Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Silke Bott

Sommersemester 2023

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Wir können nun verschiedene Ereignisse betrachten und uns damit beschäftigen, ob diese Ereignisse zusammenhängen, und ob das Auftreten eines Ereignisses die Wahrscheinlichkeit, dass ein anderes eintritt, beeinflusst. Bei der Urlaubsplanung etwa ist es nicht so sehr von Interesse, zu wissen, wie hoch die Regenwahrscheinlichkeit an einem durchschnittlichen Tag im Jahr ist, sondern wie hoch sie ist, wenn schon bekannt ist, dass dieser Tag im August liegt. Mit ähnlichen Fragestellungen haben wir uns ja schon in der deskriptiven Statistik beschäftigt.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Definition

Die *bedingte Wahrscheinlichkeit* $p(A|B)$ für das Ereignis A unter der Bedingung B ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ereignis A eintritt, wenn das Ereignis B vorliegt.

Bemerkung

Falls $p(B) > 0$ ist, so gilt

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Wir können nun verschiedene Ereignisse betrachten und uns damit beschäftigen, ob diese zusammenhängen, und ob das Auftreten eines Ereignisses die Wahrscheinlichkeit, dass ein anderes eintritt, beeinflusst.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Bemerkung

Ist $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und ist $B \in \mathcal{A}$, so ist

$$\mathcal{A}_B := \{A \cap B | \, A \in \mathcal{A}\}$$

eine σ–Algebra auf B und

$$p(\,\cdot \mid B) : \mathcal{A}_B \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit $p(\,\cdot \mid B) = p(A|B)$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf B.

Die bedingte Wahrscheinlichkeit ist also formal eine "Einschränkung" der Wahrscheinlichkeitsraums $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ auf $(B, \mathcal{A}_B)$.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Beispiel

Wir betrachten $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ mit $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ und dem Laplacemaß p.
Dann gilt für $A = \{1,2,3,4\}$ und $B = \{2,4,6\}$:

$$p(A|B) = \frac{p(\{2,4\})}{p(\{2,4,6\})} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3}$$

$$p(B|A) = \frac{p(\{2,4\})}{p(\{1,2,3,4\})} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{4}{6}} = \frac{1}{2}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Definition

Zwei Ereignisse A und B heißen *(stochastisch) unabhängig*, wenn gilt

$$p(A|B) = p(A), \qquad p(B|A) = p(B)$$

Bemerkung

Stochastische Unabhängigkeit bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Ereigniss A eintritt unabhängig davon ist, ob man weiss, dass ein anderes Ereignis B vorliegt oder nicht.

Satz

Genau dann sind zwei Ereignisse A und B mit $p(A) > 0$ und $p(B) > 0$ stochastisch unabhängig, wenn gilt

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

Beispiel

Wir betrachten $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mit $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ und dem Laplacemaß p.
Dann sind $A = \{1, 2, 3, 4\}$ und $B = \{2, 4, 6\}$ stochastisch unabhängig, denn

$$p(A|B) = \frac{2}{3} = p(A), \quad p(B|A) = \frac{1}{2} = p(B)$$

Alternativ:

$$p(A \cap B) = p(\{2, 4\}) = \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = p(A) \cdot p(B)$$

Beispiel

Wir betrachten $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mit $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ und dem Laplacemaß p.
Dann sind $A = \{3\}$ und $B = \{2, 4, 6\}$ nicht stochastisch unabhängig, denn

$$p(A|B) = 0 \neq p(A), \quad p(B|A) = 0 \neq p(B)$$

Alternativ:

$$p(A \cap B) = p(\emptyset) = 0 \neq \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = p(A) \cdot p(B)$$

Beispiel

Wir würfeln zweimal (unabhängig voneinander) mit einem Laplace–Würfel und schreiben die Ergebnisse als geordnetes Zahlenpaar (a, b) auf.
Dann sind die Ereignisse

$$\begin{aligned} A &= \text{im ersten Wurf wird eine 6 gewürfelt} \\ B &= \text{im zweiten Wurf wird eine 6 gewürfelt} \end{aligned}$$

stochastisch unabhängig.

Übung

Wir würfeln zweimal hintereinander mit einem Laplace–Würfel, gehen dabei aber vor wie folgt: Fällt im ersten Wurf eine gerade Zahl, so wird ganz normal mit dem zweiten Laplacewürfel geworfen und das Ergebnis der beiden Würfe wird als geordnetes Zahlenpaar (a, b) notiert. Fällt dagegen im ersten Wurf eine ungerade Zahl, so wird auf dem zweiten Laplacewürfel die 1 mit einer 2, die 3 mit einer 4 und die 5 mit einer 6 überklebt und erst dann geworfen (wobei aber immer noch jede Seite gleichwahrscheinlich sein soll) und das Ergebnis der beiden Würfe wird als geordnetes Zahlenpaar (a, b) notiert.
Wir betrachten wieder die Ereignisse

$$\begin{aligned} A &= \text{im ersten Wurf wird eine 6 gewürfelt} \\ B &= \text{im zweiten Wurf wird eine 6 gewürfelt} \end{aligned}$$

Sind A und B stochastisch unabhängig?

Lösung:

Die beiden Ereignisse sind nicht stochastisch unabhängig.
Es gilt nämlich

$$p(A|B) = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{9}{36}} = \frac{1}{9} \neq p(A), \qquad p(B|A) = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6} \neq p(B)$$

Beispiel

Beim Ziehen aus einer Urne mit Zurücklegen sind die Ergebnisse der einzelnen Ziehungen unabhängig, beim Ziehen ohne Zurücklegen sind sie abhängig.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Satz (Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit)

Ist $A_1, \ldots, A_k$ *eine disjunkte Zerlegung von* Ω*, gilt also*

$$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$$

wobei $A_i \cap A_j = \emptyset$ *für* $i \neq j$*, und ist* $p(A_i) > 0$ *für alle* i*, so gilt für jedes Ereignis* B*:*

$$p(B) = \sum_{i=1}^{k} p(B|A_i) \cdot p(A_i)$$

Folgerung

Ist A *ein Ereignis mit* $0 < p(A) < 1$*, so gilt für jedes Ereignis* B*:*

$$p(B) = p(B|A) \cdot p(A) + p(B|\overline{A}) \cdot p(\overline{A})$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Beispiel

Ein Test auf eine Infektion ist zu 99.9 % positiv, wenn der Proband infiziert ist. Der Test ist aber auch mit einer Wahrscheinlichkeit von 5.0 % positiv, wenn der Proband nicht infiziert ist.
Insgesamt sind 3.0 % der getesteten Personen tatsächlich infiziert.
Dann kann daraus die Wahrscheinlichkeit für einen positiven Test nach dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit bestimmt werden.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Beispiel

$$\begin{array}{ll} P: & \text{Test ist positiv} \\ K: & \text{Patient ist infiziert} \end{array}$$

$$p(P|K) = 0.999, \quad p(P|\overline{K}) = 0.05, \quad p(K) = 0.03 \Longrightarrow p(\overline{K}) = 0.97$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} p(P) &= p(P|K) \cdot p(K) + p(P|\overline{K}) \cdot p(\overline{K}) \\ &= 0.999 \cdot 0.030 + 0.050 \cdot 0.970 \\ &= 0.07847 \end{aligned}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Übung

Eine medizinische Testreihe untersucht Zusammenhänge zwischen Rauchverhalten und Atemwegserkrankungen B. Dazu betrachte

$$\begin{aligned} AR: &\quad \text{Proband ist aktiver Raucher} \\ ER: &\quad \text{Proband ist ehemaliger Raucher} \\ NR: &\quad \text{Proband ist Nichtraucher} \end{aligned}$$

Bekannt ist

$$P(B|AR) = 0.10, \quad p(B|ER) = 0.03, \quad p(B|NR) = 0.01$$

und

$$p(AR) = 0.30, \quad p(ER) = 0.30, \quad p(NR) = 0.40$$

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für eine Atemwegserkrankung.

Lösung:

Nach dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit gilt

$$\begin{aligned} p(B) &= p(B|AR)\cdot p(AR) + p(B|ER)\cdot p(ER) + p(B|NR)\cdot p(NR) \\ &= 0.10\cdot 0.30 + 0.03\cdot 0.30 + 0.01\cdot 0.40 \\ &= 0.043 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit für eine Atemwegserkrankung liegt also bei 4.3 %.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Satz (Satz von Bayes)

Ist $A_1, \ldots, A_k$ eine disjunkte Zerlegung von Ω, und ist $p(A_i) > 0$ für alle i, so gilt für jedes Ereignis B mit $p(B) > 0$ und jedes $j \in \{1, \ldots, k\}$:

$$p(A_j|B) = \frac{p(B|A_j) \cdot p(A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{k} p(B|A_i) \cdot p(A_i)} = \frac{p(B|A_j) \cdot p(A_j)}{p(B)}$$

Folgerung

Ist A in Ereignis mit $0 < p(A) < 1$, so gilt für jedes Ereignis B:

$$p(A|B) = \frac{p(B|A) \cdot p(A)}{p(B|A) \cdot p(A) + p(B|\overline{A}) \cdot p(\overline{A})} = \frac{p(B|A) \cdot p(A)}{p(B)}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Beispiel

Wir greifen den Infektionstest wieder auf mit

$$p(P|K) = 0.999, \quad p(P|\overline{K}) = 0.05, \quad p(K) = 0.03 \Longrightarrow p(\overline{K}) = 0.97$$

Wir haben bereits berechnet, dass

$$p(P) = 0.07847$$

Damit können wir die Wahrscheinlichkeit dafür, infiziert zu sein, wenn der Test positiv ausfällt, nach dem Satz von Bayes wie folgt berechnen:

$$p(K|P) = \frac{p(P|K) \cdot p(K)}{p(P)} = \frac{0.999 \cdot 0.03}{0.07847} = 0.382$$

In diesem Beispiel liegt also die Wahrscheinlichkeit, infiziert zu sein, wenn man positiv getestet worden ist, bei etwa 38.2 %.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Übung

Wir betrachten wieder die Testreihe zu Rauchverhalten und Atemwegserkrankungen B mit

$$\begin{array}{ll} AR: & \text{Proband ist aktiver Raucher} \\ ER: & \text{Proband ist ehemaliger Raucher} \\ NR: & \text{Proband ist Nichtraucher} \end{array}$$

und mit

$$P(B|AR) = 0.10, \quad p(B|ER) = 0.03, \quad p(B|NR) = 0.01$$

und

$$p(AR) = 0.30, \quad p(ER) = 0.30, \quad p(NR) = 0.40$$

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür das ein Proband mit einer Atemwegserkrankung ein aktiver Raucher ist.

Lösung:

Nach dem Satz von Bayes gilt

$$p(AR|B) = \frac{p(B|AR) \cdot p(AR)}{p(B)} = \frac{0.03}{0.043} = 0.6977$$

Die Wahrscheinlichkeit ist also ca. 70 %.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Übung

Eine Produktionsanlage stellt Mikrochips mit eine Ausschussanteil von 8.0 % her. Zur Aussortierung der defekten Chips wird ein Prüfgerät verwendet, das 99.0 % aller defekten Chips aussortiert, allerdings auch 3.0 % der nicht defekten Chips.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Chip aussortiert wird?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein aussortierter Chip auch tatsächlich defekt ist?
- Ein neues Prüfgerät wird getestet, dass ebenfalls 99.0 % der defekten Chips erkennt und das insgesamt 9.8 % Prozent der Chips aussortiert. Wie hoch ist der Anteil an brauchbaren Chips, der durch dieses Gerät als defekt klassifiziert wird?

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Lösung:

- Der Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit besagt, dass diese Wahrscheinlichkeit 10.68 % ist.
- Der Satz von Bayes besagt, dass diese Wahrscheinlichkeit 74.16 % ist.
- Der Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit besagt, dass diese Wahrscheinlichkeit 2.04 % ist.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Übung

An einer Studie zum Auftreten von Farbenblindheit nimmt eine Gruppe von Personen teil, die sich zu 45% aus Männern (M) und zu 55% aus Frauen ($\overline{M}$) zusammensetzt. Man weiß, dass im allgemeinen 6% der Männer farbenblind (F) sind, d.h. es gilt: $P(F|M) = 0,06$. Dagegen sind nur $0,5\%$ der Frauen farbenblind, d.h. $P(F|\overline{M}) = 0,005$. Verwenden Sie diese Informationen zum Berechnen der Wahrscheinlichkeiten, dass eine per Los aus dieser Gruppe ausgewählte Person eine farbenblinde Frau ist, d.h. zum Berechnen von $P(F \cap \overline{M})$.

Bestimmen Sie außerdem $P(\overline{M} \cap \overline{F})$, $P(M \cap F)$, $P(F)$ und $P(\overline{M}|F)$, und beschreiben Sie die zugehörigen Ereignisse in Worten.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Lösung:

Bezeichne M das Ereignis "Mann" und F das Ereignis "Farbenblind". Dann erhält man aus den Angaben $P(M) = 0,45$, $P(F|M) = 0,06$, $P(\overline{M}) = 0,55$ und $P(F|\overline{M}) = 0,005$. Daraus berechnet man die gesuchten Wahrscheinlichkeiten wie folgt:

- $P(F \cap \overline{M}) = P(F|\overline{M}) \cdot P(\overline{M}) = 0,005 \cdot 0,55 = 0,00275$.
- $\overline{M} \cap \overline{F}$: "Eine zufällig ausgewählte Person ist weiblich und nicht farbenblind" mit $P(\overline{M} \cap \overline{F}) = P(\overline{F} \cap \overline{M}) = P(\overline{F}|\overline{M}) \cdot P(\overline{M}) = [1 - P(F|\overline{M})] \cdot P(\overline{M}) = (1 - 0,0005) \cdot 0,55 = 0,995 \cdot 0,55 = 0,54725$.
- $M \cap F$: "Eine zufällig ausgewählte Person ist männlich und farbenblind" mit $P(M \cap F) = P(F|M) \cdot P(M) = 0,06 \cdot 0,45 = 0,027$.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Lösung:

- F: "Eine zufällig ausgewählte Person ist farbenblind" mit
  $P(F) = P(F|M) \cdot P(M) + P(F|\overline{M}) \cdot P(\overline{M}) =$
  $P(F \cap M) + P(F \cap \overline{M}) = 0,00275 + 0,027 = 0,02975$,
  wobei diese Formel zur Berechnung von $P(F)$ gerade aus dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit resultiert.
- "Eine unter den farbenblinden Personen zufällig ausgewählte Person ist weiblich" mit
  $P(\overline{M}|F) = \frac{P(\overline{M} \cap F)}{P(F)} = \frac{0{,}00275}{0{,}02975} = 0,09244$.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Übung

Um sich ein Bild der Situation des weiblichen wissenschaftlichen Nachwuchses zu machen, befragt die Frauenbeauftragte einer Universität das gesamte weibliche wissenschaftliche Personal. Die 80 Frauen werden danach befragt, ob sie eine Vollzeitbeschäftigung haben (A: Vollzeit, $\overline{A}$: Teilzeit), und ob sie ihre Promotion abgeschlossen haben (B: Promotion abgeschlossen, $\overline{B}$: Promotion nicht abgeschlossen): Die Ergebnisse der Befragung sind in der folgenden Tabelle dargestellt:

	A : Vollzeit	$\overline{A}$: Teilzeit
B: Promotion abgeschlossen	20	10
$\overline{B}$: Promotion nicht abgeschlossen	15	35

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Übung

- Geben Sie die beiden folgenden Ereignisse in Worten wieder, und ermitteln Sie die zugehörige Anzahlen: $(\overline{A \cup B})$, $\Omega \setminus B$.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig aus dem wissenschaftlichen Personal ausgewählte Frau
  - eine Vollzeitbeschäftigung hat?
  - eine Vollzeitbeschäftigung hat und ihre Promotion abgeschlossen hat?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine aus dem vollzeitbeschäftigten wissenschaftlichen Personal ausgewählte Frau ihre Promotion abgeschlossen hat?
- Sind die Ereignisse A und B unabhängig? Begründen Sie ihre Antwort.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Lösung:

	A : Vollzeit	$\overline{A}$: Teilzeit	
B: Promotion abgeschlossen	20	10	30
$\overline{B}$: Promotion nicht abgeschlossen	15	35	50
	35	45	80

- $(\overline{A \cup B}) = \overline{A} \cap \overline{B}$: "Weibliches Personal, dass weder die Promotion abgeschlossen hat noch eine Vollzeitbeschäftigung hat" mit $|\overline{A \cup B}| = 35$.
  $\Omega \setminus B = \overline{B}$: "Weibliches Personal, dass die Promotion nicht abgeschlossen hat" mit $|B| = 50$.
-
  - $P(A) = \frac{35}{80} = 0,4375$.
  - $P(A \cap B) = \frac{20}{80} = 0,25$.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Lösung:

- $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}25}{0{,}4375} = 0,571.$
- Falls A und B unabhängig sind, gilt: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ oder $P(B|A) = P(B)$.
  Hier gelten beispielsweise
  $$P(A \cap B) = 0,25 \neq P(A) \cdot P(B) = 0,4375 \cdot 0,375 = 0,164$$
  und
  $$P(B|A) = 0,571 \neq P(B) = \frac{30}{80} = 0,375.$$
  Also sind die Ereignisse A und B nicht unabhängig voneinander.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Übung

Die drei Informatikstudenten Alex, Ben und Carina der DHBW Mannheim sind die Finalisten in der Castingshow DSDSI (**D**eutschland **S**ucht den **S**uper**I**nformatiker). Da die Jury sich nicht entscheiden kann, wer von den dreien das beste IT–Projekt abgeliefert hat, wird einer von den dreien zufällig per Los ausgewählt. Der Name kommt in einen versiegelten Umschlag, der erst am Finaltag geöffnet wird.
Am Abend vor dem Finale trifft Alex zufällig ein Jurymitglied und will von ihm wissen, wen das Los ausgewählt hat, was ihm dieses natürlich nicht sagt. Darauf sagt Alex: „ Dann nenn mir wenigstens den Namen von einem der beiden anderen, der nicht gewonnen hat. Wenn einer von Ben oder Carina der Sieger ist, sag mir den Namen des anderen, wenn keiner von denen der Sieger ist, wähle zufällig einen aus.“

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Übung

Das Jurymitglied überlegt sich das und denkt, dass er ihm damit wohl tatsächlich nicht viel sagt. Deshalb geht er vor wie vorgeschlagen und vertraut Alex kurze Zeit später unter dem Siegel der Verschwiegenheit an: „Ben ist nicht der Sieger".

Später am Abend trifft Alex auch noch Carina. Er kann sich dann doch nicht beherrschen und erzählt ihr, dass er schon weiß, dass Ben nicht gewonnen hat. Beide freuen sich, denn beide sind der Meinung, dass jeder von ihnen jetzt eine 50 %–Chance auf den Sieg hat.

Stimmt das?

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Lösung:

Nein die beiden haben nicht recht.

Alex' Chance auf den Sieg bleibt bei $\frac{1}{3}$, Carinas Chancen auf den Titel sind dagegen auf $\frac{2}{3}$ gestiegen.