Lineare Algebra
algebraische Strukturen 2

Reinhold Hübl

Wintersemester 2020/21

Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Mannheim

kommutative Gruppen

Definition

Eine Gruppe $(G, \circ)$ heißt **kommutativ** oder **abelsch** wenn für je zwei Elemente $g, h \in G$ gilt:

$$g \circ h = h \circ g$$

Beispiel

$(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{Q}, +)$ sind kommutative Gruppen.
$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ und $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ sind kommutative Gruppen

kommutative Gruppen

Definition

Eine Gruppe $(G, \circ)$ heißt **kommutativ** oder **abelsch** wenn für je zwei Elemente $g, h \in G$ gilt:

$$g \circ h = h \circ g$$

Beispiel

$(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{Q}, +)$ sind kommutative Gruppen.
$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ und $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ sind kommutative Gruppen

Beispiel

Ist G die Gruppe der bijektiven Abbildungen von $\mathbb{R}$ in sich, so ist G nicht kommutativ.

kommutative Gruppen

Definition

Eine Gruppe $(G, \circ)$ heißt **kommutativ** oder **abelsch** wenn für je zwei Elemente $g, h \in G$ gilt:

$$g \circ h = h \circ g$$

Beispiel

$(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{Q}, +)$ sind kommutative Gruppen.
$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ und $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ sind kommutative Gruppen

Beispiel

Ist G die Gruppe der bijektiven Abbildungen von $\mathbb{R}$ in sich, so ist G nicht kommutativ.

kommutative Gruppen

Übung

Überprüfen Sie, ob die Gruppe S_3 der Permutationen der Zahlen $1, 2$ und 3 kommutativ ist.

kommutative Gruppen

Übung

Überprüfen Sie, ob die Gruppe S_3 der Permutationen der Zahlen $1, 2$ und 3 kommutativ ist.

Lösung:

Die Gruppe S_3 ist nicht kommutativ. Generell ist für $n \geq 3$ die Gruppe S_n der Permuationen nicht kommutativ.

kommutative Gruppen

Übung

Überprüfen Sie, ob die Gruppe S_3 der Permutationen der Zahlen $1, 2$ und 3 kommutativ ist.

Lösung:

Die Gruppe S_3 ist nicht kommutativ. Generell ist für $n \geq 3$ die Gruppe S_n der Permuationen nicht kommutativ.

So ist etwa

$$\langle 1 \ \ 2 \rangle \circ \langle 1 \ \ 3 \rangle \neq \langle 1 \ \ 3 \rangle \circ \langle 1 \ \ 2 \rangle.$$

kommutative Gruppen

Übung

Überprüfen Sie, ob die Gruppe S_3 der Permutationen der Zahlen $1, 2$ und 3 kommutativ ist.

Lösung:

Die Gruppe S_3 ist nicht kommutativ. Generell ist für $n \geq 3$ die Gruppe S_n der Permuationen nicht kommutativ.
So ist etwa

$$\langle 1 \;\; 2 \rangle \circ \langle 1 \;\; 3 \rangle \neq \langle 1 \;\; 3 \rangle \circ \langle 1 \;\; 2 \rangle.$$

Gruppen

Für ein Element $g \in (G, \circ)$ mit neutralem Element e setzen wir $g^0 = e$, $g^2 = g \circ g$, und allgemein für $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} g^n &= \underbrace{g \circ g \circ \cdots \circ g}_{n\text{--mal}} \\ g^{-n} &= \underbrace{g^{-1} \circ g^{-1} \circ \cdots \circ g^{-1}}_{n\text{--mal}} \end{aligned}$$

(so dass also $g^n \circ g^m = g^{n+m}$ für alle $n, m \in \mathbb{Z}$).

Lemma

Ist G eine endliche Gruppe und $g \in G$, so gibt es ein $n \geq 1$ mit $g^n = e$.

Gruppen

Für ein Element $g \in (G, \circ)$ mit neutralem Element e setzen wir $g^0 = e$, $g^2 = g \circ g$, und allgemein für $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} g^n &= \underbrace{g \circ g \circ \cdots \circ g}_{n--\text{mal}} \\ g^{-n} &= \underbrace{g^{-1} \circ g^{-1} \circ \cdots \circ g^{-1}}_{n--\text{mal}} \end{aligned}$$

(so dass also $g^n \circ g^m = g^{n+m}$ für alle $n, m \in \mathbb{Z}$).

Lemma

Ist G eine endliche Gruppe und $g \in G$, so gibt es ein $n \geq 1$ mit $g^n = e$.

Gruppen

Definition

Ist G eine endliche Gruppe und $g \in G$, so heißt

$$\operatorname{ord}(g) := \min\{n \geq 1 : g^n = e\}$$

die **Ordnung** von g.

Bemerkung

Für eine endliche Gruppe G gilt:

Gruppen

Definition

Ist G eine endliche Gruppe und $g \in G$, so heißt

$$\operatorname{ord}(g) := \min\{n \geq 1 : g^n = e\}$$

die **Ordnung** von g.

Bemerkung

Für eine endliche Gruppe G gilt:

1. Genau dann gilt $\operatorname{ord}(g) = 1$, wenn $g = e$.

Gruppen

Definition

Ist G eine endliche Gruppe und $g \in G$, so heißt

$$\operatorname{ord}(g) := \min\{n \geq 1 : g^n = e\}$$

die **Ordnung** von g.

Bemerkung

Für eine endliche Gruppe G gilt:

1. Genau dann gilt $\operatorname{ord}(g) = 1$, wenn $g = e$.
2. Für alle $1 \leq i < j \leq \operatorname{ord}(g)$ gilt: $g^i \neq g^j$.

Gruppen

Definition

Ist G eine endliche Gruppe und $g \in G$, so heißt

$$\operatorname{ord}(g) := \min\{n \geq 1 : g^n = e\}$$

die **Ordnung** von g.

Bemerkung

Für eine endliche Gruppe G gilt:

1. Genau dann gilt $\operatorname{ord}(g) = 1$, wenn $g = e$.
2. Für alle $1 \leq i < j \leq \operatorname{ord}(g)$ gilt: $g^i \neq g^j$.

Lemma

Ist G eine endliche Gruppe und $g \in G$, so gilt: $\operatorname{ord}(g) \,|\, \operatorname{ord}(G)$.

Gruppen

Definition

Ist G eine endliche Gruppe und $g \in G$, so heißt

$$\operatorname{ord}(g) := \min\{n \geq 1 : g^n = e\}$$

die **Ordnung** von g.

Bemerkung

Für eine endliche Gruppe G gilt:

1. Genau dann gilt $\operatorname{ord}(g) = 1$, wenn $g = e$.
2. Für alle $1 \leq i < j \leq \operatorname{ord}(g)$ gilt: $g^i \neq g^j$.

Lemma

Ist G eine endliche Gruppe und $g \in G$, so gilt: $\operatorname{ord}(g) \mid \operatorname{ord}(G)$.

Speziell gilt also $g^{\operatorname{ord}(G)} = e$.

Gruppen

Definition

Ist G eine endliche Gruppe und $g \in G$, so heißt

$$\operatorname{ord}(g) := \min\{n \geq 1 : g^n = e\}$$

die **Ordnung** von g.

Bemerkung

Für eine endliche Gruppe G gilt:

1. Genau dann gilt $\operatorname{ord}(g) = 1$, wenn $g = e$.
2. Für alle $1 \leq i < j \leq \operatorname{ord}(g)$ gilt: $g^i \neq g^j$.

Lemma

Ist G eine endliche Gruppe und $g \in G$, so gilt: $\operatorname{ord}(g) \,|\, \operatorname{ord}(G)$.

Speziell gilt also $g^{\operatorname{ord}(G)} = e$.

Gruppen

Bemerkung

Ist G eine endliche Gruppe und $g \in G$ so schreiben wir

$$\langle g \rangle = \{g = g^1, g^2, g^3, \ldots\}$$

für die Teilmenge von G, die aus den Potenzen von g besteht.

Definition

Eine endliche Gruppe G heißt **zyklisch**, wenn es ein $g \in G$ gibt mit

$$\langle g \rangle = G$$

In diesem Fall heißt g ein **Erzeuger** von G.

Gruppen

Bemerkung

Ist G eine endliche Gruppe und $g \in G$ so schreiben wir

$$\langle g \rangle = \{g = g^1, g^2, g^3, \ldots\}$$

für die Teilmenge von G, die aus den Potenzen von g besteht.

Definition

Eine endliche Gruppe G heißt **zyklisch**, wenn es ein $g \in G$ gibt mit

$$\langle g \rangle = G$$

In diesem Fall heißt g ein **Erzeuger** von G.

Gruppen

Beispiel

Die Gruppe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ ist zyklisch mit Erzeuger $g = 1$

Beispiel

Die Gruppe $M = \{1, -1\}$ mit

$$
\begin{array}{c|cc}
\circ & 1 & -1\,, \\
\hline
1 & 1 & -1 \\
-1 & -1 & 1
\end{array}
$$

ist zyklisch mit Erzeuger -1

Gruppen

Beispiel

Die Gruppe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ ist zyklisch mit Erzeuger $g = 1$

Beispiel

Die Gruppe $M = \{1, -1\}$ mit

$$\begin{array}{c|cc} \circ & 1 & -1\,, \\ \hline 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{array}$$

ist zyklisch mit Erzeuger -1

Ringe

Definition

Ein **Ring** $(R, +, \cdot)$ ist eine nichtleere Menge R mit zwei Verknüpfungen $+$ (Addition) und $\cdot$ (Multiplikation), die zwei Elemente $0, 1$ enthält, wobei $0 \neq 1$ ist und wobei gilt

- $(R, +, 0)$ ist eine kommutative Gruppe.
- $(R, \cdot, 1)$ ist ein Monoid.
- Es gelten die Distributivgesetze

$$\begin{aligned} (r+s)\cdot t &= r\cdot t + s\cdot t \qquad \text{für alle } r,s,t \in R \\ r\cdot(s+t) &= r\cdot s + r\cdot t \qquad \text{für alle } r,s,t \in R \end{aligned}$$

Ist $(R, \cdot, 1)$ kommutativ, so nennen wir $(R, +, \cdot)$ einen kommutativen Ring.

Ringe

Beispiel

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist ein (kommutativer) Ring.

Beispiel

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ sind kommutative Ringe.

Ringe

Beispiel

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist ein (kommutativer) Ring.

Beispiel

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ sind kommutative Ringe.

Beispiel

$(\mathbb{N}, +, \cdot)$ ist kein Ring.

Ringe

Beispiel

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist ein (kommutativer) Ring.

Beispiel

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ sind kommutative Ringe.

Beispiel

$(\mathbb{N}, +, \cdot)$ ist kein Ring.

Ringe

Beispiel

Für eine ganze Zahl $n > 1$ betrachtenn wir $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, also die Menge der Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation "unterscheiden sich um ein Vielfaches von n", dh.

$$a \sim b \iff n|(b-a)$$

Wir definieren auf $\mathbb{Z}/(n)$ Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ durch

$$\begin{aligned} [r]+[s] &:= [r+s] && \text{für alle } [r],[s] \in \mathbb{Z}/(n) \\ [r]\cdot[s] &:= [r\cdot s] && \text{für alle } [r],[s] \in \mathbb{Z}/(n) \end{aligned}$$

Ringe

Beispiel

Für eine ganze Zahl $n > 1$ betrachtenn wir $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, also die Menge der Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation "unterscheiden sich um ein Vielfaches von n", dh.

$$a \sim b \iff n|(b-a)$$

Wir definieren auf $\mathbb{Z}/(n)$ Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ durch

$$\begin{array}{lcll} [r]+[s] & := & [r+s] & \text{für alle } [r],[s] \in \mathbb{Z}/(n) \\ [r]\cdot[s] & := & [r\cdot s] & \text{für alle } [r],[s] \in \mathbb{Z}/(n) \end{array}$$

Dann ist $(\mathbb{Z}/(n),+,\cdot)$ ein kommutativer Ring mit Nullelement $[0]$ und Einselement $[1]$.

Ringe

Beispiel

Für eine ganze Zahl $n > 1$ betrachtenn wir $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, also die Menge der Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation "unterscheiden sich um ein Vielfaches von n", dh.

$$a \sim b \iff n|(b-a)$$

Wir definieren auf $\mathbb{Z}/(n)$ Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ durch

$$\begin{array}{lcll} [r]+[s] & := & [r+s] & \text{für alle } [r],[s] \in \mathbb{Z}/(n) \\ [r]\cdot[s] & := & [r\cdot s] & \text{für alle } [r],[s] \in \mathbb{Z}/(n) \end{array}$$

Dann ist $(\mathbb{Z}/(n),+,\cdot)$ ein kommutativer Ring mit Nullelement $[0]$ und Einselement $[1]$.

Ringe

Beispiel

Wir setzen

$$\mathbb{R}[X] = \{a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}\}$$

und für $f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ und $g(x) = b_m X^m + b_{m-1} X^{m-1} + \cdots + b_1 X + b_0$ definieren wir

- $(f+g)(X) = a_n X^n + \cdots + (a_m + b_m) \cdot X^m + \cdots + (a_1 + b_1) X + a_0 + b_0$ falls $n \geq m$.

Ringe

Beispiel

Wir setzen

$$\mathbb{R}[X] = \{a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}\}$$

und für $f(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ und $g(x) = b_mX^m + b_{m-1}X^{m-1} + \cdots + b_1X + b_0$ definieren wir

- $(f+g)(X) = a_nX^n + \cdots + (a_m + b_m)\cdot X^m + \cdots + (a_1 + b_1)X + a_0 + b_0$ falls $n \geq m$.
- $(f+g)(X) = b_mX^m + \cdots + (a_n + b_n)\cdot X^n + \cdots + (a_1 + b_1)X + a_0 + b_0$ falls $n < m$.

Ringe

Beispiel

Wir setzen

$$\mathbb{R}[X] = \{a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}\}$$

und für $f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ und $g(x) = b_m X^m + b_{m-1} X^{m-1} + \cdots + b_1 X + b_0$ definieren wir

- $(f+g)(X) = a_n X^n + \cdots + (a_m + b_m) \cdot X^m + \cdots + (a_1 + b_1) X + a_0 + b_0$ falls $n \geq m$.
- $(f+g)(X) = b_m X^m + \cdots + (a_n + b_n) \cdot X^n + \cdots + (a_1 + b_1) X + a_0 + b_0$ falls $n < m$.
- $(f \cdot g)(X) = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \cdot b_{k-i} \right) \cdot X^k$.

Ringe

Beispiel

Wir setzen

$$\mathbb{R}[X] = \{a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}\}$$

und für $f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ und $g(x) = b_m X^m + b_{m-1} X^{m-1} + \cdots + b_1 X + b_0$ definieren wir

- $(f+g)(X) = a_n X^n + \cdots + (a_m + b_m) \cdot X^m + \cdots + (a_1 + b_1) X + a_0 + b_0$ falls $n \geq m$.
- $(f+g)(X) = b_m X^m + \cdots + (a_n + b_n) \cdot X^n + \cdots + (a_1 + b_1) X + a_0 + b_0$ falls $n < m$.
- $(f \cdot g)(X) = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \cdot b_{k-i} \right) \cdot X^k$.

Ringe

Beispiel

Wir setzen

$$\mathbb{R}[X] = \{a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}\}$$

und für $f(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ und $g(x) = b_mX^m + b_{m-1}X^{m-1} + \cdots + b_1X + b_0$ definieren wir

- $(f+g)(X) = a_nX^n + \cdots + (a_m + b_m) \cdot X^m + \cdots + (a_1 + b_1)X + a_0 + b_0$ falls $n \geq m$.
- $(f+g)(X) = b_mX^m + \cdots + (a_n + b_n) \cdot X^n + \cdots + (a_1 + b_1)X + a_0 + b_0$ falls $n < m$.
- $(f \cdot g)(X) = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \cdot b_{k-i} \right) \cdot X^k$.

Dann ist $R[X]$ ein kommutativer Ring.

Ringe

Beispiel

Wir setzen

$$\mathbb{R}[X] = \{a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}\}$$

und für $f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ und $g(x) = b_m X^m + b_{m-1} X^{m-1} + \cdots + b_1 X + b_0$ definieren wir

- $(f+g)(X) = a_n X^n + \cdots + (a_m + b_m) \cdot X^m + \cdots + (a_1 + b_1) X + a_0 + b_0$ falls $n \geq m$.
- $(f+g)(X) = b_m X^m + \cdots + (a_n + b_n) \cdot X^n + \cdots + (a_1 + b_1) X + a_0 + b_0$ falls $n < m$.
- $(f \cdot g)(X) = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \cdot b_{k-i} \right) \cdot X^k$.

Dann ist $R[X]$ ein kommutativer Ring.

Statt $\mathbb{R}$ hätten wir genauso gut $\mathbb{Q}$ oder sogar $\mathbb{Z}$ nehmen können.

Ringe

Beispiel

Wir setzen

$$\mathbb{R}[X] = \{a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}\}$$

und für $f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ und $g(x) = b_m X^m + b_{m-1} X^{m-1} + \cdots + b_1 X + b_0$ definieren wir

- $(f+g)(X) = a_n X^n + \cdots + (a_m + b_m) \cdot X^m + \cdots + (a_1 + b_1) X + a_0 + b_0$ falls $n \geq m$.
- $(f+g)(X) = b_m X^m + \cdots + (a_n + b_n) \cdot X^n + \cdots + (a_1 + b_1) X + a_0 + b_0$ falls $n < m$.
- $(f \cdot g)(X) = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \cdot b_{k-i} \right) \cdot X^k$.

Dann ist $R[X]$ ein kommutativer Ring.
Statt $\mathbb{R}$ hätten wir genauso gut $\mathbb{Q}$ oder sogar $\mathbb{Z}$ nehmen können.

Ringe

Beispiel

Für $f(X) = X^3 + X + 1$ und $g(X) = 3X^2 + 5X + 2$ gilt

$$\begin{aligned} (f \cdot g)(X) &= (X^3 + X + 1) \cdot (3X^2 + 5X + 2) \\ &= 3X^5 + 5X^4 + 2X^3 + 3X^3 + 5X^2 + 2X + 3X^2 + 5X + 2 \\ &= 3X^4 + 5X^4 + 5X^3 + 8X^2 + 7X + 2 \end{aligned}$$

Definition

$\mathbb{R}[X]$ heißt **Polynomring über** $\mathbb{R}$.

Ringe

Beispiel

Für $f(X) = X^3 + X + 1$ und $g(X) = 3X^2 + 5X + 2$ gilt

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(X) &= (X^3 + X + 1) \cdot (3X^2 + 5X + 2)\\ &= 3X^5 + 5X^4 + 2X^3 + 3X^3 + 5X^2 + 2X + 3X^2 + 5X + 2\\ &= 3X^4 + 5X^4 + 5X^3 + 8X^2 + 7X + 2\end{aligned}$$

Definition

$\mathbb{R}[X]$ heißt **Polynomring über** $\mathbb{R}$.

Definition

Ist $f(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ ein Polynom in $\mathbb{R}[X]$, und ist $a_n \neq 0$, so heißt

$$\deg(f(X)) = n$$

der **Grad** von $f(X)$.

Ringe

Beispiel

Für $f(X) = X^3 + X + 1$ und $g(X) = 3X^2 + 5X + 2$ gilt

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(X) &= (X^3 + X + 1) \cdot (3X^2 + 5X + 2) \\ &= 3X^5 + 5X^4 + 2X^3 + 3X^3 + 5X^2 + 2X + 3X^2 + 5X + 2 \\ &= 3X^4 + 5X^4 + 5X^3 + 8X^2 + 7X + 2\end{aligned}$$

Definition

$\mathbb{R}[X]$ heißt **Polynomring über** $\mathbb{R}$.

Definition

Ist $f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ ein Polynom in $\mathbb{R}[X]$, und ist $a_n \neq 0$, so heißt

$$\deg(f(X)) = n$$

der **Grad** von $f(X)$.

Ringe

Übung

Wir betrachten $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit der Addition

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

und der Multiplikation

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, ad + bc)$$

Überprüfen Sie, ob M dadurch zum kommutativen Ring wird.

Ringe

Übung

Wir betrachten $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit der Addition

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

und der Multiplikation

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, ad + bc)$$

Überprüfen Sie, ob M dadurch zum kommutativen Ring wird.

Ringe

Übung

Wir betrachten $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit der Addition

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

und der Multiplikation

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, ad + bc)$$

Überprüfen Sie, ob M dadurch zum kommutativen Ring wird.

Lösung:

$(M, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring.

Ringe

Übung

Wir betrachten $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit der Addition

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

und der Multiplikation

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, ad + bc)$$

Überprüfen Sie, ob M dadurch zum kommutativen Ring wird.

Lösung:

$(M, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring.

Ringe

Definition

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring. Ein Element $r \in R \setminus \{0\}$ heißt **Nullteiler** von R wenn es ein $s \in R \setminus \{0\}$ gibt mit $r \cdot s = 0$.
Ein kommutativer Ring, in dem es keine Nullteiler gibt, heißt **nullteilerfrei** oder **Integritätsbereich**

Ringe

Definition

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring. Ein Element $r \in R \setminus \{0\}$ heißt **Nullteiler** von R wenn es ein $s \in R \setminus \{0\}$ gibt mit $r \cdot s = 0$.
Ein kommutativer Ring, in dem es keine Nullteiler gibt, heißt **nullteilerfrei** oder **Integritätsbereich**

Beispiel

Die Ringe $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Z}$ sind nullteilerfrei.

Ringe

Definition

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring. Ein Element $r \in R \setminus \{0\}$ heißt **Nullteiler** von R wenn es ein $s \in R \setminus \{0\}$ gibt mit $r \cdot s = 0$.
Ein kommutativer Ring, in dem es keine Nullteiler gibt, heißt **nullteilerfrei** oder **Integritätsbereich**

Beispiel

Die Ringe $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Z}$ sind nullteilerfrei.

Beispiel

Die Ringe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sind nullteilerfrei.

Ringe

Definition

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring. Ein Element $r \in R \setminus \{0\}$ heißt **Nullteiler** von R wenn es ein $s \in R \setminus \{0\}$ gibt mit $r \cdot s = 0$.
Ein kommutativer Ring, in dem es keine Nullteiler gibt, heißt **nullteilerfrei** oder **Integritätsbereich**

Beispiel

Die Ringe $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Z}$ sind nullteilerfrei.

Beispiel

Die Ringe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sind nullteilerfrei.

Beispiel

Dre Ring $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ von oben ist nicht nullteilerfrei.

Ringe

Definition

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring. Ein Element $r \in R \setminus \{0\}$ heißt **Nullteiler** von R wenn es ein $s \in R \setminus \{0\}$ gibt mit $r \cdot s = 0$.
Ein kommutativer Ring, in dem es keine Nullteiler gibt, heißt **nullteilerfrei** oder **Integritätsbereich**

Beispiel

Die Ringe $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Z}$ sind nullteilerfrei.

Beispiel

Die Ringe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sind nullteilerfrei.

Beispiel

Dre Ring $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ von oben ist nicht nullteilerfrei.

Ringe

Übung

Überprüfen Sie, ob der Ring $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ nullteilerfrei ist.

Lösung:

Der Ring ist nicht nullteilerfrei, denn es gilt

$$[2] \cdot [3] = [0]$$

und $[2] \neq [0]$, $[3] \neq [0]$.

Körper

Definition

Ein **Körper** $(K, +, \cdot)$ ist eine nichtleere Menge K mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$, die zwei Elemente $0, 1$ enthält, wobei $0 \neq 1$ ist und wobei gilt

- $(K, +, 0)$ ist eine kommutative Gruppe.

Körper

Definition

Ein **Körper** $(K, +, \cdot)$ ist eine nichtleere Menge K mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$, die zwei Elemente $0, 1$ enthält, wobei $0 \neq 1$ ist und wobei gilt

- $(K, +, 0)$ ist eine kommutative Gruppe.
- $(K \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ ist eine kommutative Gruppe.

Körper

Definition

Ein **Körper** $(K, +, \cdot)$ ist eine nichtleere Menge K mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$, die zwei Elemente $0, 1$ enthält, wobei $0 \neq 1$ ist und wobei gilt

- $(K, +, 0)$ ist eine kommutative Gruppe.
- $(K \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ ist eine kommutative Gruppe.
- Es gilt das Distributivgesetz

$$(r + s) \cdot t = r \cdot t + s \cdot t \qquad \text{für alle } r, s, t \in R$$

Körper

Definition

Ein **Körper** $(K,+,\cdot)$ ist eine nichtleere Menge K mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$, die zwei Elemente $0,1$ enthält, wobei $0 \neq 1$ ist und wobei gilt

- $(K,+,0)$ ist eine kommutative Gruppe.
- $(K\setminus\{0\},\cdot,1)$ ist eine kommutative Gruppe.
- Es gilt das Distributivgesetz

$$(r+s)\cdot t \quad = \quad r\cdot t + s\cdot t \qquad \text{für alle } r,s,t \in R$$

Beispiel

$(\mathbb{R},+,\cdot)$ und $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ sind Körper.

Körper

Definition

Ein **Körper** $(K, +, \cdot)$ ist eine nichtleere Menge K mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$, die zwei Elemente $0, 1$ enthält, wobei $0 \neq 1$ ist und wobei gilt

- $(K, +, 0)$ ist eine kommutative Gruppe.
- $(K \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ ist eine kommutative Gruppe.
- Es gilt das Distributivgesetz

$$(r+s) \cdot t \quad = \quad r \cdot t + s \cdot t \qquad \text{für alle } r, s, t \in R$$

Beispiel

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ sind Körper.

Beispiel

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist kein Körper.

Körper

Definition

Ein **Körper** $(K, +, \cdot)$ ist eine nichtleere Menge K mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$, die zwei Elemente $0, 1$ enthält, wobei $0 \neq 1$ ist und wobei gilt

- $(K, +, 0)$ ist eine kommutative Gruppe.
- $(K \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ ist eine kommutative Gruppe.
- Es gilt das Distributivgesetz

$$(r + s) \cdot t \quad = \quad r \cdot t + s \cdot t \qquad \text{für alle } r, s, t \in R$$

Beispiel

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ sind Körper.

Beispiel

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist kein Körper.

Körper

Bemerkung

Jeder Körper ist ein nullteilerfreier kommutativer Ring. Die Umkehrung gilt nicht.

Ein nullteilerfreier kommutativer Ring R ist erst dann ein Körper, wenn es zu jedem $x \in R$ ein inverses Element gibt, also ein Element $y \in R$ mit $x \cdot y = 1$.

Körper

Bemerkung

Jeder Körper ist ein nullteilerfreier kommutativer Ring. Die Umkehrung gilt nicht.
Ein nullteilerfreier kommutativer Ring R ist erst dann ein Körper, wenn es zu jedem $x \in R$ ein inverses Element gibt, also ein Element $y \in R$ mit $x \cdot y = 1$.

Beispiel

Die Ringe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $Z/3\mathbb{Z}$ sind Körper.

Körper

Bemerkung

Jeder Körper ist ein nullteilerfreier kommutativer Ring. Die Umkehrung gilt nicht.
Ein nullteilerfreier kommutativer Ring R ist erst dann ein Körper, wenn es zu jedem $x \in R$ ein inverses Element gibt, also ein Element $y \in R$ mit $x \cdot y = 1$.

Beispiel

Die Ringe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $Z/3\mathbb{Z}$ sind Körper.

Beispiel

Der Ring $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ist kein Körper.

Körper

Bemerkung

Jeder Körper ist ein nullteilerfreier kommutativer Ring. Die Umkehrung gilt nicht.
Ein nullteilerfreier kommutativer Ring R ist erst dann ein Körper, wenn es zu jedem $x \in R$ ein inverses Element gibt, also ein Element $y \in R$ mit $x \cdot y = 1$.

Beispiel

Die Ringe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $Z/3\mathbb{Z}$ sind Körper.

Beispiel

Der Ring $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ist kein Körper.

Körper

Übung

Überprüfen Sie, ob der Ring $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ ein Körper ist.

Körper

Übung

Überprüfen Sie, ob der Ring $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ ein Körper ist.

Lösung:

Dieser Ring ist kein Körper, denn er ist nicht nullteilerfrei.

Körper

Übung

Überprüfen Sie, ob der Ring $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ ein Körper ist.

Lösung:

Dieser Ring ist kein Körper, denn er ist nicht nullteilerfrei.

Körper

Bemerkung

Ist $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring, so heißt ein $r \in R$ **Einheit**, wenn es ein $s \in R$ gibt mit $r \cdot s = 1$. Die Einheiten von R bilden eine Gruppe (bezüglich $\cdot$), die **Einheitengruppe** $E(R)$ von R.

Regel

Ein kommutativer Ring R ist genau dann ein Körper, wenn $E(R) = R \setminus \{0\}$.

Körper

Bemerkung

Ist $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring, so heißt ein $r \in R$ **Einheit**, wenn es ein $s \in R$ gibt mit $r \cdot s = 1$. Die Einheiten von R bilden eine Gruppe (bezüglich $\cdot$), die **Einheitengruppe** $E(R)$ von R.

Regel

Ein kommutativer Ring R ist genau dann ein Körper, wenn $E(R) = R \setminus \{0\}$.

Beispiel

Der Polynomoring $\mathbb{R}[X]$ ist kein Körper.

Körper

Bemerkung

Ist $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring, so heißt ein $r \in R$ **Einheit**, wenn es ein $s \in R$ gibt mit $r \cdot s = 1$. Die Einheiten von R bilden eine Gruppe (bezüglich $\cdot$), die **Einheitengruppe** $E(R)$ von R.

Regel

Ein kommutativer Ring R ist genau dann ein Körper, wenn $E(R) = R \setminus \{0\}$.

Beispiel

Der Polynomoring $\mathbb{R}[X]$ ist kein Körper.

komplexe Zahlen

Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist ein Erweiterungskörper von $\mathbb{R}$, der wie folgt konstruiert wird:

Wir definieren $\mathbb{C}$ als die Menge alle Zahlenpaare $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und mit der folgenden Addtion und Multiplikation.

komplexe Zahlen

Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist ein Erweiterungskörper von $\mathbb{R}$, der wie folgt konstruiert wird:
Wir definieren $\mathbb{C}$ als die Menge alle Zahlenpaare $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und mit der folgenden Addtion und Multiplikation.

- $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

komplexe Zahlen

Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist ein Erweiterungskörper von $\mathbb{R}$, der wie folgt konstruiert wird:
Wir definieren $\mathbb{C}$ als die Menge alle Zahlenpaare $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und mit der folgenden Addtion und Multiplikation.

- $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.
- $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$.

komplexe Zahlen

Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist ein Erweiterungskörper von $\mathbb{R}$, der wie folgt konstruiert wird:
Wir definieren $\mathbb{C}$ als die Menge alle Zahlenpaare $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und mit der folgenden Addtion und Multiplikation.

- $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.
- $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$.

Wir benutzen die folgende Notation:

$0 = (0, 0)$ (das Nullelement).

$1 = (1, 0)$ (das Einselement).

$\mathrm{i} = (0, 1)$.

$(x, y) = x + \mathrm{i} \cdot y$.

komplexe Zahlen

Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist ein Erweiterungskörper von $\mathbb{R}$, der wie folgt konstruiert wird:
Wir definieren $\mathbb{C}$ als die Menge alle Zahlenpaare $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und mit der folgenden Addtion und Multiplikation.

- $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.
- $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$.

Wir benutzen die folgende Notation:

$0 = (0, 0)$ (das Nullelement).

$1 = (1, 0)$ (das Einselement).

$\mathrm{i} = (0, 1)$.

$(x, y) = x + \mathrm{i} \cdot y$.

komplexe Zahlen

Addition und Multiplikation der komplexen Zahlen schreiben sich damit wie folgt

- $(x_1 + \mathrm{i} \cdot y_1) + (x_2 + \mathrm{i} \cdot y_2) = (x_1 + x_2 + \mathrm{i} \cdot (y_1 + y_2)$.

komplexe Zahlen

Addition und Multiplikation der komplexen Zahlen schreiben sich damit wie folgt

- $(x_1 + \mathrm{i} \cdot y_1) + (x_2 + \mathrm{i} \cdot y_2) = (x_1 + x_2 + \mathrm{i} \cdot (y_1 + y_2)$.
- $(x_1 + \mathrm{i} \cdot y_1) \cdot (x_2 + \mathrm{i} \cdot y_2) = x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2 + \mathrm{i} \cdot (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$.

Satz (Der Körper der komplexen Zahlen)

Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ zusammen mit dieser Addition und Multiplikation bilden einen Körper.

komplexe Zahlen

Addition und Multiplikation der komplexen Zahlen schreiben sich damit wie folgt

- $(x_1 + \mathrm{i} \cdot y_1) + (x_2 + \mathrm{i} \cdot y_2) = (x_1 + x_2 + \mathrm{i} \cdot (y_1 + y_2)$.
- $(x_1 + \mathrm{i} \cdot y_1) \cdot (x_2 + \mathrm{i} \cdot y_2) = x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2 + \mathrm{i} \cdot (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$.

Satz (Der Körper der komplexen Zahlen)

Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ zusammen mit dieser Addition und Multiplikation bilden einen Körper.

Das inverse Element $\frac{1}{z}$ zu einer komplexen Zahl $z = x + \mathrm{i} \cdot y \neq 0$ ist gegeben durch

$$\frac{1}{z} = \frac{x - \mathrm{i} \cdot y}{x^2 + y^2}$$

das Nullelement bezüglich der Addition ist $0 = 0 + \mathrm{i} \cdot 0$, das Einselemnet bezüglich der Multiplikation ist $1 = 1 + \mathrm{i} \cdot 0$.

komplexe Zahlen

Addition und Multiplikation der komplexen Zahlen schreiben sich damit wie folgt

- $(x_1 + \mathrm{i} \cdot y_1) + (x_2 + \mathrm{i} \cdot y_2) = (x_1 + x_2 + \mathrm{i} \cdot (y_1 + y_2)$.
- $(x_1 + \mathrm{i} \cdot y_1) \cdot (x_2 + \mathrm{i} \cdot y_2) = x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2 + \mathrm{i} \cdot (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$.

Satz (Der Körper der komplexen Zahlen)

Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ *zusammen mit dieser Addition und Multiplikation bilden einen Körper.*
Das inverse Element $\frac{1}{z}$ *zu einer komplexen Zahl* $z = x + \mathrm{i} \cdot y \neq 0$ *ist gegeben durch*

$$\frac{1}{z} = \frac{x - \mathrm{i} \cdot y}{x^2 + y^2}$$

das Nullelement bezüglich der Addition ist $0 = 0 + \mathrm{i} \cdot 0$, *das Einselemnet bezüglich der Multiplikation ist* $1 = 1 + \mathrm{i} \cdot 0$.

komplexe Zahlen

Bezeichnung

Ist $z = x + \mathrm{i} \cdot y$ eine komplexe Zahl, so heißt x der **Realteil** von z und wird mit $\mathrm{Re}(z)$ bezeichnet und y der **Imaginärteil** von z und wird mit $\mathrm{Im}(z)$ bezeichnet.

Die Zahl $\overline{z} = x - \mathrm{i} \cdot y$ heißt die zu z komplex konjugierte Zahl, und

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

heißt der Betrag von z.

komplexe Zahlen

Bezeichnung

Ist $z = x + \mathrm{i} \cdot y$ eine komplexe Zahl, so heißt x der **Realteil** von z und wird mit $\mathrm{Re}(z)$ bezeichnet und y der **Imaginärteil** von z und wird mit $\mathrm{Im}(z)$ bezeichnet.
Die Zahl $\overline{z} = x - \mathrm{i} \cdot y$ heißt die zu z komplex konjugierte Zahl, und

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

heißt der Betrag von z.

Beispiel

- $\mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = -1.$

komplexe Zahlen

Bezeichnung

Ist $z = x + \mathrm{i} \cdot y$ eine komplexe Zahl, so heißt x der **Realteil** von z und wird mit $\mathrm{Re}(z)$ bezeichnet und y der **Imaginärteil** von z und wird mit $\mathrm{Im}(z)$ bezeichnet.
Die Zahl $\overline{z} = x - \mathrm{i} \cdot y$ heißt die zu z komplex konjugierte Zahl, und

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

heißt der Betrag von z.

Beispiel

- $\mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = -1$.
- $(2 + 3 \cdot \mathrm{i}) \cdot (1 - \mathrm{i}) = 5 + \mathrm{i}$.

komplexe Zahlen

Bezeichnung

Ist $z = x + \mathrm{i} \cdot y$ eine komplexe Zahl, so heißt x der **Realteil** von z und wird mit $\mathrm{Re}(z)$ bezeichnet und y der **Imaginärteil** von z und wird mit $\mathrm{Im}(z)$ bezeichnet.
Die Zahl $\overline{z} = x - \mathrm{i} \cdot y$ heißt die zu z komplex konjugierte Zahl, und

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

heißt der Betrag von z.

Beispiel

- $\mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = -1$.
- $(2 + 3 \cdot \mathrm{i}) \cdot (1 - \mathrm{i}) = 5 + \mathrm{i}$.
- $\frac{1}{2+\mathrm{i}} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5} \cdot \mathrm{i}$.

komplexe Zahlen

Bezeichnung

Ist $z = x + \mathrm{i} \cdot y$ eine komplexe Zahl, so heißt x der **Realteil** von z und wird mit $\mathrm{Re}(z)$ bezeichnet und y der **Imaginärteil** von z und wird mit $\mathrm{Im}(z)$ bezeichnet.
Die Zahl $\overline{z} = x - \mathrm{i} \cdot y$ heißt die zu z komplex konjugierte Zahl, und

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

heißt der Betrag von z.

Beispiel

- $\mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = -1$.
- $(2 + 3 \cdot \mathrm{i}) \cdot (1 - \mathrm{i}) = 5 + \mathrm{i}$.
- $\frac{1}{2+\mathrm{i}} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5} \cdot \mathrm{i}$.
- $\frac{1+\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} = \frac{3}{5} + \frac{1}{5} \cdot \mathrm{i}$.

komplexe Zahlen

Bezeichnung

Ist $z = x + \mathrm{i} \cdot y$ eine komplexe Zahl, so heißt x der **Realteil** von z und wird mit $\mathrm{Re}(z)$ bezeichnet und y der **Imaginärteil** von z und wird mit $\mathrm{Im}(z)$ bezeichnet.
Die Zahl $\overline{z} = x - \mathrm{i} \cdot y$ heißt die zu z komplex konjugierte Zahl, und

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

heißt der Betrag von z.

Beispiel

- $\mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = -1$.
- $(2 + 3 \cdot \mathrm{i}) \cdot (1 - \mathrm{i}) = 5 + \mathrm{i}$.
- $\frac{1}{2+\mathrm{i}} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5} \cdot \mathrm{i}$.
- $\frac{1+\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} = \frac{3}{5} + \frac{1}{5} \cdot \mathrm{i}$.

komplexe Zahlen

Übung

Berechnen Sie

$$z = \frac{2 + 3 \cdot \mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}}$$

komplexe Zahlen

Übung

Berechnen Sie

$$z = \frac{2 + 3 \cdot \mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}}$$

Lösung:

$$z = \frac{-1 + 5 \cdot \mathrm{i}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \cdot \mathrm{i}$$

komplexe Zahlen

Übung

Berechnen Sie

$$z = \frac{2 + 3 \cdot \mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}}$$

Lösung:

$$z = \frac{-1 + 5 \cdot \mathrm{i}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \cdot \mathrm{i}$$

komplexe Zahlen

Es gilt $\mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = -1$, und damit für jede positive reelle Zahl r:

$$(\mathrm{i} \cdot \sqrt{r})^2 = \mathrm{i}^2 \cdot \sqrt{r}^2 = -1$$

dh.in den komplexen Zahlen hat jede reelle Zahl eine Quadratwurzel. Es gilt sogar noch mehr:

Satz (Fundamentalsatz der Algebra)

Der Körper $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen, dh. jede Gleichung

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

vom Grad $n \geq 1$ mit $a_l \in \mathbb{C}$ hat eine Lösung, dh. es gibt ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit

$$a_n \cdot z_0^n + a_{n-1}z_0^{n-1} + \cdots + a_1 z_0 + a_0 = 0$$

komplexe Zahlen

Es gilt $\mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = -1$, und damit für jede positive reelle Zahl r:

$$(\mathrm{i} \cdot \sqrt{r})^2 = \mathrm{i}^2 \cdot \sqrt{r}^2 = -1$$

dh.in den komplexen Zahlen hat jede reelle Zahl eine Quadratwurzel. Es gilt sogar noch mehr:

Satz (Fundamentalsatz der Algebra)

Der Körper $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen, dh. jede Gleichung

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

vom Grad $n \geq 1$ mit $a_l \in \mathbb{C}$ hat eine Lösung, dh. es gibt ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit

$$a_n \cdot z_0^n + a_{n-1}z_0^{n-1} + \cdots + a_1 z_0 + a_0 = 0$$

komplexe Zahlen

Beispiel

Es ist

$$\sqrt{-16} = 4 \cdot \mathrm{i}$$

und daher hat die Gleichung

$$x^2 + 2x + 5 = 0$$

die beiden Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4 \cdot \mathrm{i}}{2}$$

komplexe Zahlen

Beispiel

Es ist

$$\sqrt{-16} = 4 \cdot \mathrm{i}$$

und daher hat die Gleichung

$$x^2 + 2x + 5 = 0$$

die beiden Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4 \cdot \mathrm{i}}{2}$$

also

$$x_1 = -1 + 2 \cdot \mathrm{i}, \qquad x_2 = -1 - 2 \cdot \mathrm{i}$$

komplexe Zahlen

Beispiel

Es ist

$$\sqrt{-16} = 4 \cdot \mathrm{i}$$

und daher hat die Gleichung

$$x^2 + 2x + 5 = 0$$

die beiden Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4 \cdot \mathrm{i}}{2}$$

also

$$x_1 = -1 + 2 \cdot \mathrm{i}, \qquad x_2 = -1 - 2 \cdot \mathrm{i}$$

komplexe Zahlen

Übung

Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung

$$2x^2 - 8x + 10 = 0$$

komplexe Zahlen

Übung

Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung

$$2x^2 - 8x + 10 = 0$$

Lösung:

$x_1 = 2 + \mathrm{i}, \qquad x_2 = 2 - \mathrm{i}.$

komplexe Zahlen

Übung

Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung

$$2x^2 - 8x + 10 = 0$$

Lösung:

$x_1 = 2 + \mathrm{i}, \quad x_2 = 2 - \mathrm{i}.$