DHBW Mannheim
Informatik

Mannheim, 30.11.2022
Mathematik II/1

Übungsblatt 9

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{array}{rcrcr} y_1'(x) & = & y_1(x) & - & 5y_2(x) \\ y_2'(x) & = & 4y_1(x) & - & 7y_2(x) \end{array}$$

mit $y_1(0) = 8, y_2(0) = 2$.

Lösung:
Das Differentialgleichungssystem schreibt sich als

$$y' = A \cdot y$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$$

Wir bestimmen das charakteristische Polynom

$$P_A(\lambda) = (\lambda - 1) \cdot (\lambda + 7) + 20 = \lambda^2 + 6\lambda + 13$$

und erhalten die beiden Eigenwerte $\lambda_{1,2} = -3 \pm 2i$. Zur Bestimmung der Lösungen des Differentialgleichungssystems muss nur ein Eigenwert, etwa $\lambda_1 = -3 + 2i$ betrachtet werden.
Für $\lambda_1 = -3 + 2i$ erhalten wir

$$((-3 + 2i) \cdot E_2 - A) = \begin{pmatrix} -4 + 2i & 5 \\ -4 & 4 + 2i \end{pmatrix}$$

mit Gaußscher Normalform

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 - \frac{1}{2} \cdot i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daher ist eine Basislösung gegeben durch den Vektor

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 2 + i \\ 2 \end{pmatrix}$$

und damit erhalten wir die beiden Lösungen

$$Y_1(x) = \begin{pmatrix} 2\cos(2x) - \sin(2x) \\ 2\cos(2x) \end{pmatrix} \cdot e^{-3x}$$

und

$$Y_2(x) = \begin{pmatrix} \cos(2x) + 2\sin(2x) \\ 2\sin(2x) \end{pmatrix} \cdot e^{-3x}$$

Die allgemeine Lösung ergibt sich als

$$Y(x) = rY_1(x) + sY_2(x)$$

bzw. als

$$\begin{array}{rcllcl} y_1(x) & = & r \cdot (2\cos(2x) - \sin(2x)) \cdot e^{-2x} & + & s \cdot (\cos(2x) + 2\sin(2x)) \cdot e^{-3x} \\ y_2(x) & = & 2r \cdot \cos(2x) \cdot e^{-3x} & + & 2s \cdot \sin(2x) \cdot e^{-3x} \end{array}$$

Einsetzen der Anfangswerte führt zu

$$\begin{array}{rcl} 8 & = & 2r + 2s \\ 2 & = & 2r + 0 \end{array}$$

also $r = 1$ und $s = 3$, und damit zu

$$\begin{array}{rcllcl} y_1(x) & = & (2\cos(2x) - \sin(2x)) \cdot e^{-2x} & + & 3 \cdot (\cos(2x) + 2\sin(2x)) \cdot e^{-3x} \\ y_2(x) & = & 2 \cdot \cos(2x) \cdot e^{-3x} & + & 3 \cdot \sin(2x) \cdot e^{-3x} \end{array}$$

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die Lösungen der linearen Differentialgleichungssysteme $y' = A_l \cdot y$ $(l = 1, 2, 3, 4)$: mit

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Lösung:
Wir gehen zunächst vor wie in Aufgabe 1 und bestimmen die charakteristischen Polynome:

$$\begin{array}{rcccl} P_{A_1}(\lambda) & = & (\lambda - 2) \cdot (\lambda - 6) - 12 & = & \lambda^2 - 8\lambda \\ P_{A_2}(\lambda) & = & (\lambda - 2) \cdot (\lambda - 6) + 5 & = & \lambda^2 - 8\lambda + 17 \\ P_{A_3}(\lambda) & = & (\lambda - 1) \cdot (\lambda + 3) + 20 & = & \lambda^2 + 2\lambda + 17 \\ P_{A_4}(\lambda) & = & (\lambda - 8) \cdot (\lambda - 3) + 6 & = & \lambda^2 - 11\lambda + 30 \end{array}$$

Damit erhalten wir

a) Für A_1:

Eigenwert $\lambda_1 = 8$ mit Eigenvektor $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und Eigenwert $\lambda_2 = 0$ mit Eigenvektor $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (jeweils mit Vielfachen).

Die allgemeine Lösung ist

$$Y(x) = r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot e^{8x} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{0 \cdot x} = r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot e^{8x} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Für A_2:

Eigenwert $\lambda_1 = 4+i$ mit Eigenvektor $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 2-i \\ 5 \end{pmatrix}$ und Eigenwert $\lambda_2 = 4-i$ mit Eigenvektor $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 2+i \\ 5 \end{pmatrix}$ (jeweils mit Vielfachen). Insbesondere ist A_2 (im Komplexen) diagonalisierbar. Die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung ist daher

$$\begin{aligned} y_1(x) &= (2r - s) \cdot \cos(x) \cdot e^{4x} + (2s + r) \cdot \sin(x) \cdot e^{4x} \\ y_2(x) &= 5r \cos(x) \cdot e^{4x} + 5s \sin(x) \cdot e^{4x} \end{aligned}$$

mit $r, s \in \mathbb{R}$ beliebig.

c) Für A_3:

Eigenwert $\lambda_1 = -1 + 4i$ mit Eigenvektor $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 2+4i \\ 5 \end{pmatrix}$ und Eigenwert $\lambda_2 = -1 - 4i$ mit Eigenvektor $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 2-4i \\ 5 \end{pmatrix}$ (jeweils mit Vielfachen). Insbesondere ist A_3 (im Komplexen) diagonalisierbar. Die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung ist daher

$$\begin{aligned} y_1(x) &= (2r + 4s) \cdot \cos(4x) \cdot e^{-x} + (2s - 4r) \cdot \sin(4x) \cdot e^{-x} \\ y_2(x) &= 5r \cos(4x) \cdot e^{4x} + 5s \sin(4x) \cdot e^{4x} \end{aligned}$$

mit $r, s \in \mathbb{R}$ beliebig.

d) Für A_4:

Eigenwert $\lambda_1 = 6$ mit Eigenvektor $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und Eigenwert $\lambda_2 = 5$ mit Eigenvektor $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (jeweils mit Vielfachen). Insbesondere ist A_4

diagonalisierbar. Die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung ist daher

$$\begin{aligned} y_1(x) &= -re^{6x} - 2se^{5x} \\ y_2(x) &= re^{6x} + 3se^{5x} \end{aligned}$$

mit $r, s \in \mathbb{R}$ beliebig.

Aufgabe 3.

a) Berechnen Sie das Doppelintegral $\int\limits_{\pi}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(y)\cdot\sin(x)\,dxdy$.

Lösung:

Es gilt

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\pi}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(y)\cdot\sin(x)\,dxdy &= \int\limits_{\pi}^{2\pi} \left[-\cos(y)\cdot\cos(x)\right]_{x=0}^{\frac{\pi}{2}}\,dy \\
&= \int\limits_{\pi}^{2\pi} \cos(x)\,dy \\
&= \left[\sin(x)\right]_{\pi}^{2\pi} \\
&= 0
\end{aligned}$$

b) Berechnen Sie das Doppelintegral $\int\limits_{0}^{2}\int\limits_{-1+\frac{y}{2}}^{1-\frac{y}{2}} (4xy - 6x^2 + 12y^2)\,dxdy$.

Lösung:

Es gilt

$$\begin{aligned}
\int\limits_{0}^{2}\int\limits_{-1+\frac{y}{2}}^{1-\frac{y}{2}} (4xy - 6x^2 + 12y^2)\;dxdy &= \int\limits_{0}^{2} \left[2x^2y - 2x^3 + 12y^2x\right]_{x=-1+\frac{y}{2}}^{1-\frac{y}{2}}\;dy \\
&= \int\limits_{0}^{2} \left(0 - 4\cdot\left(1-\tfrac{y}{2}\right)^2 + 12y^2\cdot\left(1-\tfrac{y}{2}\right)\right)\;dy \\
&= \int\limits_{0}^{2} \left(-4\cdot\left(1-\tfrac{y}{2}\right)^2 + 12y^2 - 6y^3\right)\;dy \\
&= \left[\tfrac{4}{3}\cdot\left(1-\tfrac{y}{2}\right)^4 + 6\cdot y^3 - \tfrac{3}{2}\cdot y^4\right]_{y=0}^{2} \\
&= 0 + 48 - 24 - \left(\tfrac{4}{3} - 0 + 0\right) \\
&= \frac{68}{3}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4.

a) Berechnen Sie das Doppelintegral $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{-y}^{y} \cos(x)\cdot\cos(y)\,dxdy$.

Lösung:

Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-y}^{y} \cos(x) \cdot \cos(y)\, dxdy &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [\sin(x) \cdot \cos(y)]_{x=-y}^{y}\ dy \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2\sin(y) \cdot \cos(y) dy \\
&= \left[\sin^2(y)\right]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

b) Berechnen Sie das Doppelintegral $\int_0^1 \int_y^{2-y} (6xy + 4y^2 - 12x^2)\, dxdy$.

Lösung:

Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \int_{-2+y}^{2-y} (xy + 4y^2 - x^2)\, dxdy &= \int_0^1 [3x^2y + 4y^2y - 4x^2]_{x=y}^{2-y}\ dy \\
&= \int_0^1 (3 \cdot (2-y)^2 \cdot y + 4y^2 \cdot (2-y) - 4 \cdot (2-y)^3 - 3y^3 - 4y^3 + 4y \\
&= \int_0^1 (12y + 2y^2 - 4y^3)\, dy + \int_0^1 -4 \cdot (2-y)^3\, dy \\
&= \left[6y^2 + \tfrac{2}{3} \cdot y^3 - y^4\right]_0^1 + [(2-y)^4]_0^1 \\
&= -\tfrac{28}{3}
\end{aligned}$$

c) Berechnen Sie das Doppelintegral $\int_0^2 \int_{-1+\frac{y}{2}}^{1-\frac{y}{2}} (xy - x^2 + y^2)\, dxdy$.

Lösung:

Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \int_{-1+\frac{y}{2}}^{1-\frac{y}{2}} \left(xy - x^2 + y^2\right)\ dxdy &= \int_0^2 \left[\frac{x^2y}{2} - \frac{x^3}{3} + y^2x\right]_{x=-1+\frac{y}{2}}^{1-\frac{y}{2}}\ dy \\
&= \int_0^2 \left(0 - \frac{2}{3}\left(1 - \frac{y}{2}\right)^3 + 2y^2\left(1 - \frac{y}{2}\right)\right)\ dy \\
&= \left[\frac{1}{3}\left(1 - \frac{y}{2}\right)^4 + \frac{2}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4\right]_{y=0}^{2} \\
&= 0 + \frac{16}{3} - 4 - \left(\frac{1}{3} + 0 - 0\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Aufgabe 5.

a) Berechnen Sie das Integral $\int\limits_0^2 \int\limits_1^3 \int\limits_1^2 (3y^2 + 8xy + 12xz + 8yz)\, dxdydz$.

Lösung:

In diesem Fall sind keine Besonderheiten zu beachten. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^2 \int\limits_1^3 \int\limits_1^2 (3y^2 + 8xy + 12xz + 8yz)\, dxdydz &= \int\limits_0^2 \int\limits_1^3 \left[3y^2 \cdot x + x^2 \cdot (4y + 6z) + 8xyz\right]_{x=1}^2 \, dydz \\
&= \int\limits_0^2 \int\limits_1^3 \left(3y^2 + 12y + 18z + 8yz\right) \, dydz \\
&= \int\limits_0^2 \left[y^3 + 6y^2 + 18yz + 4y^2 z\right]_{y=1}^3 dz \\
&= \int\limits_0^2 (74 + 68z) \, dz \\
&= \left[74 \cdot z + 34 \cdot z^2\right]_{z=0}^2 \\
&= 284
\end{aligned}$$

b) Berechnen Sie das Integral $\int\limits_0^3 \int\limits_0^{3-z} \int\limits_0^{y} (x + xy + y + z^2)\, dxdydz$.

Lösung:

In diesem Fall sind keine Besonderheiten zu beachten. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^3 \int\limits_0^{3-z} \int\limits_0^{y} (x + xy + y + z^2)\, dxdydz &= \int\limits_0^3 \int\limits_0^{3-z} \left[\tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^2 y}{2} + xy + xz^2\right]_{x=0}^{y} \, dydz \\
&= \int\limits_0^3 \int\limits_0^{3-z} \left(\tfrac{3y^2}{2} + \tfrac{y^3}{2} + yz^2\right) \, dydz \\
&= \int\limits_0^3 \left[\tfrac{y^3}{2} + \tfrac{y^4}{8} + \tfrac{y^2 z^2}{2}\right]_{y=0}^{3-z} \, dz \\
&= \int\limits_0^3 \left(\tfrac{(3-z)^3}{2} + \tfrac{(3-z)^4}{8}\right) \, dz + \int\limits_0^3 \tfrac{z^4 - 6z^3 + 9z^2}{2} \, dz \\
&= \left[-\tfrac{(3-z)^4}{8} - \tfrac{(3-z)^5}{40}\right]_{z=0}^3 + \left[\tfrac{z^5}{10} - \tfrac{3z^4}{4} + \tfrac{3z^3}{2}\right]_{z=0}^3 \\
&= \tfrac{81}{8} + \tfrac{243}{40} + \tfrac{81}{20} \\
&= \tfrac{81}{4}
\end{aligned}$$