

Aufgaben zu „Ableitungen“

1. Bestimmen Sie die erste Ableitung folgender Funktionen:

a) $f(x) = 2x^4 + 3x + 6$, b) $g(x) = 12x^6 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{5}{6}x^3 - 2$,

c) $h(x) = x\sqrt{x} - 3\sqrt{x}$, d) $i(x) = \sqrt[3]{\sqrt{x}}$.

2. Differenzieren Sie

a) $y(x) = \ln(1-x)$, b) $y(x) = e^x \cos x$.

3. Berechnen Sie die Ableitungen von

a) $f(x) = (1 + x^2) \arctan x$, b) $f(x) = (1 + x^{1/2})^{1/2}$,

c) $f(x) = (\ln x) / x$, d) $f(x) = \arctan(2x)$,

e) $f(x) = x^{100} - x^{99} - x^1$, f) $f(x) = e^{\sin x}$, g) $f(x) = \sin(e^x / x)$.

4. Gegeben sei die Funktion $f(x) = \operatorname{Arsinh} x$.

a) Berechnen Sie die Ableitung von $f(x)$, wobei die Ableitung der Umkehrfunktion als bekannt vorausgesetzt sei.

b) Drücken Sie $f(x)$ durch Wurzel- und Logarithmus-Funktion aus. Tip: Lösen Sie die Gleichung $x = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$ auf und nutzen Sie dabei $e^{-y} = \frac{1}{e^y}$ aus.

c) Berechnen Sie noch einmal die Ableitung anhand der Formel aus b) .

5. Bestimmen Sie $D(f)$ und berechnen Sie die erste Ableitung überall dort, wo f differenzierbar ist :

a) $f(x) = \arcsin(\sqrt{2x})$, b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x| - x}}$.

6. Bestimmen Sie $D(f)$ und berechnen Sie die erste Ableitung überall dort , wo f differenzierbar ist :

a) $f(x) = \ln(\ln(\cos \sqrt{x}))$, b) $f(x) = e^{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}} \sin(3x^2)$.

7. Sei $f(x) = \ln(1+x)$. Bestimmen Sie die n -te Ableitung $f^{(n)}(x)$ für alle natürlichen n und alle $x > -1$. Tip: berechnen Sie die Ableitung für $n = 1, 2, 3$, vielleicht noch $n = 4$, erraten Sie daraus eine allgemeine Formel und beweisen Sie diese durch vollständige Induktion .

Kontrollfragen zum Verständnis :

Formulieren Sie (mindestens) drei wichtige Regeln , die Ihnen beim Differenzieren helfen können. Wie hängen die Ableitungen einer Funktion und ihrer Umkehrfunktion zusammen ?