DHBW Mannheim
Informatik

Mannheim, 31.05.2023
Mathematatik II/2

Lösungen zu Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Von einer stetigen Zufallsvariable wissen wir, dass ihre Dichte durch eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ der Form

$$f(x) = \begin{cases} \sin(a \cdot x) & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{a} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für einen Parameter $a > 0$ gegeben ist.

a) Bestimmen Sie den Parameter a.

Lösung:

Es gilt sicherlich, dass $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und dass $f(x)$ integrierbar ist (unabhängig von dem speziellen $a > 0$). Daher ist nur noch zu beachten, dass $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$.

Eine Stammfunktion von $g(x) = \sin(ax)$ ist

$$G(x) = -\frac{1}{a} \cdot \cos(ax)$$

und daher gilt

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{a}} \sin(ax)\, dx = -\frac{1}{a} \cdot (\cos(\pi) - \cos(0)) = \frac{2}{a}$$

Daher muss $a = 2$ gelten.

b) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz dieser Zufallsvariable.

Falls Sie a in Teil a) nicht bestimmen konnten, berechnen Sei die entsprechenden Integrale in Abhängigkeit vom Parameter a.

Lösung:

Wir haben jetzt

$$f(x) = \begin{cases} \sin(2 \cdot x) & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

zu betrachten. Damit gilt

$$\begin{aligned} E(X) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx \\ &= \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\sin(2x)\,dx \\ &= \left[\tfrac{\sin(2x)}{4} - \tfrac{x\cos(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \tfrac{\pi}{4} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(x - \tfrac{\pi}{4}\right)^2 \cdot f(x)\,dx \\ &= \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(x - \tfrac{\pi}{4}\right)^2 \cdot \sin(2x)\,dx \end{aligned}$$

Zur Bestimmung einer Stammfunktion von $h(x) = \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 \cdot \sin(2x)$ führen wir zunächst eine Substitution $u = u(x) = x - \frac{\pi}{4}$ durch. Dann ist $u'(x) = 1$ und $x = u + \frac{\pi}{4}$. Speziell ist also

$$\sin(2x) = \sin\left(2 \cdot \left(u + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \sin\left(2u + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(2u)$$

und damit gilt

$$\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 \cdot \sin(2x) = u(x)^2 \cdot \cos(2u(x)) = u(x)^2 \cdot \cos(2u(x)) \cdot u'(x)$$

Zunächst bestimmen wir eine Stammfunktion von $l(u) = u^2 \cdot \cos(2u)$. Nach der Regeln und Formelsammlungen zur Stammfunktion (oder durch zweimalige partielle Integration) ist das

$$L(u) = \frac{u^2 \cdot \sin(2u)}{2} + \frac{u \cdot \cos(2u)}{2} - \frac{\sin(2u)}{4}$$

Daher ist nach der Substitutionsregel

$$\begin{aligned} H(x) = L(u(x)) &= \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)}{2} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)}{2} \\ &\quad - \frac{\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)}{4} \\ &= -\frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 \cdot \cos(2x)}{2} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin(2x)}{2} + \frac{\cos(2x)}{4} \end{aligned}$$

eine Stammfunktion von $h(x)$, und deshalb gilt

$$\begin{aligned} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(x - \tfrac{\pi}{4}\right)^2 \cdot \sin(2x)\,dx &= H\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - H(0) \\ &= \tfrac{\pi^2}{16} - \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

also gilt

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$$

Aufgabe 2. Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion von X und Y sei bestimmt durch

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-2\lambda} \cdot \frac{\lambda^{x+y}}{x!y!} & \text{für } x, y \in \{0, 1, ...\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Randverteilung von X und Y.

Lösung:

Die Randdichten von X und Y lassen sich wie folgt berechnen, wobei für $x \in \{0, 1, ...\}$ gilt:

$$f_X(x) = \sum_{y=0}^{\infty} e^{-2\lambda} \frac{\lambda^{x+y}}{x!y!} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \sum_{y=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^y}{y!} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

und für $y \in \{0, 1, ...\}$ gilt:

$$f_Y(y) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{-2\lambda} \frac{\lambda^{x+y}}{x!y!} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^y}{y!} \sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^y}{y!}$$

Für $x = 0$ gilt $f_X(0) = 0$ und $f_Y(0) = 0$. Man erhält somit für die Randdichten jeweils eine Poisson-Verteilung mit Parameter λ.

b) Bestimmen Sie die bedingten Verteilungen von $X|Y = y$ und $Y|X = x$ und vergleichen Sie diese mit den Randverteilungen.

Lösung:

Man betrachte zunächst die bedingte Verteilung von $X|Y = y$.
Für $y \in \{0, 1, ...\}$ gilt:

$$f_X(x|Y = y) = \begin{cases} \frac{e^{-2\lambda} \cdot \lambda^{x+y}/(x!y!)}{e^{-\lambda}\lambda^x/y!} = e^{-\lambda}\lambda^x/x! & \text{für } x = 0, 1, ... \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Analog berechnet man die bedingte Verteilung von $Y|X = x$, d.h. für $x \in \{0, 1, ...\}$ gilt:

$$f_Y(y|X = x) = \begin{cases} e^{-\lambda}\lambda^y/y! & \text{für } y = 0, 1, ... \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit ist also:

$$f_X(x|y) = f_X(x) \text{ für } y \in \{0, 1, ...\},$$

$$f_Y(y|x) = f_Y(y) \text{ für } x \in \{0, 1, ...\}.$$

c) Bestimmen Sie die Kovarianz von X und Y.

Lösung: Nach b) sind X und Y unabhängig. Daraus folgt unmittelbar

$$Cov(X,Y) = 0.$$

Aufgabe 3. Ein Anleger verfügt zu Jahresbeginn über 200000 Euro. 150000 Euro legt er bei einer Bank an, die ihm eine zufällige Jahresrendite R_1 garantiert, welche gleichverteilt zwischen 6% und 8% ist. Mit den restlichen 50000 Euro spekuliert er an der Börse, wobei er von einer $N(8,4)$-verteilten Jahresrendite R_2 (in %) ausgeht. Der Anleger geht davon aus, dass die Renditen R_1 und R_2 unabhängig verteilt sind.

a) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von R_1 und R_2.

Lösung: Man erhält

$$\begin{aligned} E(R_1) = \frac{6+8}{2} = 7, \qquad Var(R_1) = \frac{(8-6)^2}{12} = \frac{1}{3}, \\ E(R_2) = 8, \qquad Var(R_2) = 4. \end{aligned}$$

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten, dass der Anleger an der Börse eine Rendite von 8%, von mindestens 9% bzw. zwischen 6% und 10% erzielt.

Lösung: Da R_2 als $N(8,4)$-verteilt angenommem wird, gilt $P(R_2 = 8) = 0$. Für die anderen Wahrscheinlichkeiten berechnet man

$$\begin{aligned} P(R_2 \geq 9) &= 1 - P(R_2 \leq 9) \\ &= 1 - P\left(Z \leq \tfrac{9-8}{2}\right) \\ &= 1 - \Phi(0.5) = 1 - 0.692 = 0.308, \\ P(6 \leq R_2 \leq 10) &= P(R_2 \leq 10) - P(R_2) \leq 6) \\ &= P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1) \\ &= \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) = 2\Phi(1) - 1 \\ &= 2 \cdot 0.841 - 1 = 0.682. \end{aligned}$$

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Anleger bei der Bank eine Rendite zwischen 6.5% und 7.5% erzielt?

Lösung: $P(6.5 \leq R_1 \leq 7.5) = 1 \cdot \frac{1}{2} = 0.5$

d) Stellen Sie das Jahresendvermögen V als Funktion der Renditen R_1 und R_2 dar und berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von V.

Lösung: Das Jahresendvermögen V lässt sich darstellen als

$$\begin{aligned} V &= 150000 \cdot \left(1 + \tfrac{R_1}{100}\right) + 5000 \cdot \left(1 + \tfrac{R_2}{100}\right) \\ &= 200000 + 1500 \cdot R_1 + 500 \cdot R_2 \\ E(V) &= 200000 + 1500 \cdot E(R_1) + 500 \cdot E(R_2) \\ &= 214500, \\ Var &= 1500^2 \cdot Var(R_1) + 500^2 \cdot Var(R_2) \\ &= 1750000 \end{aligned}$$

e) Angenommen, die beiden Renditen sind nicht unabhängig, sondern korrelieren mit $\rho = -0.5$. Wie lautet die Kovarianz zwischen R_1 und R_2?

Lösung: Die Kovarianz von R_1 und R_2 erhält man als

$$\begin{aligned} Cov(R_1, R_2) &= \rho \cdot \sqrt{Var(R_1)} \cdot \sqrt{Var(R_2)} \\ &= -0.5 \cdot \sqrt{\tfrac{1}{3}} \cdot 2 \\ &= -0.577. \end{aligned}$$

Aufgabe 4. Von den Zufallsvariablen X und Y ist bekannt, dass $Var(X) = 1$, $Var(Y) = 4$ und $Var(3X + 2Y) = 13$ gelten. Wie groß ist dann der Korrelationskoeffizient $\rho(X, Y)$?

Lösung:
Es gilt

$$\begin{aligned} 13 &= Var(3X + 2Y) \\ &= Var(3X) + Var(2Y) + 2 \cdot Cov(3X, 2Y) \\ &= 9 \cdot Var(X) + 4 \cdot Var(Y) + 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot Cov(X, Y) \\ &= 9 + 16 + 12 \cdot Cov(X, Y). \end{aligned}$$

Damit folgt

$$Cov(X, Y) = -1$$

und schließlich

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)} \cdot \sqrt{Var(Y)}} = \frac{-1}{1 \cdot 2} = -\frac{1}{2}.$$