1. Zeigen Sie für alle natürlichen Zahlen n : $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$. (20)

Beweis durch vollständige Induktion :

<u>$n=1$</u> : $\quad l.S. = \frac{1^2}{1\cdot 3} = \frac{1}{3}$; $\quad r.S. = \frac{2}{2\cdot 3} = \frac{1}{3}$ ✓

<u>„$n \to n+1$"</u>

zu zeigen : $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$

$$\stackrel{!}{\Longrightarrow} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2(2n+1)} + \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(n+1)(2n+3)}{2(2n+1)(2n+3)}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+3) + (n+1)^2\cdot 2}{2(2n+1)(2n+3)}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+3n+2n+2)}{2(2n+1)(2n+3)} = \frac{(n+1)(2n^2+5n+2)}{2(2n+1)(2n+3)}$$

Bleibt zu zeigen :

$$\frac{\cancel{(n+1)}(2n^2+5n+2)}{\cancel{2}(2n+1)\cancel{(2n+3)}} = \frac{\cancel{(n+1)}(n+2)}{\cancel{2}\cancel{(2n+3)}}$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2n^2+5n+2 = (2n+1)(n+2) \quad ✓$$

2. Sei $f(x) = x^4 - 5x^2 - 36$.

a) Zerlegen Sie $f(x)$ in Faktoren von möglichst niedrigem Grad.
b) Zerlegen Sie $g(x) = 1 / f(x)$ in Partialbrüche . (8 + 13)

$f(x) = x^4 - 5x^2 - 36$

a) mit Substitution $x^2 =: u$

$u^2 - 5u - 36 = 0$; $u_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 36}$

$= \frac{5}{2} \pm \frac{13}{2}$

$u_1 = 9$, $u_2 = -4$

$\Rightarrow f(x) = (x^2 - 9) \cdot (x^2 + 4)$

$= (x-3)(x+3) \cdot (x^2 + 4)$.

b) Partialbruch-Ansatz:

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{(x-3)(x+3)(x^2+4)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

$1 = A(x+3)(x^2+4) + B(x-3)(x^2+4) + (Cx+D)(x-3)(x+3)$

$x=3$: $1 = A \cdot 6 \cdot 13 \Rightarrow A = \frac{1}{78}$

$x=-3$: $1 = A \cdot (-6) \cdot 13 \Rightarrow A = -\frac{1}{78}$

$x=0$: $1 = 12A - 12B - 9D \Rightarrow -9D = 1 - \frac{2 \cdot 12}{78}$

$\Rightarrow D = -\frac{1}{13}$

$x=1$: $1 = \frac{1}{78} \cdot 4 \cdot 5 - \frac{1}{78}(-2) \cdot 5 + (C - \frac{1}{13}) \cdot (-8)$

$C - \frac{1}{13} = -\frac{1}{8}\left(1 - \frac{20}{78} - \frac{10}{78}\right) = -\frac{1}{8} \cdot \frac{48}{78} = -\frac{1}{13}$

$\Rightarrow C = 0$

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{78(x-3)} + \frac{-1}{78(x+3)} - \frac{1}{13(x^2+4)}$$

3. Welche der Aussagen ist richtig, welche falsch?

„Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit positiven Gliedern a_k ist konvergent, wenn ...

a) ... $\frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$ für alle natürlichen Zahlen k“ .

b) ... $a_k \leq \frac{1}{k^2}$ für alle natürlichen Zahlen k“ .

Begründung oder Gegenbeispiel! (10 + 9)

a) Aussage ist falsch. Gegenbeispiel:
harmonische Reihe
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent (bekannt!)

und für $a_n = \frac{1}{n}$ ist $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} < 1$
für alle n

b) Aussage ist richtig. Begründung:
Majoranten-Kriterium mit der als
konvergent bekannten Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$
als Vergleichsreihe.

4. Sei $f(x) = 4\sqrt{x}$ und $g(x) = \frac{1}{2}x^2$.

a) Skizzieren Sie die Schaubilder der Funktionen f und g .
b) Ermitteln Sie alle Schnittpunkte dieser Schaubilder .
c) Unter welchem Winkel schneiden sich die Kurven $y = f(x)$ und $y = g(x)$ in den Schnittpunkten aus b) ?
d) Wie groß ist der Inhalt des von den Schaubildern der Funktionen f und g eingeschlossenen Flächenstücks ?

(3 + 4 + 7 + 6)

5. Zeigen Sie : das lineare Gleichungssystem

$$a\cdot x - b\cdot y = 10 ,$$
$$b\cdot x + a\cdot y = 10$$

ist immer eindeutig lösbar , wenn a und b nicht beide = 0 sind . (20)

Cramersche Regel:

$D = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 \neq 0$, falls $(a,b) \neq (0,0)$

$D \neq 0 \Rightarrow$ System eindeutig lösbar.

1. Zeigen Sie für alle natürlichen Zahlen n : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq 2\sqrt{n+1} - 2$. (20)

Beweis durch vollständige Induktion :

$n=1$: l. S. $= 1$; r. S. $= 2\sqrt{2} - 2 \approx 0{,}828$ ✓

„$n \to n+1$"

zu zeigen : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq 2\sqrt{n+1} - 2 \overset{!}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq 2\sqrt{n+2} - 2$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq 2\sqrt{n+1} - 2 + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Bleibt zu zeigen $2\sqrt{n+1} - \cancel{2} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq 2\sqrt{n+2} - \cancel{2}$

$\Leftrightarrow \; 2(n+1) + 1 \geq 2\sqrt{n+2}\sqrt{n+1}$

$\Leftrightarrow \; (2n+3)^2 \geq 2^2 (n+2)(n+1)$

$\Leftrightarrow \; \cancel{4n^2} + \cancel{12n} + 9 \geq 4(\cancel{n^2} + \cancel{3n} + 2)$

$\Leftrightarrow \; 9 \geq 8$ ✓

2. Zeigen Sie, dass die Reihen

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (\sqrt[n]{2} - 1)$ und b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-1}}$ konvergieren.

c) Bestimmen Sie den Wert der Reihe in b) . (14 + 4 + 5)

a) Die Folge $(\sqrt[n]{2})$ fällt monoton gegen 1 $\Rightarrow (\sqrt[n]{2} - 1)$ fällt monoton gegen 0.

$\Rightarrow$ Reihe konvergiert nach dem Leibniz - Kriterium

b) Die Vorzeichen der Summanden alternieren und die Beträge $\frac{1}{2^{n-1}}$ fallen monoton $\rightarrow 0$.

$\Rightarrow$ Reihe konvergent (Leibniz-Krit.)

c) Reihe ist eine geometrische Reihe mit $q = -\frac{1}{2}$ und 1. Summand $= 1$.

$\Rightarrow$ Wert $= \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$.

3. Differenzieren Sie die Funktionen

a) $f(x) = e^{x}(\sin x - \cos x)$, b) $g(x) = \ln(1 + x^{2} + x^{4})$.

Benennen Sie stichwortartig die Regeln , die Sie verwenden . (8 + 8)

a) $f(x) = e^{x}(\sin x - \cos x)$

$f'(x) = e^{x}(\sin x - \cancel{\cos x}) + e^{x}(\cancel{\cos x} + \sin x)$

$\uparrow$ Produktregel

$= 2e^{x} \sin x$

b) $g(x) = \ln(1 + x^{2} + x^{4})$

$g'(x) = \frac{2x + 4x^{3}}{1 + x^{2} + x^{4}}$; Kettenregel

4. Bestimmen Sie Stammfunktionen zu

a) $f(x) = \frac{(1-\sqrt{x})^{2}}{\sqrt{x}}$, b) $g(x) = \frac{8x - 9}{4x^{2} - 9x + 7}$. (8 + 10)

5. Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß - Algorithmus alle Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + 4y + 3z - 2w &= 3 \\ x + 3y + 3z - w &= 4 \\ 2x - 2y + 2z + w &= 5 \\ x - 2y + 3z + 3w &= 6 \end{aligned}$$

. (23)

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} & x & y & z & w & \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}
\end{array}
\to
\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -10 & -4 & 5 & -1 \\ 0 & -6 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}
$$

$$
\to
\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 10 & 4 & -5 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & -5 & -3 \end{pmatrix}
\to
\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}
$$

$w = 3$; $z = \frac{1}{4}(11 - 15) = -1$, $y = -1 + 3 = 2$

$x = 3 - 8 + 3 - 6 = 4$

$(x, y, z, w) = (4, 2, -1, 3)$