Aufgaben zu „Integrale“ , Anwendungen

1. Beweisen Sie, dass für das bestimmte Integral $I(m) = \int_1^e (\ln x)^m \, dx$ die Beziehung $I(m) = e - m \cdot I(m-1)$, $m \in \mathbb{N}$, gilt. Berechnen Sie I(m) für m = 1, 2 und 3.

2. Berechnen Sie das Volumen der Drehkörper, die durch Drehung der Fläche

   $0 \le x \le \pi / 2$, $\sin x \le y \le 1$ um die x - Achse bzw. die y - Achse entstehen .

3. Berechnen Sie die Bogenlänge des Schaubilds der Funktion $f(x) = \ln x$ in den Grenzen $3/4 \le x \le 12/5$.

4. Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve $y^2 = x^3$ für $0 \le x \le 4/3$. Skizzieren Sie die Kurve.

5. Berechnen Sie die Bogenlänge der Kettenlinie $y(x) = \cosh x$ im Intervall $-a \le x \le a$. ($a > 0$, fest) .

6. Bestimmen Sie das Volumen des Ellipsoids , das durch Drehung der Ellipse mit der Gleichung $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ um die x-Achse entsteht Kontrollieren Sie, ob sich als Spezialfall $a = b = r$ das (bekannte) Kugelvolumen ergibt.

7. Sei $f(x) = x\sqrt{x}$.
   a) Skizzieren Sie die Kurve $(x, f(x))$, $0 \le x \le 1$.

   Berechnen Sie

   b) die Länge der Kurve in a) .
   c) den Inhalt der Fläche $\{(x,y) , 0 \le x \le 1 , 0 \le y \le f(x)\}$.
   d) das Volumen des Drehkörpers , der durch Rotation der Fläche in c) um die x-Achse entsteht .

8. Berechnen Sie das bestimmte Integral $\int_0^2 \left| x^2 - 1 \right| dx$.

9. Sei $f(x) = x^2 - 1$ und $g(x) = 1 - x^2$. Berechnen Sie die Fläche, die von den Graphen dieser Funktionen eingeschlossen wird, und die Volumina der Körper , die durch Rotation dieser Fläche um die x- bzw. y-Achse entstehen.

10. Für das Volumen des Drehkörpers $\{ (x,y,z) , a \le x \le b , y^2 + z^2 \le f^2(x) \}$ wurde die Formel

    $V = \pi \int_a^b f^2(x) \, dx$ durch Zerlegung in zylindrische Scheiben hergeleitet.

    Begründen Sie in ähnlicher Weise $V = 2\pi \int_a^b x f(x) \, dx$ für das Volumen des Körpers, der durch Drehung der Fläche $\{ (x,y) , 0 \le a \le x \le b , 0 \le y \le f(x) \}$ um die y-Achse entsteht .