Aufgaben zu „Rationale Funktionen“

1. Berechnen Sie alle Lösungen von $x^4 - \frac{9}{2}x^3 + 7x^2 - \frac{9}{2}x + 1 = 0$.

2. Schreiben Sie als Summe einer ganz rationalen Funktion und einer gebrochen rationalen Funktion, bei der das Zählerpolynom einen kleineren Grad hat als das Nennerpolynom :

   a) $f(x) = \frac{x^4 + x^3 + 2x^2 + 1}{x^3 - 1}$, b) $g(x) = \frac{x^5 + x^7 - 1}{x^4 - 1} + \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1}$.

3. Zerlegen Sie in Partialbrüche und gegebenenfalls ganz rationalen Anteil :

   a) $f(x) = \frac{x^5}{\left(x^2 - 4\right)^2}$, b) $g(x) = \frac{4x^2 - 22x + 9}{x^3 - 9x^2 + 21x - 18}$.

4. Schreiben Sie das Polynom $f(x) = 0{,}2x^4 + 0{,}3x^3 - x^2 - 2$ mit Hilfe des vollständigen Horner-Schemas
   a) als Polynom in (x-2), b) als Polynom in (x+2) .

5. Bestimmen Sie alle reellen Lösungen von

   a) $4x^3 - 4x^2 - 23x + 30 = 0$, b) $x^6 + 2x^4 - 4x^2 - 8 = 0$, c) $x^4 - 3x^3 + x^2 + 4 = 0$.

6. Zerlegen Sie in Partialbrüche :

   a) $\frac{x^3 + 4x^2}{(x+3)^4(x-1)}$, b) $\frac{x^3 - x^2 - 3}{x^3 - x^2 + 3x - 3}$.

7. Zeigen Sie, dass bei der Partialbruchzerlegung die Ansätze

   (*) $\frac{a_1}{x-a} + \frac{a_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{a_n}{(x-a)^n}$ und (**) $\frac{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_{n-1}x^{n-1}}{(x-a)^n}$

   gleichwertig sind. Anders ausgedrückt : jeder Ausdruck der Form (*) lässt sich in der Form (**) schreiben und umgekehrt.

Kontrollfragen zum Verständnis :

Woran erkennt man eine Kreisgleichung (bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems) ?

Wie kann man anhand einer solchen Gleichung Mittelpunkt und Radius des Kreises bestimmen ?