1. (6 Punkte) Zeige durch vollständige Induktion

Sei $A = \begin{pmatrix}1&0&a\\0&1&b\\0&0&1\end{pmatrix}$ dann ist $A^n = \begin{pmatrix}1&0&n\cdot a\\0&1&n\cdot b\\0&0&1\end{pmatrix}$

IA: für $n=1$: $A^1 = \begin{pmatrix}1&0&1\cdot a\\0&1&1\cdot b\\0&0&1\end{pmatrix} = A$ ✓

IS: $n \to n+1$ $\quad A^{n+1} = A^n + A^1 = A^n + A$

$$\begin{pmatrix}1&0&n\cdot a\\0&1&n\cdot b\\0&0&1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1&0&a\\0&1&b\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot1+0\cdot0+n\cdot a\cdot0 & 1\cdot0+0\cdot1+n\cdot a\cdot0 & 1\cdot a+0\cdot b+n\cdot a\cdot1\\ 0\cdot1+1\cdot0+n\cdot b\cdot0 & 0\cdot0+1\cdot1+n\cdot b\cdot0 & 0a+1\cdot b+n\cdot b\cdot1\\ 0\cdot1+0\cdot0+1\cdot0 & 0\cdot0+0\cdot1+1\cdot0 & 0\cdot a+0b+1\cdot1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1&0&a+n\cdot a\\0&1&b+n\cdot b\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&a\cdot(n+1)\\0&1&b\cdot(n+1)\\0&0&1\end{pmatrix}$$ ← durch Einsatz von IA wahr

□

2. (6 Punkte) Modulorechnung

(a) Bestimme im Körper $\mathbb{F}_{31}$ das multiplikative Inverse zu 29.

(b) Berechne $11^{33} \quad mod(17)$

a) $31 = 29\cdot1+2 \qquad 2 = 31-29\cdot1 \qquad = 29-(31-29\cdot1)\cdot14 = \underline{15}\cdot29 - 14\cdot31$

$29 = 2\cdot14+1 \qquad 1 = 29-2\cdot14 \qquad 1 = 29-2\cdot14$ $\qquad$ mod 31 ⇒ Inverse zu 29 in $\mathbb{F}_{31}$ ist 15

b) $11^{33} \equiv 11^{32}\cdot11^1 \pmod{17} \quad \Rightarrow \quad 1\cdot11 \equiv \underline{\underline{11}} \pmod{17}$

$11^2 \equiv 121 \equiv 2 \pmod{17}$

$11^4 \equiv 2^2 \equiv 4 \pmod{17}$

$11^8 \equiv 4^2 \equiv 16 \pmod{17}$

$11^{16} \equiv 16^2 \equiv 256 \equiv 1 \pmod{17}$

$11^{32} \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod{17}$

3. (4 Punkte) Eine falsche Antwort gibt einen Minuspunkt eine richtige einen Pluspunkt unbeantwortete Fragen keinen Punkt. Man kann in Summe keine negativen Punkte bekommen. Eine Begründung ist nicht nötig.

   (a) Ein Vektoraum ist immer eine abelsche Gruppe. ☒ Wahr ☐ Falsch

   (b) Welche Gleichung stimmt ?

   ○ $det(A+B) = det(A) + det(B)$

   ○ $det(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot det(A)$

   ☒ $det(A \cdot B \cdot C) = det(A) \cdot det(B) \cdot det(C)$

   (c) Wieviele Untervektorräume hat der $\mathbb{R}^2$?

   ○ nur $\{\vec{0}\}$ und $\mathbb{R}^2$

   ○ nur $\{\vec{0}\}, \mathbb{R}^2, 0 \times \mathbb{R}$ und $\mathbb{R} \times 0$

   ☒ unendlich viele

   (d) Wenn im Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ eine Spalte der Matrix A gleich $\vec{b}$ ist, hat das LGS immer eine Lösung. ☒ Wahr ☐ Falsch

4. (6 Punkte) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des Untervektorraums U des $\mathbb{R}^3$

$$U = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | x + y + z = 0\}$$

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$y=-1$, $z=0$ $\qquad$ $y=0$, $z=-1$

$$\vec{b_1} = \frac{\vec{v_1}}{\|\vec{v_1}\|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b_2'} = \vec{v_2} - \langle \vec{v_2}, \vec{b_1} \rangle \cdot \vec{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - (1 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 1 + 0 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot (-1) + (-1) \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 0)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b_2} = \frac{\vec{b_2'}}{\|\vec{b_2'}\|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle$$

5. (9 Punkte) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2 \\ -3 \\ -4 \end{array} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -2 \\ -3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\mathrm{I}: x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4$

$\mathrm{II}: x_2 + 2x_3 = 3$

x_3 frei

für spezielle Lsg. $x_3 = 0$

$\vec{x}_s = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 3$

$\Rightarrow x_1 = 4 - 2 \cdot 3 - 3 \cdot 0$

$= -2$

für $x_3 = 1$ (Kern) $+ = 0$

$\mathrm{I}: x_1 + 2x_2 + 3 \cdot 1 = 0$

$\mathrm{II}: x_2 + 2 \cdot 1 = 0$

$\hookrightarrow x_3 = 1$

$\Rightarrow x_2 = -2$

$x_1 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 = 0$

$\hookrightarrow x_1 = 1$

$\hookrightarrow \vec{x}_k = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6. (10 Punkte) Gegeben sei der Vektorraum $V = \mathbb{R}^{3x3}$ aller $3x3$-Matrizen über $\mathbb{R}$ und die lineare Abbildung $f : V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ durch die Gleichung

für $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ ist $f(A) = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{22} + a_{33} \\ a_{12} + a_{23} + a_{31} \\ a_{13} + a_{21} + a_{32} \end{pmatrix} \begin{array}{l} = 0 \\ = 0 \\ = 0 \end{array}$

(homogenes GS → Kern)

Bestimme eine Basis von $ker(f)$ mit dem Hinweis , daß $Im(f) = \mathbb{R}^3$

Anzahl der Basis Elemente des Kerns

$\dim(\mathbb{R}^{3x3}) = 9$, $\mathrm{rang}(f) = 3 \Rightarrow \mathrm{nul}(f) = 9 - 3 = \underline{\underline{6}}$

jeweils eine Zeile von $f = 0$

1. Zeile

$b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $b_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\sum = 0$

2. Zeile

$b_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $b_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. Zeile

$b_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $b_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

7. (9 Punkte) Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -10 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A-\lambda\cdot I_3) = \begin{pmatrix} 0-\lambda & 1 & -10 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -2\cdot\begin{vmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} + (1-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 0-\lambda & -10 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -2\cdot(1\cdot(1-\lambda) - \cancel{0\cdot(-10)}) + (1-\lambda)\cdot(((0-\lambda)\cdot(1-\lambda) - ((-10)(-1))))$$

$$(-2+2\lambda) + ((1-\lambda)\cdot(-\lambda+\lambda^2-10))$$

$$(1-\lambda)\cdot(\lambda^2-\lambda-12)$$

$\lambda_2 = 1$

$$\lambda_{2/3} = \frac{1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-12)}}{2\cdot 1} = \frac{1\pm 7}{2} \Rightarrow \lambda_3 = 4,\quad \lambda_1 = -3$$

$\lambda_1 = -3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} +3 & 1 & -10 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} +3 \\ \cdot 2 \\ \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \cdot(-4) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

III: $-x_1 + 4x_3 = 0$

II: $x_2 + 2x_3 = 0$

x_3 frei: $x_3 = 1$

$x_3 = 1 \Rightarrow x_2$ (wg. II) $= 2$

$\Rightarrow x_1$ wg. III $\Rightarrow 4$

$$\vec{e}_{-3} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -10 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \cdot 1 \\ +2 \\ \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

I: $-x_1 = 0$

II: $x_2 - 10x_3 = 0$

x_3 frei $\Rightarrow x_3 = 1$

↳ wg. $x_3 = 1$ in II

↳ $x_2 = 10$

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_3 = 4$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 1 & -10 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} -4 \\ +2 \\ \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) +3 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & +3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

x_3 frei: $x_3 = 1$

$$\vec{e}_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

↳ $x_1 + 3x_3 = 0$

$x_2 + 2x_3 = 0$