

---

## Übungsblatt 1

---

**Aufgabe 1.** Vom Merkmal  $X$  werden die Merkmalswerte  $x_1, \dots, x_n$  beobachtet. Mit  $\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$  bezeichnen wir das arithmetische Mittel.

a) Zeigen Sie, dass gilt:  $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$ .

b) Zeigen Sie, dass für alle  $a \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + n \cdot (\bar{x} - a)^2$$

und folgern Sie daraus, dass

1.  $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2$ .
2.  $\hat{s}^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2$ .

**Aufgabe 2.** Die jährliche Haushaltseinkommensverteilung von 10 zufällig ausgewählten Haushalten in zwei Orten (in €1000) ist gegeben durch folgende Tabelle:

Haushalt	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ort 1	84	37	60	39	116	88	40	37	93	38
Ort 2	28	42	27	46	32	41	33	26	49	36

a) Bestimmen Sie die Lorenzkurven zu den Einkommensverteilungen in den beiden Orten.

b) Ermitteln Sie, in welchem Ort das Einkommen gleichmäßiger verteilt ist.

**Aufgabe 3.** Neben dem Gini-Koeffizienten gibt es noch weitere Konzentrationsmaße. Eines davon ist der **Herfindahl-Index**, der wie folgt definiert ist: Werden von dem Merkmal  $X$  die Merkmalsausprägungen  $x_1, \dots, x_n$  mit  $x_i \geq 0$  für alle  $i$  beobachtet, so setze

$$M = \sum_{i=1}^n x_i, \quad q_i = \frac{x_i}{M}$$

(wobei wir annehmen, dass mindestens ein  $x_i$  nicht verschwindet). Dann heißt

$$H := \sum_{i=1}^n q_i^2$$

der **Herfindahl-Index** (dieser Stichprobe). Zeigen Sie:

Es gilt  $\frac{1}{n} \leq H \leq 1$ , wobei

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{n} &\iff x_1 = x_2 = \dots = x_n \\ H = 1 &\iff x_i = M \text{ für ein } i \in \{1, \dots, n\} \end{aligned}$$

Je näher  $H$  bei 1 liegt, desto stärker ist also die Konzentration auf dem Markt.

**Aufgabe 4.** Wir betrachten zwei Märkte, auf denen jeweils 10 Unternehmen tätig sind. Auf dem ersten Markt haben 5 Unternehmen jeweils einen Marktanteil von 0.5 % und 5 Unternehmen einen Marktanteil von 19.5 %, auf dem zweiten Markt haben 9 Unternehmen einen Marktanteil von jeweils 5.5 % und ein Unternehmen einen Marktanteil von 50.5 %.

Berechnen Sie für beide Märkte den Gini-Koeffizienten und den Herfindahl-Index (vergleiche Aufgabe 3) und interpretieren Sie die Ergebnisse.