Spickzettel: 1

Vollständige Induktion:

Bsp.: $5^n + 7 \equiv 0 \mod 4$

Ind.anfang:

Zeigen für Anfangswert (i.d.R. $n=0$ / $n=1$)

$$5^0 + 7 \overset{!}{\equiv} 0 \mod 4$$

$$8 \equiv 0 \mod 4 \quad \text{q.e.d.}$$

Ind.schritt:

Annehmen, dass zu zeigendes bereits gilt für n, beliebig aber fest gewählt $\in \mathbb{N}$.

$$5^n + 7 \equiv 0 \mod 4$$

Dann gilt es auch für $n+1$.

Beweisen:

$$5^{n+1} + 7 \equiv 0 \mod 4$$

$$5(5^n) + 7 \equiv 0 \mod 4$$

$$\underbrace{4 \cdot 5^n}_{\equiv 0} + \underbrace{5^n + 7}_{\equiv 0} \equiv 0 \mod 4$$

$$0 + 0 \equiv 0 \mod 4 \quad \text{q.e.d.}$$

Modulorechnung:

Bsp. 1: $\frac{1}{17}$ in $\mathbb{F}_{71}$

Euklidischer Algorithmus:

Mit Rest teilen bis Rest = 0

$71 = 4 \cdot 17 + 3 \qquad 3 = 71 - 4 \cdot 17$

$17 = 5 \cdot 3 + 2 \qquad 2 = 17 - 5 \cdot 3$

$3 = 1 \cdot 2 + 1 \qquad 1 = 3 - 1 \cdot 2$

$2 = 2 \cdot 1 + 0$

Nach Rest umstellen ↗

Einsetzen

$$1 = 3 - 1 \cdot (17 - 5 \cdot 3)$$
$$= 6 \cdot 3 - 17$$
$$1 = 6 \cdot (71 - 4 \cdot 17) - 17$$
$$= \underbrace{6 \cdot 71}_{\equiv 0 \bmod 71} - 25 \cdot 17$$
$$1 = -25 \cdot 17 \mod 71$$
$$\frac{1}{17} = -25 \equiv \underline{\underline{46}} \mod 71$$

Bsp. 2: $21^{35} \mod 43$

Zweierpotenzen bilden

$$21^2 \equiv 11 \mod 43$$
$$21^4 \equiv 11^2 \equiv -8 \mod 43$$
$$21^8 \equiv (-8)^2 \equiv 21 \mod 43$$
$$21^{16} \equiv 21^2 \equiv 11 \mod 43$$
$$21^{32} \equiv 11^2 \equiv -8 \mod 43$$

Einsetzen

$$21^{32+2+1} \equiv -8 \cdot 11 \cdot 21$$
$$\equiv -2 \cdot 21$$
$$\underline{\underline{21^{35} \equiv 1 \mod 43}}$$

Spickzettel: 2

Basen von Untervektorräumen

Bsp. 1: $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, 3x - 2y + z = 0 \right\}$

Zwei Parameter fest wählen -> dritten bestimmen

1. einer = 1, einer = 0

   $x = 0, \; y = 1 \rightarrow z = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. genau umgekehrt -> orthogonal

   $x = 1, \; y = 0 \rightarrow z = -3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

3. aus beiden Vektoren Basis aufstellen

   $U = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle$

Bsp. 2: $U = \left\{ \begin{pmatrix} 2r + s \\ r - s \\ r + 2s \end{pmatrix} \middle| \, r, s \in \mathbb{R} \right\}$

Parameter fest wählen -> Vektor bestimmen

1. einer = 1, einer = 0

   $r = 0, \; s = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. genau umgekehrt -> orthogonal

   $r = 1, \; s = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. aus beiden Vektoren Basis aufstellen

   $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Orthonormalbasen

Gram-Schmidt-Verfahren:

$$\text{Basis}(V) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3} \rightarrow \langle \vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3} \rangle = ONB(V)$$

$$\vec{w_1} = \frac{\vec{b_1}}{\|b_1\|}$$

$$\vec{w_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{w_2} = \vec{b_2} - \langle \vec{b_2}, \vec{w_1} \rangle \cdot \vec{w_1}$$

$$\tilde{w_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}(-2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{w_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w_2} = \frac{\tilde{w_2}}{\|\tilde{w_2}\|} \qquad \vec{w_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{w_3} = \vec{b_3} - \langle \vec{b_3}, \vec{w_1} \rangle \cdot \vec{w_1} - \langle \vec{b_3}, \vec{w_2} \rangle \cdot \vec{w_2}$$

$$\tilde{w_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}(-1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}(19) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{w_3} = \frac{17}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w_3} = \frac{\tilde{w_3}}{\|\tilde{w_3}\|} \qquad \vec{w_3} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$ONB = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Spickzettel: 3

Kern einer Linearen Abbildung

A sei die darstellende Matrix $\Rightarrow f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$

$$Ker(f) = \{ \vec{x} \mid A \cdot \vec{x} = \vec{0} \}$$

$Ker(f) = \{ \vec{0} \}$ ist trivial.

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Gauß-Verfahren auf homogenes LGS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x_3 = \text{frei}$ ~~$x_3 = t \rightarrow x_2 = -2t, x_1 = t$~~

$\Rightarrow x_3 = 1 \rightarrow x_2 = -2, x_1 = 1$

$$Ker(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Basis von $\mathbb{R}^n = \{ \vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n} \}$

Dann ist $A = \left(\underbrace{f(\vec{e_1})}_{\text{1. Spalte}}, f(\vec{e_2}), \ldots, \underbrace{f(\vec{e_n})}_{\text{n-te Spalte}} \right)$

Eigenwerte & -vektoren

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} -2 & -7 & 2 \\ 4 & 5 & -4 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

charakteristisches Polynom $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_3)$

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -7 & 2 \\ 4 & 5-\lambda & -4 \\ 3 & 3 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-2-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & -4 \\ 3 & -3-\lambda \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -3-\lambda \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & 5-\lambda \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda^3 + 9\lambda$$

$$\chi_A(\lambda) = \lambda(-\lambda^2 + 9) = \lambda(\lambda - 3)(\lambda + 3)$$

$$\rightarrow \lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = +3, \ \lambda_3 = -3$$

Für alle Eigenwerte das LGS

$(A - \lambda_n \cdot E_3) \cdot \vec{x} = \vec{0}$ lösen.

$\lambda_2 = 3$:

$$\begin{pmatrix} -5 & -7 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad x_3 = \text{frei}$$

Freie Variabel ~~x~~ $= 1$ setzen -> Vektor bestimmen

$x_3 = 1 \rightarrow x_2 = 2, \ x_1 = 0$

$$\Rightarrow E(3) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$