Prof. Dr. H. Siebert , TH Mittelhessen , Fachbereich MND
Aufgaben Analysis, DHBW TINF AI **Blatt 2**

„Wiederholungsaufgaben , Ungleichungen"

1. Für welche reellen x gilt die Gleichung $(x-2)^2 - 9 = (x-5)(x+1)$?

   Lösung

   $\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 - 9 = x^2 + x - 5x - 5 \quad \Rightarrow$ Die Gleichung gilt für alle reellen x.

2. Für welche reellen a haben die folgenden Gleichungen genau eine , genau 2 , gar keine reelle Lösung x ?

   a) $x^2 + 6x + a = 0$, b) $x^2 - 2ax + a^2 = 0$, c) $x^2 - 2ax + a = 0$.

   Lösung

   a) $$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-a} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \text{genau eine Lösung} & \text{für} & a = 9 \\ \text{genau 2 Lösungen} & \text{für} & a < 9 \\ \text{keine Lösung für} & & a > 9 \end{Bmatrix},$$

   b) $$x_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - a^2} \Rightarrow \text{für jedes } a \in \mathbb{R} \text{ immer genau eine Lösung},$$

   c) $$x_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - a} = a \pm \sqrt{a(a-1)} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \text{genau eine Lsung für} & a \in \{0,1\} \\ \text{genau 2 Lösungen für} & a \in (1,\infty) \cup (-\infty,0) \\ \text{keine Lösung für} & a \in (0,1) \end{Bmatrix}.$$

3. Bestimmen Sie alle reellen x mit der Eigenschaft : $\frac{3}{|x-9|} > \frac{2}{x+2}$.

   Tip: welche reellen Zahlen x scheiden von vornherein aus ?

   Lösung

   x = - 2 und x = 9 scheiden von vornherein aus, da dann einer der Nenner = 0 wird. Wir unterscheiden darum die folgenden Fälle und Unterfälle :

   1. $x > -2: \quad \frac{3}{|x-9|} > \frac{2}{x+2} \Leftrightarrow 3(x+2) > 2\,|x-9|$,

   1.1 $-2 < x < 9 \Leftrightarrow 3(x+2) > 2(-x+9) \Leftrightarrow 5x > 12 \Leftrightarrow x > \frac{12}{5}$.

   1.2 $x > 9 \Leftrightarrow 3(x+2) > 2(x-9) \Leftrightarrow x > -24$.

   2. $x < -2: \quad \frac{3}{|x-9|} > \frac{2}{x+2} \Leftrightarrow 3(x+2) < 2|x-9| \Leftrightarrow 3(x+2) < 2(9-x)$

   $\Leftrightarrow 5x < 12 \Leftrightarrow x < \frac{12}{5}$.

Die Ungleichung ist also genau für die x mit $x < -2$ oder $2{,}4 < x < 9$ oder $x > 9$ erfüllt.
Mit Intervallschreibweise : $x \in (-\infty, -2) \cup (2.4, 9) \cup (9, \infty)$.

4. Skizzieren Sie in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die Menge der Punkte (x,y) mit

a) $|x + y| \leq 1$, b) $|x| + |y| \leq 1$, c) $x^2 + y^2 \leq 4$, d) $x^2 - 2x + y^2 - 3 \geq 0$.

Lösung

a) $|x + y| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x + y \leq 1 \Leftrightarrow -1 - x \leq y \leq 1 - x$,

b) $|y| \leq 1 - |x| \Leftrightarrow -1 + |x| \leq y \leq 1 - |x|$,

c) $x^2 + y^2 \leq 4 \Rightarrow$ Inneres des Kreises um $(0, 0)$ mit $r = 2$.

d) $x^2 - 2x + y^2 - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 \geq 4 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 \geq 4$

$\Rightarrow$ Äußeres des Kreises um $(1, 0)$ mit Radius 2 .

5. Zeigen Sie durch vollständige Induktion nach n :

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$, b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Lösung

Die Struktur eines Induktionsbeweises ist bekannt ; daher hier nur die Rechnungen für den Induktionsschluss „von n auf $n+1$“:

a)

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 + (n+1)^3 = (n+1)^2 \left(\frac{1}{4} n^2 + n + 1 \right) = \frac{1}{4} (n+1)^2 (n^2 + 4n + 4) = \frac{1}{4} (n+1)^2 (n+2)^2$$

b)

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

6. Wie lauten die der 1. binomischen Formel entsprechenden Aussagen für

$(a+b)^5$ und $(a+b)^6$?

Lösung

Pascal-Dreieck :

						1						
					1		1					
				1		2		1				
			1		3		3		1			
		1		4		6		4		1		
	1		5		10		10		5		1	
1		6		15		20		15		6		1

a) $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$,

b) $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$.

7. Berechnen Sie die Binomialkoeffizienten

$$\binom{10}{0} \;,\; \binom{10}{1} \;,\; \binom{10}{2} \;,\; \binom{100}{97} \;,\; \binom{45}{6} \;.$$

Lösung

$$\binom{10}{0} = 1,\; \binom{10}{1} = 10\,,\; \binom{10}{2} = 45 \;\left(\text{allg.: } \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}\right) \quad ,$$

$$\binom{100}{97} = \binom{100}{3} = \frac{100!}{3!\cdot 97!} = 161700,$$

$$\binom{45}{6} = 8145060.$$

8. Zeigen Sie für natürliche k und n mit $1 \le k \le n$: $\quad k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

Lösung

$$k\binom{n}{k} = \frac{k\cdot n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,((n-1)-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}$$