5. Aufgabe LG2:

$V = \mathbb{R}[X]^{\leq 3}$, $D : V \to V$ Ableitung;

Basis von V: $\{1, X, X^2, X^3\}$

Darstellende Matrix A:

$D(1) = 0$

$D(X) = 1$

$D(X^2) = 2X$

$D(X^3) = 3X^2$

$$\rightsquigarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ D(1) & D(X) & D(X^2) & D(X^3) \end{array}$$

$D(1) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X^3$

$D(X^2) = 2X = 0 \cdot 1 + 2 \cdot X + 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X^3$

$\operatorname{Im}(D) = \langle D(1), D(X), D(X^2), D(X^3) \rangle$

$= \langle 0, 1, 2X, 3X^2 \rangle$

$= \langle 1, 2X, 3X^2 \rangle$

$= \langle 1, X, X^2 \rangle$

$\rightsquigarrow \{1, X, X^2\}$ ist Basis von $\operatorname{Im}(D)$.

- $\dim(\ker(D)) + \dim(\operatorname{Im}(D)) = \dim(V) = 4$.
- von oben: $\dim(\operatorname{Im}(D)) = 3$

$\Longrightarrow \dim(\ker(D)) = 1$

- $D(1) = 0 \rightsquigarrow \underset{\neq 0}{1} \in \ker(D)$

$\rightsquigarrow \{1\}$ ist Basis von $\ker(D)$.

(↖: genau die konstanten Polynome

haben Ableitung 0).

n-fache Ableitung:

⇝ hat darstellende Matrix A^n.

§ Determinanten:

$$A_n := \begin{pmatrix} 1 & a & & 0 \\ a & 1 & a & \\ & a & \ddots & \ddots & a \\ 0 & & & a & 1 \end{pmatrix}, \quad \det(A_n) = ?$$

<u>n = 1:</u> $A_1 = (1) \rightsquigarrow \det(A_1) = 1$

<u>n = 2:</u> $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \det(A_2) = 1 - a^2$

<u>n = 3:</u> $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \det(A_3) = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} - a \cdot \det\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= 1 - a^2 - a^2 = 1 - 2a^2.$$

<u>Vermutung:</u> $\det(A_n) = \det(A_{n-1}) - a^2$

bzw. $\det(A_n) = 1 - (n-1) \cdot a^2$.

<u>Beweis:</u>

$$\det(A_n) = \det\begin{pmatrix} 1 & a & & 0 \\ a & 1 & a & \\ & a & \ddots & \ddots & a \\ 0 & & & a & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{nach 1. Zeile}}{\underset{\text{entw.}}{=}} 1 \cdot \det(A_{n-1})$$

$$- a \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} a & a & & 0 \\ 0 & 1 & a & \\ \vdots & & 1 & \ddots & a \\ 0 & & & a & 1 \end{pmatrix}}_{\text{nach 1. Spalte}}$$

$\cdot \,(1 \; a \quad -)$

$$= \det(A_{n-1}) - a^2 \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & a & & 0 \\ a & 1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ 0 & & a & 1 \end{pmatrix}}_{(n-2)\times(n-2)}$$

nach 1. Spalte entw.

$$= \det(A_{n-1}) - a^2 \cdot \det(A_{n-2}).$$

<u>$n=4$:</u> $\det(A_4) = \det(A_3) - a^2 \cdot \det(A_2)$

$$= 1 - 2a^2 - a^2 \cdot (1 - a^2)$$

$$= a^4 - 3a^2 + 1. \neq 1 - 3a^2 \text{ für } a \neq 0.$$

$\downarrow$ unsere Vermutung war falsch!

Cramer'sche Regel:

<u>Geg.:</u> A ist eine invertierbare ($\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$) $n \times n$ Matrix, $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.

$\hookrightarrow$ $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ hat eine eindeutige Lösung,
(nämlich $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$)

nach der Cramer'schen Regel ist diese gegeben durch

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)},$$ wobei A_i = die Matrix A, in der die i-te Spalte durch $\vec{b}$ ersetzt wurde.

Besechnung von A^{-1}:

Es gilt: $A \cdot A^{-1} = E$

$$A \cdot \vec{c}_j = e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j\text{-tes Stelle}$$

$\vec{c}_j$: j-te Spalte von A^{-1}

↳ erhalte via Cramer'schen Regel $\vec{c}_j$

↳ mache dies für alle j

$\leadsto$ erhalte A^{-1}.

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \leadsto \det(A) = 1.$

$$A^{-1} = (\vec{c}_1, \vec{c}_2)$$

- löse $A \cdot \vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\leadsto \quad \vec{c}_1 = \begin{pmatrix} \overbrace{\frac{1}{1}}^{\frac{1}{\det(A)}} \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \frac{1}{1} \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- löse $A \cdot \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\leadsto \quad \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{1} \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \frac{1}{1} \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\leadsto \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\longrightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \; & \; \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Probe: $$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) & 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2 .$$