Auf vielfachen Wunsch habe ich hier ein paar Aufgaben zusammengestellt, an denen man die vollständige Induktion üben kann. Es sind auch Aufgaben dabei, bei denen man besser nicht die vollständige Induktion verwendet, sondern direkt rechnet.

Nicht für jede Aussage, die von n abhängt, ist vollständige Induktion die bestmögliche Wahl !

1. Die Folge (a_n) sei rekursiv definiert durch $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ und $a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1}$.

   a) Berechnen Sie die ersten 5 Glieder der Folge.

   b) Stellen Sie eine Vermutung für eine explizite Formel für a_n auf und beweisen Sie diese durch vollständige Induktion.

2. a) Zeigen Sie für alle natürlichen Zahlen n : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = \frac{2^{n+1} - n - 2}{2^n}$.

   b) Zeigen Sie , dass die unendliche Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$ konvergiert und bestimmen Sie deren Wert .

3. Sei $f(x) = x^2 \cdot e^x$. Bestimmen Sie die n - te Ableitung $f^{(n)}(x)$ für alle natürlichen n und alle reellen x . Tip: berechnen Sie die Ableitung für n = 1, 2 , 3 , vielleicht noch n = 4 , erraten Sie daraus eine allgemeine Formel und beweisen Sie diese durch vollständige Induktion .

4. Berechnen Sie k^2 und $k!$ für $k = 1, 2, \ldots, 6$. Die Werte deuten darauf hin , dass die Ungleichung $k! > k^2$ für $k \geq 4$ gilt. Beweisen Sie das durch vollständige Induktion.

5. Zeigen Sie für ganze Zahlen $k \geq 0$, $n \geq 1$: $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \binom{j+k}{k} = \binom{n+k}{k+1}$.

6. Zeigen Sie z.B. durch vollständige Induktion , dass für die Anzahl W(n, k) der Kombinationen von k aus n Elementen mit Wiederholung und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge gilt

   $$W(n,k) = \binom{n+k-1}{k} \quad .$$

   Tip : Induktion nach k . Der Einfachheit halber seien die Elemente die Zahlen 1, 2, ... , n. Sortieren Sie die Kombinationen von k+1 Elementen nach der kleinsten in ihnen vorkommenden Zahl und zählen Sie ab. (Andere Lösungen sind willkommen !)

7. In dieser Aufgabe geht es um die zwei Formeln

   (*) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot x^{k-1} = \frac{1-(n+1)\cdot x^n + n \cdot x^{n+1}}{(1-x)^2}$, (**) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

   a) Zeigen Sie, dass (**) aus (*) folgt .

   b) Beweisen Sie <u>eine</u> der beiden Formeln <u>entweder</u> durch vollständige Induktion <u>oder</u> auf einem anderen Weg. Tip dazu : die linke Seite von (*) ist die Ableitung einer Summe, die Sie kennen.

8. Zeigen Sie für jede natürliche Zahl n : die Zahl $n^3 + 2n$ ist durch 3 teilbar, d.h. sie lässt sich in der Form $3\,k(n)$ mit einer ganzen Zahl $k(n)$ schreiben.

9. Sei $f(x) = \ln(1+x)$. Bestimmen Sie die n - te Ableitung $f^{(n)}(x)$ für alle natürlichen n und alle $x > -1$. Tip: berechnen Sie die Ableitung für n = 1, 2 , 3 , vielleicht noch n = 4 , erraten Sie daraus eine allgemeine Formel und beweisen Sie diese durch vollständige Induktion .

10. Zeigen Sie für alle natürlichen $n \geq 2$: $\sqrt{n} < \dfrac{n+1}{2}$.

11. Zeigen Sie für alle natürlichen Zahlen n : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq 2\sqrt{n+1} - 2$.

12. Zeigen Sie für alle natürlichen Zahlen n : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

13. Beweisen Sie Satz 3.2 der Vorlesung (Binomischer Lehrsatz) .