Digitaltechnik

2. Binärarithmetik

Prof. Dr. Eckhard Kruse

DHBW Mannheim

Schriftliches Rechnen

Übung

Übung

2.1 Schriftliches Rechnen

Aus der Schule sollten Sie die Verfahren zur schriftlichen Durchführung der Grundrechenarten kennen. Erinnern Sie sich an diese Verfahren und führen Sie sie mit beliebig von Ihnen gewählten Werten durch:

a) Addition zweier ganzer Dezimalzahlen
b) Subtraktion zweier ganzer Dezimalzahlen
c) Multiplikation zweier ganzer Dezimalzahlen
d) Division zwei ganzer Dezimalzahlen (mit Berechnung der Nachkommastellen oder des Restes)

Schriftliches Rechnen

Übung

Addition

```
   8534
+  1990
  1 1 1
-------
  10524
```

Subtraktion

```
   1045
-   972
   -1-1
-------
   0073
```

Multiplikation

```
1045 x 326
    3135
     2090
      6270
----------
    340670
```

Division

```
14092:15 = 939 Rest 7
135
  59
  45
  142
  135
    7
```

Schriftliches Rechnen - binär

Übung

Übung

2.2 Schriftliches Rechnen - binär

Die Ihnen bekannten Verfahren lassen sich auch auf Binärzahlen anwenden. Die Addition zweier Ziffern wäre z.B. 1+0=1, 1+1=10 (d.h. hier gibt es einen Übertrag). Versuchen Sie die schriftlichen Verfahren für folgende Fälle anzuwenden:

a) Addition zweier Binärzahlen
b) Multiplikation zweier Binärzahlen
c) Subtraktion zweier Binärzahlen (eine kleinere von einer größeren)
d) optional: Division zweier Binärzahlen
e) Vergleichen Sie mit dem schriftlichen Rechnen im Dezimalsystem: Was ist anders/einfacher/schwieriger?

Binäre Addition

Definition

Verfahren der binären Addition:

- Abarbeitung Ziffer für Ziffer, von rechts nach links. Übertrag zu Beginn=0.
- Addiere jeweils die n-ten Ziffern der beiden Zahlen und den aktuellen Übertrag:
  - 0+0+0=0, 1+0+0=1 → neuer Übertrag = 0
  - 1+1+0=10, 1+1+1=11 → neuer Übertrag =1

```
                1101110
              + 1001011
Übertrag        1   1 1 1
-------------------------
Ergebnis       10111001
```

Stimmt's?
→ Probe
in dezimal!

Binäre Subtraktion

Definition

Verfahren der binären Subtraktion:

- Abarbeitung Ziffer für Ziffer, von rechts nach links. Übertrag zu Beginn=0.
- Subtrahiere jeweils die n-ten Ziffern der beiden Zahlen und den aktuellen Übertrag:
  - 0-0-0=0, 1-0-0=1, 1-1-0=0 → neuer Übertrag = 0
  - 0-1-0=1, 0-1-1=0, 1-1-1=1 und neuer Übertrag =-1

```
                 1101110
               - 1011011
Übertrag          -1  -1-1
Ergebnis         0010011
```

Stimmt's?
→ Probe
in dezimal!

Binäre Addition und Subtraktion

Übung

Übung

2.3 Binäre Addition und Subtraktion

Üben Sie die binäre Addition und Subtraktion.

a) 11010110 + 101101
b) 1010111 + 111101000
c) 11010101 - 10101111
d) 10001011 - 1110100
e) 1000000 - 111111

Binäre Multiplikation

Definition

Verfahren der binären Multiplikation:

- Arbeite den 2. Faktor Ziffer für Ziffer ab:
  Wenn Ziffer=1: Schreibe den ersten Faktor (rechtsbündig) unter die Ziffer.
  - Addiere die aufgeschriebenen Werte.

```
1011 x 101
    1011
      1011
----------
    110111
```

Stimmt's?
→ Probe
in dezimal!

Binäre Division

Definition

Verfahren der binären Division:

Arbeite den Dividend von links nach rechts ab

- Ist der Divisor größer als der Wert der ausgewählten Ziffern des Dividenden → notiere 0 im Ergebnis und nimm eine weitere Ziffer hinzu.
- Andernfalls: Notiere 1 im Ergebnis, subtrahiere den Divisor von der ausgewählten Ziffernfolge

```
101001 : 11 = 1101 Rest 10
 11
 100
  11
 00101
    11
   010
```

Stimmt's?
→ Probe
in dezimal!

Binäre Multiplikation und Division

Übung

Übung

2.4 Binäre Multiplikation und Division

Üben Sie die binäre Multiplikation und Division.

a) 10110 * 1011
b) 110101 / 101
c) Üben Sie mit weiteren, selbst gewählten Zahlen.

Negative Binärzahlen

Dezimalsystem:

- Minuszeichen als zusätzliches Symbol zu den Ziffern 0-9 wird der Zahl vorangestellt.

Binäres System im Rechner:

- Stelle Minus mit Nullen und Einsen dar.

Idee 1:
Stelle Vorzeichenbit voran

`0|0010110 = 22`

`1|0010110 = -22`

„Einerkomplement“

Idee 2:
Kehre alle Ziffern um:

`00010110 = 22`

`11101001 = -22`

Gut? Zufrieden?

Überlauf und Unterlauf

Übung

Übung

2.5 Überlauf und Unterlauf

Im Computer ist die Anzahl der digitalen Stellen/Ziffern pro Zahl begrenzt, typischerweise auf 8, 16, 32 oder 64 Stellen.

a) Was passiert bei der Addition, wenn die Summe größer als die maximal darstellbare Zahl wird? Probieren Sie es aus!

b) Was passiert bei der Subtraktion, wenn eine größere Zahl von einer kleineren abgezogen wird? Probieren Sie es aus, z.B. mit Begrenzung auf 8 Stellen. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Einerkomplementdarstellung der entsprechenden (negativen) Zahl.

c) Was passiert, wenn Sie das in b) berechnete Ergebnis zu der größeren Zahl addieren?

d) Diskutieren Sie die Bedeutung der Ergebnisse.

Einerkomplement

Eigenschaften des Einerkomplements:

- Ziffernweise Vertauschung von Nullen und Einsen
- Voraussetzung: feste Stellenzahl *n*
- z. B. x = 0010 → x'= 1101
- Es gilt: x + x' = 1111 = $2^m – 1$
- Das vorderste Bit zeigt das Vorzeichen
- Die Null wird doppelt dargestellt (+0 und -0)
- Korrektur um 1 bei Addition und Subtraktion

0	0000	1111	-0
1	0001	1110	-1
2	0010	1101	-2
3	0011	1100	-3
4	0100	1011	-4
5	0101	1010	-5
6	0110	1001	-6
7	0111	1000	-7

Negative Binärzahlen

Gesucht: Geeignete Darstellung von negativen Binärzahlen:

- Darstellung nur mit 0 und 1 (kein zusätzliches Minus-Zeichen).
- Keine Redundanz: (z.B. nicht -0 und +0)
- Einfaches Rechnen (Addition einer negativen Zahl funktioniert mit dem bereits bekanntem Additionsverfahren.)

Zweierkomplement:

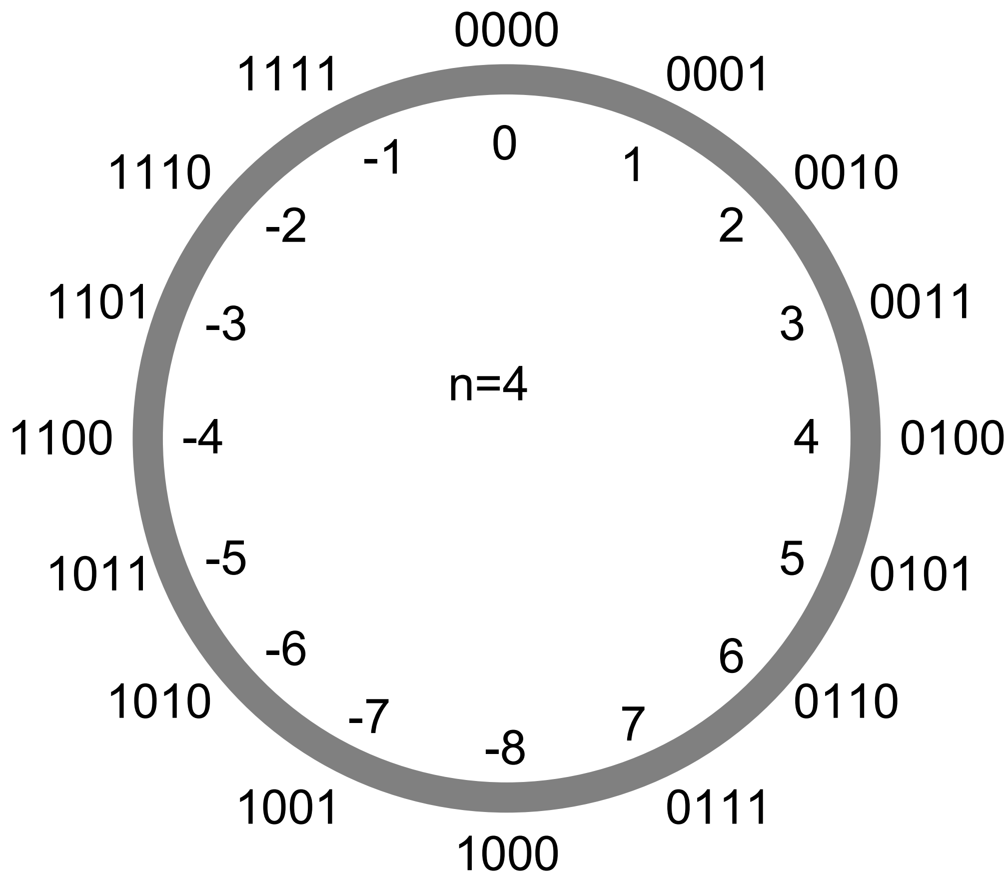
Berechnung des Zweierkomplements einer Binärzahl:

- Vertausche die Ziffernwerte: 0 → 1 und 1 → 0 (= Einerkomplement)
- Addiere 1 zum Ergebnis

0	0000		
1	0001	1111	-1
2	0010	1110	-2
3	0011	1101	-3
4	0100	1100	-4
5	0101	1011	-5
6	0110	1010	-6
7	0111	1001	-7
		1000	-8

Zweierkomplement Zahlenkreis

Das Prinzip des Zweierkomplements lässt sich mit einem Zahlenkreis veranschaulichen.



Zweierkomplement

Übung

Übung

2.6 Zweierkomplement

Experimentieren Sie mit dem Zweierkomplement

a) Geben Sie die 8-stellige Zweierkomplement-Darstellung an für -1, -10, -16, -128.

b) Wenden Sie auf die Ergebnisse aus a) erneut die 2er-Komplement-Umwandlung an.

c) Subtrahieren Sie binär, indem Sie Zweierkomplemente addieren (wandeln Sie die Dezimalzahlen zunächst ins Binärsystem): 100-1, 10-16, 10-20

d) Diskutieren Sie die Bedeutung der Ergebnisse.

Zweierkomplement

Eigenschaften des Zweierkomplements:

- Das linke Bit signalisiert das Vorzeichen.
- Der Wertebereich ist asymmetrisch, z.B. -128 bis +127 bei 8 Bit, es gibt keine Redundanz (eindeutige Darstellung der Null).
- Das 2er-Komplement des 2er-Komplements ist wieder die ursprüngliche Zahl.
- Negative Zahlen lassen sich mit dem bekannten Additionsverfahren addieren.
- Subtraktion lässt sich durch Addition des 2er-Komplements berechnen.
- Erweiterung des 2er-Komplements auf eine größere Stellenanzahl: Füge links Einsen hinzu (oder allgemein für + und -: Kopiere das linke Bit)
- Neue Art des Überlaufs: Zahlen laufen aus dem positiven in den negativen Bereich und umgekehrt (ggf. Bereichsüberprüfung!)
- Auch das Multiplikationsverfahren lässt sich direkt auf das 2er-Komplement anwenden.

Zweierkomplement-Eigenschaften

Übung

Übung

2.7 Zweierkomplement-Eigenschaften

Untersuchen Sie die zuvor genannten Eigenschaften des Zweierkomplements (Multiplikation, Überlaufverhalten etc.) an selbst ausgewählten Beispielen.

- Das linke Bit signalisiert das Vorzeichen.
- Der Wertebereich ist asymmetrisch, z.B. -128 bis +127 bei 8 Bit, es gibt keine Redundanz (eindeutige Darstellung der Null).
- Das 2er-Komplement des 2er-Komplements ist wieder die ursprüngliche Zahl.
- Negative Zahlen lassen sich mit dem bekannten Additionsverfahren addieren.
- Subtraktion lässt sich durch Addition des 2er-Komplements berechnen.
- Erweiterung des 2er-Komplements auf eine größere Stellenanzahl: Füge links Einsen hinzu (oder allgemein für + und -: Kopiere das linke Bit)
- Neue Art des Überlaufs: Zahlen laufen aus dem positiven in den negativen Bereich und umgekehrt (ggf. Bereichsüberprüfung!)
- Auch das Multiplikationsverfahren lässt sich direkt auf das 2er-Komplement anwenden.

Nachkommastellen?

Übung

1,234

0,7

$$\frac{5}{4}$$

$$\frac{1}{2}$$

Wie könnten man Zahlen mit Nachkommastellen (rationale Zahlen / Brüche) binär darstellen?

Nachkommastellen

Wie können Zahlen mit Nachkommastellen binär dargestellt werden?

Festkommadarstellung

- Feste Stellenzahl m wie für ganze Zahlen
- Aufgeteilt in m‘ Stellen vor und m“ Stellen nach dem Komma (m‘+ m“ = m), z.B. xxxxxxxx = xxxxx,xxx
- Rechenverfahren können übernommen werden, nur kleine Anpassungen notwendig, z. B. Stellenkorrektur bei der Multiplikation
- Fester Bereich: ggf. Rundung bei kleinen Werten / Überlauf bei großen Werten.

große Zahl: 439000000
$= 4{,}39 * 10^{8}$

kleine Zahl: 0,0000002387
$= 2{,}387 * 10^{-7}$

Idee: Wähle eine geeignete 10er-Potenz und verschiebe das Komma zu den relevanten Ziffern → Gleitkomma/Fließkomma- (floating point) Darstellung!

Gleitkommadarstellung

Definition

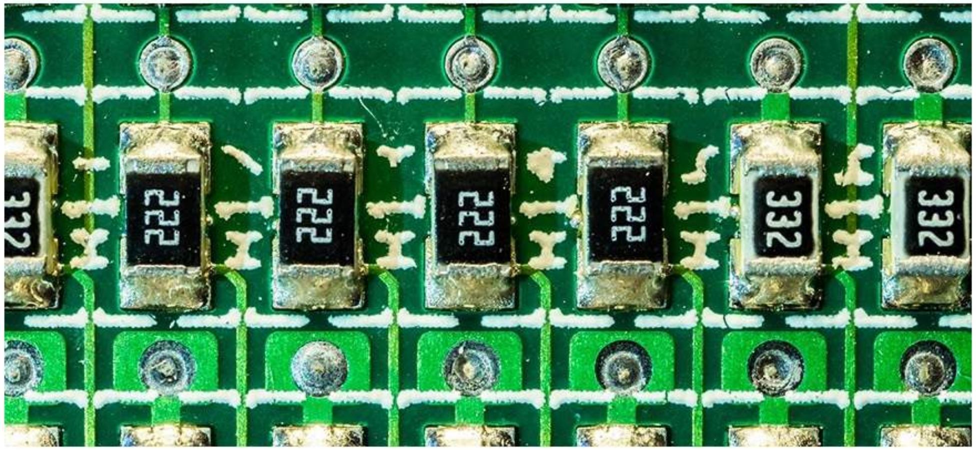
Die **Gleitkommadarstellung** stellt eine rationale Zahl *x* (näherungsweise) durch Angabe einer Mantisse *m,* einer Basis *b* und eines Exponenten *e* so dar, dass gilt: $x = m * b^e$
Indem der Exponent entsprechend gewählt wird, kann die Mantisse auf einen festen Zahlenbereich, z.B. $1 \leq m < b$ normalisiert werden (bzw. bei $x=0 \rightarrow m=0$).

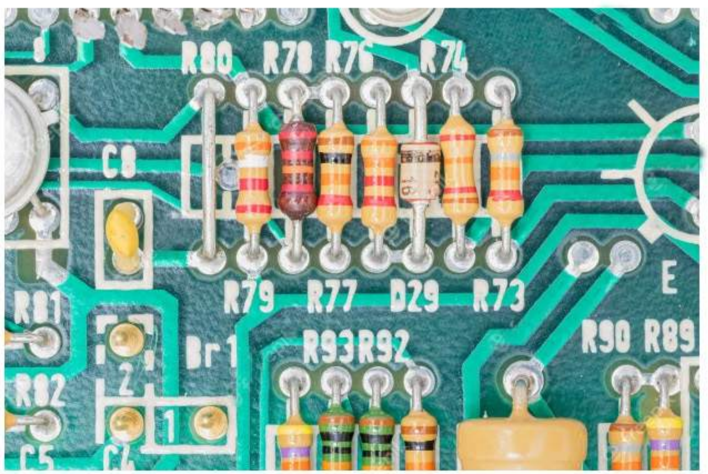
z.B. Standard IEEE 754 ("binary32", "binary64" → Basis b=2)

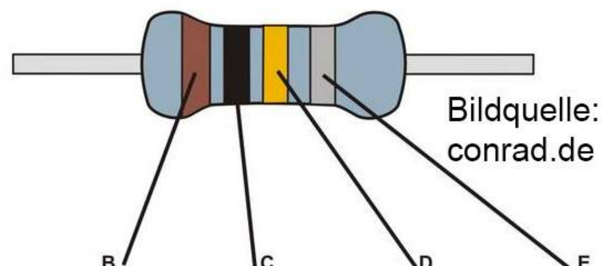
	"einfache Genauigkeit"	"doppelte Genauigkeit"
Gesamtgröße	32 Bit	64 Bit
Vorzeichen	1 Bit	1 Bit
Exponent	8 Bit	11 Bit
Mantisse	23 Bit	52 Bit

Schätzen Sie die Wertebereiche / Genauigkeiten ab!

„Gleitkomma“ auf der Hardware







Bildquelle: conrad.de

	A	B	C	D	E
F	X	X	X	X	20%
G	X	X	X	0,01	10%
H	X	X	X	0,1	5%
I	0	0	0	1	X
J	1	1	1	10	1%
K	2	2	2	100	2%
L	3	3	3	1.000	
M	4	4	4	10.000	X
N	5	5	5	100.000	0,5%
O	6	6	6	1.000.000	0,25%
P	7	7	7	10.000.000	0,1%
Q	8	8	8	100.000.000	0,05%
R	9	9	9	1.000.000.000	X

Zeichencodierung

Definition

Codierung von Symbolen mit Bitfolgen

- Symbole: Buchstaben, Ziffern, Sonderzeichen
- Meist mitcodiert: Steuerzeichen (z.B. Leerschritt, neue Zeile, Tabulator usw.)
- Verwendet zur Speicherung und Übertragung von Daten, vor allem von Texten
- ASCII-Codierung: verbreiteter Standard in PCs, von ISO genormt
- Ursprünglich 7 Bit-Code, d.h. 128 Zeichen, Erweiterung auf 8 Bit für erweiterte Sonderzeichen, länderspezifisch

ASCII-Codierung

ASCII = American Standard for Information Interchange

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	
0	00 0000 0000 NUL	01 0000 0001 SOH	02 0000 0010 STX	03 0000 0011 ETX	04 0000 0100 EOT	05 0000 0101 ENQ	06 0000 0110 ACK	07 0000 0111 BEL	08 0000 1000 BS	09 0000 1001 HT	10 0000 1010 LF	11 0000 1011 VT	12 0000 1100 FF	13 0000 1101 CR	14 0000 1110 SO	15 0000 1111 SI	8
1	16 0001 0000 DLE	17 0001 0001 DC1	18 0001 0010 DC2	19 0001 0011 DC3	20 0001 0100 DC4	21 0001 0101 NAK	22 0001 0110 SYN	23 0001 0111 ETB	24 0001 1000 CAN	25 0001 1001 EM	26 0001 1010 SUB	27 0001 1011 ESC	28 0001 1100 FS	29 0001 1101 GS	30 0001 1110 RS	31 0001 1111 US	9
2	32 0010 0000 SP	33 0010 0001 !	34 0010 0010 "	35 0010 0011 #	36 0010 0100 $	37 0010 0101 %	38 0010 0110 &	39 0010 0111 '	40 0010 1000 (	41 0010 1001)	42 0010 1010 *	43 0010 1011 +	44 0010 1100 ,	45 0010 1101 -	46 0010 1110 .	47 0010 1111 /	A
3	48 0011 0000 0	49 0011 0001 1	50 0011 0010 2	51 0011 0011 3	52 0011 0100 4	53 0011 0101 5	54 0011 0110 6	55 0011 0111 7	56 0011 1000 8	57 0011 1001 9	58 0011 1010 :	59 0011 1011 ;	60 0011 1100 <	61 0011 1101 =	62 0011 1110 >	63 0011 1111 ?	B
4	64 0100 0000 @	65 0100 0001 A	66 0100 0010 B	67 0100 0011 C	68 0100 0100 D	69 0100 0101 E	70 0100 0110 F	71 0100 0111 G	72 0100 1000 H	73 0100 1001 I	74 0100 1010 J	75 0100 1011 K	76 0100 1100 L	77 0100 1101 M	78 0100 1110 N	79 0100 1111 O	C
5	80 0101 0000 P	81 0101 0001 Q	82 0101 0010 R	83 0101 0011 S	84 0101 0100 T	85 0101 0101 U	86 0101 0110 V	87 0101 0111 W	88 0101 1000 X	89 0101 1001 Y	90 0101 1010 Z	91 0101 1011 [	92 0101 1100 \	93 0101 1101]	94 0101 1110 ^	95 0101 1111 _	D
6	96 0110 0000 `	97 0110 0001 a	98 0110 0010 b	99 0110 0011 c	100 0110 0100 d	101 0110 0101 e	102 0110 0110 f	103 0110 0111 g	104 0110 1000 h	105 0110 1001 i	106 0110 1010 j	107 0110 1011 k	108 0110 1100 l	109 0110 1101 m	110 0110 1110 n	111 0110 1111 o	E
7	112 0111 0000 p	113 0111 0001 q	114 0111 0010 r	115 0111 0011 s	116 0111 0100 t	117 0111 0101 u	118 0111 0110 v	119 0111 0111 w	120 0111 1000 x	121 0111 1001 y	122 0111 1010 z	123 0111 1011 {	124 0111 1100 |	125 0111 1101 }	126 0111 1110 ~	127 0111 1111 DEL	F

http://www.ecowin.org/ascii.htm

Weitere Zeichencodierungen

Unicode

- ISO-Standardisiert 1993
- Berücksichtigt Zeichenanforderungen vieler Sprachen (z.B. Schreibrichtungen, Sonderzeichen, techn. Symbole, Buchstaben-, Silben- und Ideogrammsprachen)
- Untergliederung in Ebenen mit jeweils 65536 Zeichen (16 Bit)
- Besonders gebräuchlich UTF-8 (8-bit Unicode Transformation Format): Pro Zeichen gibt es Byteketten variabler Länge