Wahrscheinlichkeitsrechnung

Silke Bott

Sommersemester 2023

Mengen und Mengenalgebren

Definition

Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objektem m, genannt die Elemente von M, unseres Anschauungsraums oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

Ist m ein Element von M, so schreiben wir $m \in M$, andernfalls schreiben wir $m \notin M$. Für jedes Objekt m unserer Anschauung und jede Menge M gilt also genau entweder $m \in M$ oder $m \notin M$, nicht aber beides.

Mengen und Mengenalgebren

Definition

Die *Schnittmenge* von A und B, geschrieben $A \cap B$ besteht aus den Elementen von M, die sowohl in A als auch in B sind:

$$A \cap B = \{x \in M | x \in A \text{ und } x \in B\}$$

Falls $A \cap B = \emptyset$, so nennen wir A und B *disjunkt*.

Definition

Die *Vereinigungsmenge* von A und B, geschrieben $A \cup B$ besteht aus den Elementen von M, die entweder in A oder in B sind:

$$A \cup B = \{x \in M | \, x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

Mengen und Mengenalgebren

Bemerkung

Ist $A \subseteq B$ so gilt

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \\ A \cap B &= A \end{aligned}$$

Satz

Für Teilmengen $A, B, C \subseteq \Omega$ einer Grundmenge Ω gilt

Kommutativgesetz	$A \cup B = B \cup A$
	$A \cap B = B \cap A$
Assoziativgesetz	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Distributivgesetz	$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
	$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
Verschmelzungsgesetz	$A \cap (A \cup B) = A$
	$A \cup (A \cap B) = A$

Mengen und Mengenalgebren

Übung

Welche der folgenden Aussagen sind richtig für Mengen A B und C, welche sind falsch?

1. $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$.
2. $(A \cap B) \cap (C \cup B) = A \cap B$.
3. $(A \cup B) \cup (B \cap C) = A \cup B$.

Mengen und Mengenalgebren

Lösung:

1. $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$ ist falsch.
2. $(A \cap B) \cap (C \cup B) = A \cap B$ ist richtig.
3. $(A \cup B) \cup (B \cap C) = A \cup B$ ist richtig.

Mengen und Mengenalgebren

Definition

Die *Differenzmenge* von B und A, geschrieben $B \setminus A$ besteht aus den Elementen von Ω, die in B aber nicht in A sind:

$$B \setminus A = \{x \in \Omega | \, x \in B \text{ und } x \notin A\}$$

Falls $A \subseteq B$ nennen wir $B \setminus A$ auch das *Komplement* von A in B und schreiben hierfür $\overline{A}^B$. Falls $B = \Omega$, schreiben wir hierfür auch kurz $\overline{A}$ und nennen es das Komplement von A.

Mengen und Mengenalgebren

Regel

Für eine Teilmenge $A \subseteq \Omega$ gilt:

1. $\overline{\overline{A}} = A.$
2. $\overline{A} \cup A = \Omega.$
3. $\overline{A} \cap A = \emptyset.$
4. $\overline{\emptyset} = \Omega$
5. $\overline{\Omega} = \emptyset.$

Mengen und Mengenalgebren

Übung

Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

1. $A \setminus (B \cap C) = A \setminus B \cap A \setminus C$.
2. $A \setminus (B \cup C) = A \setminus B \cap A \setminus C$.

Lösung:

1. $A \setminus (B \cap C) = A \setminus B \cap A \setminus C$ ist falsch.
2. $A \setminus (B \cup C) = A \setminus B \cap A \setminus C$ ist richtig.

Mengen und Mengenalgebren

Mit $\mathfrak{P}(\Omega)$ bezeichnen wir die Potenzmenge von Ω, also die Menge aller Teilmengen von Ω:

$$\mathfrak{P}(\Omega) = \{A | \, A \subseteq \Omega\}$$

Definition

Eine Teilmenge $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ heißt *Mengenalgebra* (auf Ω), wenn gilt:

1. $\mathfrak{A} \neq \emptyset$.
2. $A \in \mathfrak{A} \Longrightarrow \overline{A} \in \mathfrak{A}$.
3. $A, B \in \mathfrak{A} \Longrightarrow A \cup B \in \mathfrak{A}$.

Mengen und Mengenalgebren

Regel

Für jede Mengenalgebra $\mathfrak{A}$ auf Ω gilt:

i) $\emptyset \in \mathfrak{A}$ *und* $\Omega \in \mathfrak{A}$.

ii) *Sind* A, B *in* $\mathfrak{A}$, *so auch* $A \cap B$.

iii) *Sind* A, B *in* $\mathfrak{A}$, *so auch* $A \setminus B$.

iv) *Sind* $A_1, \ldots, A_n$ *in* $\mathfrak{A}$ *so auch* $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ *und* $A_1 \cap \cdots \cap A_n$.

Mengen und Mengenalgebren

Beispiel

$\mathfrak{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ ist eine Mengenalgebra (triviale Mengenalgebra).

Beispiel

$\mathfrak{P}(\Omega)$ ist eine Mengenalgebra

Beispiel

Ist $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, so ist

$$\mathfrak{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$$

eine Mengenalgebra.

Mengen und Mengenalgebren

Beispiel

Wir betrachten $\Omega = \mathbb{R}$ und das Mengensystem

$$\mathfrak{A} = \{M \subseteq \mathbb{R} |\, M \text{ ist endlich oder } \overline{M} \text{ ist endlich}\}$$

Dann ist $\mathfrak{A}$ eine Mengenalgebra.

Die Bedingungen (1) und (2) sind dabei offensichtlich.
Bedingung (3) ergibt sich durch Fallunterscheidung.

Mengen und Mengenalgebren

Übung

Wir betrachten $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und

$$\mathfrak{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3, 4, 5, 6\}, \{6\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}, \Omega\}$$

Überprüfen Sie, ob $\mathfrak{A}$ eine Mengenalgebra ist.

Lösung:

$\mathfrak{A}$ ist keine Mengenalgebra, denn $\{1\} \in \mathfrak{A}$ und $\{6\} \in \mathfrak{A}$, aber

$$\{1\} \cup \{6\} = \{1, 6\} \notin \mathfrak{A}$$

Mengen und Mengenalgebren

Definition

Eine Teilmenge $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ heißt σ–*Algebra* (auf Ω), wenn gilt:

1. $\mathfrak{A} \neq \emptyset$.
2. $A \in \mathfrak{A} \Longrightarrow \overline{A} \in \mathfrak{A}$.
3. $A_n \in \mathfrak{A}$ für alle $n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{A}$.

Ein $A \in \mathfrak{A}$ heißt *Ereignis*.

Mengen und Mengenalgebren

Regel

Für eine σ–Algebra $\mathfrak{A}$ gilt

i) $\mathfrak{A}$ *ist eine Mengenalgebra.*
ii) $\emptyset \in \mathfrak{A}$ *und* $\Omega \in \mathfrak{A}$.
iii) *Sind* A, B *in* $\mathfrak{A}$, *so auch* $A \setminus B$.
iv) *Sind* $A_n \in \mathfrak{A}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$, *so ist auch* $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{A}$.

Definition

Eine Paar $(\Omega, \mathfrak{A})$, bestehend aus einer Menge Ω und einer σ–Algebra $\mathfrak{A}$ auf Ω heißt *Messraum*.

Mengen und Mengenalgebren

Beispiel

$\mathfrak{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ ist eine σ–Algebra (triviale σ–Algebra).

Beispiel

$\mathfrak{P}(\Omega)$ ist eine σ–Algebra.

Beispiel

Ist $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, so ist

$$\mathfrak{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$$

eine σ–Algebra.

Mengen und Mengenalgebren

Regel

Ist Ω eine endliche Menge, so ist jede Mengenalgebra auf Ω schon eine σ–Algebra.

Übung

Wir betrachten $\Omega = \mathbb{R}$ und das Mengensystem

$$\mathfrak{A} = \{M \subseteq \mathbb{R} | \, M \text{ ist endlich oder } \overline{M} \text{ ist endlich}\}$$

Ist $\mathfrak{A}$ eine σ–Algebra?

Lösung:

$\mathfrak{A}$ ist keine σ–Algebra, denn $A_n = \{n\} \in \mathfrak{A}$, aber

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{N} \notin \mathfrak{A}$$

Mengen und Mengenalgebren

Beispiel

Wir betrachten $\Omega = \mathbb{R}$ und das Mengensystem

$$\mathfrak{A} = \{M \subseteq \mathbb{R} | \, M \text{ ist abzählbar oder } \overline{M} \text{ ist abzählbar}\}$$

Dann ist $\mathfrak{A}$ eine σ–Algebra.

Beachten Sie dabei:
Die abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen ist wieder abzählbar (Cantorscher Abzähltrick).

Zur Erinnerung:
endlich: $\Omega = \omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$
unendlich: $\Omega = \mathbb{N}$ (abzählbar, weil durchnummerierbar)
unendlich: $\Omega = \mathbb{R}$ (überabzählbar)

Wahrscheinlichkeitsraum

Definition

Eine Abbildung $p : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt **Wahrscheinlichkeitsmaß** oder eine **Wahrscheinlichkeit** auf $(\Omega, \mathfrak{A})$, wenn sie die *Axiome von Kolmogoroff* erfüllt:

(K1) $p(A) \geq 0$ für alle $A \in \mathfrak{A}$.

(K2) $p(\Omega) = 1$.

(K3) Sind $A_n \in \mathfrak{A}$ paarweise disjunkt (also $A_n \cap A_m = \emptyset$ für $m \neq n$), so gilt

$$p\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} p\left(A_n\right)$$

Wahrscheinlichkeitsraum

Definition

Ein **Wahrscheinlichkeitsraum** ist ein Tripel

$$(\Omega, \mathfrak{A}, p)$$

bestehend aus einer Grundmenge Ω, einer σ–Algebra $\mathfrak{A}$ auf Ω (also einem Messraum $(\Omega, \mathfrak{A})$) und einer Wahrscheinlichkeit p auf $(\Omega, \mathfrak{A})$.

Wahrscheinlichkeitsraum

Beispiel

Wir betrachten $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mit der σ–Algebra $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$ und definieren für ein Teilmenge $A \subseteq \Omega$:

$$p(A) = \frac{|A|}{6}$$

Dann ist p eine Wahrscheinlichkeit auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Dieses Wahrscheinlichkeitsmaß beschreibt die Wahrscheinlichkeit mit einem (ungezinkten) Würfel eine bestimmte Zahl zu würfeln.
Hierfür gilt

$$p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \frac{1}{6}$$

Jede Zahl ist also gleichwahrscheinlich.

Wahrscheinlichkeitsraum

Beispiel

Wir betrachten $\Omega = \{k, z\}$ (den Ereignisraum für einen Münzwurf) mit der σ–Algebra

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{z\}, \{k\}, \{z, k\}\}$$

und definieren

$$p(\emptyset) = 0, \quad p(z) = \frac{1}{2}, \quad p(k) = \frac{1}{2}, \quad p(\{k, z\}) = 1.0$$

Dann ist p eine Wahrscheinlichkeit auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Dieses Wahrscheinlichkeitsmaß beschreibt die Wahrscheinlichkeit eines Wurfes mit einer fairen Münze.
Hierfür ist jede Seite gleichwahrscheinlich.

Wahrscheinlichkeitsraum

Übung

Wir betrachten $\Omega = \{1,2\}$ mit der σ–Algebra $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$ und definieren

$$p(\emptyset) = 0.1, \quad p(1) = 0.5, \quad p(2) = 0.5, \quad p(\{1,2\}) = 1$$

Ist p eine Wahrscheinlichkeit auf Ω?

Lösung:

Dieses p ist kein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω.

Wahrscheinlichkeitsraum

Übung

Wir betrachten $\Omega = \{1, 2\}$ mit der σ–Algebra $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$. Untersuchen Sie, ob durch

$$p(\emptyset) = 0, \quad p(1) = 0.7, \quad p(2) = 0.4, \quad p(\{1, 2\}) = 1.0$$

eine Wahrscheinlichkeit auf Ω definiert wird.

Lösung:

Dieses p ist kein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω.

Wahrscheinlichkeitsraum

Regel

Für eine Wahrscheinlichkeit p *auf* $(\Omega, \mathfrak{A})$ *gilt:*

1. $0 \leq p(A) \leq 1$ *für alle* $A \in \mathfrak{A}$.
2. $p(\emptyset) = 0$.
3. $p(A) \leq p(B)$ *für* $A \subseteq B$.
4. $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$ *für alle* $A \in \mathfrak{A}$
5. $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

Wahrscheinlichkeitsraum

Übung

Wir betrachten $\Omega = \{1, 2, 3\}$ mit der σ–Algebra $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$. Untersuchen Sie, ob es eine Wahrscheinlichkeit auf Ω gibt, für die gilt

$$p(\{1, 2\}) = 0.7, \quad p(\{1, 3\}) = 0.8, \quad p(\{2, 3\}) = 0.6$$

Ist p eine Wahrscheinlichkeit auf Ω?

Lösung:

Dieses p ist kein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω.

Wahrscheinlichkeitsraum

Bemerkung

Ist Ω endlich, so wollen wir in der Regel die Potenzmenge als σ–Algebra auf Ω betrachten.
Ist $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, so heißen die $\{\omega_i\}$ auch die Elementarereignisse von Ω, und wir schreiben kurz p_ω für $p(\{\omega\})$.

Bemerkung

Ist Ω endlich, so ist

$$p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \qquad \text{für } A \subseteq \Omega$$

eine Wahrscheinlichkeit auf Ω. Dieses Wahrscheinlichkeitsmaß heißt *Laplace–Maß* oder *Laplace–Wahrscheinlichkeit* auf Ω.