DHBW Mannheim	Mannheim, 10.05.2023
Informatik	Mathematik II/2

Lösungen zu Übungsblatt 5

Aufgabe 1. In einem ausgewählten Ort scheint an 55 % aller Tage die Sonne und es ist niederschlagsfrei, an 25 % aller Tage ist es bewölkt aber niederschlagsfrei und an 20 % aller Tage regnet es ununterbrochen. Ein Bewohner dieses Ortes schaut jeden Morgen ehe er das Haus verlässt aus dem Fenster. Falls es regnet, nimmt er mit Wahrscheinlichkeit 90 % seinen Regenschirm mit (er ist vergesslich), falls es bewölkt ist aber nicht regnet, nimmt er mit Wahrscheinlichkeit 50 % seinen Regenschirm mit (er ist unsicher) und falls die Sonne scheint, nimmt er mit Wahrscheinlichkeit 15 % seinen Regenschirm mit (er ist Pessimist).

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person das Haus mit Regenschirm verlässt.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Sonne scheint, wenn diese Person am Morgen das Haus mit dem Regenschirm verlässt.

Lösung:
Wir bezeichnen mit A das Ereignis

A : der Bewohner des Ortes verlässt das Haus mit Regenschirm

und betrachten zudem die Ereignisse

R : es regnet an diesem Tag
W : es ist bewölkt aber niederschlagsfrei an diesem Tag
S : es schein die Sonne an diesem Tag

Wir wissen

$$p(R) = 0.20, \qquad p(W) = 0.25, \qquad P(S) = 0.55$$

und

$$p(A|R) = 0.90 \qquad p(A|W) = 0.50, \qquad p(A|S) = 0.15$$

a) Gesucht ist $p(A)$. Nach dem **Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit** gilt

$$\begin{aligned} p(A) &= p(A|R) \cdot p(R) + p(A|W) \cdot p(W) + p(A|S) \cdot p(S) \\ &= 0.90 \cdot 0.20 + 0.50 \cdot 0.25 + 0.15 \cdot 0.55 \\ &= 0.18 + 0.125 + 0.0825 \\ &= 0.3875 \end{aligned}$$

Die fragliche Person geht also mit einer Wahrscheinlichkeit von 38.75 % mit Regenschirm aus dem Haus.

b) Gesucht ist $p(S|A)$. Nach dem **Satz von Bayes** gilt

$$\begin{aligned} p(S|A) &= \tfrac{p(A|S)\cdot p(S)}{p(A)} \\ &= \tfrac{0.15\cdot 0.55}{0.3875} = \tfrac{0.0825}{0.3875} \\ &\approx 0.2129 \end{aligned}$$

(wobei wir bereits das Ergebnis aus Teil a) ausgenutzt haben). Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Sonne scheint, wenn der Bewohner das Haus mit Regenschirm verlässt, beträgt also ca. 21.3 %.

Aufgabe 2. Wird eine Produktionsanlage am Morgen vor Beginn ihres Einsatzes gewartet, so beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass sie an diesem Tag ausfällt, 0.60 %, wird die Wartung unterlassen, so beträgt sie 8.00 %.
Aus Bequemlichkeit lässt der verantwortliche Wartungsingenieur die morgendliche Wartung mit einer Wahrscheinlichkeit von 20.00 % ausfallen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Produktionsanlage an einem gegebenen Tag ausfällt?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Produktionsanlage an diesem Tag nicht gewartet wurde, wenn sie ausfällt?

c) Ein anderer Ingenieur übernimmt die Urlaubsvertretung des Wartungsingenieurs. In der Zeit seiner Urlaubsvertretung beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass die Produktionsanlage an einem gegebenen Tag ausfällt, genau 1.49 %.

   Mit welcher Wahrscheinlichkeit lässt dieser Ingenieur die tägliche Wartung ausfallen?

Lösung:

a) Wir betrachten die beiden Ereignisse

   W : die Maschine ist an einem gegeben Tag gewartet
   A : die Produktionsanlage fällt an einem gegebenen Tag aus

   Wir wissen

$$\begin{array}{lll} p(\overline{W}) = 0.2, & \text{also} & p(W) = 0.8 \\ p(A|W) = 0.006 & & p(A|(\overline{W}) = 0.08 \end{array}$$

   Damit können wir den **Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit** anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} p(A) &= p(A|W)\cdot p(W) + p(A|\overline{W})\cdot p(\overline{W}) \\ &= 0.006\cdot 0.8 + 0.08\cdot 0.2 \\ &= 0.0208 \end{aligned}$$

   Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Produktionsanlage an einem gegebenen Tag ausfällt, beträgt also 2.08 %.

b) Mit den Bezeichnungen und den Ergebnissen aus Teil a) suchen wir die Wahrscheinlichkeit $p(\overline{W}|A)$. Dazu verwenden wir den **Satz von Bayes**:

$$\begin{aligned} p(\overline{W}|A) &= \frac{p(A|\overline{W}) \cdot p(\overline{W})}{p(A)} \\ &= \frac{0.08 \cdot 0.2}{0.0208} \\ &\approx 0.7692 \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 76.92 % wurde die Maschine also an einem Tag, an dem sie ausfüllt, nicht gewartet.

c) Wir betrachten nun die Ereignisse

V : die Maschine ist an einem von der Vertretung gegeben Tag gewartet
A : die Produktionsanlage fällt an einem gegebenen Tag aus

Wie in Teil a) gilt

$$p(A|V) = 0.006, \qquad p(A|(\overline{V}) = 0.08$$

Gesucht ist $p(\overline{V})$, und bekannt ist, dass $p(A) = 0.0149$. Nach dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit gilt

$$p(A) = p(A|V) \cdot p(V) + p(A|\overline{V}) \cdot p(\overline{V})$$

Setzen wir $x = p(\overline{V})$, so gilt $p(V) = 1 - x$, und damit erhalten wir die Gleichung

$$0.0149 = 0.006 \cdot (1 - x) + 0.08 \cdot x = 0.006 + 0.0740 \cdot x$$

also

$$0.0089 = 0.074 \cdot x$$

und damit

$$x = 0.1203$$

Der Vertretungsingenieur lässt also mit einer Wahrscheinlichkeit von 12 % die tägliche Wartung ausfallen.

Beachten Sie, dass für diesen Aufgabenteil die Ergebnisse aus den Teilen a) und b) über W nicht herangezogen werden können, da sich diese auf den Wartungsingenieur, nicht auf seine Vertretung, beziehen.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass für drei Ereignisse $A, B, C \in \mathcal{A}$ mit $p(A) > 0, p(B) > 0$ und $p(C) > 0$ die folgende Formel gilt:

$$p(A \cap B \cap C) = p(A) \cdot p(B|A) \cdot p(C|(A \cap B))$$

Lösung:
Wir betrachten die rechte Seite und wenden darauf die definierende Formel für bedingte Wahrscheinlichkeiten an:

$$\begin{aligned}
p(A) \cdot p(B|A) \cdot p(C|A \cap B) &= p(A) \cdot \tfrac{p(B \cap A)}{p(A)} \cdot \tfrac{p(C \cap A \cap B)}{p(A \cap B)} \\
&= p(A) \cdot \tfrac{p(A \cap B)}{p(A)} \cdot \tfrac{p(A \cap B \cap C)}{p(A \cap B)} \\
&= p(A \cap B \cap C)
\end{aligned}$$