

Aufgaben zu „Reihen“

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden unendlichen Reihen konvergent sind oder nicht. Im Falle der Konvergenz soll auch der Grenzwert bestimmt werden.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{n}$.

2. Welche der folgenden Reihen konvergieren ?

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$, b) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k$, c) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^k$,
d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2}$, e) $\sum_{k=0}^{\infty} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$, f) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right)$.

3. Für welche reellen x konvergieren die Reihen

a) $\sum_{k=1}^{\infty} kx^k$, b) $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k$?

4. Welche der folgenden unendlichen Reihen sind konvergent, welche nicht ?

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n+1} - \frac{2n-1}{2n} \right)$.

5. Welche der folgenden unendlichen Reihen konvergieren ? Begründung ?

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-e}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + n^2}$, d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n}$.

6. Untersuchen Sie die folgenden unendlichen Reihen auf Konvergenz :

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$, b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1000 \cdot k - 1}$

Kontrollfragen zum Verständnis :

Erläutern Sie die Begriffe „notwendig“ und „hinreichend“ anhand von Beispielen.

In welcher Weise nutzt man den „Hauptsatz über monotone Folgen“ zur Herleitung von hinreichenden Konvergenzkriterien ?

Erläutern Sie den Begriff „konvergente Majorante“ !