Lineare Algebra
lineare Gleichungssysteme

Reinhold Hübl

Wintersemester 2020/21

Duale Hochschule Baden-Württemberg Mannheim

Beispiel

Beispiel

Ein Vater und sein Sohn sind zusammen 46 Jahre alt. In drei Jahren ist der Vater dreimal so alt wie sein Sohn.

Wie lässt sich dieses Problem zunächst mal mathematisch sauber formulieren?

Beispiel

Beispiel

Ein Vater und sein Sohn sind zusammen 46 Jahre alt. In drei Jahren ist der Vater dreimal so alt wie sein Sohn.
Wie lässt sich dieses Problem zunächst mal mathematisch sauber formulieren?
Bezeichne mit x das aktuelle Alter des Vaters (in Jahren), und mit y das des Sohns.

Beispiel

Beispiel

Ein Vater und sein Sohn sind zusammen 46 Jahre alt. In drei Jahren ist der Vater dreimal so alt wie sein Sohn.

Wie lässt sich dieses Problem zunächst mal mathematisch sauber formulieren?

Bezeichne mit x das aktuelle Alter des Vaters (in Jahren), und mit y das des Sohns.

Die Angaben besagen dann:

$$x + y = 46$$

und

$$x + 3 = 3 \cdot (y + 3)$$

Beispiel

Beispiel

Ein Vater und sein Sohn sind zusammen 46 Jahre alt. In drei Jahren ist der Vater dreimal so alt wie sein Sohn.

Wie lässt sich dieses Problem zunächst mal mathematisch sauber formulieren?

Bezeichne mit x das aktuelle Alter des Vaters (in Jahren), und mit y das des Sohns.

Die Angaben besagen dann:

$$x + y = 46$$

und

$$x + 3 = 3 \cdot (y + 3)$$

Beispiel

Beispiel

Die Angaben lassen sich dann so zusammenfassen:

$$\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 46 \\ x & - & 3y & = & 6 \end{array} \tag{1}$$

Wir erhalten also ein Gleichungssystem in x und y, und zwar ein lineares Gleichungssystem, denn es kommen keine Produkte, Potenzen oder sonstige komplexe Ausdrücke in x und y vor.

Beispiel

Beispiel

Die Angaben lassen sich dann so zusammenfassen:

$$\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 46 \\ x & - & 3y & = & 6 \end{array} \tag{1}$$

Wir erhalten also ein Gleichungssystem in x und y, und zwar ein lineares Gleichungssystem, denn es kommen keine Produkte, Potenzen oder sonstige komplexe Ausdrücke in x und y vor.

Ziel ist es nun, Methoden zur Lösung solcher linearer Gleichungssysteme zu entwickeln.

Beispiel

Beispiel

Die Angaben lassen sich dann so zusammenfassen:

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 46 \\ x & - & 3y & = & 6 \end{array} \tag{1}$$

Wir erhalten also ein Gleichungssystem in x und y, und zwar ein lineares Gleichungssystem, denn es kommen keine Produkte, Potenzen oder sonstige komplexe Ausdrücke in x und y vor.
Ziel ist es nun, Methoden zur Lösung solcher linearer Gleichungssysteme zu entwickeln.

lineare Gleichungssysteme

Ein **lineares Gleichungssystem**, bestehend aus m Gleichungen mit n Unbekannten ist ein System von Gleichungen der Form:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}\cdot x_1 & + & a_{1,2}\cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}\cdot x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}\cdot x_1 & + & a_{2,2}\cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}\cdot x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & \ddots & & & \vdots & \\ a_{m,1}\cdot x_1 & + & a_{m,2}\cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{m,n}\cdot x_n & = & b_m \end{array} \tag{2}$$

mit Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$ und festen Zahlen $a_{i,j}$, den **Koeffizienten des Gleichungssystems**.

Das Gleichungssystem heißt **homogen**, wenn $b_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, m$.

lineare Gleichungssysteme

Ein **lineares Gleichungssystem**, bestehend aus m Gleichungen mit n Unbekannten ist ein System von Gleichungen der Form:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}\cdot x_1 & + & a_{1,2}\cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}\cdot x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}\cdot x_1 & + & a_{2,2}\cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}\cdot x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & \ddots & & & \vdots & \\ a_{m,1}\cdot x_1 & + & a_{m,2}\cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{m,n}\cdot x_n & = & b_m \end{array} \tag{2}$$

mit Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$ und festen Zahlen $a_{i,j}$, den **Koeffizienten des Gleichungssystems**.

Das Gleichungssystem heißt **homogen**, wenn $b_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, m$.

In der Regel arbeiten wir mit reellen Koeffizienten $a_{i,j}$, diese können aber aus jedem beliebigen Körper sein.

lineare Gleichungssysteme

Ein **lineares Gleichungssystem**, bestehend aus m Gleichungen mit n Unbekannten ist ein System von Gleichungen der Form:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1} \cdot x_1 & + & a_{1,2} \cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n} \cdot x_n & = & b_1 \\ a_{2,1} \cdot x_1 & + & a_{2,2} \cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n} \cdot x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & \ddots & & & \vdots & \\ a_{m,1} \cdot x_1 & + & a_{m,2} \cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{m,n} \cdot x_n & = & b_m \end{array} \tag{2}$$

mit Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$ und festen Zahlen $a_{i,j}$, den **Koeffizienten des Gleichungssystems**.

Das Gleichungssystem heißt **homogen**, wenn $b_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, m$.

In der Regel arbeiten wir mit reellen Koeffizienten $a_{i,j}$, diese können aber aus jedem beliebigen Körper sein.

lineare Gleichungssysteme

Beispiel

Lineare Gelichungssysteme entstehen auch, wenn wir Vektoren auf lineare Unabhängigkeit untersuchen. Wenn wir bestimmen wollen, ob die Vektoren

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind, müssen wir untersuchen, ob es Zahlen r, s und t gibt, die nicht alle verschwinden, sodass

$$r \cdot \overrightarrow{v_1} + s \cdot \overrightarrow{v_2} + t \cdot \overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{0}$$

lineare Gleichungssysteme

Beispiel

Lineare Gelichungssysteme entstehen auch, wenn wir Vektoren auf lineare Unabhängigkeit untersuchen. Wenn wir bestimmen wollen, ob die Vektoren

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind, müssen wir untersuchen, ob es Zahlen r, s und t gibt, die nicht alle verschwinden, sodass

$$r \cdot \overrightarrow{v_1} + s \cdot \overrightarrow{v_2} + t \cdot \overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{0}$$

lineare Gleichungssysteme

Beispiel

Fassen wir die rechte Seite zusammen, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} r+s \\ r+t \\ s+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und dazu müssen wir folgendes Gleichungssystem betrachten:

$$\begin{array}{ccccccc} r & + & s & & & = & 0 \\ r & & & + & t & = & 0 \\ & & s & + & t & = & 0 \end{array} \tag{3}$$

lineare Gleichungssysteme

Beispiel

Fassen wir die rechte Seite zusammen, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} r+s \\ r+t \\ s+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und dazu müssen wir folgendes Gleichungssystem betrachten:

$$\begin{array}{ccccccc} r & + & s & & & = & 0 \\ r & & & + & t & = & 0 \\ & & s & + & t & = & 0 \end{array} \tag{3}$$

Gibt es r, s und t, die diese Gleichungen erfüllen und von denen mindestens ein Wert von Null verschieden ist, so sind $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ und $\overrightarrow{v_3}$ linear abhängig.

lineare Gleichungssysteme

Beispiel

Fassen wir die rechte Seite zusammen, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} r+s \\ r+t \\ s+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und dazu müssen wir folgendes Gleichungssystem betrachten:

$$\begin{array}{ccccccc} r & + & s & & & = & 0 \\ r & & & + & t & = & 0 \\ & & s & + & t & = & 0 \end{array} \tag{3}$$

Gibt es r, s und t, die diese Gleichungen erfüllen und von denen mindestens ein Wert von Null verschieden ist, so sind $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ und $\overrightarrow{v_3}$ linear abhängig.

lineare Gleichungssysteme

Eine Lösung des Gleichungssystems (2) besteht aus Zahlen $r_1, \dots, r_n$, sodass alle Gleichungen von (2) erfüllt sind, wenn wir $x_1, = r_1, \dots, x_n = r_n$ einsetzen.

Beispiel

Die Zahlen $x = 36$ und $y = 10$ bilden eine Lösung des linearen Gleichungssystems (1).

lineare Gleichungssysteme

Eine Lösung des Gleichungssystems (2) besteht aus Zahlen $r_1, \ldots, r_n$, sodass alle Gleichungen von (2) erfüllt sind, wenn wir $x_1, = r_1, \ldots, x_n = r_n$ einsetzen.

Beispiel

Die Zahlen $x = 36$ und $y = 10$ bilden eine Lösung des linearen Gleichungssystems (1).

Frage

- Hat jedes Gleichungssystem eine Lösung?

lineare Gleichungssysteme

Eine Lösung des Gleichungssystems (2) besteht aus Zahlen $r_1, \dots, r_n$, sodass alle Gleichungen von (2) erfüllt sind, wenn wir $x_1, = r_1, \dots, x_n = r_n$ einsetzen.

Beispiel

Die Zahlen $x = 36$ und $y = 10$ bilden eine Lösung des linearen Gleichungssystems (1).

Frage

- Hat jedes Gleichungssystem eine Lösung?
- Wie viele Lösungen hat ein Gleichugnssystem?

lineare Gleichungssysteme

Eine Lösung des Gleichungssystems (2) besteht aus Zahlen $r_1, \ldots, r_n$, sodass alle Gleichungen von (2) erfüllt sind, wenn wir $x_1, = r_1, \ldots, x_n = r_n$ einsetzen.

Beispiel

Die Zahlen $x = 36$ und $y = 10$ bilden eine Lösung des linearen Gleichungssystems (1).

Frage

- Hat jedes Gleichungssystem eine Lösung?
- Wie viele Lösungen hat ein Gleichugnssystem?
- Wie können die Lösungen eines Gleichungssystems bestimmt werden?

lineare Gleichungssysteme

Eine Lösung des Gleichungssystems (2) besteht aus Zahlen $r_1, \ldots, r_n$, sodass alle Gleichungen von (2) erfüllt sind, wenn wir $x_1, = r_1, \ldots, x_n = r_n$ einsetzen.

Beispiel

Die Zahlen $x = 36$ und $y = 10$ bilden eine Lösung des linearen Gleichungssystems (1).

Frage

- Hat jedes Gleichungssystem eine Lösung?
- Wie viele Lösungen hat ein Gleichugnssystem?
- Wie können die Lösungen eines Gleichungssystems bestimmt werden?

lineare Gleichungssysteme

Elementarer Ansatz zur Lösbarkeit und zum Finden von Lösungen:

- Löse die erste Gleichung nach einer der darin vorkommenden Variable auf und ersetze in allen anderen Gleichungen diese Variable durch diesen Ausdruck.

lineare Gleichungssysteme

Elementarer Ansatz zur Lösbarkeit und zum Finden von Lösungen:

- Löse die erste Gleichung nach einer der darin vorkommenden Variable auf und ersetze in allen anderen Gleichungen diese Variable durch diesen Ausdruck.
- Löse die (neue) zweite Gleichung einer der darin vorkommenden Variable auf und ersetze in allen folgenden Gleichungen diese Variable durch diesen Ausdruck.

lineare Gleichungssysteme

Elementarer Ansatz zur Lösbarkeit und zum Finden von Lösungen:

- Löse die erste Gleichung nach einer der darin vorkommenden Variable auf und ersetze in allen anderen Gleichungen diese Variable durch diesen Ausdruck.
- Löse die (neue) zweite Gleichung einer der darin vorkommenden Variable auf und ersetze in allen folgenden Gleichungen diese Variable durch diesen Ausdruck.
- Fahre fort bis alle Gleichungen abgearbeitet wurden.

lineare Gleichungssysteme

Elementarer Ansatz zur Lösbarkeit und zum Finden von Lösungen:

- Löse die erste Gleichung nach einer der darin vorkommenden Variable auf und ersetze in allen anderen Gleichungen diese Variable durch diesen Ausdruck.
- Löse die (neue) zweite Gleichung einer der darin vorkommenden Variable auf und ersetze in allen folgenden Gleichungen diese Variable durch diesen Ausdruck.
- Fahre fort bis alle Gleichungen abgearbeitet wurden.

Das entstehende Gleichungssystem hat die gleichen Lösungen wie das Ausgangsdaten und ist im Idealfall sehr viel einfacher zu behandeln als das Ausgangs

lineare Gleichungssysteme

Elementarer Ansatz zur Lösbarkeit und zum Finden von Lösungen:

- Löse die erste Gleichung nach einer der darin vorkommenden Variable auf und ersetze in allen anderen Gleichungen diese Variable durch diesen Ausdruck.
- Löse die (neue) zweite Gleichung einer der darin vorkommenden Variable auf und ersetze in allen folgenden Gleichungen diese Variable durch diesen Ausdruck.
- Fahre fort bis alle Gleichungen abgearbeitet wurden.

Das entstehende Gleichungssystem hat die gleichen Lösungen wie das Ausgangsdaten und ist im Idealfall sehr viel einfacher zu behandeln als das Ausgangs

lineare Gleichungssysteme

Beispiel

Wir betrachten Gleichungssystem (1), also

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 46 \\ x & - & 3y & = & 6 \end{array}$$

Aus der ersten Zeile erhalten wir

$$x = 46 - y$$

lineare Gleichungssysteme

Beispiel

Wir betrachten Gleichungssystem (1), also

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 46 \\ x & - & 3y & = & 6 \end{array}$$

Aus der ersten Zeile erhalten wir

$$x = 46 - y$$

Setzen wir das in das Gleichungssystem ein, so erhalten wir

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 46 \\ (46 - y) & - & 3y & = & 6 \end{array}$$

lineare Gleichungssysteme

Beispiel

Wir betrachten Gleichungssystem (1), also

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 46 \\ x & - & 3y & = & 6 \end{array}$$

Aus der ersten Zeile erhalten wir

$$x = 46 - y$$

Setzen wir das in das Gleichungssystem ein, so erhalten wir

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 46 \\ (46 - y) & - & 3y & = & 6 \end{array}$$

lineare Gleichungssysteme

Beispiel

Fassen wir die letzte Gleichung noch zusammen, so ergibt das

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 46 \\ & - & 4y & = & -40 \end{array}$$

Damit enthält die letzte Gleichung nur noch die Unbekannte y und kann sofort nach y aufgelöst werden:

$$y = 10$$

lineare Gleichungssysteme

Beispiel

Fassen wir die letzte Gleichung noch zusammen, so ergibt das

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 46 \\ & - & 4y & = & -40 \end{array}$$

Damit enthält die letzte Gleichung nur noch die Unbekannte y und kann sofort nach y aufgelöst werden:

$$y = 10$$

Setzen wir das dann in die erste Gleichung ein, so wird diese zu

$$x + 10 = 46$$

woraus wir $x = 36$ ablesen.

lineare Gleichungssysteme

Beispiel

Fassen wir die letzte Gleichung noch zusammen, so ergibt das

$$\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 46 \\ & - & 4y & = & -40 \end{array}$$

Damit enthält die letzte Gleichung nur noch die Unbekannte y und kann sofort nach y aufgelöst werden:

$$y = 10$$

Setzen wir das dann in die erste Gleichung ein, so wird diese zu

$$x + 10 = 46$$

woraus wir $x = 36$ ablesen. Der Vater ist also aktuell 36 Jahre alt, der Sohn 10.

lineare Gleichungssysteme

Beispiel

Fassen wir die letzte Gleichung noch zusammen, so ergibt das

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 46 \\ & - & 4y & = & -40 \end{array}$$

Damit enthält die letzte Gleichung nur noch die Unbekannte y und kann sofort nach y aufgelöst werden:

$$y = 10$$

Setzen wir das dann in die erste Gleichung ein, so wird diese zu

$$x + 10 = 46$$

woraus wir $x = 36$ ablesen. Der Vater ist also aktuell 36 Jahre alt, der Sohn 10.

lineare Gleichungssysteme

Übung

Finden Sie die Lösungen von Gleichungssystem (3):

$$\begin{array}{ccccccc} r & + & s & & & = & 0 \\ r & & & + & t & = & 0 \\ & & s & + & t & = & 0 \end{array}$$

lineare Gleichungssysteme

Übung

Finden Sie die Lösungen von Gleichungssystem (3):

$$\begin{array}{ccccccc} r & + & s & & & = & 0 \\ r & & & + & t & = & 0 \\ & & s & + & t & = & 0 \end{array}$$

Lösung:

Das Gleichungssystem hat die einzige Lösung

$$r = s = t = 0$$

Die Vektoren sind also linear unabhängig.

lineare Gleichungssysteme

Übung

Finden Sie die Lösungen von Gleichungssystem (3):

$$\begin{array}{ccccccc} r & + & s & & & = & 0 \\ r & & & + & t & = & 0 \\ & & s & + & t & = & 0 \end{array}$$

Lösung:

Das Gleichungssystem hat die einzige Lösung

$$r = s = t = 0$$

Die Vektoren sind also linear unabhängig.

lineare Gleichungssysteme

Der Schritt *Löse die erste Gleichung nach einer Variable auf und ersetze diese Variable in allen anderen Gleichungen durch diesen Ausdruck* kann auch wie folgt realisiert werden: *Subtrahiere geeignete Vielfache der ersten Gleichung von den anderen Gleichungen*.

Beispiel

Wir betrachten wieder Gleichungssystem (1), also

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 46 \\ x & - & 3y & = & 6 \end{array}$$

lineare Gleichungssysteme

Der Schritt *Löse die erste Gleichung nach einer Variable auf und ersetze diese Variable in allen anderen Gleichungen durch diesen Ausdruck* kann auch wie folgt realisiert werden: *Subtrahiere geeignete Vielfache der ersten Gleichung von den anderen Gleichungen*.

Beispiel

Wir betrachten wieder Gleichungssystem (1), also

$$\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 46 \\ x & - & 3y & = & 6 \end{array}$$

Subtrahieren wir die erste Gleichung (einmal) von der zweiten, so erhalten wir

$$\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 46 \\ x - x & - & 3y - y & = & 6 - 46 \end{array}$$

lineare Gleichungssysteme

Der Schritt *Löse die erste Gleichung nach einer Variable auf und ersetze diese Variable in allen anderen Gleichungen durch diesen Ausdruck* kann auch wie folgt realisiert werden: *Subtrahiere geeignete Vielfache der ersten Gleichung von den anderen Gleichungen*.

Beispiel

Wir betrachten wieder Gleichungssystem (1), also

$$\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 46 \\ x & - & 3y & = & 6 \end{array}$$

Subtrahieren wir die erste Gleichung (einmal) von der zweiten, so erhalten wir

$$\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 46 \\ x-x & - & 3y-y & = & 6-46 \end{array}$$

lineare Gleichungssysteme

Beispiel

Damit wird das Gleichungssystem wieder zu

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 46 \\ & - & 4y & = & -40 \end{array}$$

und wir erhalten wieder die eindeutige Lösung

$$x = 36, \quad y = 10$$

lineare Gleichungssysteme

Beispiel

Damit wird das Gleichungssystem wieder zu

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 46 \\ & - & 4y & = & -40 \end{array}$$

und wir erhalten wieder die eindeutige Lösung

$$x = 36, \quad y = 10$$

lineare Gleichungssysteme

Definition

Ein Gleichungssystem (2) liegt in **(Gaußscher) Normalform** vor, wenn es ein $t \in \{1, \ldots, m\}$ gibt mit

- $a_{i,j} = 0$ für alle $i > t$ und alle j.
- $a_{i,j} = 0$ für $i \in \{2, \ldots, t\}$ und $j < i$.
- $a_{i,i} = 1$ für $i = 1, \ldots, t$.

In diesem Fall heißt t der **Rang** des linearen Gleichungssystems.

lineare Gleichungssysteme

Bemerkung

Ein lineares Gleichungssystem in Normalform hat also die Gestalt

$$\begin{array}{ccccccccccc}
x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & a_{1,3}x_3 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\
0 & + & x_2 & + & a_{2,3}x_3 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & & & & & \ddots & & & \vdots & \\
0 & + & 0 & + & 0 & \cdots & +x_t + \cdots & + & a_{t,n}x_n & = & b_t \\
0 & + & 0 & + & 0 & + & \cdots & + & 0 & = & b_{t+1} \\
\vdots & & & & & & \ddots & & & \vdots & \\
0 & + & 0 & + & 0 & + & \cdots & + & 0 & = & b_m
\end{array} \qquad (4)$$

lineare Gleichungssysteme

Beispiel

Das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 46 \\ & & y & = & 10 \end{array}$$

ist in Normalform. Das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 2 \\ & & y & + & 2z & = & 1 \end{array}$$

ist in Normalform.

lineare Gleichungssysteme

Beispiel

Das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 46 \\ & & y & = & 10 \end{array}$$

ist in Normalform. Das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 2 \\ & & y & + & 2z & = & 1 \end{array}$$

ist in Normalform. Ebenso ist das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 2 \\ & & & & 0 & = & 1 \end{array}$$

in Normalform.

lineare Gleichungssysteme

Beispiel

Das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 46 \\ & & y & = & 10 \end{array}$$

ist in Normalform. Das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 2 \\ & & y & + & 2z & = & 1 \end{array}$$

ist in Normalform. Ebenso ist das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 2 \\ & & & & 0 & = & 1 \end{array}$$

in Normalform.

lineare Gleichungssysteme

Liegt ein Gleichungssystem in Normalform vor, so kann sofort entschieden werden,

- ob das Gleichungssystem eine Lösung hat.

lineare Gleichungssysteme

Liegt ein Gleichungssystem in Normalform vor, so kann sofort entschieden werden,

- ob das Gleichungssystem eine Lösung hat.
- wie die Lösung oder die Lösungen aussehen, falls es eine Lösung hat.

lineare Gleichungssysteme

Liegt ein Gleichungssystem in Normalform vor, so kann sofort entschieden werden,

- ob das Gleichungssystem eine Lösung hat.
- wie die Lösung oder die Lösungen aussehen, falls es eine Lösung hat.

Beispiel

Das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 46 \\ & & y & = & 10 \end{array}$$

hat die eindeutige Lösung $x = 36$, $y = 10$.

lineare Gleichungssysteme

Liegt ein Gleichungssystem in Normalform vor, so kann sofort entschieden werden,

- ob das Gleichungssystem eine Lösung hat.
- wie die Lösung oder die Lösungen aussehen, falls es eine Lösung hat.

Beispiel

Das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 46 \\ & & y & = & 10 \end{array}$$

hat die eindeutige Lösung $x = 36$, $y = 10$.

lineare Gleichungssysteme

Beispiel

Das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 2 \\ & & y & + & 2z & = & 1 \end{array}$$

hat unendlich viele Lösungen von der Form $z = r$ ($r \in \mathbb{R}$ beliebig), $y = 1 - 2r$ und $x = 1 + r$.

Die Variable z ist in diesem Gleichungssystem eine **freie Variable** und kann mit beliebigen Werten belegt werden.

lineare Gleichungssysteme

Beispiel

Das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 2 \\ & & y & + & 2z & = & 1 \end{array}$$

hat unendlich viele Lösungen von der Form $z = r$ ($r \in \mathbb{R}$ beliebig), $y = 1 - 2r$ und $x = 1 + r$.
Die Variable z ist in diesem Gleichungssystem eine **freie Variable** und kann mit beliebigen Werten belegt werden.

Beispiel

Das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 2 \\ & & & & 0 & = & 1 \end{array}$$

hat keine Lösung.

lineare Gleichungssysteme

Beispiel

Das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 2 \\ & & y & + & 2z & = & 1 \end{array}$$

hat unendlich viele Lösungen von der Form $z = r$ ($r \in \mathbb{R}$ beliebig), $y = 1 - 2r$ und $x = 1 + r$.
Die Variable z ist in diesem Gleichungssystem eine **freie Variable** und kann mit beliebigen Werten belegt werden.

Beispiel

Das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 2 \\ & & & & 0 & = & 1 \end{array}$$

hat keine Lösung.

lineare Gleichungssysteme

Satz

Liegt ein Gleichungssystem (2) in Normalfrom (4) vor, so gilt

- *Genau dann ist das Gleichungssystem lösbar, wenn $b_i = 0$ für $i > t$.*

lineare Gleichungssysteme

Satz

Liegt ein Gleichungssystem (2) in Normalfrom (4) vor, so gilt

- *Genau dann ist das Gleichungssystem lösbar, wenn* $b_i = 0$ *für* $i > t$.
- *Genau dann hat das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung, wenn* $b_i = 0$ *für* $i > t$ *und* $t = n$.

lineare Gleichungssysteme

Satz

Liegt ein Gleichungssystem (2) in Normalfrom (4) vor, so gilt

- *Genau dann ist das Gleichungssystem lösbar, wenn* $b_i = 0$ *für* $i > t$.
- *Genau dann hat das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung, wenn* $b_i = 0$ *für* $i > t$ *und* $t = n$.
- *Genau dann hat das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen, wenn* $b_i = 0$ *für* $i > t$ *und* $t < n$.

lineare Gleichungssysteme

Satz

Liegt ein Gleichungssystem (2) in Normalfrom (4) vor, so gilt

- *Genau dann ist das Gleichungssystem lösbar, wenn* $b_i = 0$ *für* $i > t$.
- *Genau dann hat das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung, wenn* $b_i = 0$ *für* $i > t$ *und* $t = n$.
- *Genau dann hat das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen, wenn* $b_i = 0$ *für* $i > t$ *und* $t < n$.

lineare Gleichungssysteme

Satz

Jedes lineare Gleichungssystem kann durch die folgenden vier Operationen in Normalform überführt werden:

- *Subtrahiere das Vielfache einer Gleichung von einer anderen Gleichung*

lineare Gleichungssysteme

Satz

Jedes lineare Gleichungssystem kann durch die folgenden vier Operationen in Normalform überführt werden:

- *Subtrahiere das Vielfache einer Gleichung von einer anderen Gleichung*
- *Vertausche zwei Gleichungen*

lineare Gleichungssysteme

Satz

Jedes lineare Gleichungssystem kann durch die folgenden vier Operationen in Normalform überführt werden:

- *Subtrahiere das Vielfache einer Gleichung von einer anderen Gleichung*
- *Vertausche zwei Gleichungen*
- *Vertausche zwei Variablen*

lineare Gleichungssysteme

Satz

Jedes lineare Gleichungssystem kann durch die folgenden vier Operationen in Normalform überführt werden:

- *Subtrahiere das Vielfache einer Gleichung von einer anderen Gleichung*
- *Vertausche zwei Gleichungen*
- *Vertausche zwei Variablen*
- *Multipliziere eine Gleichung mit einer Zahl $r \neq 0$.*

lineare Gleichungssysteme

Satz

Jedes lineare Gleichungssystem kann durch die folgenden vier Operationen in Normalform überführt werden:

- *Subtrahiere das Vielfache einer Gleichung von einer anderen Gleichung*
- *Vertausche zwei Gleichungen*
- *Vertausche zwei Variablen*
- *Multipliziere eine Gleichung mit einer Zahl* $r \neq 0$.

Diese Operationen führen zu einem äquivalenten Gleichungssystem, also zu einem Gleichungssystem das die selben Lösungen hat wie das ursprüngliche (wobei im Fall der Variablenvertauschung diese rückgängig zu machen ist.

lineare Gleichungssysteme

Satz

Jedes lineare Gleichungssystem kann durch die folgenden vier Operationen in Normalform überführt werden:

- *Subtrahiere das Vielfache einer Gleichung von einer anderen Gleichung*
- *Vertausche zwei Gleichungen*
- *Vertausche zwei Variablen*
- *Multipliziere eine Gleichung mit einer Zahl* $r \neq 0$.

Diese Operationen führen zu einem äquivalenten Gleichungssystem, also zu einem Gleichungssystem das die selben Lösungen hat wie das ursprüngliche (wobei im Fall der Variablenvertauschung diese rückgängig zu machen ist.

lineare Gleichungssysteme

Beispiel

Des Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 2 \\ 2x & + & 5y & + & 6z & = & 3 \end{array}$$

hat Normalform

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & y & + & 2z & = & 1 \\ & & & & z & = & 1 \end{array}$$

und die eindeutige Lösung

$$x = 1, \quad y = -1, \quad z = 1$$

lineare Gleichungssysteme

Beispiel

Des Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & -1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 1 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & -6 \end{array}$$

hat Normalform

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & -1 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

und damit unendlich viele Lösungen

$$x_4 = r,\ x_3 = s,\ x_2 = 2 - 2s - 3r,\ x_1 = -3 + s + r \quad (r, s \in \mathbb{R})$$

lineare Gleichungssysteme

Beispiel

Des Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & -1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 7x_3 & + & 9x_4 & = & 5 \end{array}$$

hat Normalform

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & -1 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \\ & & & & & & 0 & = & 4 \end{array}$$

und damit keine Lösung.

lineare Gleichungssysteme

Übung

Bestimmen Sie eine Normalform des folgenden Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 6y & + & 4z & = & 2 \\ 3x & + & 4y & + & z & = & -2 \\ 2x & + & 2y & + & 3z & = & 7 \end{array}$$

und untersuchen Sie, ob das Gleichungssystem Lösungen hat.
Geben Sie gegebenenfalls alle Lösungen an.

lineare Gleichungssysteme

Lösung:

Eine Normalform des Gleichungssystems ist

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 3y & + & 2z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 1 \\ & & & & z & = & 3 \end{array}$$

Das Gleichungssystem hat die eindeutige Lösung

$$x = 1, \quad y = -2, \quad z = 3$$

lineare Gleichungssysteme

Lösung:

Eine Normalform des Gleichungssystems ist

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & + & 2z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 1 \\ & & & & z & = & 3 \end{array}$$

Das Gleichungssystem hat die eindeutige Lösung

$$x = 1, \quad y = -2, \quad z = 3$$

Matrizen

Definition

Eine **Matrix** A vom Typ (m, n) oder eine Matrix vom Typ $m \times n$ ist ein Schema der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,j} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

bestehend aus m Zeilen und n Spalten von reelle Zahlen $a_{i,j}$.

$a_{i,j}$ heißt dabei das **Matrixelement** an der Stelle (i, j), i heißt **Zeilenindex** von $a_{i,j}$ und j heißt **Spaltenindex** von $a_{i,j}$.

Matrizen

Definition

Eine **Matrix** A vom Typ (m, n) oder eine Matrix vom Typ $m \times n$ ist ein Schema der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,j} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

bestehend aus m Zeilen und n Spalten von reelle Zahlen $a_{i,j}$.
$a_{i,j}$ heißt dabei das **Matrixelement** an der Stelle (i, j), i heißt **Zeilenindex** von $a_{i,j}$ und j heißt **Spaltenindex** von $a_{i,j}$.
Wir schreiben $A = (a_{i,j})_{(m,n)}$ oder (falls m und n klar) $A = (a_{i,j})$.

Matrizen

Definition

Eine **Matrix** A vom Typ (m, n) oder eine Matrix vom Typ $m \times n$ ist ein Schema der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,j} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

bestehend aus m Zeilen und n Spalten von reelle Zahlen $a_{i,j}$.
$a_{i,j}$ heißt dabei das **Matrixelement** an der Stelle (i, j), i heißt **Zeilenindex** von $a_{i,j}$ und j heißt **Spaltenindex** von $a_{i,j}$.
Wir schreiben $A = (a_{i,j})_{(m,n)}$ oder (falls m und n klar) $A = (a_{i,j})$.

Matrizen

Beispiel

Eine $m \times 1$–Matrix A ist ein Schema der Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix}$$

entspricht also einem Spaltenvektor der Länge m.
Ein $1 \times n$–Matrix B ist ein Schema der Gestalt

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,n} \end{pmatrix}$$

entspricht also einem Zeilenvektor der Länge n.

Matrizen

Beispiel

Eine $m \times 1$–Matrix A ist ein Schema der Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix}$$

entspricht also einem Spaltenvektor der Länge m.
Ein $1 \times n$–Matrix B ist ein Schema der Gestalt

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,n} \end{pmatrix}$$

entspricht also einem Zeilenvektor der Länge n.
Damit sind Vektoren Spezialfälle von Matrizen.

Matrizen

Beispiel

Eine $m \times 1$–Matrix A ist ein Schema der Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix}$$

entspricht also einem Spaltenvektor der Länge m.
Ein $1 \times n$–Matrix B ist ein Schema der Gestalt

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,n} \end{pmatrix}$$

entspricht also einem Zeilenvektor der Länge n.
Damit sind Vektoren Spezialfälle von Matrizen.

Matrizen

Definition

Eine $n \times n$–Matrix A heißt **quadratische Matrix** (der Größe n).

Eine quadratische $n \times n$–Matrix $A = (a_{i,j})$ heißt **symmetrisch**, wenn

$$a_{i,j} = a_{j,i} \qquad \text{für alle } \ i, j \in \{1, \ldots, n\}$$

Matrizen

Definition

Eine $n \times n$–Matrix A heißt **quadratische Matrix** (der Größe n).
Eine quadratische $n \times n$–Matrix $A = (a_{i,j})$ heißt **symmetrisch**, wenn

$$a_{i,j} = a_{j,i} \qquad \text{für alle } \; i, j \in \{1, \ldots, n\}$$

Eine quadratische $n \times n$–Matrix $A = (a_{i,j})$ heißt **Diagonalmatrix**, wenn

$$a_{i,j} = 0 \qquad \text{für alle } \; i \neq j$$

Matrizen

Definition

Eine $n \times n$–Matrix A heißt **quadratische Matrix** (der Größe n).
Eine quadratische $n \times n$–Matrix $A = (a_{i,j})$ heißt **symmetrisch**, wenn

$$a_{i,j} = a_{j,i} \qquad \text{für alle } \; i,j \in \{1,\dots,n\}$$

Eine quadratische $n \times n$–Matrix $A = (a_{i,j})$ heißt **Diagonalmatrix**, wenn

$$a_{i,j} = 0 \qquad \text{für alle } \; i \neq j$$

Die $n \times n$ Einheitsmatrix $E = E_n = (e_{i,j})$ ist die $n \times n$–Matrix mit

$$e_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

Matrizen

Definition

Eine $n \times n$–Matrix A heißt **quadratische Matrix** (der Größe n).
Eine quadratische $n \times n$–Matrix $A = (a_{i,j})$ heißt **symmetrisch**, wenn

$$a_{i,j} = a_{j,i} \qquad \text{für alle } \ i, j \in \{1, \ldots, n\}$$

Eine quadratische $n \times n$–Matrix $A = (a_{i,j})$ heißt **Diagonalmatrix**, wenn

$$a_{i,j} = 0 \qquad \text{für alle } \ i \neq j$$

Die $n \times n$ Einheitsmatrix $E = E_n = (e_{i,j})$ ist die $n \times n$–Matrix mit

$$e_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

Matrizen

Definition

Ist $A = (a_{i,j})$ eine $m \times n$–Matrix, so ist die **transponierte Matrix** $A^\top = (a^\top_{i,j})$ eine $n \times m$–Matrix mit

$$a^\top_{i,j} = a_{j,i} \qquad \text{für alle } \ i, j \in \{1, \dots, n\}$$

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Matrizen

Definition

Ist $A = (a_{i,j})$ eine $m \times n$–Matrix, so ist die **transponierte Matrix** $A^\top = (a^\top_{i,j})$ eine $n \times m$–Matrix mit

$$a^\top_{i,j} = a_{j,i} \qquad \text{für alle } \; i,j \in \{1, \ldots, n\}$$

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Bemerkung

Eine $n \times n$–Matrix A ist genau dann symmetrisch, wenn $A = A^\top$.

Matrizen

Definition

Ist $A = (a_{i,j})$ eine $m \times n$–Matrix, so ist die **transponierte Matrix** $A^\top = (a^\top_{i,j})$ eine $n \times m$–Matrix mit

$$a^\top_{i,j} = a_{j,i} \qquad \text{für alle } \; i,j \in \{1,\dots,n\}$$

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Bemerkung

Eine $n \times n$–Matrix A ist genau dann symmetrisch, wenn $A = A^\top$.

Matrizen und Gleichungssysteme

Wir betrachten ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\
a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & & & \ddots & & & \vdots & \\
a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m
\end{array}$$

Dann heißt die Matrix $A = (a_{i,j})$, die **Koeffizientematrix** des Gleichungssysems.

Matrizen und Gleichungssysteme

Ein Gleichungssystem liefert aber auch noch eine weitere Matrix,

$$\left(A \,\middle|\, \overrightarrow{b}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right)$$

Diese Matrix heißt die **augmentierte Matrix** des Gleichungssystems.

Matrizen und Gleichungssysteme

Bemerkung

Jedes lineare Gleichungssystem definiert eine eindeutig bestimmte augmentierte Matrix $(A|\overrightarrow{b})$.

Umgekehrt bestimmt jede augmentierte Matrix $(A|\overrightarrow{b})$ auch eindeutig ein lineares Gleichungssystem mit Koeffizientenmatrix A und Zielvektor $\overrightarrow{b}$.

Matrizen und Gleichungssysteme

Bemerkung

Jedes lineare Gleichungssystem definiert eine eindeutig bestimmte augmentierte Matrix $(A|\overrightarrow{b})$.
Umgekehrt bestimmt jede augmentierte Matrix $(A|\overrightarrow{b})$ auch eindeutig ein lineares Gleichungssystem mit Koeffizientenmatrix A und Zielvektor $\overrightarrow{b}$.

Bemerkung

Gehört eine augmentierte Matrix $(A|\overrightarrow{b})$ zu einem linearen Gleichungssystem in Normalform, so sagen wir auch, dass $(A|\overrightarrow{b})$ in Normalform vorliegt.

Matrizen und Gleichungssysteme

Bemerkung

Jedes lineare Gleichungssystem definiert eine eindeutig bestimmte augmentierte Matrix $(A|\overrightarrow{b})$.
Umgekehrt bestimmt jede augmentierte Matrix $(A|\overrightarrow{b})$ auch eindeutig ein lineares Gleichungssystem mit Koeffizientenmatrix A und Zielvektor $\overrightarrow{b}$.

Bemerkung

Gehört eine augmentierte Matrix $(A|\overrightarrow{b})$ zu einem linearen Gleichungssystem in Normalform, so sagen wir auch, dass $(A|\overrightarrow{b})$ in Normalform vorliegt.

Matrizen und Gleichungssysteme

Satz

Jede augmentierte Matrix $\left(A \,|\, \overrightarrow{b}\right)$ *lässt sich durch wiederholtes Anwenden der folgenden Operationen auf Normalform bringen:*

- *Subtrahiere das Vielfache einer Zeile von* $\left(A \,|\, \overrightarrow{b}\right)$ *von einer anderen Zeile*

Matrizen und Gleichungssysteme

Satz

Jede augmentierte Matrix $\left(A \,\middle|\, \overrightarrow{b}\right)$ *lässt sich durch wiederholtes Anwenden der folgenden Operationen auf Normalform bringen:*

- *Subtrahiere das Vielfache einer Zeile von* $\left(A \,\middle|\, \overrightarrow{b}\right)$ *von einer anderen Zeile*
- *Vertausche zwei Zeilen von* $\left(A \,\middle|\, \overrightarrow{b}\right)$

Matrizen und Gleichungssysteme

Satz

Jede augmentierte Matrix $\left(A \,\middle|\, \overrightarrow{b}\right)$ *lässt sich durch wiederholtes Anwenden der folgenden Operationen auf Normalform bringen:*

- *Subtrahiere das Vielfache einer Zeile von* $\left(A \,\middle|\, \overrightarrow{b}\right)$ *von einer anderen Zeile*
- *Vertausche zwei Zeilen von* $\left(A \,\middle|\, \overrightarrow{b}\right)$
- *Vertausche zwei Spalten von* $\left(A \,\middle|\, \overrightarrow{b}\right)$*, von denen keine die letzte sein darf.*

Matrizen und Gleichungssysteme

Satz

Jede augmentierte Matrix $\left(A \mid \overrightarrow{b}\right)$ *lässt sich durch wiederholtes Anwenden der folgenden Operationen auf Normalform bringen:*

- *Subtrahiere das Vielfache einer Zeile von* $\left(A \mid \overrightarrow{b}\right)$ *von einer anderen Zeile*
- *Vertausche zwei Zeilen von* $\left(A \mid \overrightarrow{b}\right)$
- *Vertausche zwei Spalten von* $\left(A \mid \overrightarrow{b}\right)$*, von denen keine die letzte sein darf.*
- *Multipliziere eine Zeile von* $\left(A \mid \overrightarrow{b}\right)$ *mit einer Zahl* $r \neq 0$.

Matrizen und Gleichungssysteme

Satz

Jede augmentierte Matrix $\left(A \,\middle|\, \overrightarrow{b}\right)$ *lässt sich durch wiederholtes Anwenden der folgenden Operationen auf Normalform bringen:*

- *Subtrahiere das Vielfache einer Zeile von* $\left(A \,\middle|\, \overrightarrow{b}\right)$ *von einer anderen Zeile*
- *Vertausche zwei Zeilen von* $\left(A \,\middle|\, \overrightarrow{b}\right)$
- *Vertausche zwei Spalten von* $\left(A \,\middle|\, \overrightarrow{b}\right)$*, von denen keine die letzte sein darf.*
- *Multipliziere eine Zeile von* $\left(A \,\middle|\, \overrightarrow{b}\right)$ *mit einer Zahl* $r \neq 0$.

Das zu dieser Normalform gehörige lineare Gleichungssystem ist eine Normalform des ursprünglichen linearen Gleichungssystems.

Matrizen und Gleichungssysteme

Satz

Jede augmentierte Matrix $\left(A \,\middle|\, \overrightarrow{b}\right)$ *lässt sich durch wiederholtes Anwenden der folgenden Operationen auf Normalform bringen:*

- *Subtrahiere das Vielfache einer Zeile von* $\left(A \,\middle|\, \overrightarrow{b}\right)$ *von einer anderen Zeile*
- *Vertausche zwei Zeilen von* $\left(A \,\middle|\, \overrightarrow{b}\right)$
- *Vertausche zwei Spalten von* $\left(A \,\middle|\, \overrightarrow{b}\right)$*, von denen keine die letzte sein darf.*
- *Multipliziere eine Zeile von* $\left(A \,\middle|\, \overrightarrow{b}\right)$ *mit einer Zahl* $r \neq 0$*.*

Das zu dieser Normalform gehörige lineare Gleichungssystem ist eine Normalform des ursprünglichen linearen Gleichungssystems.

Matrizen und Gleichungssysteme

Zur Lösung eines linearen Gleichungssystems gehen wir am besten wie folgt vor:

- Bestimme die augmentierte Matrix $\left(A \,\middle|\, \overrightarrow{b}\right)$ des Gleichungssystems

Matrizen und Gleichungssysteme

Zur Lösung eines linearen Gleichungssystems gehen wir am besten wie folgt vor:

- Bestimme die augmentierte Matrix $\left(A \,\middle|\, \overrightarrow{b}\right)$ des Gleichungssystems
- Bestimme eine Normalform $\left(A \,\middle|\, \overrightarrow{b}\right)$ zur aumgentierten Matrix $\left(A \,\middle|\, \overrightarrow{b}\right)$ des Gleichungssystems.

Matrizen und Gleichungssysteme

Zur Lösung eines linearen Gleichungssystems gehen wir am besten wie folgt vor:

- Bestimme die augmentierte Matrix $\left(A \,\middle|\, \overrightarrow{b}\right)$ des Gleichungssystems
- Bestimme eine Normalform $\left(A \,\middle|\, \overrightarrow{b}\right)$ zur aumgentierten Matrix $\left(A \,\middle|\, \overrightarrow{b}\right)$ des Gleichungssystems.
- Bestimme die Lösungen des Gleichungssystems, das zur augmentierten Matrix $\left(A \,\middle|\, \overrightarrow{b}\right)$ gehört.

Matrizen und Gleichungssysteme

Zur Lösung eines linearen Gleichungssystems gehen wir am besten wie folgt vor:

- Bestimme die augmentierte Matrix $\left(A \,|\, \overrightarrow{b}\right)$ des Gleichungssystems
- Bestimme eine Normalform $\left(A \,|\, \overrightarrow{b}\right)$ zur aumgentierten Matrix $\left(A \,|\, \overrightarrow{b}\right)$ des Gleichungssystems.
- Bestimme die Lösungen des Gleichungssystems, das zur augmentierten Matrix $\left(A \,|\, \overrightarrow{b}\right)$ gehört.
- Erhalte dadurch alle Lösungen des Aufgangsgleichungssystems.

Matrizen und Gleichungssysteme

Zur Lösung eines linearen Gleichungssystems gehen wir am besten wie folgt vor:

- Bestimme die augmentierte Matrix $\left(A \,|\, \overrightarrow{b}\right)$ des Gleichungssystems
- Bestimme eine Normalform $\left(A \,|\, \overrightarrow{b}\right)$ zur aumgentierten Matrix $\left(A \,|\, \overrightarrow{b}\right)$ des Gleichungssystems.
- Bestimme die Lösungen des Gleichungssystems, das zur augmentierten Matrix $\left(A \,|\, \overrightarrow{b}\right)$ gehört.
- Erhalte dadurch alle Lösungen des Aufgangsgleichungssystems.