**Prof. Dr. H. Siebert , TH Mittelhessen , Fachbereich MND**
**Aufgaben Analysis , DHBW TINF AI** **Blatt 1**

---

Aufgaben „zum Angewöhnen“ :

1. Ein Autofahrer fährt die erste Hälfte der Strecke mit 10 km/h , die zweite Hälfte mit 160 km/h . Was ist seine Durchschnittsgeschwindigkeit über die Gesamtstrecke ?

   Lösung :

   Bezeichnungen :
   s = Streckenlänge;
   $v_1$ , $v_2$ : Geschwindigkeiten in der ersten bzw. zweiten Hälfte der Strecke;
   $t_1$ , $t_2$ : Zeiten zum Durchfahren der ersten bzw. zweiten Hälfte der Strecke;

   $v_1 = s / (2t_1)$ , $v_2 = s / (2t_2)$ ; also $t_1 = s / (2v_1)$ , $t_2 = s / (2v_2)$ ,

   $v = s / ( t_1 + t_2 ) = s / ( s / (2v_1) + s / (2v_2) ) = 1 / ( 1 / (2v_1) + 1 / (2v_2)) = 2v_1v_2/(v_1+v_2)$

   $= 2 \cdot 10 \cdot 160 / ( 10 + 160 )$ km/h $= 18{,}82$ km/h .

   Bemerkung: für $a > 0$ und $b > 0$ nennt man $H(a,b) = 2ab / (a+b)$ das „**harmonische Mittel**“ von a und b.

2. Schreiben Sie als Dezimalbruch :

   a) $\frac{31}{250}$ , b) $\frac{6}{7}$ , c) $\frac{22}{19}$ , d) $\frac{22}{7}$ .

   Lösung:

   a) $0{,}124$ , b) $0{,}\overline{857142}$ , c) $1{,}\overline{157894736842105263}$ , d) $3{,}\overline{142857}$

3. Schreiben Sie als Quotient aus ganzen Zahlen :

   a) $18{,}35\overline{9126}$ , b) $1{,}0000\overline{11122}$ .

   Lösung:

   a) $x = \dfrac{2039699}{111100}$ , b) $x = \dfrac{1000001122}{999990000}$ .

4. Gibt es eine rationale Zahl, die als periodischer Dezimalbruch geschrieben eine Periodenlänge von 19 Dezimalstellen hat ?

   Lösung:

   Die Antwort ist nach den Beispielen der Vorlesung klarerweise „ja“, denn man muß nur einen (irgendeinen) periodischen Dezimalbruch mit Periodenlänge 19 auf die angegebene Art in einen Quotienten verwandeln (Die Zahl 19 ist nur zur Verwirrung da, es funktioniert auch mit jeder anderen natürlichen Zahl ! ) .

5. Bei der Umformung von periodischen Dezimalbrüchen haben wir die Beobachtung gemacht, dass jede natürliche Zahl, die nicht die Primfaktoren 2 oder 5 enthält, Teiler einer der Zahlen 9, 99, 999, 9999 usw. ist. Finden Sie Zahlen dieser Form mit den Teilern

a) 37 , b) 101 , c) 239 , d) 777 .

Lösung :

a) $999 = 27 \cdot \underline{37}$ , b) $9999 = 99 \cdot \underline{101}$ ,

c) $9999999 = 41841 \cdot \underline{239}$ , d) $999999 = 1287 \cdot \underline{777}$

6. Für welche reellen $x$ gilt die Gleichung $(x - 2)^2 - 9 = (x-5)(x+5)$ ?

Lösung:

Ausmultiplizieren : $x^2 - 4x + 4 - 9 = x^2 - 25 \Leftrightarrow -4x = -20 \Leftrightarrow x = 5$ .

7. Bestimmen Sie alle $x$ mit $\frac{17-x}{x} = \frac{5x+4}{x} + \frac{1}{2}$ .

Lösung:

$$\Leftrightarrow 17 - x = 5x + 4 + \frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow 17 - 4 = 5x + x + \frac{x}{2} \quad |\cdot 2$$

$$\Leftrightarrow 26 = 13x$$

$$\Leftrightarrow x = 2 .$$

8. Für festes reelles $a$ bestimme man alle Lösungen $x$ der Gleichung $\frac{a-5x}{a+5x} = -\frac{1}{2}$ .

Lösung:

Für $a \neq 0$ ist $x = \frac{3}{5}a$ eine Lösung.

Für $a = 0$ existiert keine Lösung, da dann die Gleichung auf einen Widerspruch führt :

$$\frac{-5x}{5x} = -\frac{1}{2} \Rightarrow -1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow\Leftarrow$$

9. Bestimmen Sie alle reellen Lösungen $x$ der Gleichungen

a) $\sqrt{5x-4} - 6 = 0$ , b) $\sqrt{5x-4} + 6 = 0$ , c) $2\sqrt{x+13} - \sqrt{2x+3} - \sqrt{8x+1} = 0$ .

Lösung:

a) Quadrieren $\Rightarrow 5x - 4 = 36 \Rightarrow 5x = 40 \Rightarrow x = 8$ .

$x = 8$ ist tatsächlich Lösung, wie man durch Einsetzen in $\sqrt{5x-4} - 6 = 0$ bestätigt.

b) Quadrieren $\Rightarrow 5x - 4 = 36 \Rightarrow 5x = 40 \Rightarrow x = 8$ .

Hier ist $x = 8$ keine Lösung . Man sieht auch ohne Rechnung, dass die Gleichung keine Lösung haben kann, da Quadratwurzeln immer positiv oder = 0 sind.

c) Zweimaliges Quadrieren führt auf

$4(x+13) = 2x + 3 + 8x + 1 + 2\sqrt{2x+3}\cdot\sqrt{8x+1}$ ,

$28x^2 + 680x - 2292 = 0$ bzw. $7x^2 + 170x - 573 = 0$ .

p – q – Formel $\Rightarrow$ $x_{1,2} = -\frac{85}{7} \pm \frac{106}{7}$ , $x_1 = 3$ , $x_2 = -\frac{191}{7} = -27{,}28\ldots$ .

Nur $x_1 = 3$ ist Lösung der ursprünglichen Gleichung.

10. Zeigen Sie, dass die Menge $M = \{ a + b\sqrt{2} \,;\, a, b \in \mathbb{Q} \}$ , versehen mit den Verknüpfungen „+ " und „•" der reellen Zahlen , ein Körper ist.

Lösung :

Die Gesetze (A1) – (A3) , (M1) – (M3) und (D) müssen nicht gezeigt werden, da sie in der Obermenge $\mathbb{R}$ gelten.

Zu zeigen sind

1. $0 \in K$ und $1 \in K$ ,
2. $x, y \in K \Rightarrow x+y \in K$ und $x\cdot y \in K$
3. (A4) , d.h. $x \in K \Rightarrow -x \in K$ ,
4. (M4) , d.h. $x \in K, x \neq 0 \Rightarrow x^{-1} \in K$ .

1 bis 3 sind mehr oder weniger trivial. Wir zeigen exemplarisch 4.:

Sei $x = a + b\sqrt{2} \neq 0$ .

$$x^{-1} = \frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} - \frac{b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2} .$$

Die Brüche sind $\in \mathbb{Q}$ , da a und $b \in \mathbb{Q}$ . Der Nenner ist $\neq 0$ , da $\sqrt{2}$ irrational ist.

11. Zeigen Sie, dass für die Und- und Oder-Verknüpfungen der Aussagenlogik das Assoziativgesetz gilt , d.h. :

$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$ und $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$ .

Gilt auch $((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) = (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$ ?

Lösung: mit Hilfe einer Wahrheitstabelle, z.B.

| A | B | C | A⇒B | (A⇒B)⇒C | B⇒C | A⇒(B⇒C) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| W | W | W | W | W | W | W |
| W | W | F | W | F | F | F |
| W | F | W | F | W | W | W |
| W | F | F | F | W | W | W |
| F | W | W | W | W | W | W |
| F | W | F | W | F* | F | W* |
| F | F | W | W | W | W | W |
| F | F | F | W | F | W | W |

* hier z.B. ungleich $\Rightarrow$ Aussage gilt

12. a) Zeigen Sie für beliebige Aussagen A, B und C :

$(A\wedge B)\vee(A\wedge C)=A\wedge(B\vee C)$ , $\qquad \overline{A\vee B}=\overline{A}\wedge\overline{B}$ .

b) Vereinfachen Sie mit Hilfe von a) : $\overline{\overline{X\vee Y}\vee\overline{X\vee\overline{Y}}}$ .

Lösung:

a) z.B. mit Hilfe einer Wahrheitstabelle ;

b) $\overline{\overline{x\vee y}\vee\overline{\left(x\vee\overline{y}\right)}}=\overline{\left(\overline{x}\wedge\overline{y}\right)\vee\left(\overline{x}\wedge\overline{\overline{y}}\right)}=\overline{\left(\overline{x}\wedge\overline{y}\right)\vee\left(\overline{x}\wedge y\right)}=\overline{\overline{x}\wedge\left(\overline{y}\vee y\right)}=\overline{\overline{x}}=x$ .

Bemerkung : diese Gleichung heißt „Robbins – Gleichung“ .