}$, so gilt:
Genau dann bilden $r_1, \ldots, r_n$ eine Lösung des Gleichungssystems, wenn

$$A \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = \overrightarrow{b}$$

Matrizenmultiplikation

Betrachten wir ein allgemeines lineares Gleichungssystem mit n Unbekannten und mit Koeffizientenmatrix A und Ergbnisvektor $\overrightarrow{b}$, so gilt: Genau dann bilden $r_1, \ldots, r_n$ eine Lösung des Gleichungssystems, wenn

$$A \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = \overrightarrow{b}$$

Deshalb wird ein allgemeines lineares Gleichungssystem auch in der Form

$$A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$$

mit Koeffizientenmatrix A und Ergebnisvektor $\overrightarrow{b}$ notiert.

Matrizenmultiplikation

Betrachten wir ein allgemeines lineares Gleichungssystem mit n Unbekannten und mit Koeffizientenmatrix A und Ergbnisvektor $\overrightarrow{b}$, so gilt: Genau dann bilden $r_1, \ldots, r_n$ eine Lösung des Gleichungssystems, wenn

$$A \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = \overrightarrow{b}$$

Deshalb wird ein allgemeines lineares Gleichungssystem auch in der Form

$$A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$$

mit Koeffizientenmatrix A und Ergebnisvektor $\overrightarrow{b}$ notiert.

lineare Abbildungen

Definition

Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ heißt **lineare Abbildung** von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$, wenn sie die folgenden beiden Eigenschaften hat

- Für $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$f_A(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = f_A(\overrightarrow{v}) + f_A(\overrightarrow{w})$$

lineare Abbildungen

Definition

Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ heißt **lineare Abbildung** von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$, wenn sie die folgenden beiden Eigenschaften hat

- Für $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$f_A(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = f_A(\overrightarrow{v}) + f_A(\overrightarrow{w})$$

- Für $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f_A(\lambda \cdot \overrightarrow{v}) = \lambda \cdot f_A(\overrightarrow{v})$$

lineare Abbildungen

Definition

Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ heißt **lineare Abbildung** von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$, wenn sie die folgenden beiden Eigenschaften hat

- Für $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$f_A(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = f_A(\overrightarrow{v}) + f_A(\overrightarrow{w})$$

- Für $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f_A(\lambda \cdot \overrightarrow{v}) = \lambda \cdot f_A(\overrightarrow{v})$$

lineare Abbildungen

Beispiel

Die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + y + z \\ 2x - 3y - z \end{pmatrix}$$

ist linear.

Beispiel

Die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 \\ x + y + z \end{pmatrix}$$

ist nicht linear.

lineare Abbildungen

Beispiel

Die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + y + z \\ 2x - 3y - z \end{pmatrix}$$

ist linear.

Beispiel

Die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 \\ x + y + z \end{pmatrix}$$

ist nicht linear.

lineare Abbildungen

Übung

Überprüfen Sie, ob die Abbildung

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x + 3y + 4z \\ x + y + z + 1 \end{pmatrix}$$

linear ist.

lineare Abbildungen

Übung

Überprüfen Sie, ob die Abbildung

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x + 3y + 4z \\ x + y + z + 1 \end{pmatrix}$$

linear ist.

Lösung:

Dei Abildung ist nicht linear.

lineare Abbildungen

Übung

Überprüfen Sie, ob die Abbildung

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x + 3y + 4z \\ x + y + z + 1 \end{pmatrix}$$

linear ist.

Lösung:

Dei Abildung ist nicht linear.

lineare Abbildungen und Matrizen

Jede $m \times n$–Matrix A bestimmt eine lineare Abbildung

$$f = f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow R^m$$

durch

$$f_A(\overrightarrow{x}) = A \cdot \overrightarrow{x}$$

Umgekehrt gibt es auch zu jeder linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow R^m$ eine $m \times n$–Matrix A mit der Eigenschaft, dass

$$f(\overrightarrow{x}) = A \cdot \overrightarrow{x}$$

lineare Abbildungen und Matrizen

Jede $m \times n$–Matrix A bestimmt eine lineare Abbildung

$$f = f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow R^m$$

durch

$$f_A(\overrightarrow{x}) = A \cdot \overrightarrow{x}$$

Umgekehrt gibt es auch zu jeder linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow R^m$ eine $m \times n$–Matrix A mit der Eigenschaft, dass

$$f(\overrightarrow{x}) = A \cdot \overrightarrow{x}$$

Diese Matrix A heißt **darstellende Matrix** von f.

lineare Abbildungen und Matrizen

Jede $m \times n$–Matrix A bestimmt eine lineare Abbildung

$$f = f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow R^m$$

durch

$$f_A(\overrightarrow{x}) = A \cdot \overrightarrow{x}$$

Umgekehrt gibt es auch zu jeder linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow R^m$ eine $m \times n$–Matrix A mit der Eigenschaft, dass

$$f(\overrightarrow{x}) = A \cdot \overrightarrow{x}$$

Diese Matrix A heißt **darstellende Matrix** von f.

lineare Abbildungen und Matrizen

Die darstellende Matrix A einer lineare Abbildung kann wie folgt gewonnen werden:

- Bezeihen mit $\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$.

lineare Abbildungen und Matrizen

Die darstellende Matrix A einer lineare Abbildung kann wie folgt gewonnen werden:

- Bezeihen mit $\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$.
- Berechne die Vektoren $\overrightarrow{a_j} = f(\overrightarrow{e_j})$ für $j = 1, \ldots, n$.

lineare Abbildungen und Matrizen

Die darstellende Matrix A einer lineare Abbildung kann wie folgt gewonnen werden:

- Bezeihen mit $\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$.
- Berechne die Vektoren $\overrightarrow{a_j} = f(\overrightarrow{e_j})$ für $j = 1, \ldots, n$.
- Bilde die $m \times n$–Matrix A mit $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ als Spalten

Dann gilt in der Tat

$$f(\overrightarrow{x}) = A \cdot \overrightarrow{x} \qquad \text{für alle } \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$$

lineare Abbildungen und Matrizen

Die darstellende Matrix A einer lineare Abbildung kann wie folgt gewonnen werden:

- Bezeihen mit $\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$.
- Berechne die Vektoren $\overrightarrow{a_j} = f(\overrightarrow{e_j})$ für $j = 1, \ldots, n$.
- Bilde die $m \times n$–Matrix A mit $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ als Spalten

Dann gilt in der Tat

$$f(\overrightarrow{x}) = A \cdot \overrightarrow{x} \qquad \text{für alle } \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$$

lineare Abbildungen und Matrizen

Beispiel

Für die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y+z \\ 2x-3y-z \end{pmatrix}$$

gilt

$$f(\overrightarrow{e_1}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f(\overrightarrow{e_2}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad f(\overrightarrow{e_3}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und damit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

lineare Abbildungen und Matrizen

Übung

Betimmen Sie eine darstellende Matrix für die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x + 5y \\ -3y \\ 3x - y \end{pmatrix}$$

lineare Abbildungen und Matrizen

Übung

Betimmen Sie eine darstellende Matrix für die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x + 5y \\ -3y \\ 3x - y \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

lineare Abbildungen und Matrizen

Übung

Betimmen Sie eine darstellende Matrix für die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x + 5y \\ -3y \\ 3x - y \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

lineare Abbildungen und Matrizen

Definition

Für eine $m \times n$–Matrix A nennen wir

$$\mathrm{Ker}(A) := \{\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n \,|\, A \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}\}$$

den **Kern** von A,

$$\mathrm{Im}(A) := \{\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m \,|\, \exists \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n \text{ mit } A \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{b}\}$$

das **Bild** oder den **Spaltenraum** von A.

lineare Abbildungen und Matrizen

Definition

Für eine $m \times n$–Matrix A nennen wir

$$\mathrm{Ker}(A) := \{\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n \,|\, A \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}\}$$

den **Kern** von A,

$$\mathrm{Im}(A) := \{\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m \,|\, \exists \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n \text{ mit } A \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{b}\}$$

das **Bild** oder den **Spaltenraum** von A.

Satz

Für jede $m \times n$–Matrix A gilt

lineare Abbildungen und Matrizen

Definition

Für eine $m \times n$–Matrix A nennen wir

$$\mathrm{Ker}(A) := \{\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n \,|\, A \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}\}$$

den **Kern** von A,

$$\mathrm{Im}(A) := \{\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m \,|\, \exists \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n \text{ mit } A \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{b}\}$$

das **Bild** oder den **Spaltenraum** von A.

Satz

Für jede $m \times n$–Matrix A gilt

- $\mathrm{Ker}(A)$ *ist ein Untervektorraum von* $\mathbb{R}^n$.

lineare Abbildungen und Matrizen

Definition

Für eine $m \times n$–Matrix A nennen wir

$$\operatorname{Ker}(A) := \{\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n \,|\, A \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}\}$$

den **Kern** von A,

$$\operatorname{Im}(A) := \{\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m \,|\, \exists \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n \text{ mit } A \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{b}\}$$

das **Bild** oder den **Spaltenraum** von A.

Satz

Für jede $m \times n$–Matrix A gilt

- $\operatorname{Ker}(A)$ *ist ein Untervektorraum von* $\mathbb{R}^n$.
- $\operatorname{Im}(A)$ *ist ein Untervektorraum von* $\mathbb{R}^m$.

lineare Abbildungen und Matrizen

Definition

Für eine $m \times n$–Matrix A nennen wir

$$\mathrm{Ker}(A) := \{\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n \,|\, A \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}\}$$

den **Kern** von A,

$$\mathrm{Im}(A) := \{\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m \,|\, \exists \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n \text{ mit } A \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{b}\}$$

das **Bild** oder den **Spaltenraum** von A.

Satz

Für jede $m \times n$–Matrix A gilt

- $\mathrm{Ker}(A)$ *ist ein Untervektorraum von* $\mathbb{R}^n$.
- $\mathrm{Im}(A)$ *ist ein Untervektorraum von* $\mathbb{R}^m$.

lineare Abbildungen und Matrizen

Definition

$\mathrm{rg}(A) := \dim(\mathrm{Im}(A))$ heißt der **Rang** der Matrix A.

$\mathrm{nul}(A) = \dim(\mathrm{Ker}(A))$ heißt die **Nullität** von A.

lineare Abbildungen und Matrizen

Definition

$\mathrm{rg}(A) := \dim(\mathrm{Im}(A))$ heißt der **Rang** der Matrix A.
$\mathrm{nul}(A) = \dim(\mathrm{Ker}(A))$ heißt die **Nullität** von A.

Regel (Rangsatz)

Ist A eine $m \times n$–Matrix, so gilt

$$\mathrm{rg}(A) + \mathrm{nul}(A) = n$$

lineare Abbildungen und Matrizen

Definition

$\mathrm{rg}(A) := \dim(\mathrm{Im}(A))$ heißt der **Rang** der Matrix A.
$\mathrm{nul}(A) = \dim(\mathrm{Ker}(A))$ heißt die **Nullität** von A.

Regel (Rangsatz)

Ist A eine $m \times n$–Matrix, so gilt

$$\mathrm{rg}(A) + \mathrm{nul}(A) = n$$

Regel (Rangsatz)

Ist A eine $m \times n$–Matrix, so hat das Gleichungssystem

$$\mathbb{A} \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$$

genau dann für jedes $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m$ eine eindeutige Lösung, wenn $n = m$ und $\mathrm{rg}(A) = n$.

lineare Abbildungen und Matrizen

Definition

$\mathrm{rg}(A) := \dim(\mathrm{Im}(A))$ heißt der **Rang** der Matrix A.
$\mathrm{nul}(A) = \dim(\mathrm{Ker}(A))$ heißt die **Nullität** von A.

Regel (Rangsatz)

Ist A eine $m \times n$–Matrix, so gilt

$$\mathrm{rg}(A) + \mathrm{nul}(A) = n$$

Regel (Rangsatz)

Ist A eine $m \times n$–Matrix, so hat das Gleichungssystem

$$\mathbb{A} \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$$

genau dann für jedes $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m$ eine eindeutige Lösung, wenn $n = m$ und $\mathrm{rg}(A) = n$.

lineare Abbildungen und Matrizen

Satz

Genau dann ist $x_1, \ldots, x_n$ eine Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems

$$A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$$

wenn $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A)$.

Genau dann hat das allgemeine lineare Gleichungssystem

$$A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$$

eine Lösung, wenn $\overrightarrow{b} \in \mathrm{Im}(A)$.

lineare Abbildungen und Matrizen

Satz

Genau dann ist $x_1, \dots, x_n$ eine Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems

$$A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$$

wenn $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A)$.

Genau dann hat das allgemeine lineare Gleichungssystem

$$A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$$

eine Lösung, wenn $\overrightarrow{b} \in \mathrm{Im}(A)$.

lineare Abbildungen und Matrizen

Satz

Ist $\overrightarrow{v}$ *eine Lösung von*

$$A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$$

so ist jede weitere Lösung dieses Gleichungssystems von der Form $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ *für ein* $\overrightarrow{w} \in \mathrm{Ker}(A)$ *und umgekehrt ist auch für jedes* $\overrightarrow{w} \in \mathrm{Ker}(A)$ *der Vektor* $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ *eine Lösung dieses Gleichungssystems.*

Gleichungssysteme und Matrizen

Zur Lösung eines homogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ mit einer $m \times n$–Matrix A gehe vor wie folgt:

- Bestimme eine Normalform von A und bestimme $\mathrm{rg}(A)$.

Gleichungssysteme und Matrizen

Zur Lösung eines homogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ mit einer $m \times n$–Matrix A gehe vor wie folgt:

- Bestimme eine Normalform von A und bestimme $\mathrm{rg}(A)$.
- Falls $\mathrm{rg}(A) = n$, so hat $A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ nur die triviale Lösung $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.

Gleichungssysteme und Matrizen

Zur Lösung eines homogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ mit einer $m \times n$–Matrix A gehe vor wie folgt:

- Bestimme eine Normalform von A und bestimme $\mathrm{rg}(A)$.
- Falls $\mathrm{rg}(A) = n$, so hat $A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ nur die triviale Lösung $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.
- Ist $\mathrm{rg}(A) < n$, so setze $l = n - \mathrm{rg}(A)$ und bestimme eine Basis $\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_l}$ von $\mathrm{Ker}(A)$ wie folgt:

Gleichungssysteme und Matrizen

Zur Lösung eines homogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ mit einer $m \times n$–Matrix A gehe vor wie folgt:

- Bestimme eine Normalform von A und bestimme $\mathrm{rg}(A)$.
- Falls $\mathrm{rg}(A) = n$, so hat $A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ nur die triviale Lösung $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.
- Ist $\mathrm{rg}(A) < n$, so setze $l = n - \mathrm{rg}(A)$ und bestimme eine Basis $\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_l}$ von $\mathrm{Ker}(A)$ wie folgt:
  - Bestimme die freien Variablen $x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}$, die zur Normalform von A gehören.

Gleichungssysteme und Matrizen

Zur Lösung eines homogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ mit einer $m \times n$–Matrix A gehe vor wie folgt:

- Bestimme eine Normalform von A und bestimme $\mathrm{rg}(A)$.
- Falls $\mathrm{rg}(A) = n$, so hat $A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ nur die triviale Lösung $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.
- Ist $\mathrm{rg}(A) < n$, so setze $l = n - \mathrm{rg}(A)$ und bestimme eine Basis $\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_l}$ von $\mathrm{Ker}(A)$ wie folgt:
    - Bestimme die freien Variablen $x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}$, die zur Normalform von A gehören.
    - Bestimme den Vektor $\overrightarrow{v_k}$ als die eindeutige Lösung von $A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$, die zu der Belegung

      $$x_{i_k} = 1, x_{i_t} = 0 \qquad \text{für } t \neq k$$

      der freien Variablen gehört.

Gleichungssysteme und Matrizen

Zur Lösung eines homogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ mit einer $m \times n$–Matrix A gehe vor wie folgt:

- Bestimme eine Normalform von A und bestimme $\mathrm{rg}(A)$.
- Falls $\mathrm{rg}(A) = n$, so hat $A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ nur die triviale Lösung $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.
- Ist $\mathrm{rg}(A) < n$, so setze $l = n - \mathrm{rg}(A)$ und bestimme eine Basis $\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_l}$ von $\mathrm{Ker}(A)$ wie folgt:
  - Bestimme die freien Variablen $x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}$, die zur Normalform von A gehören.
  - Bestimme den Vektor $\overrightarrow{v_k}$ als die eindeutige Lösung von $A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$, die zu der Belegung
$$x_{i_k} = 1, x_{i_t} = 0 \qquad \text{für } t \neq k$$
der freien Variablen gehört.

Gleichungssysteme und Matrizen

Übung

Bestimmen Sie eine Basis des homogenen Gleichungssystems $A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ mit Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Gleichungssysteme und Matrizen

Lösung:

Eine Normalform der Koeffizientenmatrix ist

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eine reduzierte Normalform ist

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Eine Basis des Lösungsraums ist

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gleichungssysteme und Matrizen

Lösung:

Eine Normalform der Koeffizientenmatrix ist

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eine reduzierte Normalform ist

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Eine Basis des Lösungsraums ist

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gleichungssysteme und Matrizen

Zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ gehe vor wie folgt:

- Bestimme eine Normalform der augmentierten Matrix $(A|\overrightarrow{b})$.
  Falls $\mathrm{rg}(A|\overrightarrow{b}) > \mathrm{rg}(A) \longrightarrow$ STOPP, das Gleichungsystem hat keine Lösung.

Gleichungssysteme und Matrizen

Zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ gehe vor wie folgt:

- Bestimme eine Normalform der augmentierten Matrix $(A|\overrightarrow{b})$.
  Falls $\mathrm{rg}(A|\overrightarrow{b}) > \mathrm{rg}(A) \longrightarrow$ STOPP, das Gleichungsystem hat keine Lösung.
- Bestimme den Lösungsraum $\mathrm{Ker}(A)$ des homogenen Gleichungssystems $A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.

Gleichungssysteme und Matrizen

Zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ gehe vor wie folgt:

- Bestimme eine Normalform der augmentierten Matrix $(A|\overrightarrow{b})$. Falls $\mathrm{rg}(A|\overrightarrow{b}) > \mathrm{rg}(A) \longrightarrow$ STOPP, das Gleichungsystem hat keine Lösung.
- Bestimme den Lösungsraum $\mathrm{Ker}(A)$ des homogenen Gleichungssystems $A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.
- Bestimme eine spezielle Lösung $\overrightarrow{v_p}$ des Gleichungssystems $A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ (durch Nullsetzen aller freien Variablen).

Gleichungssysteme und Matrizen

Zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ gehe vor wie folgt:

- Bestimme eine Normalform der augmentierten Matrix $(A|\overrightarrow{b})$. Falls $\mathrm{rg}(A|\overrightarrow{b}) > \mathrm{rg}(A) \longrightarrow$ STOPP, das Gleichungsystem hat keine Lösung.
- Bestimme den Lösungsraum $\mathrm{Ker}(A)$ des homogenen Gleichungssystems $A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.
- Bestimme eine spezielle Lösung $\overrightarrow{v_p}$ des Gleichungssystems $A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ (durch Nullsetzen aller freien Variablen).
- Die allgemeine Lösung ist von dre Form $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_p} + \overrightarrow{v_h}$, wobei $\overrightarrow{v_h}$ aus $\mathrm{Ker}(A)$ beliebig.

Gleichungssysteme und Matrizen

Zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ gehe vor wie folgt:

- Bestimme eine Normalform der augmentierten Matrix $(A|\overrightarrow{b})$. Falls $\mathrm{rg}(A|\overrightarrow{b}) > \mathrm{rg}(A) \longrightarrow$ STOPP, das Gleichungsystem hat keine Lösung.
- Bestimme den Lösungsraum $\mathrm{Ker}(A)$ des homogenen Gleichungssystems $A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.
- Bestimme eine spezielle Lösung $\overrightarrow{v_p}$ des Gleichungssystems $A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ (durch Nullsetzen aller freien Variablen).
- Die allgemeine Lösung ist von dre Form $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_p} + \overrightarrow{v_h}$, wobei $\overrightarrow{v_h}$ aus $\mathrm{Ker}(A)$ beliebig.

Gleichungssysteme und Matrizen

Übung

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems $A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Gleichungssysteme und Matrizen

Lösung:

Eine Normalform der augmentierten Matrix ist

$$(A'|\overrightarrow{b'} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

eine reduzierte Normalform ist

$$(A'|\overrightarrow{b'} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die allgemeine Lösng ist

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gleichungssysteme und Matrizen

Lösung:

Eine Normalform der augmentierten Matrix ist

$$(A'|\overrightarrow{b'} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

eine reduzierte Normalform ist

$$(A'|\overrightarrow{b'} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die allgemeine Lösng ist

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lineare Abbildungen und Matrizen

Lineare Gleichungssysteme, Matrizen und lineare Abbildungen können über jedem Körper betrachtet werden.

Beispiel

Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & \mathrm{i}\cdot y & = & 2-4\cdot\mathrm{i} \\ \mathrm{i}\cdot x & + & y & = & 4+4\cdot\mathrm{i} \end{array}$$

hat

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2-4\cdot\mathrm{i} \\ 4+4\cdot\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

und die eindeutige Lösung

$$x = 3-4\cdot\mathrm{i}, \quad y = \mathrm{i}$$

lineare Abbildungen und Matrizen

Lineare Gleichungssysteme, Matrizen und lineare Abbildungen können über jedem Körper betrachtet werden.

Beispiel

Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & \mathrm{i}\cdot y & = & 2-4\cdot\mathrm{i} \\ \mathrm{i}\cdot x & + & y & = & 4+4\cdot\mathrm{i} \end{array}$$

hat

$$A=\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{b}=\begin{pmatrix} 2-4\cdot\mathrm{i} \\ 4+4\cdot\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

und die eindeutige Lösung

$$x=3-4\cdot\mathrm{i}, \quad y=\mathrm{i}$$