DHBW Mannheim
Informatik

Mannheim, 24.05.2023
Mathematik II/2

Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Von einer stetigen Zufallsvariable wissen wir, dass ihre Dichte durch eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ der Form

$$f(x) = \begin{cases} \sin(a \cdot x) & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{a} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für einen Parameter $a > 0$ gegeben ist.

a) Bestimmen Sie den Parameter a.

b) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz dieser Zufallsvariable.

Falls Sie a in Teil a) nicht bestimmen konnten, berechnen Sei die entsprechenden Integrale in Abhängigkeit vom Parameter a.

Aufgabe 2. Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion von X und Y sei bestimmt durch

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-2\lambda} \cdot \frac{\lambda^{x+y}}{x!y!} & \text{für } x, y \in \{0, 1, ...\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Randverteilung von X und Y.

b) Bestimmen Sie die bedingten Verteilungen von $X|Y = y$ und $Y|X = x$ und vergleichen Sie diese mit den Randverteilungen.

c) Bestimmen Sie die Kovarianz von X und Y.

Aufgabe 3. Ein Anleger verfügt zu Jahresbeginn über 200000 Euro. 150000 Euro legt er bei einer Bank an, die ihm eine zufällige Jahresrendite R_1 garantiert, welche gleichverteilt zwischen 6% und 8% ist. Mit den restlichen 50000 Euro spekuliert er an der Börse, wobei er von einer $N(8, 4)$-verteilten Jahresrendite R_2 (in %) ausgeht. Der Anleger geht davon aus, dass die Renditen R_1 und R_2 unabhängig verteilt sind.

a) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von R_1 und R_2.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten, dass der Anleger an der Börse eine Rendite von 8%, von mindestens 9% bzw. zwischen 6% und 10% erzielt.

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Anleger bei der Bank eine Rendite zwischen 6.5% und 7.5% erzielt?

d) Stellen Sie das Jahresendvermögen V als Funktion der Renditen R_1 und R_2 dar und berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von V.

e) Angenommen, die beiden Renditen sind nicht unabhängig, sondern korrelieren mit $\rho = -0.5$. Wie lautet die Kovarianz zwischen R_1 und R_2?

Aufgabe 4. Von den Zufallsvariablen X und Y ist bekannt, dass $Var(X) = 1$, $Var(Y) = 4$ und $Var(3X + 2Y) = 13$ gelten. Wie groß ist dann der Korrelationskoeffizient $\rho(X, Y)$?