DHBW Mannheim
Informatik

Mannheim, 16.11.2022
Mathematik II/1

Lösungen Übungsblatt 5

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die Steigung der Kurve mit Gleichung

$$x \cdot \left(y^2 + x^2\right)^2 - y \cdot (y^2 - x^2)^2 - (xy)^2 - y^2 + x^2 = 0$$

im Punkt $P = (1,\, 2)$.

Lösung:
Beachten Sie, dass P tatsächlich ein Punkt auf dieser Kurve ist (das also $(1,\, 2)$ eine Lösung der Gleichung ist) .
Zunächst benötigen wir die partiellen Ableitungen von $f(x, y)$:

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= (y^2 + 5x^2) \cdot (y^2 + x^2) + 4xy \cdot (y^2 - x^2) - 2xy^2 + 2x \\
\tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 4xy \cdot (y^2 + x^2) - (5y^2 - x^2) \cdot (y^2 - x^2) + 2x^2y - 2y
\end{aligned}$$

Hierfür gilt

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = -15 \neq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 63$$

Damit kann der Satz über implizite Funktionen angewendet werden und ergibt als Tangentensteigung den Wert

$$m = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)}{\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)} = \frac{63}{15} = \frac{21}{5}$$

Aufgabe 2. Bestimmen Sie alle Punkte $P = (a, b)$, in denen die Kurve C mit der Gleichung

$$4x^3 - 36xy + 6y^3 = 58$$

waagrechte bzw. senkrechte Tangenten hat.

Lösung:
Wir wenden den Satz über implizite Funktionen an. Die Steigung m der Tangente an die Kurve C im Punkt $P = (a, b)$ ist demnach gegeben durch

$$m = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)}{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}$$

falls $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$. Eine waagrechte Tangente liegt daher im Punkt $P=(a,b)$ vor, wenn $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$ (und $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \neq 0$).
Es ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 12x^2 - 36y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -36x + 18y^2 \end{aligned}$$

und daher gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \iff x^2 = 3y \iff y = \frac{x^2}{3}$$

Setzen wir das in die Gleichung ein, so erhalten wir

$$4x^3 - 12x^3 + \frac{2}{9} \cdot x^6 = 58$$

also die Gleichung

$$x^6 - 36x^3 - 261 = 0$$

Mit der Substitution $u = x^3$ erhalten wir die quadratische Gleichung

$$u^2 - 36u - 261 = 0$$

mit den beiden Lösungen

$$u_1 = \frac{36 - \sqrt{36^2 - 4 \cdot (-261)}}{2} = 18 - 3 \cdot \sqrt{65}, \quad u_2 = 18 + 3 \cdot \sqrt{65}$$

und damit hat die Ausgangsgleichung die beiden Lösungen

$$x_1 = \sqrt[3]{18 - 3 \cdot \sqrt{65}}, \quad x_2 = \sqrt[3]{18 + 3 \cdot \sqrt{65}}$$

mit zugehörigen y–Werten

$$y_1 = \frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{18 - 3 \cdot \sqrt{65}}^{\,2}, \quad y_2 = \frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{18 + 3 \cdot \sqrt{65}}^{\,2}$$

Als Kandidaten für waagrechte Tangenten ergeben sich

$$P_1 = (x_1, y_1), \qquad P_2 = (x_2, y_2)$$

Hierfür gilt

$$f_y(P_1) \approx 89 \neq 0, \quad f_y(P_2) \approx 168 \neq 0$$

und daher hat C tatsächlich waagrechte Tangenten in P_1 und P_2.

Aus $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 18y^2 - 36x$ folgt ferner, dass

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \iff y^2 = 2x \iff x = \frac{y^2}{2}$$

Setzen wir das in die Gleichung ein, so erhalten wir

$$\frac{1}{2} \cdot y^6 - 18y^3 + 6y^3 = 58$$

also die Gleichung

$$y^6 - 24y^3 - 116 = 0$$

Wie oben erhalten wir die Lösungen

$$y_3 = \sqrt[3]{12 - 2\sqrt{65}}, \quad y_4 = \sqrt[3]{12 + 2\sqrt{65}}$$

mit zugehörigen x–Werten

$$x_3 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{12 - 2\sqrt{65}}^2, \quad x_4 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{12 + 2\sqrt{65}}^2$$

Als Kandidaten für senkrechte Tangenten ergeben sich

$$Q_1 = (x_3, y_3), \qquad Q_2 = (x_4, y_4)$$

Da

$$f_x(Q_1) \approx 78 \neq 0, f_x(Q_2) \approx 147 \neq 0$$

handelt es sich in der Tat um senkrechte Tangenten.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die Tangentialebene an die Fläche

$$3x^2 + 2x^2 + 4z^2 = 15$$

im Punkt $P = (1, -2, 1)$.

Lösung:
Es ist

$$F = \{(x, y, z) | f(x, y, z) = 0\}$$

wobei $f(x, y, z) = 3x^2 + 2x^2 + 4z^2 - 15$.
Die Funktion f ist stetig partiell differenzierbar, also errechnet sich die Tangentialebene aus den Formeln der Vorlesung.
Auch hier sind zunächst die partiellen Ableitungen zu bestimmen:

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= 6x \\ \tfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= 4y \\ \tfrac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= 8z \end{aligned}$$

Es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial z}(1, -2, 1) = 8 \neq 0.$$

Daher ist auch der Satz über implizite Funktionen in der Form anwendbar, dass bei $(1, -2)$ eine Funktion $z = h(x, y)$ existiert, sodass bei $(1, -2, 1))$ die Fläche

$$3x^2 + 2x^2 + 4z^2 = 15$$

parametrisiert wird als $(x, y, h(x, y))$ und so dass $h(s, t)$ folgende partielle Ableitungen hat

$$\begin{array}{rcccl} \frac{\partial h}{\partial s}(1,-2) & = & -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(1,-2,1)}{\frac{\partial f}{\partial z}(1,-2,1)} & = & -\frac{3}{4} \\ \frac{\partial h}{\partial t}(1,-2) & = & -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(1,-2,1)}{\frac{\partial f}{\partial z}(1,-2,1)} & = & 1 \end{array}$$

Also hat die Tangentialebene an diese Fläche in $(1, -2, 1)$ die Form

$$z = 1 - \frac{3}{4} \cdot (x - 1) + 1 \cdot (y + 2)$$

bzw. in vektorieller Darstellung

$$T : \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4. Bestimmen Sie die Punkte $P = (a, b)$, an denen die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

mit $f(x, y) = (\sin^2(x) + y \cdot e^y, \cos^2(y)$ lokal umkehrbar mit differenzierbarer Umkehrfunktion ist, und bestimmen Sie die für diese Punkte die Ableitung der Umkehrfunktion im Punkt $f(P)$.

Lösung:
Die Funktion ist (nach den Regeln aus der Vorlesung) stetig partiell differenzierbar mit totalem Differential

$$D(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2\sin(x) \cdot \cos(x) & e^y + y \cdot e^y \\ 0 & -2\cos(y) \cdot \sin(y) \end{pmatrix}$$

mit Determinante

$$d(x, y) = -4\sin(x) \cdot \cos(x) \cdot \cos(y) \cdot \sin(y)$$

Damit verschwindet die Determinante genau dann, wenn einer dieser vier Faktoren verschwindet, also wenn

$$\sin(x) = 0 \quad \text{oder} \quad \cos(x) = 0 \quad \text{oder} \quad \sin(y) = 0 \quad \text{oder} \quad \cos(y) = 0$$

Das ist genau dann der Fall, wenn

$$x = k \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{oder} \quad y = k \cdot \frac{\pi}{2}$$

An allen anderen Stellen (a, b) hat f eine lokale Inverse. Das totale Differential der lokale Inversen g an der Stelle $f(a, b) = (\sin^2(a) + b \cdot e^b, \cos^2(b))$ ist gegeben als

$$D(g)(f(a,b)) = \frac{1}{d(a,b)} \cdot \begin{pmatrix} -2\cos(b) \cdot \sin(b) & -e^b - b \cdot e^b \\ 0 & 2\sin(b) \cdot \cos(b) \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5. An welchen Punkten ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x, y) = (x^2 + y^2,\ x^2 \cdot y^2)$$

lokal invertierbar? Bestimmen Sie alle in Frage kommenden Punkte $P = (a, b)$, und bestimmen Sie $D(g)(a^2 + b^2,\ a^2 \cdot b^2)$, wenn g die lokale Umkehrfunktion von f bei (a, b) ist.
Bestimmen Sie speziell $D(g)(10,\ 9)$, wenn g die lokale Umkehrfunktion von f bei $(3,\ 1)$ (mit $f(3,\ 1) = (10,\ 9)$) ist, und bestimmen Sie eine lineare Approximation an g im Punkt $P = (10,\ 9)$.

Lösung:
Die Funktion ist nach den Regeln aus der Vorlesung in ganz $\mathbb{R}^2$ total differenzierbar, und es gilt

$$D(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2xy^2 & 2x^2y \end{pmatrix}$$

Damit gilt

$$\det(D(f)(x, y)) = 4x^3y - 4xy^3 = 4xy \cdot (x^2 - y^2)$$

also

$$\det(D(f)(x, y)) = 0 \iff x^2 - y^2 = 0 \text{ oder } x \cdot y = 0$$

und damit

$$\det(D(f)(x, y)) = 0 \iff x = y \text{ oder } x = -y \text{ oder } x = 0 \text{ oder } y = 0$$

und das sind genau die Punkte, an denen $f(x, y)$ nicht lokal invertierbar ist. Für (a, b) mit $a \neq 0$ und $b \neq 0$ und $a \neq \pm b$ gilt

$$D(g)(a^2 + b^2, a^2 \cdot b^2) = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2ab^2 & 2a^2b \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4ab \cdot (a^2 - b^2)} \cdot \begin{pmatrix} 2a^2b & -2b \\ -2ab^2 & 2a \end{pmatrix}$$

wobei g die lokale Umkehrfunktion von f bei (a, b) ist.
Der Punkt $P = (3, 1)$ erfüllt offensichtlich diese Voraussetzungen mit $f(3, 1) = (10, 9)$, und daher gilt für die lokale Umkehrfunktion g von f bei P:

$$D(g)(10, 9) = \frac{1}{96} \begin{pmatrix} 18 & -2 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{16} & -\frac{1}{48} \\ -\frac{1}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

Die lineare Approximation an g im Punkt $(10, 9)$ ist dann gegeben durch

$$L(x,y) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{16} & -\frac{1}{48} \\ -\frac{1}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-10 \\ y-9 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6. Wir betrachen eine Abbildung$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x,y) = (ax + by, cx + dy)$$

Berechnen Sie das totale Differential $D(f)$ dieser Funktion und zeigen Sie, dass f genau dann lokal umkehrbar mit differenzierbarer Umkehrfunktion ist, wenn $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine invertierbare Matrix ist.
Bestimmen Sie die (lokale) Umkehrfunktion von f, wenn f lokal umkehrbar ist.

Lösung:
Die Komponenten von f sind offensichtlich differenzierbar, und

$$D(f)(x,y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} =: A$$

(unabhängig von x und y). Das totale Differential hat also (konstante) Determinante

$$d = \det(A) = ad - bc$$

und f ist lokal umkehrbar mit differenzierbarer Inverser (in jedem Punkt von $\mathbb{R}^2$) wenn $ad - bc \neq 0$, also wenn die Matrix A invertierbar ist.
Die Abbildung f ist die lineare Abbildung, die durch die Matrix A definiert wird. Ist die Matrix A invertierbar, so ist diese Abbildung (global) umkehrbar, und ihre Umkehrabbildung ist gegeben durch die Matrix

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

d.h. f ist dann global umkehrbar mit Umkehrabbildung

$$f^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

mit

$$f^{-1}(x,y) = \frac{1}{ad - bc} \cdot (dx - by, -cx + ay)$$

(das kann auch unmittelbar durch Einsetzen und Nachrechnen überprüft werden).