DHBW Mannheim | Mannheim, 03.05.2023
Informatik | Mathematik II/2

Lösungen zu Übungsblatt 4

Aufgabe 1.

a) Wie viele verschiedene Blätter kann ein Spieler beim Skatspiel erhalten, wenn er von 32 Karten 10 zugeteilt bekommt?

b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus einer zwölfköpfigen Gruppe ein dreiköpfiges Team zu bilden?

c) 10 Personen treffen sich, und alle begrüßen sich mit Handschlag. Wie viele Handschläge sind das insgesamt?

d) In einem Unternehmen gibt es 700 Mitarbeiter. Können alle unterschiedliche Initialen aus Vor- und Nachnamen haben?

e) Wie viele Möglichkeiten gibt es, 10 Personen auf einer geraden (runden) Bank anzuordnen?

Lösung:

a) $\binom{32}{10} = 64.512.240.$

b) $\binom{12}{3} = 220$

c) $\binom{10}{2} = 45$

d) Nein, denn es gibt nur $26^2 = 676$ verschiedene Kombinationen

e) 10! auf einer geraden Bank, aber nur 9! auf einer runden Bank, weil es keinen Anfang gibt.

Aufgabe 2. Gegeben ist die Menge $A = \{1, 10, a, X, z\}$.

a) Wie viele Permutationen gibt es?

b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, 3 Elemente mit oder

c) ohne Wiederholungen aus der Menge zu ziehen, wenn die Reihenfolge eine Rolle spielt?

d) Wie viele Möglichkeiten gibt es, 3 Elemente mit oder

e) ohne Wiederholung aus der Menge zu ziehen, wenn die Reihenfolge keine Rolle spielt?

Lösung:

a) $5! = 120$

b) $5^3 = 125$

c) $\frac{5!}{(5-3)!} = 60$

d) $\binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3} = 35$

e) $\binom{5}{3} = 10$

Aufgabe 3.

a) Kommt es nach der Verlängerung eines Fußballspiels zum Elfmeterschießen, so muss der Trainer aus den elf Spielern auf dem Platz (wir nehmen an, dass die Mannschaft noch vollständig ist) zunächst fünf für das Elfmeterschießen auswählen, diese fünf dann in eine Reihenfolge, in der sie die Elfmeter schießen, bringen und die Spielernamen in dieser Anordnung auf eine Liste schreiben.

Wie viele verschiedene Listen sind möglich?

Lösung:

Zunächst muss der Trainer fünf der elf Spieler auswählen. Dafür hat er

$$a = \binom{11}{5} = \frac{11!}{5! \cdot 6!} = 462$$

viele Möglichkeiten. Dann muss er diese fünf Namen der Reihe nach anordnen, dafür hat er (pro Fünfergruppe) nochmal $b = 5! = 120$ Möglichkeiten. Damit gibt es insgesamt

$$n = a \cdot b = 462 \cdot 120 = 55\,440$$

viele mögliche Listen.

b) In einem Saal gibt es sieben Leuchter, die alle unabhängig voneinander ein- und ausgeschaltet werden können.

Wie viele Arten der Beleuchtung für diesen Saal gibt es? (Beachten Sie dabei, dass es zwei unterschiedliche Arten der Beleuchtung sind, wenn nur der erste Leuchter brennt oder wenn nur der zweite brennt)

Lösung:

Zunächst können zwischen 0 und 7 Leuchter eingeschaltet sein. Sind k Leuchter eingeschaltet, so ist noch zu unterscheiden, welche k das sind (siehe Hinweise in der Angabe). Daher gibt es $\binom{7}{k}$ viele Möglichkeiten, den Saal mit k Leuchtern zu beleuchten, insgesamt also

$$\sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} = 2^7 = 128$$

viele.

Wir haben hier auch die Option „kein Leuchter ist eingeschaltet“ als Beleuchtungsoption betrachtet. Man könnte auch argumentieren, dass das keine Beleuchtung ist und kommt dann auf 127 Möglichkeiten. Das ist ebenfalls eine zulässige Antwort bei dieser Frage.

Aufgabe 4. Eine Person trifft an einem gegebenen Tag ihren rechten Nachbarn mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.80 und ihren linken Nachbarn mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.70. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Person beide Nachbarn trifft mindestens? (Geben Sie eine scharfe untere Schranke für diese Wahrscheinlichkeit an).

Lösung:
Wir bezeichnen mit A das Ereignis, dass die Person (an einem gegebenen Tag) den rechten Nachbarn trifft und mit B das Ereignis, dass sie den linken Nachbarn trifft. Gegeben ist, dass

$$p(A) = 0.80, \qquad p(B) = 0.70$$

und gesucht ist $p(A \cap B)$. Dazu gilt nach den Rechenregeln aus der Vorlesung

$$\begin{aligned} p(A \cap B) &= p(A) + p(B) - p(A \cup B) \\ &= 0.80 + 0.70 - p(A \cup B) \\ &= 1.50 - p(A \cup B) \\ &\geq 1.50 - p(\Omega) \\ &= 1.50 - 1 \\ &= 0.50 \end{aligned}$$

Wir haben dabei ausgenutzt, dass $A \cup B \subseteq \Omega$ und damit $p(A \cup B) \leq p(\Omega)$. Die Wahrscheinlichkeit beträgt also mindestens $50\,\%$.

Diese Abschätzung ist auch scharf, denn die Voraussetzungen schließen nicht aus, dass er an jedem Tag mindestens einen der beiden Nachbarn trifft (es ist nicht vorausgesetzt, dass A und B unabhängig sind). So kann die Person seinen rechten Nachbarn immer an den ersten acht von zehn Tagen treffen, seinen linken immer an den letzten sieben von zehn Tagen. Natürlich könnte die Wahrscheinlichkeit aber auch höher sein. Die Person könnte etwa seinen rechten Nachbarn immer an den ersten acht von zehn Tagen treffen, seinen linken immer an den ersten sieben von zehn Tagen (z.B. weil sie an sieben von zehn Tagen eine Fahrgemeinschaft bilden). Dieser Wert von 0.70 ist aber dann der Maximalwert, der erreicht werden kann.