Analysis in mehreren Variablen

I Funktionen mehrerer Veränderlicher

Silke Bott

Wintersemester 2022/2023

Einführung

Was Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit betrifft, haben wir uns bis jetzt nur mit Funktionen beschäftigt, die von einer Unbekannten x abhängen. Andererseits haben wir aber in der linearen Algebra schon viele Beispiele von Beziehungen und Abhängigkeiten gesehen, die mehrere unbekannte Größen einbeziehen und dabei auch mehrere Zielgrößen ermitteln.

Beispiel

Die Feldstärke E des von einen Plattenkondensator erzeugten elektrischen Feldes berechnet sich durch die Formel

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_o \cdot A}$$

wobei Q die Ladung der einen Platte bezeichnet, A die Plattenfläche und ε_0 die elektrische Feldkonstante (also die Leitfähigkeit des Vakuums). Die Feldstärke hängt also ab von den zwei Bestimmungsgrößen A und Q, von denen jede -unabhängig von der anderen - den Wert von E beeinflußt.

Einführung

Beispiel

Die Position $\vec{s}$ eines Körpers, der sich mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ durch den Raum bewegt, und der zu einem Zeitpunkt $t_0 = 0$ an einem Ort $\vec{O} = \begin{pmatrix} o_1 \\ o_2 \\ o_3 \end{pmatrix}$ war, bestimmt sich durch die Formel

$$\vec{s} = \vec{O} + t \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} o_1 + tv_1 \\ o_2 + tv_2 \\ o_3 + tv_3 \end{pmatrix}$$

Hier hängt $\vec{s}$ nur von einer Veränderlichen ab, nämlich t, hat aber selbst drei Komponenten.

Einführung

Beispiel

Die Betrag der Kraft $\vec{F}$, die auf einen Körper wirkt, hängt ab von der Masse m des Körpers und der Beschleunigung $\vec{a}$, die auf den Körper wirkt. Nach dem zweiten Newtonschen Gesetz ermittelt sich der Betrag der Kraft als

$$|\vec{F}| = m \cdot |\vec{a}|$$

$|\vec{a}|$ selbst wiederum hängt ab von verschiedenen Größen. Betrachten wir etwa die Situation in der Ebene, so hat die Beschleunigung eine Komponente a_x in x–Richtung und eine Komponente a_y in y–Richtung. Damit ergibt sich insgesamt

$$|\vec{F}| = m \cdot \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

und unsere Zielgröße $|\vec{F}|$ hängt ab von drei Einflußfaktoren m, a_x und a_y.

Einführung

Beispiel

Die Kraft selbst ist - in dieser Situation - ebenfalls eine zweidimensionale Größe und berechnet sich durch die Formel

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} m \cdot a_x \\ m \cdot a_y \end{pmatrix}$$

Damit haben wir Beispiele gesehen, in denen einen Zielgröße von mehreren Unbekannten abhängt, mehrere Zielgröße von einer Unbekannten abhängen oder gar mehrere Zielgröße von mehreren Unbekannten abhängen. Mit diesen Siutationen wollen wir uns genauer auseinandersetzen.

Funktionen in zwei und mehr Variablen

Wir wollen uns zunächst auf den einfachsten Fall konzentrieren, in dem ein Wert in funktionaler Weise aus zwei Unbekannten ermittelt wird, wie das etwa in den vorherigen Beispielen der Fall war.

Unter einer Funktion in zwei unabhängigen Variablen verstehen wir dabei eine Vorschrift, die jedem geordneten Zahlenpaar (x, y) aus einer Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ eine eindeutig bestimmte reelle Zahl $z = f(x, y)$ zuordnet. Dabei heißt D der Definitionsbereich von f. Beachten Sie dabei, dass wir in der Analysis im allgemeinen nicht die Spaltenschreibweise $\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$ benutzen sondern die Zeilenschreibweise (x_1, x_2). Wir benutzen auch nicht die Vektornotation $\vec{x}$ sondern schreiben kurz x für (x_1, x_2). Lediglich für den Fall, dass wir die Vektoreigenschaften besonders betonen wollen, werden wir $\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$ für $x = (x_1, x_2)$ schreiben. Trotzdem werden wir natürlich bei Bedarf die Vektorraumoperationen $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{R}^n$ auch für die Zeilenvektoren benutzen. Das mag am Anfang etwas verwirren, hat sich aber so eingebürgert und ist auch von der Notation her einfacher.

Funktionen in zwei und mehr Variablen

Eine Funktion in zwei unabhängigen Variablen ist also ein Abbildung

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

wobei $D \subseteq \mathbb{R}^2$
Für solche Funktionen werden wir im wesentlichen zwei Darstellungen benutzen:

- **Die analytische Darstellung:** Die Funktion ist gegeben durch eine Vorschrift
$$z = f(x, y)$$
wobei $f(x, y)$ eine in der Regel explizit bekannte Formel in x und y für $(x, y) \in D$ ist.
- **Die graphische Darstellung:** Die Funktion ist gegeben durch eine Fläche A im dreidimensionalen Raum, wobei zu jedem Paar (x, y) der x–y–Ebene höchstens ein Punkt $(x, y, z) \in A$ gehört.

Funktionen in zwei und mehr Variablen

Der Übergang zwischen diesen beiden Darstellungen ist wie folgt gegeben: Ist $z = f(x, y)$ eine analytische Darstellung einer Funktion mit Definitionsbereich D, so nehmen wir als zugehörige Fläche die Menge

$$\begin{aligned} A &:= \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D,\ z = f(x, y)\} \\ &= \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D\} \end{aligned}$$

Ist umgekehrt eine Fläche A gegeben, so erhalten wir daraus eine analytische Darstellung der Funktion wie folgt: Ist $(x, y, z) \in A$, so setzen wir $f(x, y) := z$. Das ist wohldefiniert nach unseren Voraussetzungen an A.

Definition

Die Fläche $A \subseteq \mathbb{R}^3$, die zu einer Funktion f gehört, heißt der **Graph** der Funktion f und wird auch mit Γ_f bezeichnet.

Funktionen in zwei und mehr Variablen

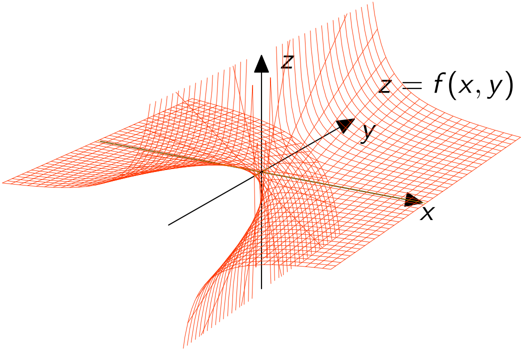
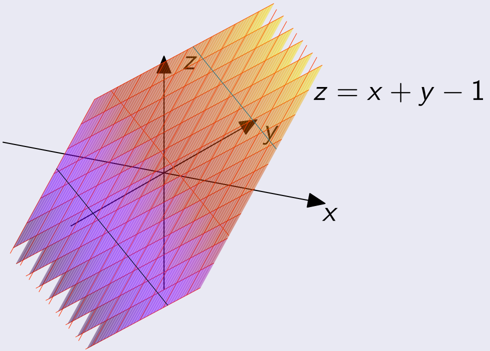


Abbildung: Der Graph zu $f(x, y) = \frac{y}{x}$

Funktionen in zwei und mehr Variablen

Beispiel

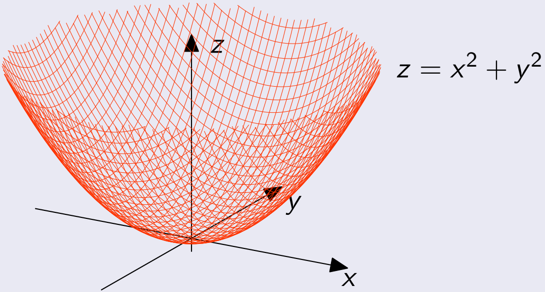
Durch die analytische Vorschrift $f(x, y) = x + y - 1$ wird eine Funktion in zwei Variablen auf dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}^2$ definiert. Der zugehörige Graph ist eine Ebene im Raum und hat die folgende Gestalt:



Funktionen in zwei und mehr Variablen

Beispiel

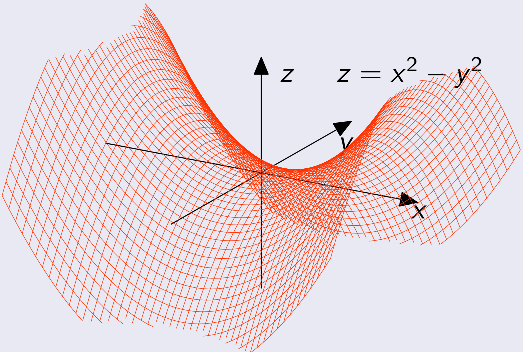
Durch die analytische Vorschrift $f(x, y) = x^2 + y^2$ wird eine Funktion in zwei Variablen auf dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}^2$ definiert. Der zugehörige Graph hat die folgende Gestalt:



Funktionen in zwei und mehr Variablen

Beispiel

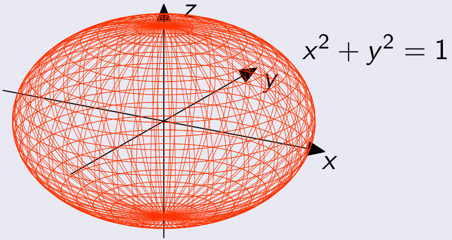
Ändern wir ein Vorzeichen und betrachten stattdessen die Funktion $g(x, y) = x^2 - y^2$, so wir dadurch ebenfalls eine Funktion in zwei Variablen auf dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}^2$ definiert. Der zugehörige Graph hat aber eine deutlich davon verschiedene Gestalt:



Funktionen in zwei und mehr Variablen

Beispiel

Eine sehr schöne Fläche im Raum wird durch die Oberfläche der Kugel gegeben.



Funktionen in zwei und mehr Variablen

Beispiel

Hierbei handelt es sich jedoch nicht um den Graphen einer Funktion. Bei der graphischen Darstellung einer Funktion haben wir nämlich gefordert, dass es zu jedem Paar (x, y) aus der x–y–Ebene höchstens einen Wert von z gibt mit $(x, y, z) \in A$. Bei der Kugeloberfläche (mit Radius 1) gibt es aber etwa zum Punkt (x, y) mit $x = 0$ und $y = 0$ zwei mögliche z–Werte, nämlich $z_1 = 1$ und $z_2 = -1$; sowohl $(0, 0, 1)$ als auch $(0, 0, -1)$ liegen auf der Kugel.

Funktionen in zwei und mehr Variablen

Beispiel

Schränken wir die Kugeloberfläche geeignet ein, so erhalten wir wieder ein Funktion:

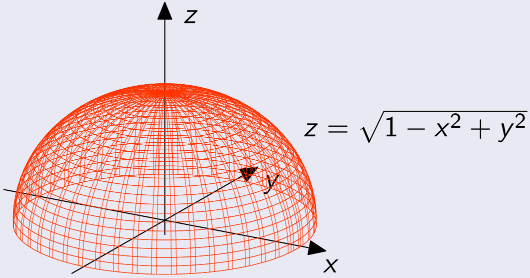


Abbildung: $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 + y^2}$

Funktionen in zwei und mehr Variablen

Beispiel

Die obere Hälfte A der Kugeloberfläche bildet eine Funktion mit Definitionsbereich

$$D = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\},$$

denn jetzt existiert zu jedem $(x, y) \in D$ nur noch genau ein $z \in \mathbb{R}$ mit $(x, y, z) \in A$. Die analytische Beschreibung dieser Funktion ist gegeben durch

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

Beispiel

Nicht alle Funktionen lassen sich für alle Zahlenpaar $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ definieren. Die Funktionsvorschrift für die Kugeloberfläche, die wir in Beispiel eben kennengelernt haben, ist nur auf $D = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ definiert. Auch die Funktion $f(x, y) = \frac{1}{x^2 - y^2}$ ist nicht auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert. Ihr maximaler Definitionsbereich ist $D = \{(x, y) \,||x \neq y \;\text{ und }\; x \neq -y\}$.

Funktionen in zwei und mehr Variablen

Beispiel

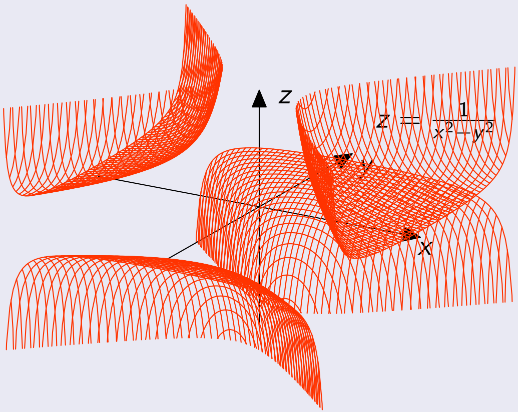


Abbildung: $f(x, y) = \frac{1}{x^2 - y^2}$

Funktionen in zwei und mehr Variablen

Auch bei Funktionen in mehreren Variablen gibt es solche, die sehr einfach sind.

Definition

Eine Funktion $f(x, y)$ heißt **linear**, wenn es a, b und c gibt mit

$$f(x, y) = ax + by + c$$

Bemerkung

Lineare Funktionen können immer auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert werden. Ihr maximaler Definitionsbereich ist also $D = \mathbb{R}^2$.

Funktionen in zwei und mehr Variablen

Bemerkung

Der Graph einer linearen Funktion ist immer eine Ebene.
Diese Ebene ist die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$z - ax - by = c$$

Lineare Funktionen hängen also eng zusammen mit der linearen Algebra.
Sie lassen sich auch mit Hilfe von Matrizen beschreiben:
Ist $f(x, y) = ax + by + c$, so betrachten wir die 1×2–Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ und setzen $\vec{v} = \binom{x}{y}$. Dann wird die Funktion f durch die Vorschrift

$$f(x, y) = A \cdot \vec{v} + c = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c$$

beschrieben.

Funktionen in zwei und mehr Variablen

Beispiel

Die lineare Funktion $f(x, y) = x - y$ hat die Matrixdarstellung

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Das sieht im ersten Moment sehr viel komplizierter aus als die direkte Beschreibung von $f(x, y)$, hat aber den Vorteil, dass wir alle Techniken und Ergebnisse der linearen Algebra für die Untersuchung dieser Funktion heranziehen können. Das wird sich in späteren Kapiteln, etwa bei der Differenzierbarkeit, als sehr nützlich erweisen.
Der Graph der Funktion in unserem Beispiel ist die Lösung der homogenen linearen Gleichung

$$z - x + y = 0$$

ist also sogar ein Untervektorraum (der Dimension 2) des $\mathbb{R}^3$.

Funktionen in zwei und mehr Variablen

Definition

Eine Funktion $f(x, y)$ heißt **quadratisch**, wenn es a, b, c, d, e und f gibt mit

$$f(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f$$

Quadratische Funktionen haben kein einheitliches Bild mehr. So kann etwa ein Rotationsparaboloid auftreten wie wir ihn im Beispiel gesehen haben, es kann sich aber auch eine sogenannte Sattelfläche ergeben, etwa bei der Funktion $f(x, y) = x^2 - y^2$, deren Graph wir ebenfalls schon gesehen haben.

Funktionen in zwei und mehr Variablen

Quadratische Funktionen treten sehr häufig beim Studium der Kegelschnitte auf. Betrachten wir etwa den Einheitskreis

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

und die Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$, so können wir K jetzt beschreiben als

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, f(x, y) = 1\}$$

also die Menge aller Punkte (x, y) für die $f(x, y)$ einen festvorgegebenen Wert hat. Eine solche Menge bezeichnet man auch als Höhenlinie der Funktion f.

Funktionen in zwei und mehr Variablen

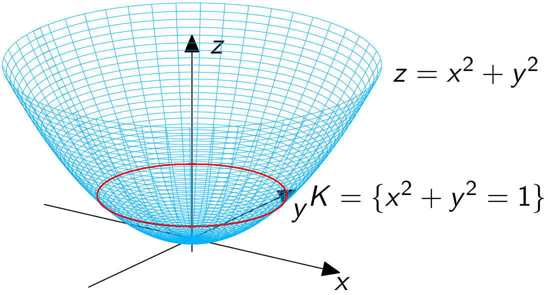


Abbildung: Kegelschnitt

Funktionen in zwei und mehr Variablen

Ganz allgemein kann jeder Kegelschnitt K geschrieben werden als

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c\}$$

für eine geeignete quadratische Funktion $f(x, y)$ und ein passendes $c \in \mathbb{R}$.

Definition

Ist $f(x, y)$ eine Funktion in zwei Variablen mit Definitionsbereich D_f, und ist $c \in \mathbb{R}$ eine feste Zahl, so heißt

$$H_c := \{(x, y) \in D_f \mid f(x, y) = c\}$$

Höhenlinie oder **Niveaulinie** von f zum Niveau c.

Bemerkung

Kegelschnitte sind gerade die Höhenlinien quadratischer Funktionen.

Funktionen in zwei und mehr Variablen

Ein wichtiges Mittel zum Verständnis und zum Studium der Funktionen in mehreren Variablen ist des Festhalten einer Variable. Fixieren wir den Wert für eine Variable, z.B. $y = a$, so erhalten wir daraus eine Funktion

$$g(x) = g_a(x) = f(x, a)$$

die jetzt nur noch von einer Variablen abhängt. Analog können wir auch ein $x = b$ fixieren und erhalten entsprechend Funktionen

$$h(y) = h_b(y) = f(b, y)$$

Funktionen in zwei und mehr Variablen

Beispiel

Betrachten wir wieder die Funktion $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ mit Definitionsbereich $D = \{(x,y) \,|\, x^2+y^2 \leq 1\}$, so erhalten wir für $a, b \in (-1,1)$:

$$
\begin{aligned}
g_a(x) &= \sqrt{1-a^2-x^2} \\
&\quad \text{mit Definitionsbereich} \qquad D_a = \{x \in \mathbb{R} |\, x^2 \leq 1-a^2\} \\
h_b(y) &= \sqrt{1-b^2-y^2} \\
&\quad \text{mit Definitionsbereich} \qquad D_b = \{y \in \mathbb{R} |\, y^2 \leq 1-b^2\}
\end{aligned}
$$

Die Graphen dieser Funktionen sind also Halbkreisbögen mit den Radien $\sqrt{1-a^2}$ bzw. $\sqrt{1-b^2}$. Der Graph von g_a lässt sich geometrisch aus dem Graphen von f dadurch bestimmen, dass wir den Graphen von f mit der Ebene $y = a$ schneiden (und analog für h_b).

Funktionen in zwei und mehr Variablen

Bemerkung

Ist A der Graph einer Funktion $f(x, y)$ in zwei Variablen, und ist $c \in \mathbb{R}$, so gilt

- Die Höhenlinien zu Niveau c erhalten wir als $H_c = A \cap \{z = c\}$ also dadurch, dass wir A mit der durch die Gleichung $z = c$ gegebenen Ebene schneiden.
- Den Graphen der Funktion $g(x) = g_c(x) = f(x, c)$ erhalten wir als $\Gamma_g = A \cap \{y = c\}$ also dadurch, dass wir A mit der durch die Gleichung $y = c$ gegebenen Ebene schneiden.
- Den Graphen der Funktion $h(y) = h_c(y) = f(c, y)$ erhalten wir als $\Gamma_g = A \cap \{x = c\}$ also dadurch, dass wir A mit der durch die Gleichung $x = c$ gegebenen Ebene schneiden.

Funktionen in zwei und mehr Variablen

Genauso wie Funktionen in zwei Veränderlichen behandeln wir auch Funktionen und Abbildungen in drei und mehr Veränderlichen.
Unter einer Funktion f in m unabhängigen Variablen verstehen wir eine Vorschrift, die jedem geordneten Zahlenpaar $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ aus einer Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^m$, dem Definitionsbereich von f, eine eindeutig bestimmte reelle Zahl $z = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ zuordnet. Wir schreiben hierfür

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

und setzen $x := (x_1, \dots, x_m)$ und $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$.

Bemerkung

Im Fall $m = 3$ schreiben wir für die Variablen üblicherweise x, y und z (anstelle von x_1, x_2 und x_3).

Funktionen in zwei und mehr Variablen

Unter einer n–dimensionalen Abbildung f in m unabhängigen Variablen verstehen wir eine Vorschrift, die jedem geordneten Zahlenpaar $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ aus einer Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^m$, dem Definitionsbereich von f, eine eindeutig bestimmtes n–Tupel reeller Zahlen $(z_1, \dots, z_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ zuordnet. Hierfür schreiben wir

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

und setzen $x := (x_1, \dots, x_m)$ und $f(x) := f(x_1, x_2, \dots, x_m)$.

Beispiel

Durch die Zuordnung $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \cdot x_2, \cos(x_1) + \sin(x_3))$ wird eine 2–dimensionale Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

in drei unabhängigen Variablen definiert.

Funktionen in zwei und mehr Variablen

Bemerkung

Funktionen in drei oder mehr unabhängigen Variablen lassen sich nicht mehr in einfacher Weise graphisch darstellen, da unser Anschauungsraum nur drei Dimensionen (für zwei unabhängige Variablen und eine abhängige oder für eine unabhängige und zwei abhängige Variablen) zulässt. Es ist jedoch möglich, die Dimensionalität zu reduzieren, indem wir etwa eine Variable festhalten (wie wir das auch schon bei Funktionen in zwei Variablen getan haben. Betrachten wir zum Beispiel die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, und halten wir $z = 1$ fest, so bekommen wir eine Funktion

$$g(x, y) = f(x, y, 1) = x^2 + y^2 - 1$$

in zwei Variablen.

Funktionen in zwei und mehr Variablen

Bemerkung

Fixieren wir $y = 1$ so erhalten wir analog

$$h(x, y) = f(x, 1, y) = x^2 - y^2 + 1$$

und diese beiden Funktionen können wir uns graphisch veranschaulichen:

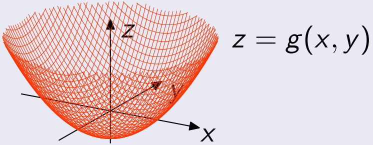


Abbildung: $g(x, y)$

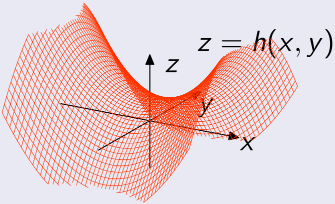


Abbildung: $g(x, y)$

Funktionen in zwei und mehr Variablen

Bemerkung

Um ein vollständiges Bild von f zu bekommen, müssten wir uns jedoch die Graphen für jeden festen Wert von x, y und z darstellen.
Eine weitere Möglichkeit, uns eine Funktion in drei Variablen zu veranschaulichen, erhalten wir durch **Niveauflächen**, einer Verallgemeinerung von Niveaulinien, die wir schon bei Funktionen in zwei Variablen kennengelernt haben. Dazu halten wir einen Zielwert c fest und suchen alle (x, y, z) mit $f(x, y, z) = c$. Betrachten wir in unserem Beispiel etwa $c = 1$ bzw. $c = -1$, so suchen wir sämtliche Lösungen der Gleichung

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1 \quad \text{bzw. } x^2 + y^2 - z^2 = -1$$

und erhalten folgendes Bild

Funktionen in zwei und mehr Variablen

Bemerkung

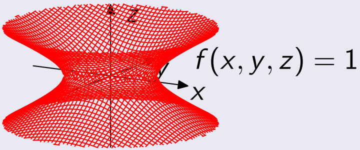


Abbildung: $f(x, y, z) = 1$

Auch hier müssen wir natürlich wieder alle Niveauflächen zeichnen, um ein vollständiges Bild von f zu bekommen. In der Praxis reichen allerdings häufig einige Niveauflächen um einen guten ersten Eindruck von der Struktur von f zu erhalten.

Funktionen in zwei und mehr Variablen

Bemerkung

Insgesamt zeigen jedoch bereits in diesem einfachen Fall die vielen Bilder, wie schwer es ist, sich ein Bild von Funktionen in mehr als zwei Variablen zu machen.

Bemerkung

Auch bei Funktionen und Abbildungen in drei und mehr Variablen können wir vom Graphen sprechen. Ist etwa

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine Abbildung mit Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}^m$, so ist der Graph Γ_f von f eine Teilmenge von $\mathbb{R}^{n+m}$, und zwar

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+m} \,|\, x \in D\} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$$

Funktionen in zwei und mehr Variablen

Bemerkung

Betrachten wir etwa wieder das Beispiel $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ aus Beispiel, so gilt hier

$$\Gamma_f = \{(x, y, z, x^2 + y^2 - z^2) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

Die Niveauflächen von f zum Niveau $z = a$ erhalten wir jetzt dadurch, dass wir den Graphen von f mit dem Raum, der durch die Gleichung $z = a$ in $\mathbb{R}^4$ gegeben ist, also mit der Menge $R_{z=a} = \{(x, y, z, a) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ schneiden. Entsprechend erhalten wir den Graphen der Funktion $g(x, y)$, die wir durch Fixierung von $z = b$ bekommen, dadurch, dass wir Γ_f mit dem Raum, der durch die Gleichung $z = b$ in $\mathbb{R}^4$ gegeben ist, also mit $R_{z=b} = \{(x, y, b, \xi) \mid x, y, \xi \in \mathbb{R}\}$ schneiden.

Funktionen in zwei und mehr Variablen

Aus bekannten Abbildungen können wir neue Abbildungen erzeugen, indem wir etwa die Vektorraumoperationen auf dem $\mathbb{R}^n$ ausnutzen.

Definition

Ist $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung und $r \in \mathbb{R}$, so wird durch die Zuordnung $(r \cdot f)(x) := r \cdot f(x)$ eine neue Abbildung

$$r \cdot f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

definiert, das r–fache der Abbildung f.

Sind $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ zwei Abbildungen mit einem gemeinsamen Definitionsbereich D, so wird durch die Zuordnung $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ eine neue Abbildung

$$f + g : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

definiert, die **Summme** von f und g.

Funktionen in zwei und mehr Variablen

Definition

Ebenso wird durch die Zuordnung $(f - g)(x) := f(x) - g(x)$ eine neue Abbildung

$$f - g : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

definiert, die **Differenz** von f und g.

Sind $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen mit einem gemeinsamen Definitionsbereich D, so wird durch die Zuordnung $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$ eine neue Abbildung

$$f \cdot g : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

definiert, das **Produkt** von f und g.

Funktionen in zwei und mehr Variablen

Definition

Gilt ausserdem $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so wird durch die Zuordnung $\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$ eine neue Abbildung

$$\frac{f}{g} : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

definiert, der **Quotient** von f und g.

Funktionen in zwei und mehr Variablen

Beispiel

Für die Abbildungen

$$f, g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

mit $f(x, y, z) = (x \cdot y, y \cdot z)$ und $g(x, y, z) = (y, \cos(xyz))$ sind

$$f \pm g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

definiert durch

$$\begin{aligned} (f + g)(x, y, z) &= (x \cdot y + y, y \cdot z + \cos(xyz)) \\ (f - g)(x, y, z) &= (x \cdot y - y, y \cdot z - \cos(xyz)) \end{aligned}$$

Funktionen in zwei und mehr Variablen

Beispiel

Für die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) = x \cdot y \cdot z^2$ und $g(x, y, z) = 1 + x^2 + y^2$ ist $f \cdot g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\begin{aligned} (f \cdot g)(x, y, z) &= x \cdot y \cdot z^2 \cdot (1 + x^2 + y^2) \\ &= x \cdot y \cdot z^2 + x^3 \cdot y \cdot z^2 + x \cdot y^3 \cdot z^2 \end{aligned}$$

und $\frac{f}{g} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x, y, z) = \frac{x \cdot y \cdot z^2}{1 + x^2 + y^2}$$

Funktionen in zwei und mehr Variablen

Bemerkung

Bei einer Abbildung $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $n > 1$ spricht man häufig auch von einem **Vektorfeld**. Das kann man sich so vorstellen, dass an jedem Punkt $a \in D$ ein n–dimensionaler Vektor $f(a)$ angreift (z.B. eine Kraft).

Aufgabe

Auf einen Körper der Masse $10\,\mathrm{kg}$ wirkt eine Beschleunigung der Form $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Finden Sie eine Vorschrift, die den Gesamtbetrag der Kraft, die auf den Körper wirkt, als Funktion der Komponenten der Beschleunigung ausdrückt. (Nach dem Newtonschen Gesetz ist $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$.)

Funktionen in zwei und mehr Variablen

Aufgabe

Bestimmen Sie für die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit $f(x, y) = x^2 - y^2$ die Höhenlinien zum Niveau $c = 1$ und zum Niveau $c = -1$. Um welchen Typ von Kegelschnitten handelt es sich dabei?

Aufgabe

Bestimmen Sie für die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ die Niveauflächen zum Niveau $c = 1$ und zum Niveau $c = 4$. Um welche Flächen handelt es sich dabei?

Funktionen in zwei und mehr Variablen

Aufgabe

Bestimmen Sie die maximalen Definitionsbereiche der Funktionen

i) $f(x,y) = \frac{x^2+y^2+1}{x^2-y^2}$.

ii) $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

iii) $f(x,y,z) = \frac{z^2+1}{x^2-4y^2}$.

iv) $f(x,y,z) = \ln\left(25 - (x^2 + y^2 + z^2)\right)$.