DHBW Mannheim
Informatik

Mannheim, 23.11.2022
Mathematik II/1

Lösungen zu Übungsblatt 8

Aufgabe 1.

a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für $y'' + 3y' - 4y = 0$.

Lösung:

Das ist eine homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Das zugehörige charakteristische Polynom ist

$$P_D(x) = x^2 + 3x - 4$$

Seine Nullstellen sind $\lambda_1 = -4$ und $\lambda_2 = 1$. Daher ist

$$y(x) = e^{-4x}, \quad \widetilde{y}(x) = e^x$$

eine Fundamentalsystem des Lösungsraums.

b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Lösung:

Das ist eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Das zugehörige charakteristische Polynom ist

$$P_D(x) = x^2 - 6x + 9$$

mit Nullstellen $x_1 = 3$ (doppelt). Daher ist

$$y(x) = e^{3x}, \quad \widetilde{y}(x) = x \cdot e^{3x}$$

eine Fundamentalsystem des Lösungsraums.

c) Bestimmen Sie die Lösung von $y''+4y'+20y = 0$ mit $y(0) = 3, y'(0) = -2$.

Lösung:

Das ist eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Das zugehörige charakteristische Polynom ist

$$P_D(x) = x^2 + 4x + 20$$

mit Nullstellen $x_1 = -2 + 4 \cdot i$ und $x_2 = -2 - 4 \cdot i$. Daher ist

$$y(x) = e^{-2x} \cdot \cos(4x), \quad \widetilde{y}(x) = e^{-2x} \cdot \sin(4x)$$

eine Fundamentalsystem des Lösungsraums.

Für die allgemeine Lösung gilt

$$y(x) = r \cdot e^{-2x} \cdot \cos(4x) + s \cdot e^{-2x} \cdot \sin(4x)$$

und

$$\begin{aligned} y'(x) &= (-2r) \cdot e^{-2x} \cdot \cos(4x) - 4 \cdot r \cdot e^{-2x} \cdot \sin(4x) \\ &\quad -2s \cdot e^{-2x} \cdot \sin(4x) + 4 \cdot s \cdot e^{-2x} \cdot \cos(4x) \\ &= (-2r + 4s) \cdot e^{-2x} \cdot \cos(4x) - (2s + 4r) \cdot e^{-2x} \cdot \sin(4x) \end{aligned}$$

Einsetzen der Anfangsbedingung führt zu

$$\begin{aligned} 3 &= r \\ -2 &= -2r + 4s \end{aligned}$$

Also $r = 3$ und $s = 1$, und damit

$$y(x) = 3 \cdot e^{-2x} \cdot \cos(4x) + e^{-2x} \cdot \sin(4x)$$

Aufgabe 2.

a) Bestimmen Sie eine spezielle Lösung von $y'' + 6y' + 9y = 9x^2 + 3x + 5$.

Lösung:

Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung ist

$$P_D(x) = x^2 + 6x + 9$$

mit der doppelten Nullstelle $\lambda_1 = 3$. Da $\lambda = 0$ keine Nullstelle ist, machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = cx^2 + dx + e$$

mit $y_p'(x) = 2cx + d$ und $y_p''(x) = 2c$. Einsetzen ergibt

$$2c + 12cx + 6d + 9cx^2 + 9dx + 9e = 9x^2 + 3x + 5$$

also (durch Koeffizientenvergleich)

$$9c = 9, \qquad 12c + 9d = 3, \qquad 2c + 6d + 9e = 5$$

und damit $c = 1$, $d = -1$ und $e = 1$, also

$$y_p(x) = x^2 - x + 1$$

b) Bestimmen Sie eine spezielle Lösung von $y'' + 4y' + 3y = 8\sin(x) + 6\cos(x)$.

Lösung:

Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung ist

$$P_D(x) = x^2 + 4x + 3$$

mit den Nullstellen $\lambda_1 = -3$ und $\lambda_2 = -1$. Da $\lambda = i$ keine Nullstelle ist, machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = c\cos(x) + d\sin(x)$$

mit $y_p'(x) = -c\sin(x) + d\cos(x)$ und $y_p''(x) = -c\cos(x) - d\sin(x)$. Einsetzen ergibt

$$-c\cos(x) - d\sin(x) + 4d\cos(x) - 4c\sin(x) + 3c\cos(x) + 3d\sin(x) = 8\sin(x) + 6\cos(x)$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$2c + 4d = 6, \qquad -4c + 2d = 8$$

und damit $c = -1$, $d = 2$:

$$y_p(x) = -\cos(x) + 2\sin(x)$$

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 3y' + 2y = 17e^{-2x}$$

Lösung:

Wir bestimmen zunächst eine spezielle Lösung.

Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung ist

$$P_D(x) = x^2 + 3x + 2$$

mit den Nullstellen $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = -1$. Da $\lambda = -2$ eine einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = cxe^{-2x}$$

mit $y_p'(x) = -2cxe^{-2x} + ce^{-2x}$ und $y_p''(x) = 4cxe^{2x} - 4ce^{-2x}$. Einsetzen ergibt

$$4cxe^{-2x} - 4ce^{-2x} + 3ce^{-2x} - 6cxe^{-2x} + 2cxe^{-2x} = 17e^{-2x}$$

also

$$-ce^{-2x} = 17e^{-2x}$$

und damit $c = -17$. Wir erhalten als spezielle Lösung

$$y_p(x) = -17x \cdot e^{-2x}$$

und damit als allgemeine Lösung

$$y(x) = re^{-2x} + se^{-x} - 17x \cdot e^{-2x}$$

Aufgabe 3.

a) Bestimmen Sie die Lösung von $y'' - 6y' + 9y = 0$ mit $y(0) = 5$, $y'(0) = 3$.

Lösung:

Das ist eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Das zugehörige charakteristische Polynom ist

$$P_D(x) = x^2 - 6x + 9$$

mit Nullstelle $x_1 = 3$ (doppelt). Daher ist

$$y(x) = e^{3x}, \quad \widetilde{y}(x) = x \cdot e^{3x}$$

eine Fundamentalsystem des Lösungsraums. Die allgemeine Lösung ist

$$y(x) = re^{3x} + sxe^{3x}$$

mit

$$y'(x) = (3r + s)e^{3x} + 3sxe^{3x}$$

Einsetzen der Anfangsbedingung ergibt

$$\begin{array}{rcl} 5 & = & r \\ 3 & = & 3r + s \end{array}$$

mit der Lösung

$$r = 5, \quad s = -12$$

Die gesuchte Lösung ist :

$$y(x) = 5e^{3x} - 12xe^{3x}$$

b) Bestimmen Sie Lösung des Anfangswertproblems $y'' + 4y' + 5y = 0$ mit $y(0) = 4$, $y'(0) = 6$.

Lösung:

Das ist eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Das zugehörige charakteristische Polynom ist

$$P_D(x) = x^2 + 4x + 5$$

mit den Nullstellen $x_1 = -2 + i$ und $x_2 = -2 - i$. Daher ist

$$y(x) = e^{-2x} \cdot \cos(x), \quad \widetilde{y}(x) = e^{-2x} \cdot \sin(x)$$

eine Fundamentalsystem des Lösungsraums. Die allgemeine Lösung ist

$$y(x) = re^{-2x} \cdot \cos(x) + se^{-2x} \cdot \sin(x)$$

mit

$$y'(x) = (-2r + s) \cdot e^{-2x} \cdot \cos(x) - (r + 2s) \cdot e^{-x} \cdot \sin(x)$$

Einsetzen der Anfangsbedingung ergibt

$$\begin{array}{rcl} 4 & = & r \\ 6 & = & -2r \ + \ s \end{array}$$

mit der Lösung

$$r = 4, \quad s = 14$$

Also ist die gesuchte Lösung:

$$y(x) = 4e^{-x} \cdot \cos(x) + 14e^{-x} \cdot \sin(x)$$

Aufgabe 4.

a) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' - 6y' + 9y = 4e^{3x}$$

mit $y(0) = 5$, $y'(0) = 7$.

Lösung:

Es handelt sich um eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und charakteristischem Polynom

$$P_D(x) = x^2 - 6x + 9$$

mit der Nullstellen $\lambda_1 = 3$ (doppelt). Daher machen wir für die spezielle Lösung den Ansatz

$$y_1(x) = cx^2e^{3x}$$

machen. Als Ableitungen erhalten wir

$$\begin{array}{rcl} y_p(x) & = & cx^2e^{3x} \\ y_p'(x) & = & 2cxe^{3x} + 3cx^2e^{3x} \\ y_p''(x) & = & 2ce^{3x} + 12cxe^{3x} + 9cx^2e^{2x} \end{array}$$

Setzen wir das ein, so bekommen wir die Beziehung

$$2ce^{3x} = 4e^{3x}$$

also $c = 2$ bzw. $y_p(x) = 2x^2e^{3x}$.

Damit ist die allgemeine Lösung

$$y(x) = re^{3x} + sxe^{3x} + 2x^2e^{3x}$$

mit Ableitung

$$y'(x) = (3r + s) \cdot e^{3x} + (4 + 3s) \cdot xe^{2x} + 6x^2e^{3x}$$

Einsetzen der Anfangsbedingung liefert

$$\begin{array}{rcl} 5 & = & r \\ 7 & = & 3r \; + \; s \end{array}$$

also $r = 5$ und $s = -8$. Daher erhalten wir als Lösung

$$y(x) = 5e^{3x} - 8xe^{3x} + 2x^2e^{3x}$$

b) Bestimmen Sie Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' - 3y' - 10y = 12x \cdot e^{2x} + 4e^{2x} + 20x$$

mit $y(0) = 4$, $y'(0) = 6$.

Lösung:

Es handelt sich um eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und charakteristischem Polynom

$$P_D(x) = x^2 - 3x - 10$$

mit den Nullstellen $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 5$.

Wir betrachten die Inhomogenitäten getrennt, wobei wir allerdings die ersten beiden zusammenfassen können

$$y''(x) - 3y'(x) - 10y(x) = 12x \cdot e^{2x} + 4e^{2x}$$

da $\lambda = 2$ keine Nullstelle von $P_D(x)$ ist, können wir für die spezielle Lösung den Ansatz

$$y_1(x) = cxe^{2x} + de^{2x}$$

machen. Als Ableitungen erhalten wir

$$\begin{aligned} y_p(x) &= cxe^{2x} + de^{2x} \\ y_p'(x) &= 2cxe^{2x} + (c + 2d)e^{2x} \\ y_p''(x) &= 4cxe^{2x} + (4c + 4d)e^{2x} \end{aligned}$$

Setzen wir das ein, so bekommen wir die Beziehung

$$-12cxe^{2x} - (2c + 18d)e^{2x} = 12xe^{2x} + 4e^{2x}$$

also $c = -1$ und $d = -\frac{1}{9}$ bzw. $y_1(x) = -xe^{2x} - \frac{1}{9} \cdot e^{2x}$.

Wir betrachten nun

$$y''(x) - 3y'(x) - 10y(x) = 20x$$

Da $\lambda = 0$ keine Nullstelle von $P_D(x)$ ist, können wir hier den Ansatz $y_2(x) = cx + d$ machen und erhalten durch Einsetzen

$$-10cx - 10d - 3c = 20x$$

also $c = -2$ und $d = \frac{3}{5}$ bzw. $y_2(x) = -2x + \frac{3}{5}$. Damit erhalten wir insgesamt als spezielle Lösung

$$y_p(x) = -xe^{2x} - \frac{1}{9} \cdot e^{2x} - 2x + \frac{3}{5}$$

Das charakteristische Polynom $P_D(x) = x^2 - 3x - 10$ hat die Nullstellen $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 5$, und damit erhalten wir die allgemeine Lösung

$$y_p(x) = re^{-2x} + se^{5x} - xe^{2x} - \frac{1}{9} \cdot e^{2x} - 2x + \frac{3}{5}$$

Einsetzen der Anfangsbedingung ergibt

$$\begin{aligned} 4 &= r + s - \tfrac{1}{9} + \tfrac{3}{5} \\ 6 &= -2r + 5s - \tfrac{29}{9} \end{aligned}$$

woraus $r = \frac{17}{9}$ und $s = \frac{13}{5}$ folgt. Damit erhalten wir als Lösung des Anfangswertproblems

$$y_p(x) = \frac{17}{9} \cdot e^{-2x} + \frac{13}{5} \cdot e^{5x} - xe^{2x} - \frac{1}{9} \cdot e^{2x} - 2x + \frac{3}{5}$$

Aufgabe 5. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$$

mit $y(0) = 4$, $y'(0) = -7$, $y''(0) = 7$ und $y^{(3)}(0) = -25$.

Lösung:
Es handelt sich um eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und charakteristischem Polynom

$$P_D(x) = x^4 - 5x^2 + 4$$

Die Gleichung

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

ist biquadratisch und daher leicht zu lösen. Substitution $z = x^2$ macht daraus

$$z^2 - 5z + 4 = 0$$

mit den beiden Lösungen $z_1 = 1$ und $z_2 = 4$. Resubstitution liefert für $P_D(x)$ die Nullstellen

$$\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 1,\ \lambda_4 = 2$$

Damit erhalten wir als allgemeine Lösung

$$y(x) = r \cdot e^x + s \cdot e^{-x} + t \cdot e^{2x} + u \cdot e^{-2x}$$

Hierfür gilt

$$\begin{aligned} y'(x) &= re^x - se^{-x} + 2te^{2x} - 2ue^{-2x} \\ y''(x) &= re^x + se^{-x} + 4te^{2x} + 4ue^{-2x} \\ y^{(3)}(x) &= re^x - se^{-x} + 8te^{2x} - 8ue^{-2x} \end{aligned}$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen führt zum Gleichungssystem

$$\begin{array}{lcrcrcrcr} 4 & = & r & + & s & + & t & + & u \\ -7 & = & r & - & s & + & 2t & - & 2u \\ 7 & = & r & + & s & + & 4t & + & 4u \\ -25 & = & r & - & s & + & 8t & - & 8u \end{array}$$

mit den Lösungen $r = 1$, $s = 2$, $t = -1$ und $u = 2$, also zur Lösung

$$y(x) = e^x + 2 \cdot e^{-x} - e^{2x} + 2 \cdot e^{-2x}$$

unseres Anfangswertproblems.

Aufgabe 6. Bestimmen Sie die die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{array}{rcrcr} y_1'(x) & = & y_1(x) & - & 5y_2(x) \\ y_2'(x) & = & 4y_1(x) & - & 7y_2(x) \end{array}$$

mit $y_1(0) = 8, y_2(0) = 2$.

Lösung: Siehe Übungsblatt 9