Spickzettel 1

Rationale Zahlen

abbrechender oder periodischer Dezimalbruch $\Leftrightarrow$ rationale Zahl $\in \mathbb{Q}$

Bsp: $x = 2{,}\overline{437}$

$$\left.\begin{aligned} 1000x &= 2437{,}437437\ldots \\ x &= 2{,}437437\ldots \end{aligned}\right] -$$

$$999x = 2429$$

$$x = \frac{2429}{999} \in \mathbb{Q}$$

Bsp: $y = \frac{6}{7}$

$$6 : 7 = 0{,}\overline{857142}$$

$$\begin{array}{l} 6 \\ \underline{0} \\ 60 \\ \underline{56} \\ \ \ 40 \\ \ \ \underline{35} \\ \ \ \ \ 50 \\ \ \ \ \ \underline{49} \\ \ \ \ \ \ \ 10 \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \underline{7} \\ \ \ \ \ \ \ \ \ 30 \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \underline{28} \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 20 \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \underline{14} \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 60 \end{array}$$

Hornerschema

Bsp: $f(x) = 4x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 3$ $\qquad x_0 = \frac{1}{2}$

	4	2	1	2	3
		2	2	1,5	1,75
$\frac{1}{2}$	4	4	3	3,5	4,75
		2	3	3	
$\frac{1}{2}$	4	6	6	6,5	
		2	4		
$\frac{1}{2}$	4	8	10		
		2			
$\frac{1}{2}$	4	10			
	4				

$4{,}75 \Leftarrow f(\frac{1}{2})$

4 4 3 3,5: Koeffizienten von $\frac{f(x)}{(x-\frac{1}{2})}$

$$\Rightarrow f(x) = 4(x-\tfrac{1}{2})^4 + 10(x-\tfrac{1}{2})^3 + 10(x-\tfrac{1}{2})^2 + 6{,}5(x-\tfrac{1}{2}) + 4{,}75$$

Partialbruchzerlegung

$$f(x) = \frac{x}{(x-1)(x-2)} \longrightarrow f(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

(1) $$f(x) = \frac{x^2+2}{(x+1)(x+2)(x+3)} \longrightarrow f(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$$

$$f(x) = \frac{3x}{(x-1)^2(x+1)} \longrightarrow f(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{1}{(x^2+1)(x+2)^2} \longrightarrow f(x) = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{(x+2)^2}$$

$$f(x) = \frac{x^5+x^4+3x^2+1}{x^2-1} \xrightarrow{PD} f(x) = x^3+x^2+x+4+\frac{x+5}{x^2-1}$$

$\rightarrow \cancel{f(x)}\ g(x) = \frac{x+5}{(x+1)(x-1)} \rightarrow$ 1. Fall

Zähler muss geringeren Grad als Nenner haben!

Bsp.: (2) $x^2+2 = A(x+2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x+2)$

Spez. Werte einsetzen

$x=-1$: $3 = A(-1+2)(-1+3) + 0B + 0C = 2A \Rightarrow A = \frac{3}{2}$

$x=-2$: $6 = 0A + B(-1)(1) + 0C = -B \Rightarrow B = -6$

$x=-3$: $11 = 0A + 0B + C(-2)(-1) = 2C \Rightarrow C = \frac{11}{2}$

Spickzettel 2

Reihen

Für die unendliche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ eine Partialsumme.

Reihe	Konvergenz	Wert
geom. Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$	konv., $\lvert q\rvert < 1$ div., $\lvert q\rvert \geq 1$	$\frac{1}{1-q}$, $\lvert q\rvert < 1$
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$	konv.	$1-\frac{1}{n+1} \to 1$
harm. Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$	div.	/
$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$	konv.	
$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\binom{2k}{k}}$	konv.	
alt. harm. Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$	konv.	
Exponentialfkt. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$	konv.	e^x

Konvergenzkriterien

Notwendiges Kriterium:

Ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent $\Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = 0$

Majorantenkriterium

$a_k \geq 0$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, wenn eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ mit $\underbrace{a_k \leq b_k}_{\forall k \in \mathbb{N}}$ existiert, die konvergiert.

Minorantenkriterium

analog mit einer divergenten Reihe

$\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ mit $\forall k \in \mathbb{N}: 0 \leq c_k \leq a_k$

$\Rightarrow a_k$ ist ebenfalls divergent.

Gilt auch wenn es erst ab einem $k > k_0$ erfüllt wird (genau wie Major.-Krit.)

Quotientenkriterium

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_k > 0$ konvergiert, wenn

$\exists\, q,\ 0 < q < 1$ so, dass

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q \quad , \forall k \geq k_0 .$$

Wurzelkriterium

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_k > 0$ konvergiert, wenn

$\exists\, q,\ 0 < q < 1$ so, dass

$$\sqrt[k]{a_k} \leq q \quad , \forall k \geq k_0 .$$

Leibniz-Kriterium

Ist die Folge (b_k) monoton fallend $\wedge\ b_k > 0$

$\wedge \lim_{k\to\infty} b_k = 0.$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} b_k$ ist konvergent.

Spickzettel 3

Fortsetzung Konv. v. Reihen

Absolute Konvergenz:

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent,
wenn $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergent ist.

Bedingte Konvergenz:

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt bedingt konvergent,
wenn $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent ist
und $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ divergent ist.

absolut konvergent => konvergent

Satz von L'Hôpital

Ist $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, ist

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Statt gegen 0 kann auch einer oder beide gegen ∞ bzw. $-\infty$ laufen, damit der Satz gilt.

Newton-Verfahren

Suche von Nullstellen einer Funktion
Man nehme einen Startwert x_0 in der Umgebung der Nullstelle.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Elementare Funktionen

Logarithmen:

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

$$\ln(x) = \log_a(x) \cdot \ln(a)$$

Trigonometrische Funktionen:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cancel{\cos(2\alpha) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) =}$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$$

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$$

Spickzettel 4

Differenzieren

$$p(x) = f(x) \cdot g(x) \longrightarrow p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \longrightarrow q'(x) = \frac{g(x) f'(x) - g'(x) f(x)}{g^2(x)}$$

$$m(x) = f(g(x)) \longrightarrow m'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$f(x)$	$f'(x)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\arcsin(x)$	$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$
$\arccos(x)$	$-(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\operatorname{arsinh}(x)$	$(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$
$\operatorname{arcosh}(x)$	$(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x\ln(x) - x$	$\ln(x)$
$\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$	$\sqrt{x}$

Integrieren

Polynome:

$$f(x) = x^3 + 2x + 4 \quad \rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^2 + 4x + c$$

„Potenz +1, durch neuen Exponenten teilen."

Partielle Integration:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\, dx = \left[f(x) \cdot g(x) \right]_a^b - \int f'(x) \cdot g(x)\, dx$$

Substitutionsregel:

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt$$

Bsp.: $\int_0^1 (1+2x)^3\, dx$ Sei $t = 1+2x$

$x = \frac{1}{2}(t-1)$

Neue Grenzen berechnen

	x	t
oben	1	3
unten	0	1

Substitution ableiten & umstellen

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(1)$$

$$dx = \frac{1}{2} \cdot dt$$

Alles einsetzen

$$\int_0^1 (1+2x)^3\, dx$$

$$= \int_1^3 t^3 \cdot \frac{1}{2}\, dt$$

Normal lösen

$$= \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\, t^4 \right]_1^3$$

$$= \left(\frac{81}{8} \right) - \frac{1}{8}$$

$$= \underline{\underline{10}}$$

Spickzettel 5

Fortsetzung Integrieren

Rotationskörper:

Bei Rotation um die x-Achse:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

Bei Rotation um die y-Achse:

$$V = 2\pi \int_a^b x\,f(x)\,dx$$

Bogenlänge:

$$s = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$