Orthonormaler Untervektorraum:

Geg.: Vektorraum V, Untervektorraum U von V
mit Skalarprodukt $\langle \cdot , \cdot \rangle$

Bestimme: $U^\perp$ (orthogonales Komplement (von U zu V)).

Dazu: (i) Wähle Basis B_1 von V
(ii) Wähle Basis B_2 von U.

2 Möglichkeiten:

1.) Subtrahiere von jedem $\vec{v} \in B_1$ den zu U parallelen Anteil $\rightsquigarrow$ d.h. erhalte zu jedem $\vec{v} \in B_1$ den zu U orthogonalen Anteil; fasse diese in der Menge A zusammen

$\rightsquigarrow$ der Aufspann von A ist genau $U^\perp$.
Erhalte Basis von $U^\perp$ als maximal linear unabhängige Teilmenge von A.

Dazu: $B_1 = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$, $B_2 = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m\}$. $(m \leq n)$
(Basis von V) (OGB-Basis von U)

Für alle $1 \leq i \leq n$: betrachte

$$\vec{w}_i := \vec{v}_i - \underbrace{\frac{\langle \vec{u}_1, \vec{v}_i \rangle}{\langle \vec{u}_1, \vec{u}_1 \rangle} \cdot \vec{u}_1}_{\text{„parallele Anteil von } \vec{v}_i \text{ in Richtung } \vec{u}_1\text{“}} - \underbrace{\frac{\langle \vec{u}_2, \vec{v}_i \rangle}{\langle \vec{u}_2, \vec{u}_2 \rangle} \cdot \vec{u}_2}_{\text{„parallele Anteil von } \vec{v}_i \text{ in Richtung } \vec{u}_2\text{“}} - \ldots - \underbrace{\frac{\langle \vec{u}_m, \vec{v}_i \rangle}{\langle \vec{u}_m, \vec{u}_m \rangle} \cdot \vec{u}_m}_{\ldots}$$

$U^\perp = \langle \vec{w} \quad \vec{w} \rangle$

$\rightsquigarrow U^\perp = \langle \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n \rangle$

$$\boxed{V = U \oplus U^\perp}$$

__Bsp.:__ $V = \mathbb{R}^3$, Standardskalarprodukt

$$U = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

(i) Basis von $V = \mathbb{R}^3$: $B_1 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}_{\vec{v}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}_{\vec{v}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{\vec{v}_3} \right\}$

(ii) OGB von U: $B_2 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}_{\vec{u}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}}_{\vec{u}_2} \right\}$ $\left(\text{da } \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix} = 1\cdot 0 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) = 0 \right)$

__Berechne:__

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \underbrace{\frac{\left\langle \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix} \right\rangle}} \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

$$\vec{w}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \underbrace{\frac{\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}} - \underbrace{\frac{\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix} \right\rangle}}_{\frac{2}{5}} \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{2}{5} \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\\frac{1}{5}\\\frac{2}{5}\end{pmatrix}$$

$$\vec{w}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \underbrace{\frac{\left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}} - \underbrace{\frac{\left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix} \right\rangle} \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}}_{\frac{-1}{5} \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\\frac{2}{5}\\\frac{4}{5}\end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ Erzeugendensystem von $U^\perp$:

$$\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1/5\\2/5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2/5\\4/5\end{pmatrix} \right\}$$

$$\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\vec{w}_3 = 2 \cdot \vec{w}_2$

$$\rightsquigarrow U^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1/5 \\ 2/5 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} = \left\langle \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}.$$

- Im $\mathbb{R}^3$: Kreuzprodukt liefert senkrechte Vektoren, d.h. im $\mathbb{R}^3$ sind wir "schnell" fertig
- Im Allgemeinen existiert aber kein Kreuzprodukt.
- Im Allgemeinen funktioniert obiges Ansatz.

Zum Bsp.:
$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$
$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0.$$

2. Möglichkeit:
- Betrachte eine OGB von U, B_2
- ergänze diese zu einer Basis von V,
  d.h. erweitere B_2 um $n-m$ Elemente, sodass die neue Menge ebenfalls lin. unabh.,
  d.h. eine Basis von V bildet.
- "orthogonalisiere" die neuen Elemente wie oben (vgl. Rechnung $\vec{w}_i$)
- erhalte eine Basis von $U^\perp$

Bsp.: $V = \mathbb{R}^3$, $U = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\text{OG-Basis von } U, \text{ nenne sie } B_2} \rangle_{\mathbb{R}}$,

$\dim V = 3$
$\dim U = 2$
$\Rightarrow \dim U^\perp = 3 - 2 = 1$

- betrachte $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \ldots \end{pmatrix}$ $\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \ldots \end{pmatrix} \right\} \text{ Basis von } V = \mathbb{R}^3 \right)$

• betrachte $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U$ $\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}\right.$ Basis von $\left. V = \mathbb{R}^3 \right)$

• $$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{zu } U \text{ orth. Anteil von } \vec{v}}}{\vec{w}} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \underbrace{\frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} - \underbrace{\frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}}_{\frac{2}{5}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{5} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{5} \\ 2/5 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow U^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1/5 \\ 2/5 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}.$$

<u>Bsp.:</u> $\mathbb{R}^2$, $U = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$\rightsquigarrow \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \underset{\vec{v}}{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}} \right\}$$

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{10} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/10 \\ 3/10 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow U^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 1/10 \\ 3/10 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$$ (es gilt $\left\langle \begin{pmatrix} 1/10 \\ 3/10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \cdot (-1) = 0.$)

$$\frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Seien U, V VR, $U \times V$ kart. Prod.,

seien $\mathcal{B}_1 = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$, $\mathcal{B}_2 = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$ Basen von U bzw. V.

<u>Beh.:</u> $\{(\vec{u}_1, \vec{0}), \ldots, (\vec{u}_n, \vec{0}), (\vec{0}, \vec{v}_1), \ldots, (\vec{0}, \vec{v}_m)\}$ ist Basis

von $U \times V$. ($\Rightarrow \dim(U \times V) = n+m$ $\square$)

• Erzeugnis: sei $(\vec{u}, \vec{v}) \in U \times V$, d.h. $\vec{u} \in U$, $\vec{v} \in V$.

1.) Weil B_1 Basis von U, ex. $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, s.d.

$$\lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n = \vec{u}$$

2.) Weil B_2 Basis von V, ex. $\mu_1, \dots, \mu_m \in K$, s.d.

$$\mu_1 \cdot \vec{v}_1 + \dots + \mu_m \cdot \vec{v}_m = \vec{v}$$

Beh.: $$(u, v) = \lambda_1 \cdot (\vec{u}_1, \vec{0}) + \dots + \lambda_n \cdot (\vec{u}_n, \vec{0}) + \mu_1 \cdot (\vec{0}, \vec{v}_1) + \dots + \mu_m \cdot (\vec{0}, \vec{v}_m)$$

• Lin. Unabh.: Betrachte die Gleichung

$$\lambda_1 \cdot (\vec{u}_1, \vec{0}) + \dots + \lambda_n \cdot (\vec{u}_n, \vec{0}) + \mu_1 \cdot (\vec{0}, \vec{v}_1) + \dots + \mu_m \cdot (\vec{0}, \vec{v}_m) = (\vec{0}, \vec{0})$$

mit $\lambda_i, \mu_j \in K$.

$$= (\lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n, \mu_1 \vec{v}_1 + \dots + \mu_m \vec{v}_m)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n = \vec{0} \xRightarrow[\text{Basis von } U]{\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}} \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

$$\& \quad \mu_1 \vec{v}_1 + \dots + \mu_m \vec{v}_m = \vec{0} \Rightarrow \mu_1 = \dots = \mu_m = 0.$$