Kombinatorik

Silke Bott

Sommersemester 2023

Kombinatorik

Bei endlichen Wahrscheinlichkeitsräumen und Laplace–Experimenten lassen sich die Wahrscheinlichkeiten sehr gut durch Abzählen bestimmen. Empirisch arbeiten wir hier mit sogenannten Zufallsstichproben, die üblicherweise mit dem Urnenmodell dargestellt wird: Jeder Einheit $\omega \in \Omega$ aus der Grundgesamtheit wird eine nummerierte Kugel E zugeordnet und in die Urne gelegt. Eine Folge gezogener Kugeln, also ein geordnetes n–Tupel $(E_1, ..., E_n)$ nennen wir eine Stichprobe vom Umfang n.

Kombinatorik

Definition

Eine *einfache Zufallsstichprobe* liegt vor, wenn jede Stichprobe vom Umfang n aus einer Grundgesamtheit vom Umfang N mit derselben Wahrscheinlichkeit gezogen wird.

Satz (Fundamentalprinzip der Kombinatorik)

Sind $M_1, \ldots, M_n$ endliche Mengen mit jeweils $a_1, \ldots, a_n$ Elementen, so gibt es genau $a_1 \cdots a_n$ viele Möglichkeiten aus jeder Menge jeweils genau ein Element auszuwählen.

Beispiel

Sie haben fünf Paar Schuhe und neun Pullover, und jedes Paar Schuhe kann mit jedem Pullover kombiniert werden. Dann können Sie 45 Tage lang jeden Morgen mit einer neuen Schuhe/Pullover–Kombination aus dem Haus gehen.

Kombinatorik

Das Fundamentalprinzip beschreibt die Anzahl der Möglichkeiten, aus n Mengen $M_1, \ldots, M_n$ mit $a_1, \ldots, a_n$ Elementen jeweils ein Element zu ziehen. Besonders interessant ist hier der Fall, dass alle Mengen M_l übereinstimmen (Ziehen mit Zurücklegen). n Personen ziehen der Reihe nach eine Zahl aus einem Hut mit a Zahlen. Jeder Teilnehmer merkt sich seine Nummer und legt den Zettel dann zurück in den Hut (Ziehen mit Zurücklegen). Wie viele mögliche Zahlenfolgen können dadurch entstehen?

Satz

Ist M eine endliche Menge mit a Elementen aus der n–mal ein Element mit Zurücklegen gezogen wird, so gibt es insgesamt $Z(a, n) = a^n$ verschiedene mögliche Elementekombinationen.

Kombinatorik

Übung

Wie viele Kombinationen für ein Passwort gibt es, wenn dieses aus zwei Großbuchstaben, gefolgt von einer bis drei Ziffern bestehen muss?

Kombinatorik

Übung

Wie viele Kombinationen für ein Passwort gibt es, wenn dieses aus zwei Großbuchstaben, gefolgt von einer bis drei Ziffern bestehen muss?

Lösung:

Es sind

$$26^2 \cdot (10 + 10^2 + 10^3) = 750\,360$$

viele Kombinationen.

Kombinatorik

Übung

Wie viele Kombinationen für ein Passwort gibt es, wenn dieses aus zwei Großbuchstaben, gefolgt von einer bis drei Ziffern bestehen muss?

Lösung:

Es sind

$$26^2 \cdot (10 + 10^2 + 10^3) = 750\,360$$

viele Kombinationen.

Kombinatorik

Definition

Ist $a \in \mathbb{N}$ so definieren wir die Zahl $a! \in \mathbb{N}$, genannt "a–Fakultät", induktiv wie folgt:

- $0! = 1$
- Ist $(a-1)!$ schon definiert, so setzen wir $a! = a \cdot (a-1)!$.

Bemerkung

$a! = a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdots 2 \cdot 1$

Fakultäten beschreiben die Anzahl der Möglichkeiten beim Ziehen ohne Zurücklegen: Jeder Teilnehmer zieht also eine Zahl aus einem Hut und behält den Zettel mit dieser Zahl. Der nächste Teilnehmer kann nur noch einen Zettel mit einer noch nicht gezogenen Zahl bekommen.

Kombinatorik

Satz

Ist M eine endliche Menge mit a Elementen aus der n–mal ein Element ohne Zurücklegen gezogen wird, so gibt es insgesamt $V(a,n) := \frac{a!}{(a-n)!}$ verschiedene mögliche Elementekombinationen.

Satz

Es gibt genau $a!$ verschiedene Möglichkeiten, die Elemente einer Menge M der Mächtigkeit a anzuordnen.

Zieht man aus einer Urne alle Kugeln und sortiert sich diese in der gezogenen Reihenfolge, so spricht man von einer *Permutation*. D.h., eine Permutation ist eine Stichprobe ohne Zurücklegen, bei der der Stichprobenumfang mit dem Umfang der Grundgesamtheit übereinstimmt. Es gibt $N!$ Permutationen von N unterscheidbaren Objekten.

Kombinatorik

Übung

Wie viele Kombinationen für ein Passwort gibt es, wenn dieses aus zwei voneinander verschiedenen Großbuchstaben, gefolgt von ein bis drei jeweils paarweise verschiedenen Ziffern bestehen muss?

Kombinatorik

Übung

Wie viele Kombinationen für ein Passwort gibt es, wenn dieses aus zwei voneinander verschiedenen Großbuchstaben, gefolgt von ein bis drei jeweils paarweise verschiedenen Ziffern bestehen muss?

Lösung:

Es sind

$$26 \cdot 25 \cdot (10 + 10 \cdot 9 + 10 \cdot 9 \cdot 8) = 533\,000$$

viele Kombinationen.

Kombinatorik

Übung

Wie viele Kombinationen für ein Passwort gibt es, wenn dieses aus zwei voneinander verschiedenen Großbuchstaben, gefolgt von ein bis drei jeweils paarweise verschiedenen Ziffern bestehen muss?

Lösung:

Es sind

$$26 \cdot 25 \cdot (10 + 10 \cdot 9 + 10 \cdot 9 \cdot 8) = 533\,000$$

viele Kombinationen.

Kombinatorik

Das klärt aber noch nicht alle für uns relevanten kombinatorischen Fragen. Für viele interessant ist etwa die Frage nach den Möglichkeiten beim Lotto *6 aus 49*. Dort wird zwar auch sechsmal eine Kugel aus einem Topf mit 49 Kugeln gezogen und die gezogenen Kugeln werden nicht mehr zurückgelegt. Für das Endergebnis spielt aber auch die Reihenfolge der gezogenen Elemente keine Rolle mehr, die Zugfolge $43, 2, 7, 28, 19, 3$ ist also etwa für den Lottospieler gleichbedeutend mit der Zugfolge $2, 3, 7, 43, 19, 28$ oder jeder anderen Reihenfolge dieser Zahlen. Wir interessieren uns in diesem Fall also nicht mehr für die Anzahl der (geordneten) 6–Tupel, die wir durch Ziehen ohne Zurücklegen aus der Menge $\{1, ..., 49\}$ erhalten können, sondern nur noch für die Anzahl der (ungeordneten) 6–elementigen Teilmengen aus der Menge $\{1, ..., 49\}$. Auch hierfür gibt es eine Formel. (Ziehen ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge)

Kombinatorik

Satz

Aus einer Menge M von a Elementen lassen sich

$$B(a,n) := \frac{a!}{(a-n)! \cdot n!}$$

verschiedene n–elementige Teilmengen auswählen.

Definition

Die Größe

$$\binom{a}{n} := \frac{a!}{(a-n)!n!}$$

heißt Binomialkoeffizient von a und n, kurz auch "a über n" oder "n aus a".

Kombinatorik

Beispiel

Beim Lotto „6 aus 49“ gibt es insgesamt

$$\binom{49}{6} = 13\,983\,816$$

viele mögliche Kombinationen.

Beispiel

Ein Verein mit einer Vorstandschaft von 9 Mitgliedern schickt eine Vorstandsdelegation zum jährlichen Frühjahrsumzug der Stadt. Da dort immer in Zweierreihen marschiert wird hat der Verein

$$\binom{9}{2} + \binom{9}{4} + \binom{9}{6} + \binom{9}{8} = 255$$

viele Möglichkeiten eine (nichtleere) Delegation zusammenzustellen.

Kombinatorik

Übung

Wie viele Kombinationen für ein Passwort gibt es, wenn dieses aus zwei voneinander verschiedenen Großbuchstaben und ein bis drei jeweils paarweise verschiedenen Ziffern bestehen muss, wobei die Buchstaben an beliebigen Positionen stehen dürfen?

Kombinatorik

Übung

Wie viele Kombinationen für ein Passwort gibt es, wenn dieses aus zwei voneinander verschiedenen Großbuchstaben und ein bis drei jeweils paarweise verschiedenen Ziffern bestehen muss, wobei die Buchstaben an beliebigen Positionen stehen dürfen?

Lösung:

Es sind insgesamt

$$\binom{3}{2} \cdot 26 \cdot 25 \cdot 10 + \binom{4}{2} \cdot 26 \cdot 25 \cdot 10 \cdot 9 + \binom{5}{2} \cdot 26 \cdot 25 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 5\,050\,500$$

Kombinatorik

Übung

Wie viele Kombinationen für ein Passwort gibt es, wenn dieses aus zwei voneinander verschiedenen Großbuchstaben und ein bis drei jeweils paarweise verschiedenen Ziffern bestehen muss, wobei die Buchstaben an beliebigen Positionen stehen dürfen?

Lösung:

Es sind insgesamt

$$\binom{3}{2} \cdot 26 \cdot 25 \cdot 10 + \binom{4}{2} \cdot 26 \cdot 25 \cdot 10 \cdot 9 + \binom{5}{2} \cdot 26 \cdot 25 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 5\,050\,500$$

Kombinatorik

Bemerkung

Es gilt

1. $\binom{a}{a} = 1$.
2. $\binom{a}{a-1} = a$.
3. $\binom{a}{n} = 0$ für $n > a$.
4. $\binom{a}{n} = \binom{a}{a-n}$.

Satz

Für $1 \leq n \leq a$ gilt:

$$\binom{a}{n} = \binom{a-1}{n-1} + \binom{a-1}{n}$$

Kombinatorik

Satz

Für beliebige Zahlen x, y *gilt* $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$.

Folgerung

Für jedes n *gilt:* $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$.

Kombinatorik

Satz

Für beliebige Zahlen x, y gilt $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$.

Folgerung

Für jedes n gilt: $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$.

Folgerung

Ist A eine Menge mit a Elementen, so hat A genau 2^a viele verschiedene Teilmengen, also

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$$

wobei $\mathcal{P}(A)$ die Potenzmenge von A bezeichnet.

Kombinatorik

Satz

Für beliebige Zahlen x, y gilt $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$.

Folgerung

Für jedes n gilt: $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$.

Folgerung

Ist A eine Menge mit a Elementen, so hat A genau 2^a viele verschiedene Teilmengen, also

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$$

wobei $\mathcal{P}(A)$ die Potenzmenge von A bezeichnet.

Kombinatorik

Folgerung (Vandermonde–Identität)

Für ganze Zahlen N, M und $n \geq 0$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{N}{k} \cdot \binom{M}{n-k} = \binom{N+M}{n}$$

Bemerkung

Die Anzahl der Möglichkeiten, die a Elemente einer Menge M in Gruppen $M_1, \ldots, M_r$ mit festen Größen $n_1, \ldots, n_r$ aufzuteilen (wobei $n_1 + \cdots + n_r = a$ gelten muss), ist gegeben durch den Multinomialkoeffizienten

$$\binom{a}{n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_r} = \frac{a!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_r!}$$

Kombinatorik

Übung

Berechnen Sie beim Lotto " 6 aus 49 " die Wahrscheinlichkeit für " genau 5 Richtige ".

Kombinatorik

Übung

Berechnen Sie beim Lotto “ 6 aus 49 “ die Wahrscheinlichkeit für “ genau 5 Richtige “.

Lösung:

Zunächst bestimmen wir die Anzahl der günstigen Ereignisse. Hat man genau 5 Richtige, so müssen fünf der sechs Zahlen auf dem Tippschein mit den gezogenen sechs Zahlen übereinstimmen. Dafür gibt es $\binom{6}{5}$ Möglichkeiten. Die verbleibende sechste Zahl auf dem Tippschein muss gleich einer der sich noch in der Lostrommel befindlichen 43 Zahlen sein. Dafür gibt es $\binom{43}{1}$ Möglichkeiten und somit $\binom{6}{5} \cdot \binom{43}{1}$ günstige Ereignisse. Die Anzahl aller möglichen Ereignisse haben wir bereits ermittelt.

$$P(\text{“ genau 5 Richtige “}) = \frac{\binom{6}{5} \cdot \binom{43}{1}}{\binom{49}{6}} = \frac{6 \cdot 43}{13983816} = 0,0000184.$$

Kombinatorik

Übung

Berechnen Sie beim Lotto " 6 aus 49 " die Wahrscheinlichkeit für " genau 5 Richtige ".

Lösung:

Zunächst bestimmen wir die Anzahl der günstigen Ereignisse. Hat man genau 5 Richtige, so müssen fünf der sechs Zahlen auf dem Tippschein mit den gezogenen sechs Zahlen übereinstimmen. Dafür gibt es $\binom{6}{5}$ Möglichkeiten. Die verbleibende sechste Zahl auf dem Tippschein muss gleich einer der sich noch in der Lostrommel befindlichen 43 Zahlen sein. Dafür gibt es $\binom{43}{1}$ Möglichkeiten und somit $\binom{6}{5} \cdot \binom{43}{1}$ günstige Ereignisse. Die Anzahl aller möglichen Ereignisse haben wir bereits ermittelt.

$$P(\text{" genau 5 Richtige "}) = \frac{\binom{6}{5} \cdot \binom{43}{1}}{\binom{49}{6}} = \frac{6 \cdot 43}{13983816} = 0,0000184.$$

Kombinatorik

Übung

Aus einer Grundgesamtheit $G = \{1, 2, 3, 4\}$ wird eine reine Zufallsstichprobe vom Umfang $n = 2$ gezogen. Betrachten Sie die beiden Fälle Modell mit Zurücklegen und Modell ohne Zurücklegen.

1. Listen Sie für beide Fälle alle möglichen Stichproben auf.
2. Wie groß ist jeweils für ein einzelnes Element die Wahrscheinlichkeit, in der Stichprobe zu gelangen?
3. Wie groß ist jeweils die Wahrscheinlichkeit, dass die Elemente 1 und 2 beide in die Stichprobe gelangen?

Kombinatorik

Lösung:

1. Beim Ziehen mit Zurücklegen ist der Ergebnisraum Ω gegeben als
   $\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),$
   $(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$.
   Beim Ziehen ohne Zurücklegen ergibt sich Ω als
   $\Omega = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),$
   $(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3)\}$.
2. Beim Ziehen mit Zurücklegen gilt $P(i \text{ ist in Stichprobe}) = \frac{7}{16}$ für $i = 1,2,3,4$
   Für das Ziehen ohne Zurücklegen erhält man $P(i \text{ ist in Stichprobe}) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ für $i = 1,2,3,4$

Kombinatorik

Lösung:

1. Beim Ziehen mit Zurücklegen ist der Ergebnisraum Ω gegeben als
$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),$
$(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$.
Beim Ziehen ohne Zurücklegen ergibt sich Ω als
$\Omega = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),$
$(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3)\}$.
2. Beim Ziehen mit Zurücklegen gilt $P(i \text{ ist in Stichprobe}) = \frac{7}{16}$ für $i = 1,2,3,4$
Für das Ziehen ohne Zurücklegen erhält man $P(i \text{ ist in Stichprobe}) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ für $i = 1,2,3,4$
3. Zieht man mit Zurücklegen ist
$P(1 \text{ und } 2 \text{ sind in Stichprobe}) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$
und beim Ziehen ohne Zurücklegen
$P(1 \text{ und } 2 \text{ sind in Stichprobe}) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

Kombinatorik

Lösung:

1. Beim Ziehen mit Zurücklegen ist der Ergebnisraum Ω gegeben als
$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),$
$(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$.
Beim Ziehen ohne Zurücklegen ergibt sich Ω als
$\Omega = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),$
$(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3)\}$.
2. Beim Ziehen mit Zurücklegen gilt $P(i \text{ ist in Stichprobe}) = \frac{7}{16}$ für
$i = 1,2,3,4$
Für das Ziehen ohne Zurücklegen erhält man $P(i$ ist in Stichprobe$) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ für $i = 1,2,3,4$
3. Zieht man mit Zurücklegen ist
$P(1 \text{ und } 2 \text{ sind in Stichprobe}) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$
und beim Ziehen ohne Zurücklegen
$P(1 \text{ und } 2 \text{ sind in Stichprobe}) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

Kombinatorik

Übung

Aus einer Gruppe von drei Männern und vier Frauen sind drei Positionen in verschiedenen Kommissionen zu besetzen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine der drei Positionen mit einer Frau besetzt wird bzw., dass höchstens eine der drei Positionen mit einer Frau besetzt wird,

1. falls jede Person nur eine Position erhalten kann?
2. falls jede Person mehrere Positionen erhalten kann?

Kombinatorik

Lösung:

Die Grundgesamtheit ergibt sich hier als $G = \{M, M, M, F, F, F, F\}$, und damit ist $|G| = 7$. Die drei Positionen sind nach dem Zufallsprinzip zu besetzen. Das entspricht einer Ziehung aus G vom Umfang $n = 3$.
Falls jede Person nur eine Position erhalten kann, liegt eine Ziehung ohne Zurücklegen vor, bei der die Anzahl möglicher Stichproben berechnet wird als

$$\frac{a!}{(a-n)!} = \frac{7!}{4!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210.$$

Bezeichnet man mit A das Ereignis “Mindestens eine der 3 Positionen wird mit einer Frau besetzt“, d.h. “1,2 oder 3 Positionen werden mit einer Frau besetzt“, dann ist das Ereignis $\overline{A}$ gegeben als “Keine der 3 Positionen wird mit einer Frau besetzt“. Die Anzahl aller möglichen Stichproben, die zu $\overline{A}$ führen, ergibt sich als Anzahl aller Permutationen der drei Männer, also $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Kombinatorik

Lösung:

Damit ist $P(\overline{A}) = \frac{6}{210} = 0,0286$, und es folgt
$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0,0286 = 0,9714$.
Bezeichnet man mit B das Ereignis "Höchstens einer der 3 Positionen wird mit einer Frau besetzt", d.h. "1 oder keine Position wird mit einer Frau besetzt", dann entspricht B den folgenden Ereignissen mit der jeweiligen Anzahl von Möglichkeiten:
$(M, M, M) : 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Möglichkeiten,
$(M, M, F) : 3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$ Möglichkeiten,
$(M, F, M) : 3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$ Möglichkeiten,
$(F, M, M) : 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ Möglichkeiten.
Insgesamt erhält man: $|B| = 78$ und damit $P(B) = \frac{78}{210} = 0,3714$.

Kombinatorik

Lösung:

Falls jede Person mehrere Positionen erhalten kann, liegt eine Ziehung mit Zurücklegen vor, bei der die Anzahl möglicher Stichproben berechnet wird als

$$a^n = 7^3 = 343.$$

Hier ergibt sich für $|\overline{A}| = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ und damit
$P(A) = 1 - \frac{27}{343} = 1 - 0,0787 = 0,9213.$
B entspricht den folgenden Ereignissen mit der jeweiligen Anzahl von Möglichkeiten:
$(M, M, M) : 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ Möglichkeiten,
$(M, M, F) : 3 \cdot 3 \cdot 4 = 36$ Möglichkeiten,
$(M, F, M) : 3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$ Möglichkeiten,
$(F, M, M) : 4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$ Möglichkeiten.
Insgesamt erhält man: $|B| = 135$ und damit $P(B) = \frac{135}{343} = 0,3936.$