Kapitel 3

Differenzierbarkeit

3.1 Partielle Differenzierbarkeit

Für Funktionen in einer Veränderlichen hat uns nicht nur die Stetigkeit interessiert. Mindestens genauso wichtig, ja vielleicht sogar wichtiger war die Frage der Differenzierbarkeit einer Funktion, da wir daraus Information über die "Glattheit" einer Funktion in einem Punkt erhalten und dadurch auch in der Umgebung eines Punktes eine erste Näherung an die Funktion durch ihre Tangente erhalten. Solche Fragen interessieren natürlich genauso im Fall von Funktionen $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ oder Abbildungen $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$. In diesem Fall ist aber nicht klar, was unter Begriffen wie "Tangente" und "Sekante" überhaupt zu verstehen ist. Der Differenzenquotient etwa, der uns die Sekantensteigung geliefert hat, lässt sich im Mehrdimensionalen nicht einmal mehr vernünftig betrachten, da wir den Ausdruck $\frac{f(y)-f(x)}{x-y}$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$ nicht bilden können.

Zunächst wollen wir uns mit Funktionen in zwei Veränderlichen befassen. Sei also

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion, wobei wir annehmen, dass $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen ist, und sei $(a, b) \in D$ ein Punkt. Wir schreiben wieder (x, y) anstelle von (x_1, x_2) um die Notation zu vereinfachen. Wie wir schon im Abschnitt 1.2 gesehen haben, können wir f

auch dadurch studieren, dass wir eine Variable festhalten und die Funktionen

$$\begin{aligned} g(x) &= g_b(x) &= f(x,b) \\ h(y) &= h_a(y) &= f(a,y) \end{aligned}$$

betrachten. Setzen wir $D_{y=b} = \{x \in \mathbb{R} | \, (x,b) \in D\}$, so ist $D_{y=b} \subseteq \mathbb{R}$, und wir erhalten eine Funktion

$$g = g_b : D_{y=b} \longrightarrow \mathbb{R}$$

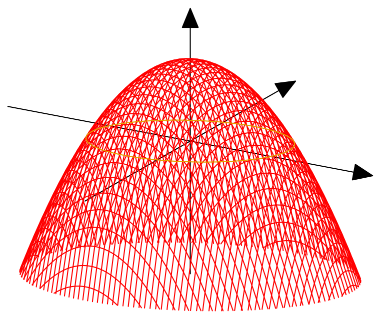
in einer Variablen, wie wir sie schon in der Analysis einer Veränderlichen betrachtet haben, und vollkommen analog

$$h = h_a : D_{x=a} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Beispiel 3.1.1. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto 3 - x^2 - 2y^2 + xy$$

die durch folgenden Graphen beschrieben wird:



$y = f(x,y)$ Abbildung 3.1: $z = 3 - x^2 - 2y^2 + xy$

Nun betrachten wir den Punkt $(1,1)$ und halten zunächst $y = 1$ fest. Das gibt die Funktion

$$g(x) = f(x,1) = 1 - x^2 + x$$

in einer Variablen x, also eine Parabel.

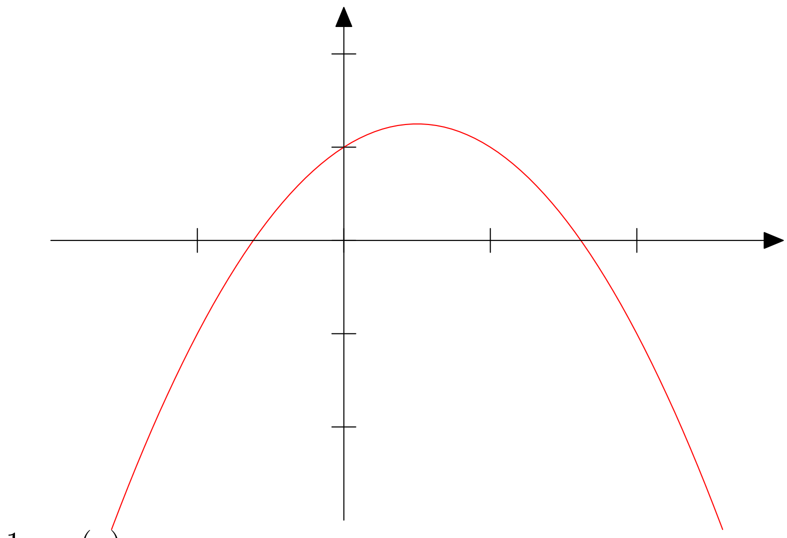


Abbildung 3.2: $g(x) = f(x, 1)$

Dieses Bild bekommen wir dadurch, dass wir das Bild von f mit der Ebene $y = 1$ schneiden. Wenn wir also, wie in Abschnitt 1.2 die Fläche

$$A = \{(x, y, f(x, y) | \, (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{(x, y, 3 - x^2 - 2y^2 + xy) | \, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

betrachten, so ergibt sich der Graph von g als

$$A \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, | \, y = 1\}$$

Ebenso können wir $x = 1$ festhalten. Das führt zur Funktion

$$h(y) = f(1, y) = 2 - 2y^2 + y$$

für die wir (mit den gleichen Überlegungen) wiederum eine Parabel (mit anderer Öffnung) erhalten.

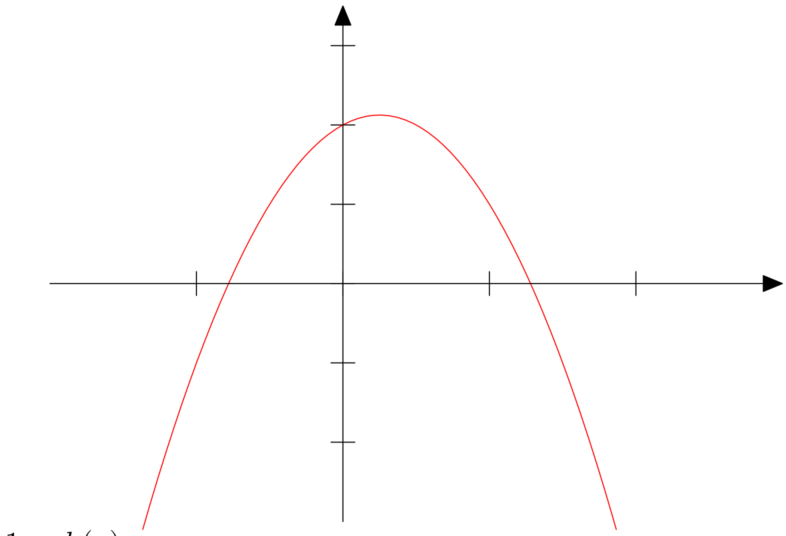


Abbildung 3.3: $h(y) = f(1, y)$

Wir bekommen also zwei Funktionen, wie wir sie bereits im ersten Teil der Analysis intensiv studiert haben.

Für diese Funktionen, die wir durch Festhalten einer Variable erhalten, können wir also unsere Kenntnisse aus der Analysis einer Veränderlichen anwenden. Speziell ergeben also Begriffe wie Steigung, Tangente und Differenzenquotient wieder Sinn.

Für die Funktion $g(x) = g_b(x)$ etwa hat die Tangente im Punkt $x = a$ die Steigung

$$m_a := \lim_{x \to a} \frac{g_b(x) - g_b(a)}{x - a},$$

falls dieser Grenzwert existiert. Setzen wir die Definition von $g_b(x)$ ein, so erhalten wir

$$m_a = \lim_{x \to a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a}$$

und diese Art von Differenzenquotient ist auch im Zweidimensionalen sinnvoll. Analog können wir natürlich auch die erste Variable festhalten, $h(y)$ im Punkt $y = b$ betrachten und erhalten hier für die Tangentensteigung

$$m_b = \lim_{y \to b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b}$$

Beispiel 3.1.2. Für die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto 3 - x^2 - 2y^2 + xy$$

aus Beispiel 3.1.1 und den Punkt $(a, b) = (1, 1)$ ergibt das

$$\begin{aligned} m_a &= \lim_{x\to 1} \tfrac{f(x,1)-f(1,1)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1} \tfrac{x-x^2}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1} \tfrac{-x(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1} -x \\ &= -1 \end{aligned}$$

mit diesem Bild

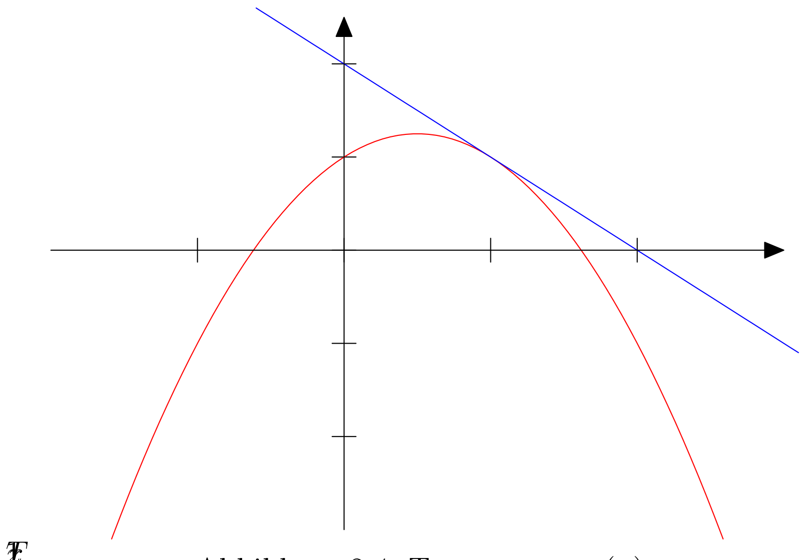


Abbildung 3.4: Tangente an $g(x)$

Vollkommen analog erhalten wir

$$\begin{aligned} m_b &= \lim_{y\to 1} \tfrac{f(1,y)-f(1,1)}{y-1} \\ &= -3 \end{aligned}$$

mit folgendem Bild.

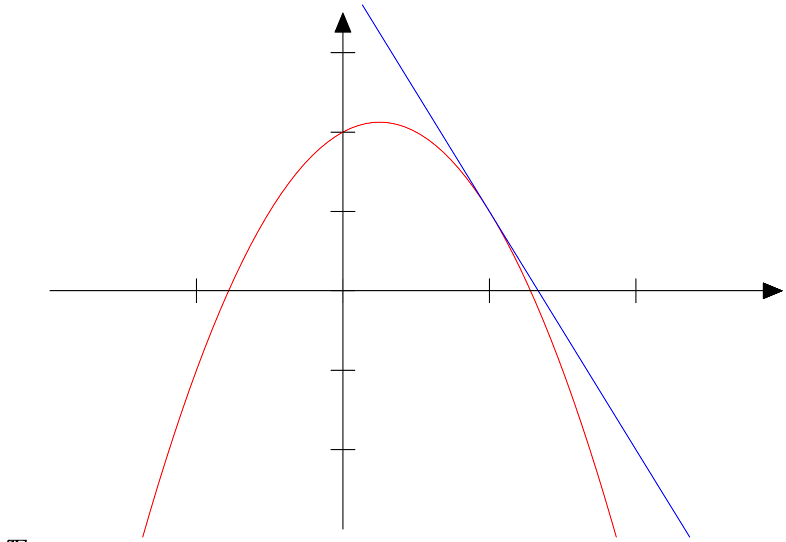


Abbildung 3.5: Tangente an $h(y)$

Wir erhalten also in der Tat jeweils die Tangenten in den betrachteten Punkten.

Definition 3.1.1. Wir betrachten eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, und eine Punkt $(a, b) \in D$.
f heißt **partiell differenzierbar** nach der ersten Variable x im Punkt (a, b), wenn der Grenzwert

$$f_x(a,b) := \lim_{x \to a} \frac{f(x,b) - f(a,b)}{x - a}$$

existiert. In diesem Fall heißt $f_x(a, b)$ die **partielle Ableitung erster Ordnung** von f nach x and der Stelle (a, b).
f heißt **partiell differenzierbar** nach der zweiten Variable y im Punkt (a, b), wenn der Grenzwert

$$f_y(a,b) := \lim_{y \to b} \frac{f(a,y) - f(a,b)}{y - b}$$

existiert. In diesem Fall heißt $f_y(a, b)$ die **partielle Ableitung** erster Ordnung von f nach y and der Stelle (a, b).

Bezeichnung:
Anstelle von $f_x(a, b)$ werden wir auch häufig $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ schreiben, und analog $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ für $f_y(a, b)$.

Der Nachweis der partiellen Differenzierbarkeit mit Grenzwertbetrachtungen ist mühsam und langwierig. Hier hilft uns fogendes Resultat:

Satz 3.1.1. *Wir betrachten eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und einen Punkt $(a, b) \in D$, und wir setzen*

$$\begin{array}{rcccl} g(x) & = & g_b(x) & = & f(x,b) \\ h(y) & = & h_a(y) & = & f(a,y) \end{array}$$

Genau dann ist $f(x, y)$ in (a, b) partiell nach x differenzierbar, wenn $g(x)$ in $x = a$ differenzierbar ist, und in diesem Fall gilt

$$f_x(a,b) = g'(a)$$

Genau dann ist $f(x, y)$ in (a, b) partiell nach y differenzierbar, wenn $h(y)$ in $y = b$ differenzierbar ist, und in diesem Fall gilt

$$f_y(a,b) = h'(b)$$

Beispiel 3.1.3. Ist $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = x^3 + 2x^2y^2 + xy^4$, so ist $f(x, y)$ in $(3, 4)$ partiell differenzierbar nach x und nach y.
Ein direkter Nachweis dieser Eigenschaft mit Hilfe von Grenzwertbetrachtungen ist bereits in dieser recht einfachen Situation mühsam und langwierig. Deshalb greifen wir auf die Regel aus Satz 3.1.1 zurück:
Die Funktion $g(x) = g_4(x) = x^3 + 32x^2 + 256x$ ist differenzierbar im Punkt $x = 3$ mit Ableitung $g'(3) = 475$. Also ist $f(x, y)$ in $(3, 4)$ partiell nach x differenzierbar mit partieller Ableitung

$$f_x(3,4) = 475$$

Ebenso ist $h(y) = 27 + 18y^2 + 3y^4$ im Punkt $y = 4$ differenzierbar mit Ableitung $h'(4) = 912$. Also ist $f(x, y)$ in $(3, 4)$ partiell nach y differenzierbar mit partieller Ableitung

$$f_y(3,4) = 912$$

Diese Überlegungen lassen sich auf jeden Punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ übertragen und wir erhalten:

Die Funktion $f(x,y)$ ist in (a,b) partiell nach x differenzierbar mit partieller Ableitung

$$f_x(a,b) = 3a^2 + 4ab^2 + b^4$$

und $f(x,y)$ ist in (a,b) partiell nach y differenzierbar mit partieller Ableitung

$$f_y(a,b) = 4a^2b + 4ab^3$$

Beispiel 3.1.4. Wir berachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto x$$

also die Projektion auf die erste Komponente und einen beliebigen Punkt $(a,b) \in \mathbb{R}$. Dann ist die partielle Funktion

$$g(x) = f(x,b) = x$$

offensichtlich differenzierbar, und wir erhalten

$$f_x(a,b) = g'(a) = 1$$

Ebenso ist die partielle Funktion

$$h(y) = f(a,y) = a$$

als konstante Funktion offensichtlich differenzierbar, und wir erhalten

$$f_y(a,b) = h'(b) = 0$$

Genauso zeigen wir natürlich auch, dass die zweite Koordinatenprojektion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto y$$

in jedem Punkt (a,b) partiell differenzierbar ist mit

$$f_x(a,b) = 0, \quad f_y(a,b) = 1$$

Beispiel 3.1.5. Wir betrachten $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, y \neq 0\}$ und die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \frac{x}{y}$. Mit den Überlegungen aus Beispiel 3.1.3 sehen wir:

Die Funktion $f(x, y)$ ist in jedem Punkt (a, b) partiell nach x differenzierbar mit partieller Ableitung

$$f_x(a, b) = \frac{1}{b}$$

Die Funktion $f(x, y)$ ist in jedem Punkt (a, b) partiell nach y differenzierbar mit partieller Ableitung

$$f_x(a, b) = -\frac{a}{b^2}$$

Bemerkung 3.1.1. Wie im Fall einer Veränderlichen auch, hängt die partielle Ableitung von $f(x, y)$ nach x bzw. nach y in einem Punkt wieder von den Variablen ab. Wir erhalten also wieder Funktionen in zwei Variablen, für die wir kurz $f_x(x, y)$ und $f_y(x, y)$ oder, in der Notation mit den partiellen Differentialoperatoren, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ schreiben.
Wenn wir also schreiben "Für $f(x, y)$ ist $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \ldots$" so bedeutet das, dass $f(x, y)$ an jedem Punkt $(a, b) \in D$ partiell nach x differenzierbar ist und dass gilt $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \ldots$.

Beispiel 3.1.6. Für die Funktion $f(x, y) = x^3+2x^2y^2+xy^4$ aus Beispiel 3.1.3 gilt

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & = & 3x^2 + 4xy^2 + y^4 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) & = & 4x^2y + 4xy^3 \end{array}$$

und für die Funktion $f(x, y) = \frac{x}{y}$ aus Beispiel 3.1.3 gilt

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & = & \frac{1}{y} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) & = & -\frac{x}{y^2} \end{array}$$

Aus Satz 3.1.1 und den entsprechenden Aussagen für Funktionen in einer Veränderlichen leiten wir sofort die folgenden allgemeinen Regeln ab

Satz 3.1.2. *Ist $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, sind $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ partiell nach x differenzierbar und ist $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Konstante, so erhalten wir:*

1. *Die Funktion $\lambda \cdot f$ ist partiell nach x differenzierbar mit*

$$(\lambda \cdot f)_x (x, y) = \lambda \cdot f_x(x, y)$$

2. *Es gilt die* ***Summenregel:***

   Die Funktionen $f+g$ und $f-g$ sind partiell nach x differenzierbar mit

$$\begin{aligned}(f+g)_x(x,y) &= f_x(x,y)+g_x(x,y) \text{ und}\\ (f-g)_x(x,y) &= f_x(x,y)-g_x(x,y).\end{aligned}$$

3. *Es gilt die* ***Produktregel:***

   Die Funktion $f \cdot g$ ist partiell nach x differenzierbar mit

$$(f \cdot g)_x(x,y) = f_x(x,y) \cdot g(x,y) + f(x,y) \cdot g_x(x,y)$$

4. *Falls $g(x,y) \neq 0$, so gilt die* ***Quotientenregel:***

   Die Funktion $\frac{f}{g}$ ist partiell nach x differenzierbar mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)_x(x,y) = \frac{f_x(x,y)g(x,y) - f(x,y)g_x(x,y)}{g(x,y)^2}$$

Die analogen Aussagen gelten für partielle Differenzierbarkeit nach y.

Satz 3.1.3. ***(Kettenregel)*** *Ist $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, ist $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ partiell nach x differenzierbar, ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $f(D) \subseteq I$ und ist $h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzeirbare Funktion, so ist auch $h \circ f$ partiell nach x differenzierbar und es gilt*

$$(h \circ f)_x(x,y) = h'(f(x,y)) \cdot f_x(x,y)$$

Die analoge Aussage gilt für partielle Differenzierbarkeit nach y.

Beispiel 3.1.7. Wir betrachten die Funktionen $f(x,y) = x$ und $g(x,y) = y$. Beide sind nach Beispiel 3.1.4 partiell nach x und y differenzierbar mit

$$\begin{aligned}f_x(x,y) = 1 \qquad f_y(x,y) = 0\\ g_x(x,y) = 0 \qquad g_y(x,y) = 1\end{aligned}$$

Damit ist also auch $h(x,y) = x+y$ partiell differenzierbar nach x und y mit

$$h_x(x,y) = 1, \quad h_y(x,y) = 1.$$

Ebenso ist $l(x, y) = x \cdot y$ partiell differenzierbar nach x und y mit

$$l_x(x, y) = y, \quad l_y(x, y) = x$$

Durch wiederholte Anwendung der Produktregel erhalten wir, dass für alle $n, m \in \mathbb{N}$ die Funktion $k(x, y) = x^n \cdot y^m$ partiell nach x und nach y differenzierbar ist mit

$$k_x(x, y) = n \cdot x^{n-1} \cdot y^m, \quad k_y(x, y) = m \cdot x^n \cdot y^{m-1}$$

Beispiel 3.1.8. Es sei $f(x, y) = x^3y^2 + y^2x$. Wir wenden die Summenregel an mit den Termen $u(x, y) = x^3y^2$ und $v(x, y) = y^2x$ (und Beispiel 3.1.7) und erhalten

$$f_x(x, y) = 3x^2y^2 + y^2, \quad f_y(x, y) = 2x^3y + 2yx$$

Ganz allgemein erhalten wir aus den Überlegungen von oben

Regel 3.1.4. *Ist $p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion in 2 Variablen, so ist p in ganz $\mathbb{R}^2$ partiell nach x und nach y differenzierbar.*
Ist $p : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine rationale Funktion in zwei Variablen mit maximalem Definitionsbereich D, so ist p in ganz D partiell nach x und nach y differenzierbar.

Beispiel 3.1.9. Wir setzen $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\, x \neq y \text{ und } x \neq -y\}$ und die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \frac{x^2+xy+2y^3}{x^2-y^2}$. Dann ist f partiell nach x und nach y differenzierbar und nach der Quotientenregel gilt

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \frac{-6xy^2-x^2y-y^3}{(x^2-y^2)^2} \\ f_y(x, y) &= \frac{x^3+6x^2y+xy^2}{(x^2-y^2)^2} \end{aligned}$$

Beispiel 3.1.10. Wir betrachten $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \cos(x) + \sin(y)$. Wir wenden die Summenregel an mit $u(x, y) = \cos(x)$ und $v(x, y) = \sin(y)$. Dann gilt zunächst

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= -\sin(x) & u_y(x, y) &= 0 \\ v_x(x, y) &= 0 & v_y(x, y) &= \cos(y) \end{aligned}$$

nach der Kettenregel (zum Beispiel mit $p(x, y) = x$ und $h(x) = \cos(x)$), und damit

$$f_x(x, y) = -\sin(x) \qquad f_y(x, y) = \cos(y)$$

Beispiel 3.1.11. Wir betrachten $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2y^2 \cdot (\cos(x) + \sin(y))$. Wir wenden die Produktregel an mit $u(x, y) = x^2y^2$ und $v(x, y) = \cos(x) + \sin(y)$, benutzen Beispiel 3.1.10 und erhalten

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2xy^2 (\cos(x) + \sin(y)) - x^2y^2 \sin(x) \\ f_y(x,y) &= 2x^2y (\cos(x) + \sin(y)) + x^2y^2 \cos(y) \end{aligned}$$

Beispiel 3.1.12. Auf $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$ wenden wir die Kettenregel an mit $u(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ und $h(x) = \ln(x)$ und erhalten

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \tfrac{1}{x^2+y^2+1} \cdot 2x = \tfrac{2x}{x^2+y^2+1} \\ f_y(x,y) &= \tfrac{1}{x^2+y^2+1} \cdot 2y = \tfrac{2y}{x^2+y^2+1} \end{aligned}$$

Beispiel 3.1.13. Es sei $f(x, y) = \sin(x^2 + y^3 - xy)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \cos(x^2 + y^3 - xy) \cdot (2x - y) \\ f_y(x,y) &= \cos(x^2 + y^3 - xy) \cdot (3y^2 - x) \end{aligned}$$

Beispiel 3.1.14. Es sei $f(x, y) = x^2y^3 + \cos(xy) \cdot e^{x^2+y^3} + \ln(x^2 + y^2 + 1)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2xy^3 - \sin(xy) \cdot y \cdot e^{x^2+y^3} + \cos(xy) \cdot e^{x^2+y^3} \cdot 2x + \tfrac{2x}{x^2+y^2+1} \\ &= 2xy^3 + (2x \cdot \cos(xy) - y \cdot \sin(xy))\, e^{x^2+y^3} + \tfrac{2x}{x^2+y^2+1} \\ \tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 3x^2y^2 - \sin(xy) \cdot x \cdot e^{x^2+y^3} + \cos(xy) \cdot e^{x^2+y^3} \cdot 3y^2 + \tfrac{2y}{x^2+y^2+1} \\ &= 3x^2y^2 + (3y^2 \cdot \cos(xy) - x \cdot \sin(xy))\, e^{x^2+y^3} + \tfrac{2y}{x^2+y^2+1} \end{aligned}$$

Wir haben uns bis jetzt auf den Fall von zwei Variablen beschränkt. Entsprechenden Definition und Aussagen haben wir aber auch für drei und mehr Variablen. Dazu fixieren wir jetzt eine offene Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$, eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ und eine Punkt $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in D$. Für jedes $i = 1, \ldots, n$ betrachten wir die offene Teilmenge

$$U_{i,a} := \{x \in \mathbb{R} |\, (a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in D\} \subseteq \mathbb{R}$$

und wir definieren die Funktion

$$f_{i,a} : U_{i,a} \longrightarrow \mathbb{R}$$

durch $f_{i,a}(x) = f((a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots a_n))$. Wir fixieren also alle Komponenten bis auf die i–te Komponente und lassen nur noch diese laufen.

Beispiel 3.1.15. Ist $D = \mathbb{R}^3$, ist $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2^2 x_3^3$$

und ist $a = (3, 2, 1)$, so ist $U_{i,a} = \mathbb{R}$ für alle i und

$$f_{1,a}(x) = 4x, \qquad f_{2,a}(x) = 3x^2, \qquad f_{3,a} = 12x^3$$

Allgemein gilt für beliebiges $a = (a_1, a_2, a_3)$:

$$f_{1,a}(x) = a_2^2 a_3^3 \cdot x, \quad f_{2,a}(x) = a_1 a_3^3 \cdot x^2, \quad f_{3,a} = a_1 a_2^2 \cdot x^3$$

Beispiel 3.1.16. Ist $D = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | \, x_3 \notin \{-1, 1\}\}$, ist $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ die Funktion, die durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2 x_2^2 x_3^2}{x_3^2 - 1}$$

gegeben ist und ist $a = (a_1, a_2, a_3) \in D$ beliebig, so gilt

$$U_{1,a} = U_{2,a} = \mathbb{R}, \quad U_{3,a} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

und

$$f_{1,a}(x) = \frac{x^2 a_2^2 a_3^2}{a_3^2 - 1}, \quad f_{2,a}(x) = \frac{a_1^2 x^2 a_3^2}{a_3^2 - 1}, \quad f_{3,a} = \frac{a_1^2 a_2^2 x_3^2}{x_3^2 - 1}$$

Beispiel 3.1.17. Ist $D = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | \, x_1 \neq x_2\}$, ist $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_3 - x_1}$$

und ist $a = (2, 3, 1) \in D$, so gilt

$$U_{1,a} = \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad U_{2,a} = \mathbb{R}, \quad U_{3,a} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

und

$$f_{1,a}(x) = \frac{x^2 + 9}{1 - x} \quad f_{2,a}(x) = \frac{4 + x^2}{-1} = -4 - x^2 \quad f_{3,a}(x) = \frac{13}{x - 2}$$

Ist $a = (a_1, a_2, a_3) \in D$ beliebig, so gilt

$$U_{1,a} = \mathbb{R}, \quad U_{2,a} = \mathbb{R} \setminus a_3, \quad U_{3,a} = \mathbb{R} \setminus a_1$$

und

$$f_{1,a}(x) = \frac{x^2 + a_2^2}{a_3 - x}, \quad f_{2,a}(x) = \frac{a_1^2 + x^2}{a_3 - a_1}, \quad f_{3,a} = \frac{a_1^2 + a_2^2}{x_3 - a_1}$$

Definition 3.1.2. Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ heißt **partiell differenzierbar** nach x_i in $a = (a_1, \ldots, a_n)$, wenn die Funkton $f_{i,a}(x)$ im Punkt a_i differenzierbar ist. In diesem Fall heißt

$$f_{x_i}(a_1, \ldots, a_n) := f'_{i,a}(a_i)$$

die **partielle Ableitung erster Ordnung** von f nach x_i an der Stelle a.

Bezeichnung:
Wir schreiben auch $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \ldots, a_n)$ für $f_{x_i}(a_1, \ldots, a_n)$.

Wir sagen f ist partiell differenzierbar, wenn f nach allen Variablen $x_1, \ldots, x_n$ partiell differenzierbar ist.

Bemerkung 3.1.2. Die partielle Ableitung von f nach x_i an der Stelle a berechnet sich auch als der Differentialquotient

$$\begin{aligned} f_{x_i}(a) &= \lim_{x \to a_i} \tfrac{f((a_1,\ldots,a_{i-1},x,a_{i+1},\ldots,a_n))-f((a_1,\ldots a_n))}{x-a_i} \\ &= \lim_{h \to 0} \tfrac{f((a_1,\ldots,a_{i-1},a_i+h,a_{i+1},\ldots,a_n))-f((a_1,\ldots a_n))}{h} \end{aligned}$$

Bemerkung 3.1.3. Die geometrische Interpretation der partiellen Ableitung von f nach x_i ist auch im höherdimensionalen Fall ähnlich zum Fall von Funktionen in zwei Variablen: Durch Festhalten der Werte

$$x_1 = a_1, \ldots x_{i-1} = a_{i-1}, x_{i+1} = a_{i+1}, \ldots, x_n = a_n$$

entsteht eine Funktion, die nur noch von einer Unbekannten abhängt, und deren Bild der Graph einer Funktion in einer Variablen (in der x_i–y–Ebene) ist. Die partielle Ableitung $f_{x_i}(a_1, \ldots, a_n)$ existiert genau dann, wenn die Tangente an diesen Graphen im Punkt a_i existiert.

Beispiel 3.1.18. Ist $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2^2 x_3^3$ die Funktion aus Beispiel 3.1.15, und ist $a = (3, 2, 1)$, so haben wir schon gesehen, dass

$$f_{1,a}(x) = 4x, \qquad f_{2,a}(x) = 3x^2, \qquad f_{3,a} = 12x^3$$

Damit ist f in $a = (3, 2, 1)$ partiell differenzierbar nach x_1, x_2 und x_3, und es gilt

$$f_{x_1}(a) = 4, \quad f_{x_2}(a) = 12, \quad f_{x_3}(a) = 36$$

Beispiel 3.1.19. Ist $f(x_1,x_2,x_3)=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_3-x_1}$ die Funktion aus Beispiel 3.1.15, und ist $a=(2,3,1)$, so haben wir schon gesehen haben, dass

$$f_{1,a}(x)=\frac{x^2+9}{1-x} \quad f_{2,a}(x)=\frac{4+x^2}{-1}=-4-x^2 \quad f_{3,a}(x)=\frac{13}{x-2}$$

Damit existieren alle partiellen Ableitungen in a, und es gilt

$$f_{x_1}(a)=9 \quad f_{x_2}(a)=-6, \quad f_{x_3}(a)=-13$$

Bemerkung 3.1.4. Auch hier gilt Bemerkung 3.1.1: Die partiellen Ableitungen von f nach x_i hängen wieder von den Variablen ab, wenn wir a variieren lassen, und definiert daher eine neue Funktion $f_{x_i}(a_1,\ldots,x_n)$ oder $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x_n)$.

Die Regeln, die wir für zwei Variablen kennengelernt haben, übertragen sich sofort:

Satz 3.1.5. *Es sei $D\subseteq\mathbb{R}^n$ offen. Sind $f,g:D\longrightarrow\mathbb{R}$ partiell nach x_i differenzierbar und ist $\lambda\in\mathbb{R}$ eine Konstante, so erhalten wir:*

1. *Die Funktion $\lambda\cdot f$ ist partiell nach x_i differenzierbar mit*

$$(\lambda\cdot f)_{x_i}(x_1,\ldots,x_n)=\lambda\cdot f_{x_i}(x_1,\ldots,x_n)$$

2. *Es gilt die* ***Summenregel:***

   Die Funktionen $f+g$ und $f-g$ sind partiell nach x_i differenzierbar mit

$$\begin{aligned}(f+g)_{x_i}(x_1,\ldots,x_n) &= f_{x_i}(x_1,\ldots,x_n)+g_{x_i}(x_1,\ldots,x_n) \text{ und}\\ (f-g)_{x_i}(x_1,\ldots,x_n) &= f_{x_i}(x_1,\ldots,x_n)-g_{x_i}(x_1,\ldots,x_n).\end{aligned}$$

3. *Es gilt die* ***Produktregel:***

   Die Funktion $f\cdot g$ ist partiell nach x_i differenzierbar mit

$$\begin{aligned}(f\cdot g)_{x_i}(x_1,\ldots,x_n) &= f_{x_i}(x_1,\ldots,x_n)\cdot g(x_1,\ldots,x_n)\\ &\quad +f(x_1,\ldots,x_n)\cdot g_{x_i}(x_1,\ldots,x_n)\end{aligned}$$

4. *Falls $g(x_1,\ldots,x_n) \neq 0$, so gilt die* ***Quotientenregel:***

   Die Funktion $\frac{f}{g}$ ist partiell nach x_i differenzierbar mit

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)_{x_i}(x_1,\ldots,x_n) &= \tfrac{f_{x_i}(x_1,\ldots,x_n)g(x_1,\ldots,x_n)}{g(x_1,\ldots,x_n)^2} \\ &\quad - \tfrac{f(x_1,\ldots,x_n)g_{x_i}(x_1,\ldots,x_n)}{g(x_1,\ldots,x_n)^2}\end{aligned}$$

Satz 3.1.6 (Kettenregel)**.** *Ist $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, ist $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ partiell nach x_i differenzierbar, ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $f(D) \subseteq I$, und ist $h :\longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, so ist $h \circ f$ partiell nach x_i differenzierbar und*

$$(h \circ f)_{x_i}(x_1,\ldots,x_n) = h'(f(x_1,\ldots,x_n)) \cdot f_{x_i}(x_1,\ldots,x_n)$$

Beispiel 3.1.20. Die Koordinatenprojektion $f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = x_l$ auf die l–te Komponente ($l = 1,\ldots,n$) ist partiell differenzierbar nach allen x_i mit

$$\frac{\partial f}{\partial x_l}(x_1,\ldots,x_n) = 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x_n) = 0 \quad \text{für } i \neq l$$

wie sich sofort aus der Definition ergibt (vergleiche dazu auch Beispiel 3.1.4). Damit ist auch die Funktion

$$g(x_1,x_2,\ldots,x_n) = x_1 \cdot x_2$$

nach der Produktregel partiell differenzierbar mit

$$\begin{aligned}\tfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\ldots,x_n) &= x_2 \\ \tfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,\ldots,x_n) &= x_1 \\ \tfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x_3) &= 0 \quad \text{für } i \geq 3\end{aligned}$$

Genauso ist

$$h(x_1,x_2,\ldots,x_n) = x_1^2$$

partiell differenzierbar mit

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\ldots,x_n) = 2 \cdot x_1, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x_3) = 0 \quad \text{für } i \geq 2$$

Induktiv ergibt sich aus Beispiel 3.1.20, dass jeder Produktterm in $x_1,\ldots,x_n$ partiell differenzierbar ist, und dass für

$$f(x_1,\ldots,x_n) = x_1^{l_1} x_2^{l_2} \cdots x_n^{l_n}$$

mit $l_1, \ldots l_n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} l_i x_1^{l_1} \cdots x_i^{n_i - 1} \cdots x_n^{l_n} & \text{falls} \quad l_i > 0 \\ 0 & \text{falls} \quad l_i = 0 \end{cases}$$

Damit erhalten wir, wie schon im Fall von zwei Variablen aus der Summen–, der Produkt– und der Quotientenregel

Regel 3.1.7. *Ist $p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion in n Variablen, so ist p in ganz $\mathbb{R}^n$ partiell nach $x_1, \ldots, x_n$ differenzierbar.*
Ist $p : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine rationale Funktion in ni Variablen mit maximalem Definitionsbereich D, so ist p in ganz D partiell nach $x_1, \ldots, x_n$ differenzierbar.

Beispiel 3.1.21. Die Funktion $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^3 + x_3^4$ kann nach Regel 3.1.7 partiell abgeleitet werden:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = 2x_1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = 3x_2^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = 4x_3^3$$

Beispiel 3.1.22. Die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^3}{1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

kann nach Regel 3.1.7 partiell abgeleitet werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) &= \frac{3x_1^2(1+x_1^2+x_2^2+x_3^2) - 2x_1^4}{\left(1+x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) &= \frac{-2x_1^3 x_2}{\left(1+x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) &= \frac{-2x_1^3 x_3}{\left(1+x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^2} \end{aligned}$$

Beispiel 3.1.23. Es sei $D = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | \, x_i > 0 \, (i = 1, 2, 3)\}$. Für die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 + x_2^3 + x_3^4}$ bilden wir die partiellen Ableitungen am besten mit der Kettenregel, angewandt auf

$$u(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^3 + x_3^4, \quad h(x) = \sqrt{x}$$

Da wir die partiellen Ableitungen von u schon aus Beispiel 3.1.21 kennen, erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) &= \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^3+x_3^4}} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) &= \frac{3x_2^2}{2\sqrt{x_1^2+x_2^3+x_3^4}} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) &= \frac{2x_3^3}{\sqrt{x_1^2+x_2^3+x_3^4}} \end{aligned}$$

Beispiel 3.1.24. Wir wollen nun die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

auf partielle Differenzierbarkeit untersuchen. Falls $(a,b) \neq (0,0)$, so greift Regel 3.1.7 und liefert sofort, dass f in (a,b) sowohl nach x als auch nach y partiell differenzierbar ist. Zu untersuchen bleibt also der Punkt (0, 0). Hier greift keine unserer Regeln. Wir betrachten daher zunächst die partielle Funktion

$$f_{1,(0,0)}(x) = f(x,0) = \frac{x^3+0}{x^2+0} = x$$

Diese ist offensichtlich differenzierbar im Punkt 0, und daher ist f in $(0,0)$ partiell nach x differenzierbar mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = f'_{1,(0,0)}(0) = 1$$

und vollkommen analog erahlten wir, dass f in $(0,0)$ partiell nach y differenzierbar ist mit

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = f'_{2,(0,0)}(0) = 1$$

Definition 3.1.3. Es sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Dann heißt

$$\operatorname{grad}(f)(x) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$$

der **Gradient** von f an der Stelle x

Beispiel 3.1.25. Es sei $D = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^3 | \, x_i > 0 \, (i = 1,2,3,4)\}$ und es sei $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}(f)(x) \;=\; & \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}} \;,\; \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}},\right. \\ & \left.\frac{x_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}} \;,\; \frac{x_4}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}}\right)\end{aligned}$$

Bezeichnung::

Für $\operatorname{grad}(f)$ schreiben wir auch $\nabla(f)$ und setzen kurz

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

Definition 3.1.4. Eine partiell differenzierbare Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt **stetig partiell differenzierbar** nach x_i an der Stelle $a = (a_1, \ldots, a_n)$, wenn die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ stetig in a ist. f heißt stetig partiell differenzierbar nach x_i, wenn $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ stetig in ganz D ist, und f heißt stetig partiell differenzierbar, wenn $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ für jedes x_i stetig in ganz D ist.

Beispiel 3.1.26. Die Funktion $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^3 + x_3^4$ ist stetig partiell differenzierbar.

Beispiel 3.1.27. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ist partiell differenzierbar nach x, aber in $(0,0)$ nicht stetig partiell differenzierbar nach x.
Für $(x,y) \neq (0,0)$ folgt nämlich nach unseren Regel sofort

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

und an der Stelle $(0,0)$ gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

wie wir sofort durch Betrachtung der partiellen Funktion

$$f_{1,(0,0)}(x,y) = f(x,0) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{x^2 \cdot 0}{x^2+0^2} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0) \end{array} \right\} = 0$$

sehen. Damit ist also f partiell nach x differenzierbar, aber diese partiellen Ableitungen sind nicht stetig in $(0,0)$. Betrachten wir nämlich die Folge $\left(a_l = \left(\frac{1}{l}, \frac{1}{l}\right)\right)_{l \geq 1}$, so gilt sicherlich $\lim\limits_{l\to\infty} a_l = (0,0)$, aber

$$\lim_{l\to\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(a_l) = \frac{1}{2} \neq \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

Die partiellen Ableitungen erster Ordnung einer Funktion in n Veränderlichen sind, wo sie definiert sind, wieder Funktionen in n Veränderlichen. Daher könne wir uns für diese wieder fragen, ob sie partiell differenzierbar sind.

Definition 3.1.5. Ist $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und ist $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion, so heißt f **zweimal partiell differenzierbar**, wenn alle partiellen Ableitunge $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)$ partiell differenzierbar sind.
In diesem Fall schreiben wir dann kurz $f_{x_i,x_j}(x)$ für $(f_{x_i})_{x_j}(x)$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ für $\frac{\partial f}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right)$ und nennen diesen Ausdruck die **zweite partielle Ableitung** von f nach x_j und x_i. Falls $i = j$, so schreiben wir auch $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$ anstelle von $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(x)$.
Sind die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig, so nennen wir f **zweimal stetig partiell differenzierbar**.

Bemerkung 3.1.5. Bei der Notation ist die Reihenfolge der Bildung der partiellen Ableitungen zu beachten. Der Ausdruck $f_{x_i,x_j}(x)$ bedeutet, dass wir zuerst die partielle Ableitung von f nach der Variablen x_i bilden und den entstehenden Ausdruck dann nach x_j ableiten. Diese Reihenfolge ist von Bedeutung, vergleiche dazu auch Aufgabe 36

Beispiel 3.1.28. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$$

ist zweimal stetig partiell differenzierbar. In der Tat berechnen wir durch iteratives Anwenden unserer Regeln:

$$\begin{array}{rclcrcl}
f_x(x, y) & = & \frac{2x}{1+x^2+y^2} & & f_y(x, y) & = & \frac{2y}{1+x^2+y^2} \\
f_{x,x}(x, y) & = & \frac{2+2y^2-2x^2}{(1+x^2+y^2)^2} & & f_{x,y}(x, y) & = & \frac{4xy}{(1+x^2+y^2)^2} \\
f_{y,x}(x, y) & = & \frac{4xy}{(1+x^2+y^2)^2} & & f_{y,y}(x, y) & = & \frac{2+2x^2-2y^2}{(1+x^2+y^2)^2}
\end{array}$$

Induktiv können wir nun von den partiellen Ableitungen zweiter Ordnung zu partiellen Ableitungen höherer Ordnung übergehen, wir nehmen also an, dass wir die partiellen Ableitungen bis zur Ordnung k schon erklärt haben und definieren:

Definition 3.1.6. Wir betrachten eine offene Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$, und eine k–mal partiell differenzierbare Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}} : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

der Ordnung k.
Die Funktion f heißt $(k+1)$–**mal partiell differenzierbar** wenn alle partiellen Ableitunge $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_k}}$ der Ordnung k partiell differenzierbar sind.
Auch in diesem Fall schreiben wir kurz $f_{x_{i_1},\ldots x_{i_{k+1}}}(x)$ für $\left(f_{x_{i_1},\ldots,x_{i_k}}\right)_{x_{k+1}}(x)$ und $\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_{k+1}}}(x)$ für $\frac{\partial f}{\partial x_{i_{k+1}}}\left(\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_k}}(x)\right)$ nun nennen diesen Ausdruck die $(k+1)$–**te partielle Ableitung** von f nach $x_{i_1},\ldots,x_{i_{k+1}}$.
Sind die partiellen Ableitungen bis zur Ordnung $k+1$ stetig, so nennen wir f $(k+1)$–**mal stetig partiell differenzierbar**.

Die Kombinatorik der höheren Ableitungen wird sehr komplex, da immer auf die Ableitungsreihenfolge zu achten ist. Erfreulicherweise greift in den praxisrelevanten Beispielen in der Regel

Satz 3.1.8. *Ist f eine 2–mal stetig partiell differenzierbare Funktion, so gilt für alle i,j:*

$$f_{x_i x_j}(x) = f_{x_j x_i}(x)$$

Ist allgemeiner f eine k–mal stetig partiell differenzierbare Funktion, so ist die Bildung der partiellen Ableitung $f_{x_{i_1},\ldots,x_{i_k}}$ unabhängig von der speziellen Reihenfolge der $x_{i_1},\ldots,x_{i_k}$. Es gilt also für jede Permutation $\sigma\in S_k$:

$$f_{x_{i_1},\ldots,x_{i_k}}(x) = f_{x_{i_{\sigma(1)}},\ldots,x_{i_{\sigma(k)}}}(x)$$

Bemerkung 3.1.6. Speziell für den Fall $n=2$ besagt der Satz: Ist f zweimal stetig partiell differenzierbar, so gilt.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)$$

Wie wir in Aufgabe 35 sehen werden, kann diese Formel falsch werden, wenn f zweimal partiell differenzierbar ist aber die zweiten partiellen Ableitungen nicht stetig sind.

Beweis: W ir betrachten nur den Fall $k=2$. Der allgemeine Fall folgt hieraus induktiv und bleibt dem Leser überlassen. Ferner betrachten wir nur den Fall $n=2$ und $i_1=1, i_2=2$. Der Beweis im allgemeinen Fall ist - bis auf Notation - identisch damit.

Wir wählen $(a,b) \in D$ und ein r, so dass $U = U_r(a,b) \subseteq D$. Für $y \in (b - \frac{r}{\sqrt{2}}, b + \frac{r}{\sqrt{2}})$ definieren wir die Funktion

$$g_y : (a - \frac{r}{\sqrt{2}}, a + \frac{r}{\sqrt{2}}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

in einer Veränderlichen durch $g_y(x) = f(x,y) - f(x,b)$. Dann ist g_y nach Voraussetzung stetig differenzierbar, und daher existiert nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung für jedes x ein $\xi = \xi(x) \in (a - x, a + x)$ mit

$$g_y(x) - g_y(a) = g_y'(\xi)(x - a) \tag{3.1}$$

wobei

$$g_y'(\xi) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, b)$$

Sei nun $G(y) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y)$. Dann können wir hierauf wieder den Mittelwertsatz anwenden und erhalten ein $\eta \in (b - y, b + y)$ mit

$$G(y) - G(b) = G'(\eta)(y - b)$$

also

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi, \eta)(y - b) \tag{3.2}$$

Kombinieren wir die Gleichungen 3.1 und 3.2, so erhalten wir

$$f(x,y) - f(x,b) - f(a,y) + f(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi, \eta)(x - a)(y - b) \tag{3.3}$$

Vertauschen wir die Rollen von x und y und starten wir mit

$$h_x(y) = f(x,y) - f(a,y)$$

so erhalten wir genauso eine Beziehung

$$f(x,y) - f(x,b) - f(a,y) + f(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi', \eta')(x - a)(y - b) \tag{3.4}$$

mit geeigneten $\xi' \in (a - x, a + x)$ und $\eta' \in (b - y, b + y)$. Aus den beiden Gleichungen 3.3 und 3.4 ergibt sich für $x \neq a$, $y \neq b$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi, \eta) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi', \eta') \tag{3.5}$$

Konvergiert $(x, y) \to (a, b)$, so konvergieren nach Konstruktion auch $(\xi, \eta) \to (a, b)$ und $(\xi', \eta') \to (a, b)$, und aus der Stetigkeit der partiellen Ableitungen und Gleichung 3.5 folgt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)$$

wie gewünscht.

Beispiel 3.1.29. Es sei $f(x, y) = x^3 y$. Dann ist f dreimal stetig partiell differenzierbar und die partiellen Ableitung bis zur Ordnung drei sind gegeben durch

$$\begin{array}{lcllcl}
f_x(x,y) & = & 3x^2y & f_y(x,y) & = & x^3 \\
f_{x,x}(x,y) & = & 6xy & f_{x,y}(x,y) & = & 3x^2 \\
f_{y,y}(x,y) & = & 0 & & & \\
f_{x,x,x}(x,y) & = & 6y & f_{x,x,y} & = & 6x \\
f_{x,y,y} & = & 0 & f_{y,y,y}(x,y) & = & 0
\end{array}$$

Hier nutzen wir bereits Satz 3.1.8 aus.

Zum Abschluß dieses Abschnitt wollen wir nun allgemeiner Abbildungen

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ betrachten.

Bemerkung 3.1.7. Eine Abbildung $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ wird auch (m–dimensionales) **Vektorfeld** genannt genannt.

In der Technik oder den Naturwissenschaften ist ein Vektorfeld eine physikalische Größe, die für jeden Punkte eines Menge gegeben ist und dort unterschiedliche Stärken und Richtungen haben kann. Dabei kann es sich etwa um eine Kraft handeln, z.B. die Anziehungskraft eines Zentralgestirns, die in jedem Punkt einer elliptischen Umlaufbahn eine andere Richtung und eine andere Stärke hat oder haben kann, die Zentripedalkraft, die ein Fahrzeug in eine vorgegebene Bahn zwingt oder ein Geschwindigkeitsfeld, dass dieses Fahrzeug auf dieser Bahn bewegt. Soll diese vektorielle Eigenschaft der Abbildung besonders betont werden, so schreiben wir auch

$$\overrightarrow{f} : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

und notieren $\overrightarrow{f}(x)$ als (Spalten–)Vektor.

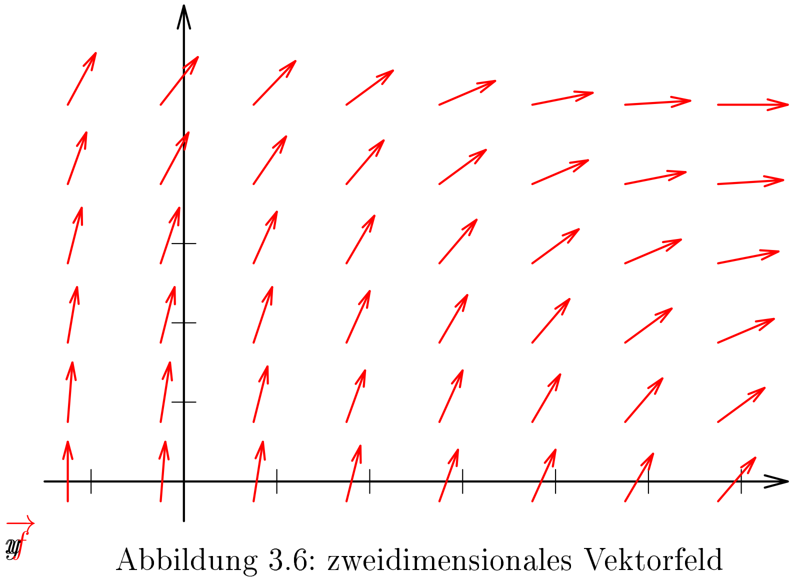


Abbildung 3.6: zweidimensionales Vektorfeld

Wie wir schon gesehen haben, schreibt sich f als

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$$

mit Komponentenfunktionen $f_i : D \longrightarrow \mathbb{R}$.

Definition 3.1.7. f heißt k**–mal partiell differenzierbar**, wenn die Komponentenfunktionen $f_1, \ldots, f_m$ alle k–mal partiell differenzierbar sind.
f heißt k**–mal stetig partiell differenzierbar**, wenn die Komponentenfunktionen $f_1, \ldots, f_m$ alle k–mal stetig partiell differenzierbar sind.

Bezeichnung::
Ist f stetig partiell differenzierbar und $a \in D$, so nennen wir

$$D(f)(a) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$$

die **Matrix der partiellen Ableitungen** oder die **Jakobi–Matrix** von f an der Stelle a.
Gelegentlich findet man auch die Bezeichung

$$J_f(a) := D(f)(a)$$

In der i–ten Zeile der Matrix $D(f)(a)$ befinden sich also die partiellen Ableitungen der i–ten Komponentenfunktion f_i nach den Variablen $x_1, \ldots, x_n$.

Beispiel 3.1.30. Ist $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x) = (x^2, x^3)$$

so ist f beliebig oft stetig partiell differenzierbar mit

$$D(f)(a) = \begin{pmatrix} 2a \\ 3a^2 \end{pmatrix}$$

für jedes $a \in \mathbb{R}$

Beispiel 3.1.31. l Ist $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_2^2 + x_3^2)$$

so ist f beliebig oft stetig partiell differenzierbar mit

$$D(f)(a) = \begin{pmatrix} 2a_1a_2 & a_1^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2a_2 & 2a_3 \end{pmatrix}$$

für jedes $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$.

Bemerkung 3.1.8. Fassen wir eine stetig partielle differenzierbare Abbildung $\overrightarrow{f} : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ als Vektorfeld auf, so sprechen wir von einem stetig differenzierbaren Vektorfeld.

Definition 3.1.8. Ist $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $a \in D$ und $\overrightarrow{f} : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein n–dimensionales Vektorfeld mit den Komponentenfunktionen $f_1, \ldots, f_n$, so heißt

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{f})(a) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(a)$$

die **Divergenz** von $\overrightarrow{f}$ an der Stelle a.

Bemerkung 3.1.9. Beachten Sie, dass bei der Definition der Divergenz ein n–dimensionales Vektorfeld mit einem Definitionsbereich in $\mathbb{R}^n$ betrachtet wird. Die Dimension von Definitionsbereich und Wertebereich stimmen also überein.

Beispiel 3.1.32. Für das Vektorfeld $\overrightarrow{f} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\overrightarrow{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x^2y \\ xyz \\ \mathrm{e}^{xy} \end{pmatrix}$$

gilt

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{f})(x, y, z) = 4xy + xz$$

Beispiel 3.1.33. Für das Vektorfeld $\overrightarrow{f} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\overrightarrow{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x^2yz \\ y^2 + xz - xy^2z \\ x^2y - xyz^2 - 2yz \end{pmatrix}$$

gilt

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{f})(x, y, z) = 4xyz + 2y - 2xyz - 2xyz - 2y = 0$$

Definition 3.1.9. Ein Punkt $a \in D$ mit $\operatorname{div}(\overrightarrow{f})(a) > 0$ heißt **Quelle** des Vektorfelds $\overrightarrow{f}$, ein Punkt $a \in D$ mit $\operatorname{div}(\overrightarrow{f})(a) < 0$ heißt **Senke** des Vektorfelds $\overrightarrow{f}$.
Ein Vektorfeld $\overrightarrow{f}$ heißt **quellenfrei**, wenn $\operatorname{div}(\overrightarrow{f})(a) = 0$ für alle $a \in D$.

Bemerkung 3.1.10. Die Divergenz beschreibt die lokale Quelldichte und gibt an, ob bei dem Vektorfeld „mehr“ oder „weniger“ heraus- als hineinfließt.

Bemerkung 3.1.11. Das Vektorfeld aus Beispiel 3.1.33 ist quellenfrei, das Vektorfeld aus Beispiel 3.1.32 hat sowohl Quellen als auch Senken.

Definition 3.1.10. Ist $D \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $\overrightarrow{f} : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, so heißt

$$\operatorname{rot}(\overrightarrow{f})(a) := \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}(a) - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(a), \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(a) - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) \right)$$

die **Rotation** von $\overrightarrow{f}$ an der Stelle a.
Das Vektorfeld
$vektor f$ heißt **wirbelfrei**, wenn $\operatorname{rot}(\overrightarrow{f})(a) = 0$ für alle $a \in D$.

Beispiel 3.1.34. Ist $\overrightarrow{f} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\overrightarrow{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2y+z \\ x+y+z \\ y^2+z^2 \end{pmatrix}$$

(vegleiche auch Beispiel 3.1.31), so gilt

$$\operatorname{rot}(\overrightarrow{f})(a,b,c) = \big(2b-1, 1, 1-a^2\big)$$

Dieses Vektorfeld ist also nicht wirbelfrei.

Beispiel 3.1.35. Wir betrachten das Vektorfeld $\overrightarrow{f} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\overrightarrow{f}(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} x_2x_3 \\ x_1x_3 \\ x_1x_2 \end{pmatrix}$$

Dann ist $\overrightarrow{f}$ beliebig oft stetig partiell differenzierbar mit

$$D(\overrightarrow{f})(a) = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

für jedes $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$, und

$$\operatorname{rot}(\overrightarrow{f})(a) = (a_1 - a_1, a_2 - a_2, a_3 - a_3) = (0,\ 0,\ 0)$$

Die Rotation des Vektorfelds verschwindet also, es ist wirbelfrei.

Definition 3.1.11. Ist $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $a \in D$, so heißt

$$\Delta f(a) := \operatorname{div}\left(\operatorname{grad}(f)\right)(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$$

heißt **Laplace** von f an der Stelle a.

$$\Delta := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

Laplaceoperator von f.

Beispiel 3.1.36. Ist $f(x, y) = \cos(x) + \sin(y)$, so gilt

$$\Delta f(x, y) = -\cos(x) - \sin(y) = -f(x, y)$$

Beispiel 3.1.37. Ist $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$, so ist

$$\Delta f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 8$$

Aufgabe 25. Untersuchen Sie, an welchen Stellen die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto x \cdot \sqrt{y^2 + x^2}$$

einmal partiell differenzierbar ist, und berechnen Sie dort die partiellen Ableitungen erster Ordnung.

Aufgabe 26. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung von

$$f(x_1, x_2, x_3) = \cos(x_1 + x_2) \cdot \sin(x_2 + x_3)$$

Aufgabe 27. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung von

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \ln(1 + x_1^4 + x_2^2 + x_3^6 + x_4^8)$$

Aufgabe 28. Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \sin(x_2) \cos(x_3), x_1 \sin(x_2) \sin(x_3), x_1 \cos(x_2))$$

stetig partiell differenzierbar ist und bestimmen Sie die Jacobimatrix $D(f)(a)$ von f in einem beliebigen Punkt $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 29. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5}{x^4+y^4} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

partiell differenzierbar nach y ist, aber in $(0, 0)$ nicht stetig partiell differenzierbar nach y ist.

Aufgabe 30. Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung 2 der Funktion

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_2^2 + x_3^2 + 1}$$

Aufgabe 31. Bestimmen Sie alle Punkte an denen folgende Funktionen zweimal partiell differentierbar sind, und bestimmen Sie dort die partiellen Ableitungen bis zur Ordnung zwei:

1. $f(x,y) = (2x-3y)^4$.
2. $f(x,y) = \ln(x^4+y^2)$.
3. $f(x,y) = \frac{x^2+xy+y}{x^2-y^2}$.

Aufgabe 32. Bestimmen Sie alle Punkte an denen die Funktion

$$f(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}$$

zweimal stetig differenzierbar ist. Zeigen Sie, dass die Funktion dort eine Lösung der Laplacegleichung

$$\Delta f = 0$$

ist.

Aufgabe 33. Wo ist die Funktion

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$$

dreimal stetig partiell differenzierbar? Bestimmen Sie dort alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung 3.

Aufgabe 34. Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung zwei der Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

gegeben durch

$$f(x_1,x_2,x_3) = \left(x_1^2x_2^3x_3 + \cos(x_1x_2), e^{x_1x_2+x_3^3} - \ln(1+x_1^2+x_2^4+x_3^2)\right).$$

Aufgabe 35. Eine Funktion kann partiell differenzierbar sein, ohne dass sie stetig ist:
Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

partiell differenzierbar aber nicht stetig in $(0,0)$ ist.

Aufgabe 36. Die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{y^2-x^2}{y^2+x^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ist zweimal partiell differenzierbar, aber

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

Aufgabe 37. Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$f(x_1, x_2, x_3) = (-cx_2, cx_1, 1)$$

(mit einer Konstatnen $c \in \mathbb{R}$) beliebig of stetig partiell differenzierbar ist und bestimmen Sie die Rotation $\mathrm{rot}(f)(a)$ für $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ beliebig.

Aufgabe 38. Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

zweimal stetig partiell differenzierbar. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{rot}\left(\mathrm{grad}(f)\right)(a) = (0,0,0)$$

für alle $a \in D$.