

Aufgaben zu „Folgen“

1. Berechnen Sie folgende Grenzwerte, falls sie existieren:

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 4\sqrt{n}}{\sqrt{n}^3 + n^2}$  , b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - \sqrt{n}}{\sqrt{n} + n}$  , c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 4}{n + 4}$  .

2. Bestimmen Sie den Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)}{1 + 2 + 3 + \dots + n}$  .

3. Seien A, B und C folgende Aussagen über eine Folge  $(a_n)$ :

A :  $(a_n)$  ist monoton ,  
B :  $(a_n)$  ist beschränkt ,  
C :  $(a_n)$  ist konvergent .

Welche von den 8 möglichen Belegungen von A, B und C mit den Wahrheitswerten „wahr“ und „falsch“ kommen wirklich vor ? Beispiele oder Gegenbeweise !

4. Berechnen Sie die Grenzwerte

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 4}{n^2 + 4}$  , b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot 2^{-n}$  , c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$  , d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$  .

5. Zeigen Sie, dass folgende Aussage richtig ist :

Sind  $(a_n)$  und  $(c_n)$  zwei zum gleichen Grenzwert  $a$  konvergente Folgen und gilt für die Glieder der Folge  $(b_n)$  :

$$a_n \leq b_n \leq c_n \text{ für alle } n ,$$

so konvergiert auch die Folge  $(b_n)$  gegen  $a$  .

6. Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen jeweils für  $n \geq 1$  auf Monotonie:

a)  $\left( \frac{3n+1}{n+3} \right)$  , b)  $\left( \frac{4}{n} + \frac{n}{4} \right)$  , c)  $(n^2 - n)$  , d)  $\left( \frac{n^2 + 1}{1 + 4n} \right)$  .

7. Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz :

a)  $(1000 + (1/n))^2$  , b)  $3^{-n}(2^n + (-2)^n)$  ,  
c)  $a_1 = 0$  ,  $a_2 = 1$  ,  $a_n = (a_{n-1} + a_{n-2}) / 2$  für  $n \geq 3$  .