1. (6 Punkte) Zeige durch vollständige Induktion
   Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dann ist $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \cdot a \\ 0 & 1 & n \cdot b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. (6 Punkte) Modulorechnung
   (a) Bestimme im Körper $\mathbb{F}_{31}$ das multiplikative Inverse zu 29.
   (b) Berechne $11^{33} \quad mod(17)$

3. (4 Punkte) Eine falsche Antwort gibt einen Minuspunkt eine richtige einen Pluspunkt unbeantwortete Fragen keinen Punkt. Man kann in Summe keine negativen Punkte bekommen. Eine Begründung ist nicht nötig.

   (a) Ein Vektoraum ist immer eine abelsche Gruppe. ☐ Wahr ☐ Falsch

   (b) Welche Gleichung stimmt ?

   ◯ $det(A+B) = det(A) + det(B)$

   ◯ $det(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot det(A)$

   ◯ $det(A \cdot B \cdot C) = det(A) \cdot det(B) \cdot det(C)$

   (c) Wieviele Untervektorräume hat der $\mathbb{R}^2$?

   ◯ nur $\{\vec{0}\}$ und $\mathbb{R}^2$

   ◯ nur $\{\vec{0}\}, \mathbb{R}^2, 0 \times \mathbb{R}$ und $\mathbb{R} \times 0$

   ◯ unendlich viele

   (d) Wenn im Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ eine Spalte der Matrix A gleich $\vec{b}$ ist, hat das LGS immer eine Lösung. ☐ Wahr ☐ Falsch

4. (6 Punkte) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des Untervektorraums U des $\mathbb{R}^3$

   $U = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | x + y + z = 0\}$

5. (9 Punkte) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

6. (10 Punkte) Gegeben sei der Vektorraum $V = \mathbb{R}^{3x3}$ aller $3x3$-Matrizen über $\mathbb{R}$ und die lineare Abbildung $f : V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ durch die Gleichung

für $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ ist $f(A) = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{22} + a_{33} \\ a_{12} + a_{23} + a_{31} \\ a_{13} + a_{21} + a_{32} \end{pmatrix}$

Bestimme eine Basis von $ker(f)$ mit dem Hinweis , daß $Im(f) = \mathbb{R}^3$

7. (9 Punkte) Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren der Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -10 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$