# Lineare Algebra
# euklidische Vektorräume

Reinhold Hübl

Wintersemester 2020/21

DHBW
Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Mannheim

# Skalarprodukt

## Definition

Für zwei $n$–Vektoren $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ heißt

$$\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle := v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n$$

das **Skalarprodukt** von $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{w}$.

## Beispiel

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 20.$$

# Skalarprodukt

## Definition

Für zwei $n$–Vektoren $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ heißt

$$\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle := v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n$$

das **Skalarprodukt** von $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{w}$.

## Beispiel

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 20.$$

# Skalarprodukt

## Regel

*Für Vektoren $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{w_1}$ und $\overrightarrow{w_2}$ und einen Skalar $r \in \mathbb{R}$ gilt:*

1. $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} \rangle$ *(Kommutativgesetz).*

# Skalarprodukt

## Regel

*Für Vektoren $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{w_1}$ und $\overrightarrow{w_2}$ und einen Skalar $r \in \mathbb{R}$ gilt:*

1. $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} \rangle$ *(Kommutativgesetz).*
2. $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2} \rangle = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w_1} \rangle + \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w_2} \rangle$ *(Distributivgesetz).*

# Skalarprodukt

## Regel

*Für Vektoren $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{w_1}$ und $\overrightarrow{w_2}$ und einen Skalar $r \in \mathbb{R}$ gilt:*

1. $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} \rangle$ *(Kommutativgesetz).*
2. $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2} \rangle = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w_1} \rangle + \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w_2} \rangle$ *(Distributivgesetz).*
3. $\langle r \cdot \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = r \cdot \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle$ *(Skalarmultiplikation).*

# Skalarprodukt

## Regel

*Für Vektoren* $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{w_1}$ *und* $\overrightarrow{w_2}$ *und einen Skalar* $r \in \mathbb{R}$ *gilt:*

1. $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} \rangle$ *(Kommutativgesetz).*
2. $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2} \rangle = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w_1} \rangle + \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w_2} \rangle$ *(Distributivgesetz).*
3. $\langle r \cdot \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = r \cdot \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle$ *(Skalarmultiplikation).*
4. $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle = |\overrightarrow{v}|^2$.

# Skalarprodukt

## Regel

*Für Vektoren* $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{w_1}$ *und* $\overrightarrow{w_2}$ *und einen Skalar* $r \in \mathbb{R}$ *gilt:*

1. $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} \rangle$ *(Kommutativgesetz).*
2. $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2} \rangle = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w_1} \rangle + \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w_2} \rangle$ *(Distributivgesetz).*
3. $\langle r \cdot \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = r \cdot \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle$ *(Skalarmultiplikation).*
4. $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle = |\overrightarrow{v}|^2$.

# Satz von Cauchy–Schwarz

Zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ heißen **parallel** wenn einer ein positives Vielfaches des anderen ist, und **anti–parallel**, wenn einer ein negatives Vielfaches des anderen ist.

**Satz (Satz von Cauchy–Schwarz)**

*Für zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ gilt:*

# Satz von Cauchy–Schwarz

Zwei Vektoren $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{w}$ heißen **parallel** wenn einer ein positives Vielfaches des anderen ist, und **anti–parallel**, wenn einer ein negatives Vielfaches des anderen ist.

**Satz (Satz von Cauchy–Schwarz)**

*Für zwei Vektoren $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{w}$ gilt:*

1. $|\langle\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\rangle| \leq |\overrightarrow{v}| \cdot |\overrightarrow{w}|$.

# Satz von Cauchy–Schwarz

Zwei Vektoren $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{w}$ heißen **parallel** wenn einer ein positives Vielfaches des anderen ist, und **anti–parallel**, wenn einer ein negatives Vielfaches des anderen ist.

## Satz (Satz von Cauchy–Schwarz)

*Für zwei Vektoren $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{w}$ gilt:*

1. $|\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle| \leq |\overrightarrow{v}| \cdot |\overrightarrow{w}|$.
2. *Genau dann sind $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{w}$ parallel, wenn $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = |\overrightarrow{v}| \cdot |\overrightarrow{w}|$.*

# Satz von Cauchy–Schwarz

Zwei Vektoren $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{w}$ heißen **parallel** wenn einer ein positives Vielfaches des anderen ist, und **anti–parallel**, wenn einer ein negatives Vielfaches des anderen ist.

## Satz (Satz von Cauchy–Schwarz)

*Für zwei Vektoren $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{w}$ gilt:*

1. $|\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle| \leq |\overrightarrow{v}| \cdot |\overrightarrow{w}|$.
2. *Genau dann sind $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{w}$ parallel, wenn $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = |\overrightarrow{v}| \cdot |\overrightarrow{w}|$.*
3. *Genau dann sind $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{w}$ anti–parallel, wenn $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = -|\overrightarrow{v}| \cdot |\overrightarrow{w}|$.*

# Satz von Cauchy–Schwarz

Zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ heißen **parallel** wenn einer ein positives Vielfaches des anderen ist, und **anti–parallel**, wenn einer ein negatives Vielfaches des anderen ist.

## Satz (Satz von Cauchy–Schwarz)

*Für zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ gilt:*

1. $|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| \leq |\vec{v}| \cdot |\vec{w}|$.
2. *Genau dann sind $\vec{v}$ und $\vec{w}$ parallel, wenn $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}|$.*
3. *Genau dann sind $\vec{v}$ und $\vec{w}$ anti–parallel, wenn $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = -|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|$.*
4. *Genau dann sind $\vec{v}$ und $\vec{w}$ kollinear, wenn $|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}|$.*

# Satz von Cauchy–Schwarz

Zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ heißen **parallel** wenn einer ein positives Vielfaches des anderen ist, und **anti–parallel**, wenn einer ein negatives Vielfaches des anderen ist.

**Satz (Satz von Cauchy–Schwarz)**

*Für zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ gilt:*

1. $|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| \leq |\vec{v}| \cdot |\vec{w}|$.
2. *Genau dann sind $\vec{v}$ und $\vec{w}$ parallel, wenn* $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}|$.
3. *Genau dann sind $\vec{v}$ und $\vec{w}$ anti–parallel, wenn* $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = -|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|$.
4. *Genau dann sind $\vec{v}$ und $\vec{w}$ kollinear, wenn* $|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}|$.

# Skalarprodukt

## Satz (Dreiecksungleichung)

*Für Vektoren $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ und einen Skalar $r \in \mathbb{R}$ gilt:*

1. $\left|r \cdot \overrightarrow{v}\right| = |r| \cdot \left|\overrightarrow{v}\right|$.

# Skalarprodukt

## Satz (Dreiecksungleichung)

*Für Vektoren* $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ *und einen Skalar* $r \in \mathbb{R}$ *gilt:*

1. $|r \cdot \overrightarrow{v}| = |r| \cdot |\overrightarrow{v}|$.
2. $|\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}| \leq |\overrightarrow{v}| + |\overrightarrow{w}|$.

# Skalarprodukt

## Satz (Dreiecksungleichung)

*Für Vektoren $\vec{v}$, $\vec{w}$ und einen Skalar $r \in \mathbb{R}$ gilt:*

1. $|r \cdot \vec{v}| = |r| \cdot |\vec{v}|$.
2. $|\vec{v} + \vec{w}| \leq |\vec{v}| + |\vec{w}|$.

## Beispiel

Betrachte das Dreieck mit dem Ecken $(0,0)$, $(1,2)$, $(2,1)$. Dieses Dreieck wird beschrieben durch

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$|\vec{u}| = \sqrt{5} \leq \sqrt{5} + \sqrt{2} = |\vec{v}| + |\vec{w}|$$

# Skalarprodukt

## Satz (Dreiecksungleichung)

*Für Vektoren $\vec{v}$, $\vec{w}$ und einen Skalar $r \in \mathbb{R}$ gilt:*

1. $|r \cdot \vec{v}| = |r| \cdot |\vec{v}|$.
2. $|\vec{v} + \vec{w}| \leq |\vec{v}| + |\vec{w}|$.

## Beispiel

Betrachte das Dreieck mit dem Ecken $(0,0)$, $(1,2)$, $(2,1)$. Dieses Dreieck wird beschrieben durch

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$|\vec{u}| = \sqrt{5} \leq \sqrt{5} + \sqrt{2} = |\vec{v}| + |\vec{w}|$$

# Skalarprodukt

Aus dem Satz vo Cauchy–Schwarz folgt:

Es gibt ein ein $\varphi \in [0, \pi]$ gibt mit

$$\cos(\varphi) = \frac{|\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle|}{|\overrightarrow{v}| \cdot |\overrightarrow{w}|}$$

# Skalarprodukt

Aus dem Satz vo Cauchy–Schwarz folgt:
Es gibt ein ein $\varphi \in [0, \pi]$ gibt mit

$$\cos(\varphi) = \frac{|\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle|}{|\overrightarrow{v}| \cdot |\overrightarrow{w}|}$$

Dieses $\varphi$ heißt der **Winkel** zwischen $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{w}$. In der Ebene handelt es sich dabei in der Tat um den Winkel zwischen den beiden Vektoren $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{w}$.

# Skalarprodukt

Aus dem Satz vo Cauchy–Schwarz folgt:
Es gibt ein ein $\varphi \in [0, \pi]$ gibt mit

$$\cos(\varphi) = \frac{|\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle|}{|\overrightarrow{v}| \cdot |\overrightarrow{w}|}$$

Dieses $\varphi$ heißt der **Winkel** zwischen $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{w}$. In der Ebene handelt es sich dabei in der Tat um den Winkel zwischen den beiden Vektoren $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{w}$.

## Beispiel

Der Winkel zwischen $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ ist $\frac{7}{12} \cdot \pi$ bzw. $105°$, denn

$$\cos\left(\frac{7}{12} \cdot \pi\right) = \frac{1 - \sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{|\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle|}{|\overrightarrow{v}| \cdot |\overrightarrow{w}|}$$

# Skalarprodukt

Aus dem Satz vo Cauchy–Schwarz folgt:
Es gibt ein ein $\varphi \in [0, \pi]$ gibt mit

$$\cos(\varphi) = \frac{|\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle|}{|\overrightarrow{v}| \cdot |\overrightarrow{w}|}$$

Dieses $\varphi$ heißt der **Winkel** zwischen $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{w}$. In der Ebene handelt es sich dabei in der Tat um den Winkel zwischen den beiden Vektoren $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{w}$.

## Beispiel

Der Winkel zwischen $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ ist $\frac{7}{12} \cdot \pi$ bzw. $105°$,

denn

$$\cos\left(\frac{7}{12} \cdot \pi\right) = \frac{1 - \sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{|\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle|}{|\overrightarrow{v}| \cdot |\overrightarrow{w}|}$$

# Skalarprodukt

## Definition

Zwei $n$–dimensionale Vektoren $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{w}$ heißen **orthogonal**, wenn gilt

$$\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = 0$$

Wir sagen in diesem Fall auch, dass $\overrightarrow{v}$ senkrecht auf $\overrightarrow{w}$ steht und schreiben $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{w}$.

## Beispiel

Die Vektoren $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind orthogonal.

# Skalarprodukt

## Definition

Zwei $n$–dimensionale Vektoren $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{w}$ heißen **orthogonal**, wenn gilt

$$\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = 0$$

Wir sagen in diesem Fall auch, dass $\overrightarrow{v}$ senkrecht auf $\overrightarrow{w}$ steht und schreiben $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{w}$.

## Beispiel

Die Vektoren $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind orthogonal.

# orthogonales Komplement

## Definition

Ist $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum, so heißt die Menge

$$V^\perp = \{\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^n | \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0 \text{ für alle } \overrightarrow{v} \in V\}$$

das **orthogonale Komplement** von $V$.

## Bemerkung

Ist $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum der Dimension $l$, so ist $V^\perp \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum der Dimension $n - l$.

# orthogonales Komplement

## Definition

Ist $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum, so heißt die Menge

$$V^{\perp} = \{\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^n | \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0 \text{ für alle } \overrightarrow{v} \in V\}$$

das **orthogonale Komplement** von $V$.

## Bemerkung

Ist $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum der Dimension $l$, so ist $V^{\perp} \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum der Dimension $n - l$.

# orthogonales Komplement

## Beispiel

Das orthogonale Komplement von

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

ist

$$V^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

# orthogonales Komplement

## Übung

Bestimmen Sie das orthogonale Komplement von

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} r+s \\ r \\ s \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

# orthogonales Komplement

## Übung

Bestimmen Sie das orthogonale Komplement von

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} r+s \\ r \\ s \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

## Lösung:

$$V^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

# orthogonales Komplement

## Übung

Bestimmen Sie das orthogonale Komplement von

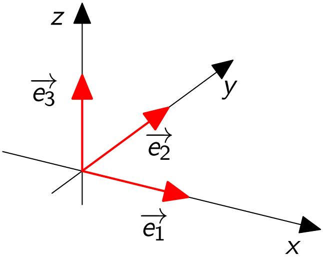
$$V = \left\{ \begin{pmatrix} r+s \\ r \\ s \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

## Lösung:

$$V^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

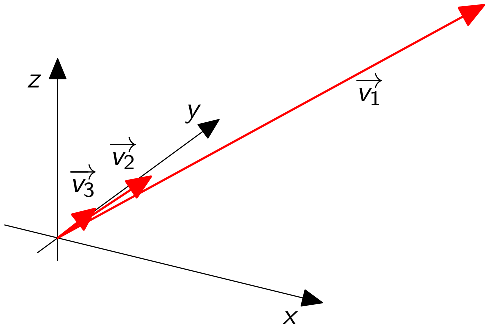
# Skalarprodukt

numerisch stabile Basis



# Skalarprodukt

numerisch instabile Basis



# Skalarprodukt

Für numerische Berechnungen sind Basen $\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_m}$ von Vektorräumen und Untervektorräumen $V$ besonders dann sinnvoll, wenn Sie die folgenden Bedingungen erfüllen:

- Alle Vektoren sind normiert, dh. $|\overrightarrow{v_i}| = 1$ für alle $i$.

# Skalarprodukt

Für numerische Berechnungen sind Basen $\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_m}$ von Vektorräumen und Untervektorräumen $V$ besonders dann sinnvoll, wenn Sie die folgenden Bedingungen erfüllen:

- Alle Vektoren sind normiert, dh. $|\overrightarrow{v_i}| = 1$ für alle $i$.
- Alle Vektoren stehen paarweise senkrecht aufeinander, dh. $\langle \overrightarrow{v_i}, \overrightarrow{v_j} \rangle = 0$ für $i \neq j$.

# Skalarprodukt

Für numerische Berechnungen sind Basen $\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_m}$ von Vektorräumen und Untervektorräumen $V$ besonders dann sinnvoll, wenn Sie die folgenden Bedingungen erfüllen:

- Alle Vektoren sind normiert, dh. $|\overrightarrow{v_i}| = 1$ für alle $i$.
- Alle Vektoren stehen paarweise senkrecht aufeinander, dh. $\langle \overrightarrow{v_i}, \overrightarrow{v_j} \rangle = 0$ für $i \neq j$.

**Definition**

Eine Basis, die diese Bedingungen erfüllt, heißt eine **Orthonormalbasis** (ONB) von $V$.

# Skalarprodukt

Für numerische Berechnungen sind Basen $\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_m}$ von Vektorräumen und Untervektorräumen $V$ besonders dann sinnvoll, wenn Sie die folgenden Bedingungen erfüllen:

- Alle Vektoren sind normiert, dh. $|\overrightarrow{v_i}| = 1$ für alle $i$.
- Alle Vektoren stehen paarweise senkrecht aufeinander, dh. $\langle \overrightarrow{v_i}, \overrightarrow{v_j} \rangle = 0$ für $i \neq j$.

**Definition**

Eine Basis, die diese Bedingungen erfüllt, heißt eine **Orthonormalbasis** (ONB) von $V$.

# Orthonormalbasen

**Satz**

*Jeder Untervektorraum $U$ des $\mathbb{R}^n$ besitzt eine Orthonormalbasis.*

Das Vorgehen ist dabei wie folgt:

# Orthonormalbasen

## Satz

*Jeder Untervektorraum $U$ des $\mathbb{R}^n$ besitzt eine Orthonormalbasis.*

Das Vorgehen ist dabei wie folgt:

- Der Vektor $\overrightarrow{v_1}$ wird zunächst unverändert als Vektor $\overrightarrow{u_1}$ übernommen.

# Orthonormalbasen

## Satz

*Jeder Untervektorraum $U$ des $\mathbb{R}^n$ besitzt eine Orthonormalbasis.*

Das Vorgehen ist dabei wie folgt:

- Der Vektor $\overrightarrow{v_1}$ wird zunächst unverändert als Vektor $\overrightarrow{u_1}$ übernommen.
- Die Vektoren $\overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_m}$ werden sukkzessive so zu Vektoren $\overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_m}$ abgeändert, dass sie paarweise orthogonal sind.

# Orthonormalbasen

## Satz

*Jeder Untervektorraum U des $\mathbb{R}^n$ besitzt eine Orthonormalbasis.*

Das Vorgehen ist dabei wie folgt:

- Der Vektor $\overrightarrow{v_1}$ wird zunächst unverändert als Vektor $\overrightarrow{u_1}$ übernommen.
- Die Vektoren $\overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_m}$ werden sukkzessive so zu Vektoren $\overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_m}$ abgeändert, dass sie paarweise orthogonal sind.
- Die Vektoren $\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_m}$ werden normiert: $\overrightarrow{w_i} = \frac{1}{|\overrightarrow{u_i}|} \cdot \overrightarrow{u_i}$.

# Orthonormalbasen

## Satz

*Jeder Untervektorraum $U$ des $\mathbb{R}^n$ besitzt eine Orthonormalbasis.*

Das Vorgehen ist dabei wie folgt:

- Der Vektor $\overrightarrow{v_1}$ wird zunächst unverändert als Vektor $\overrightarrow{u_1}$ übernommen.
- Die Vektoren $\overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_m}$ werden sukkzessive so zu Vektoren $\overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_m}$ abgeändert, dass sie paarweise orthogonal sind.
- Die Vektoren $\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_m}$ werden normiert: $\overrightarrow{w_i} = \frac{1}{|\overrightarrow{u_i}} \cdot \overrightarrow{u_i}$.

# Orthonormalbasen

## Beispiel

Die Orthonormalbasis zur Basis

$$\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{u_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

des $\mathbb{R}^3$ ist

# Orthonormalbasen

## Beispiel

Die Orthonormalbasis zur Basis

$$\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{u_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

des $\mathbb{R}^3$ ist

$$\overrightarrow{w_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{w_2} = \frac{\sqrt{6}}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{w_3} = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

# Orthonormalbasen

## Beispiel

Die Orthonormalbasis zur Basis

$$\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{u_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

des $\mathbb{R}^3$ ist

$$\overrightarrow{w_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{w_2} = \frac{\sqrt{6}}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{w_3} = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

# Orthonormalbasen

## Übung

Bestimmen Sie die Orthormalbasis zur Basis

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

des $\mathbb{R}^3$

# Orthonormalbasen

## Übung

Bestimmen Sie die Orthormalbasis zur Basis

$$\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{u_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

des $\mathbb{R}^3$

## Lösung:

Die zugehörige ONB ist

$$\overrightarrow{w_1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{w_2} = \frac{\sqrt{29}}{87} \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{w_3} = \frac{\sqrt{29}}{783} \cdot \begin{pmatrix} 54 \\ 81 \\ -108 \end{pmatrix}$$

# Orthonormalbasen

## Übung

Bestimmen Sie die Orthormalbasis zur Basis

$$\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{u_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

des $\mathbb{R}^3$

## Lösung:

Die zugehörige ONB ist

$$\overrightarrow{w_1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{w_2} = \frac{\sqrt{29}}{87} \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{w_3} = \frac{\sqrt{29}}{783} \cdot \begin{pmatrix} 54 \\ 81 \\ -108 \end{pmatrix}$$

# Orthonormalbasen

## Übung

Bestimmen Sie die Orthormalbasis zur Basis

$$\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

des $\mathbb{R}^3$

# Orthonormalbasen

## Übung

Bestimmen Sie die Orthormalbasis zur Basis

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

des $\mathbb{R}^3$

## Lösung:

Das Verfahren bricht ab; Sie erhalten

$$\vec{v_3} = \vec{0}$$

Das bedeutet, dass die Vektoren $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$ und $\vec{u_3}$ keine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

# Orthonormalbasen

## Übung

Bestimmen Sie die Orthormalbasis zur Basis

$$\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

des $\mathbb{R}^3$

## Lösung:

Das Verfahren bricht ab; Sie erhalten

$$\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{0}$$

Das bedeutet, dass die Vektoren $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ und $\overrightarrow{u_3}$ keine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.