Kapitel 4

Gewöhnliche Differentialgleichungen

4.1 Einführung und Definitionen

In vielen praktischen Fragestellung aus der Technik oder der Physik spielen Ableitungen und Beziehungen zwischen einer Funktion und ihren Ableitungen eine wichtige Rolle.

Beispiel 4.1.1. Ein Fahrzeug fährt mit konstanter Geschwindigkeit $v = 30\frac{m}{s}$ auf einer schnurgeraden Straße. Wenn das Auto zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ an Ihnen vorbeifährt, wie weit weg ist es dann nach 100 Sekunden?
Bezeichnet $s(t)$ den Punkt auf der Linie, an dem sich das Fahrzeug zum Zeitpunkt t befindet, so beschreibt die Geschwindigkeit gerade die infinitesimale Änderung des Ortes, also

$$s'(t) = v(t)$$

In unserer Situation wissen wir, dass $v(t) = 30\frac{m}{s}$ konstant ist, also nicht von der Zeit abhängt, und dass sich das Fahrzeug zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ im Punkt 0 (Ihrem Standort) befindet. Damit ist also die folgende Situation gegeben

$$\begin{aligned} s'(t) &= 30 \\ s(0) &= 0 \end{aligned}$$

und wir willen daraus $s(100)$ ableiten. Wie hier vorzugehen ist, ist natürlich in dieser Situation wohlbekannt. Für den Standpunkt des Fahrzeugs erhalten wir die Gleichung $s(t) = 30t$, und damit

$$s(100) = 30\frac{m}{s} \cdot 100s = 3000m$$

Schwieriger wird die Situation wenn das Fahrzeug nicht mit konstanter Geschwindigkeit unterwegs ist sondern auch noch eine Beschleunigung erfährt. Ändern wir etwa unsere Problemstellung dahingehend, dass wir annehmen, dass das Fahrzeug zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ mit einer Geschwindigkeit von $v(0) = 30\frac{m}{s}$ an Ihnen vorbeifährt und mit einer konstanten Beschleunigung von $a(t) = 1\frac{m}{s^2}$ beschleunigt wird, so beschriebt diese Beschleunigung die (infinitesimale) Änderung der Geschwindigkeit,

$$v'(t) = a(t)$$

und da die Geschwindigkeit wiederum die infinitesimale Ortsänderung beschreibt, erhalten wir insgesamt

$$\begin{aligned} s''(t) &= 1 \\ s'(0) &= 30 \\ s(0) &= 0 \end{aligned}$$

Auch in diesem Fall ist uns die Lösung des Problems aus der Physik wohlbekannt, und wir erhalten

$$s(t) = t^2 + 30t$$

also

$$s(100) = 100^2 + 30 \cdot 100 = 13000m$$

Beispiel 4.1.2. An einem Kondensator liegt zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ eine Spannung $u(0) = 0$ an. Der Kondensator wird für $t > 0$ über einen Ohmschen Widerstand R mit der Gleichspannung U aufgeladen. Gesucht ist der zeitliche Verlauf der am Kondensator anliegenden Spannung und des im Kondensator fließenden Stroms.

Die Beziehung zwischen Strom und Spannung ist gegeben durch

$$u(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt$$

Aus der Kirchhoffschen Regeln erhalten wir

$$U = u_R(t) + u(t)$$

wobei $u_R(t)$ die zum Zeitpunkt t am Kondensator abfallende Spannung bezeichnet. Nach dem Ohmschen Gesetz gilt schließlich

$$u(t) = U - R \cdot i(t)$$

Führen wir diese Gleichungen zusammen, so erhalten wir

$$U - Ri(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t)\, dt$$

und durch Differenzieren nach t die Beziehung

$$-Ri'(t) = \frac{1}{C} \cdot i(t)$$

also auch hier wieder eine Beziehung zwischen einer Funktion, in diesem Fall $i(t)$ und ihrer Ableitung.

Beispiel 4.1.3. Sie hängen einen Körper der Masse m an eine elastischen Feder, lenken diese aus der Ruhelage aus und lassen den Körper los. Wenn wir Reibungskräfte, Luftwiderstand etc. vernachlässigen, dann schwingt der Körper an der Feder ohne Abschwächung auf und ab. Das wird verursacht durch die Rückstellkraft der Feder, die immer entgegen der Auslenkung y des Körpers aus der Ruhelage wirkt, auf den Körper wirkt also eine Kraft

$$F = F(y) = -D \cdot y$$

mit einer positiven Konstanten D, der Federkonstanten. Andererseits ist diese Kraft (nach dem Newtonschen Gesetz) auch gegeben als Produkt aus der Masse des Körper und seiner Beschleunigung, und wir erhalten eine weitere Beziehung

$$F(y) = m \cdot y''$$

da ja die Beschleunigung die zweite Ableitung der Auslenkung ist. Setzen wir beide Beziehungen zusammen, so erhalten wir

$$-D \cdot y = m \cdot y''$$

oder

$$y'' + \frac{D}{m} y = 0$$

eine Gleichung, die schon sehr viel schwieriger zu analysieren ist.

Eine Gleichung, die eine Funktion und ihre Ableitungen involviert, nennen wir eine Differentialgleichung.

Definition 4.1.1. Eine **gewöhnliche Differentialgleichung** für eine reell– oder komplexwertige Funktion $y = y(x)$ ist eine funkionale Beziehung

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{4.1}$$

oder explizit

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) \tag{4.2}$$

Dabei heißt n die **Ordnung** der Differentialgleichung 4.1.

Beispiel 4.1.4. In Beispiel 4.1.3 erhielten wir die Beziehung

$$y'' + \frac{D}{m} y = 0$$

also mit $f(x, y, y') = -\frac{D}{m} y$, die Differentialgleichung

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x))$$

der Ordnung 2.

Definition 4.1.2. Eine **allgemeine Lösung** der Differentialgleichung 4.1 (über einem Intervall (a, b)) ist eine n–mal stetig differenzierbare Funktion

$$y : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

die, eingesetzt in 4.1 diese Gleichung erfüllt.

Beispiel 4.1.5. Die Differentialgleichung

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x))$$

aus Beispiel 4.1.3 hat die allgemeine Lösung

$$y(x) = A \cdot \cos(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot x + b)$$

mit beliebigen Konstanten A und b.

Definition 4.1.3. Ein **Anfangswertproblem** (zu einem Punkt $x_0 \in (a,b)$) ist eine Differentialgleichung

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

zusammen mit n Bedingungen

$$\begin{array}{lcl} y(x_0) & = & b_0 \\ y'(x_0) & = & b_1 \\ & \vdots & \\ y^{(n-1)}(x_0) & = & b_{n-1} \end{array}$$

mit vorgegebenen Konstanten $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$.

Beispiel 4.1.6. Im Beispiel 4.1.1 betrachteten wir zunächst das Anfangswertproblem

$$\begin{array}{lcl} s'(t) & = & 30 \\ s(0) & = & 0 \end{array}$$

Die zugrundeliegende Differentialgleichung $s'(t) = 30$ hat die allgemeine Lösung $s(t) = 30t + a$ mit einer Konstanten a; durch die Anfangsbedingungen wird daraus die eindeutige Lösung

$$s(t) = 30t$$

(also $a = 0$).
Im zweiten Teil betrachteten wir das Anfangswertproblem

$$\begin{array}{lcl} s''(t) & = & 1 \\ s'(0) & = & 30 \\ s(0) & = & 0 \end{array}$$

Auch hier hängt die allgemeine Lösung $s(t) = t^2 + at + b$ von Parametern a, b ab, die durch die Anfangsbedingungen eindeutig festgelegt werden:

$$s(t) = t^2 + 30t$$

Bemerkung 4.1.1. Wir haben in unserer Definition vorausgesetzte, dass die Differentialgleichung in der Form

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

gegeben ist. Solche Differentialgleichungen nennt man auch **explizit**, da die höchste vorkommende Ableitung explizit und isoliert steht. Gelegentlich treten auch Probleme auf, die sich nicht eindeutig nach $y^{(n)}$ auflösen lassen und in denen die Beziehung in der Form

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$$

gegeben ist. Solche Differentialgleichungen nennen wir **implizit**. Wir werden uns im folgenden nur im expliziten Differentialgleichungen beschäftigen. Ein einfaches Beispiel einer impliziten Differentialgleichung ist etwa

$$(y')^2 - y^2 = 0$$

Diese Differentialgleichung kann nicht eindeutig nach y' aufgelöst werden.

Die fundamentalen Fragen, die sich für uns stellen werden, sind die nach der Existenz der Lösung eines Anfangswertproblems und die nach der Eindeutigkeit dieser Lösung. Die Eindeutigkeitsfrage lässt sich recht allgemein beantworten:

Satz 4.1.1. *Wir betrachten ein Anfangswertproblem*

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

mit Anfangsbedingungen

$$\begin{array}{rcl} y(x_0) & = & b_0 \\ y'(x_0) & = & b_1 \\ & \vdots & \\ y^{(n-1)}(x_0) & = & b_{n-1} \end{array}$$

Ist f, aufgefasst als Funktion $f(x, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ in $n+1$ Variablen, stetig partiell differenzierbar nach $x, y_0, \ldots, y_{n-1}$ (in einer geeigneten Umgebung von $(x_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$), so hat dieses Anfangswertproblem nahe bei x_0 eine eindeutige Lösung.

Für einen Beweis vergleiche etwa: O. Forster, *Analysis II* §10, Satz 3.

4.2 Differentialgleichungen erster Ordnung

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit Differentialgleichungen der Form

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

beschäftigen. Dabei wollen wir der Einfachheit halber annehmen, dass f für alle $x, y \in \mathbb{R}$ definiert und stetig ist. Abhängig von der Form von f gibt es verschiedene Strategien und Methoden, diese zu behandeln und zu untersuchen.

4.2.1 Differentialgleichungen mit getrennten Variablen

Im einfachsten Fall sind in $f(x, y)$ die Terme mit x und y streng separiert,

$$y'(x) = h(x) \cdot g(y(x)) \tag{4.3}$$

(also $f(x, y) = h(x) \cdot g(y)$). Eine solche Differentialgleichung nennen wir *Differentialgleichung mit getrennten Variablen.*
Für $a, b \in \mathbb{R}$ nehmen wir an, dass $g(b) \neq 0$ und setzen

$$H(x) = \int_a^x h(t)\, dt, \qquad G(y) = \int_b^y \frac{1}{g(t)}\, dt$$

(für y in einem kleinen Intervall J nahe bei b, so dass $g(t) \neq 0$ für alle t zwischen b und y).

Satz 4.2.1. *Nahe bei a gibt es genau eine Lösung $y(x)$ von 4.3 mit $y(a) = b$. Für diese Lösung gilt*

$$G(y(x)) = H(x) \qquad \textit{für alle } x$$

Beweis: I n dem Intervall J nahe bei b gilt nach dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung

$$G'(y) = \frac{1}{g(y)} \neq 0$$

und zwar gilt (nach dem Zwischenwertsatz) entweder

$$G'(y) > 0 \quad \text{für alle } y \in J$$

oder

$$G'(y) < 0 \qquad \text{für alle } y \in J$$

In jedem Fall ist also $G(y)$ streng monoton (steigend oder fallend) in J und besitzt daher eine stetig differenzierbare Umkehrfunktion

$$\Gamma(x) : I \longrightarrow J$$

(wobei $I = G(J)$)
Wir nehmen jetzt zunächst an, dass wir ein Lösung $y(x)$ von 4.3 mit $y(a) = b$ haben. Dann gilt

$$y'(x) = h(x) \cdot g(y(x)) \qquad \text{für alle } x$$

also (nahe bei a und b)

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x)$$

und damit

$$\int_a^x \frac{y'(t)}{g(y(t))}\,dt = \int_a^x h(t)\,dt$$

Mit der Substitution $u = y(t)$ ist das

$$\int_b^{y(x)} \frac{1}{g(u)}\,du = \int_a^x h(t)\,dt$$

also $G(y(x)) = H(x)$. Jede Lösung erfüllt also die Bedingung des Satzes. Damit muss aber wegen der Umkehrbarkeit von G bei b schon gelten

$$y(x) = \Gamma(H(x))$$

und dadurch ist $y(x)$ eindeutig festgelegt, falls es denn eine Lösung gibt.
Setzen wir umgekehrt $y(x) = \Gamma(H(x))$, so gilt hierfür

$$y(a) = \Gamma(H(a)) = \Gamma(0) = b$$

Aus der Beziehung $G(y(x)) = F(x)$ erhalten wir einerseits durch Differenzieren

$$G'(y(x)) \cdot y'(x) = F'(x) = f(x) \tag{4.4}$$

und aus dem Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion

$$G'(y(x)) = \frac{1}{g(y(x))} \tag{4.5}$$

Kombinieren wir die Beziehungen 4.4 und 4.5, so ergibt das

$$y'(x) = h(x) \cdot g(y(x))$$

wie gewünscht.

Beispiel 4.2.1. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y'(x) = y(x)^2$$

mit der Anfangsbedingung

$$y(1) = 1$$

Wir haben hier eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen mit

$$h(x) = 1, \qquad g(y) = y^2$$

Wie im Satz betrachten wir die Hilfsfunktionen

$$H(x) = \int_1^x 1\,dt = x - 1$$

und

$$G(y) = \int_1^y \frac{1}{t^2}\,dt = 1 - \frac{1}{y}$$

Damit muss die Lösung des Anfangswertproblems die Gleichung

$$1 - \frac{1}{y(x)} = x - 1$$

erfüllen, woraus folgt

$$y(x) = \frac{1}{2 - x}$$

Da nach dem Existenz– und Eindeutigkeitssatz eine Lösung der Differentialgleichung in der Nähe von 1 existieren muss, löst dieses $y(x)$ notwendigerweise die Differentialgleichung.

Beispiel 4.2.2. Bei der Betrachtung einer an zwei Punkten aufgehängten Kette mit einer gegebenen Masse m kommt man auf eine Differentialgleichung der Form

$$y''(x) = c \cdot \sqrt{1 + y'(x)^2}$$

mit einer geeigneten Konstanten c, die unter anderem von der Masse der Kette abhängt *(Differentialgleichung der Kettenlinie)*. Das ist zunächst nicht die Form, die wir wünschen, führen wir jedoch die Substitution $u = y'$ durch, so schreibt sich unsere Differentialgleichung als

$$u' = c\sqrt{1 + u^2}$$

und wir erhalten eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen, mit

$$h(x) = c, \qquad g(u) = \sqrt{1 + u^2}$$

Hier ist g immer positiv, und wir können Satz 4.2.1 anwenden. Mit den Hilfsfunktionen

$$H(x) = \int c\,dt = cx + A_1, \qquad G(u) = \int \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}}\,du = \operatorname{arsinh}(u) + A_2$$

haben wir also die Gleichung

$$\operatorname{arsinh}(u(x)) = cx + A$$

zu betrachten, woraus zunächst folgt

$$u(x) = \sinh(cx + A)$$

Zur Lösung unseres Problems müssen wir noch $a(x) = y'(x)$ einsetzen, also

$$y(x) = \int \sinh(ct + A)\,dt = \cosh(ct + A) + B$$

Die Konstanten A und B sind durch die Rahmenbedingungen des Systems zu bestimmen.

Oft liegt die betrachtete Differentialgleichung nicht in der gewünschten Form, also mit separierten Variablen vor, lässt sich jedoch leicht darauf zurückführen, etwa durch eine einfache Substitution.

Regel 4.2.2. *Eine Differentialgleichung der Form*

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

mit $y(a) = b$ *geht durch die Substitution* $u(x) = \frac{y(x)}{x}$ *über in die Differentialgleichung*

$$u' = \frac{f(u) - u}{x}$$

mit $u(a) = \frac{b}{a}$*, also in eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen mit*

$$h(x) = \frac{1}{x}, \qquad g(u) = f(u) - u$$

Ist nun $g\left(\frac{b}{a}\right) \neq 0$*, so kann das Verfahren aus Satz 4.2.1 angewendet werden.*

Beispiel 4.2.3. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$$

Durch die Substitution $u = \frac{y}{x}$ wird daraus die Differentialgleichung

$$u' = \frac{e^{-u}}{x}$$

Hier ist $g(u) = e^{-u}$. Unabhängig von der Anfangsbedingung $y(a) = b$ haben wir also $g\left(\frac{b}{a}\right) \neq 0$ und wir können Satz 4.2.1 anwenden. Mit

$$H(x) = \int \frac{1}{t}\, dt = \ln(x) + A_1, \qquad G(u) = \int \frac{1}{e^{-u}}\, du = e^u + A_2$$

erhalten wir zunächst für u die Gleichung

$$e^{u(x)} = \ln(x) + A$$

also $u(x) = \ln(\ln(x) + A)$, und damit

$$y(x) = x \cdot \ln(\ln(x) + A)$$

Beispiel 4.2.4. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$x^2 y' = y^2$$

mit $y(2) = 2$. Das können wir schreiben als $y' = \frac{y^2}{x^2}$, und nach der Substitution $u(x) = \frac{y}{x}$ wird daraus das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{u^2 - u}{x}$$

mit $u(2) = 1$. Wir haben also $g(u) = u^2 - u$ und damit $g(1) = 0$. Daher ist in dieser Situation Satz 4.2.1 nicht anwendbar. Allerdings ist hier schon das Ausgangsproblem eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen mit $h(x) = \frac{1}{x^2}$ und $g(y) = y^2$. Hierfür gilt $g(2) = 4 \neq 0$, und daher ist Satz 4.2.1 anwendbar und führt mit den Hilfsfunktionen

$$H(x) = \int_2^x \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{x}, \qquad G(y) = \int_2^y \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{y}$$

zu der Lösung

$$y(x) = x$$

4.2.2 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Relativ einfach zu behandeln sind auch Differentialgleichungen in denen y in nicht zu komplizierter Form auftritt.

Definition 4.2.1. Eine Differentialgleichung der Form

$$y'(x) = f(x)y(x) + g(x)$$

heißt **lineare Differentialgleichung** erster Ordnung.
Ist $g(x) = 0$, so heißt die lineare Differentialgleichung **homogen**

Satz 4.2.3. *Die homogene lineare Differentialgleichung*

$$y' = f(x)y(x)$$

mit Anfangsbedingung $y(a) = b$ hat genau eine Lösung, nämlich

$$y(x) = b \cdot exp\left(\int_a^x f(t)\, dt\right)$$

Beweis: D as könnten wir aus Satz 4.2.1 herleiten. Der Nachweis, dass das angegebene $y(x)$ eine Lösung ist, lässt sich aber auch direkt durch Differenzieren führen. Die Eindeutigkeit folgt dann aus Satz 4.1.1.

Besonders einfach sind homogene lineare Differentialgleichungen der Form

$$y' = cy$$

mit einer Konstanten c. Auch dieser Fall tritt in der Anwendung auf:

Beispiel 4.2.5. Bezeichnen wir mit $N = N(t)$ die Anzahl der Atome eines radioaktiven Materials zum Zeitpunkt t, so ist die zerfallsrate zu einem gegebenen Zeitpunkt proportional zur Anzahl der zu diesem Zeitpunkt vorhandenen Atome, also

$$N'(t) = -\lambda \cdot N(t)$$

mit einer Zerfalskonstante $\lambda > 0$. Sind also zum Zeitpunt $t_0 = 0$ genau N_0 Atome vorhanden, so sagt uns Satz 4.2.3

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

Beispiel 4.2.6. Die Entwicklung einer Bakterienpopulation $P(t)$ unter Laborbedingungen ist direkt proportional zu der Anzahl der vorhandenen Bakterien, genügt also einer Differentialgleichung

$$P'(t) = \mu P(t)$$

mit einer Wachstumskonstanten $\mu > 0$. Beträgt also die Population zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ genau P_0, so sagt uns Satz 4.2.3

$$P(t) = P_0 \cdot e^{\mu t}$$

Wir wollen uns jetzt der allgemeinen linearen Differentialgleichung

$$y'(x) = f(x)y(x) + g(x)$$

zuwenden. Dazu lassen wir uns von der Lösung

$$y(x) = b \cdot \exp\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)$$

der homogenen linearen Differentialgleichung inspirieren und machen den Ansatz

$$y(x) = b(x) \cdot \exp\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)$$

wir ersetzen also die Konstante b durch die Funktion $b(x)$. Durch Differenzieren erhalten wir

$$\begin{aligned} y'(x) &= b'(x)\exp\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) + b(x)\exp\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)\cdot f(x) \\ &= b'(x)\exp\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) + y(x)f(x) \end{aligned}$$

Da wir ja erreichen wollen, dass

$$y' = f(x)y(x) + g(x)$$

ergibt das

$$g(x) = b'(x)\exp\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)$$

also

$$b'(x) = g(x)\cdot\exp\left(-\int_a^x f(t)\,dt\right)$$

und daher

$$b(x) = \int g(\xi)\cdot\exp\left(-\int_a^\xi f(t)\,dt\right)\,d\xi = b + \int_a^x g(\xi)\cdot\exp\left(-\int_a^\xi f(t)\,dt\right)\,d\xi$$

und wir haben mit unserem Ansatz in der Tat eine Lösung gefunden.

Satz 4.2.4. *Bezeichnen wir mit*

$$\varphi(x) := exp\left(\int_{x_0}^x f(t)\,dt\right)$$

so hat das Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(x)y(x) + g(x)$$

mit $y(a) = b$ genau eine Lösung

$$y(x) = \varphi(x)\left(b + \int_a^x \frac{g(t)}{\varphi(t)}\,dt\right)$$

Beispiel 4.2.7. Bei der Betrachtung von RL–Serienschaltungen ist die Differentialgleichung

$$I'(x) + I(x) = u(x)$$

(also $I'(x) = -I(x) + u(x)$) mit Anfangswert $I(0) = 0$ zu lösen.
In diesem Fall ist

$$\varphi(x) = e^{-\int\limits_0^x dt} = e^{-x}$$

und damit

$$I(x) = e^{-x}\left(0 + \int\limits_0^x \frac{u(t)}{e^{-t}}\,dt\right) = e^{-x}\cdot\int\limits_0^x u(t)e^t\,dt$$

ist jetzt auch noch die Spannung $u(x) = U_0$ konstant, so erhalten wir

$$I(x) = e^{-x}\cdot U_0\cdot\int\limits_0^x e^t\,dt = U_0\left(1 - e^{-x}\right)$$

Bemerkung 4.2.1. Eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung kann im Intervall $[0,\infty)$ auch mit Hilfe der **Laplace–Transformation** behandelt werden. Betrachten wir etwa die Gleichung

$$y'(x) + ay(x) = f(x), \qquad y(0) = y_0$$

mit einer konstanten a und wenden wir auf beide Seiten die Laplace–Transformation an, und bezeichnen wir mit $Y(s)$ die Laplace–Transformierte von $y(x)$ und mit $F(s)$ die Laplace–Transformierte von $f(t)$, so erhalten wir unter Ausnutzung der Rechenregeln für die Laplacetransformation (aus der Analysis in einer Variablen) die Gleichung

$$s\cdot Y(s) - y_0 + a\cdot Y(s) = F(s)$$

also die Beziehung

$$Y(s) = \frac{F(s) + y_0}{s + a}$$

Durch Rücktransformation lässt sich hieraus in vielen Fällen die Lösung unmittelbar ablesen.

Beispiel 4.2.8. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'(x) + y(x) = \frac{x^2}{2} \qquad y(0) = 2$$

Wenden wir, wie in Bemerkung 4.2.1 Laplacetransformation an, so erhalten wir (unter Ausnutzung unserer Tabellen aus der Analysis I) die Gleichung

$$Y(s) = \frac{F(s) + 2}{s+1} = \frac{\frac{1}{s^3} + 2}{s+1} = \frac{1}{s^3(s+1)} + \frac{2}{s+2}$$

Mit Hilfe der Partialbruchzerlegung schreiben wir diesen Ausdruck als

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} - \frac{2}{s+1}$$

Für jeden dieser Summanden als Bildfunktion kennen wir aus unserer Tabelle die Originalfunktion, und wir erhalten damit als Lösung

$$y(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - 2e^{-x}$$

Beispiel 4.2.9. Eine Differentialgleichung der Form

$$y'(x) = f(x) \cdot y(x) + g(x) \cdot (y(x))^\alpha$$

heißt *Bernoullische Differentialgleichung.* Ist $\alpha = 1$, so handelt es sich um ein Differentialgleichung mit getrennten Variablen, ist $\alpha = 0$, so liegt eine lineare Differentialgleichung vor. Für $\alpha \neq 0, 1$ führen wir die Transformation $u(x) = y(x)^{\alpha-1}$ durch und erhalten

$$\begin{aligned} u'(x) &= (1-\alpha)y(x)^{-\alpha}\left(f(x)y(x) + g(x)y(x)^\alpha\right) \\ &= (1-\alpha)\left(f(x)u(x) + b(x)\right) \end{aligned}$$

also eine lineare Differentialgleichung.

Beispiel 4.2.10. Eine Differentialgleichung der Form

$$y'(x) = f(x)y(x)^2 + g(x)y(x) + h(x)$$

heißt *Riccatische Differentialgleichung.* Wir betrachten hierzu die Anfangsbedingung

$$y(x_0) = b_0$$

Zunächst nehmen wir an, dass wir bereits eine Lösung $v(x)$ der Riccatischen Differentialgleichung mit $v(x_0) \neq b_0$ haben. Damit machen wir die Transformation $u(x) = y(x) - v(x)$ und erhalten

$$\begin{aligned}
u'(x) &= y'(x) - v'(x) \\
&= f(x)y(x)^2 + g(x)y(x) + h(x) - f(x)v(x)^2 - g(x)v(x) - h(x) \\
&= f(x)y(x)^2 + 2f(x)v(x)^2 + 2f(x)y(x)v(x) + g(x)y(x) + g(x)v(x) \\
&= f(x)u(x)^2 + (2f(x)v(x) + g(x))\, u(x)
\end{aligned}$$

so dass wir jetzt eine Bernoulli–Gleichung mit $\alpha = 2$ bekommen haben.
Ist keine spezielle Lösung der Riccatischen Differentialgleichung bekannt, so können wir die Substitution

$$u(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} f(t)y(t)\,dt\right)$$

anwenden und erhalten damit

$$\begin{aligned}
u''(x) &= f(x)^2y(x)^2u(x) - f'(x)y(x)u(x) - f(x)y'(x)u(x) \\
&= f(x)^2y(x)^2u(x) - f'(x)y(x)u(x) - f(x)^2y(x)^2u(x) \\
&\quad -f(x)g(x)y(x)u(x) - f(x)h(x)u(x) \\
&= -f'(x)y(x)u(x) - f(x)g(x)y(x)u(x) - f(x)h(x)u(x) \\
&= \left(\tfrac{f'(x)}{f(x)} + g(x)\right) u'(x) - f(x)h(x)u(x)
\end{aligned}$$

Damit haben wir eine lineare Differentialgleichung, allerdings diesmal von der Ordnung 2, erhalten. Im nächsten Abschnitt werden wir Methoden kennenlernen, solche Differentialgleichungen zu betrachten.

4.3 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Wie wir schon im vorangegangenen Abschnitt bei den Riccatischen Differentialgleichungen gesehen haben, tauchen Differentialgleichungen mit $y''(x)$ schon relativ natürlich bei der Betrachtung von Differentialgleichung erster Ordnung auf. Darüberhinaus haben wir sie in Beispiel 4.1.3 auch schon bei