zu 2b)

Variante 1: (Dimensionssatz) $f: V \to W$

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$$

$\dim(V) = 2$ $[\mathbb{R}^2]$

$\dim(\mathrm{Kern}(f)) = 0$ (Teil a))

$\Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(f)) = 2 \Rightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$

Variante 2: (Elementar) → wie in Übung.

$w = \binom{x}{y} \in \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow \exists\, v \in V : f(v) = w$

mit den zwei geg Vektoren aus V, $\binom{1}{3}$ und $\binom{0}{1}$
ist $v = \lambda \binom{1}{3} + \mu \binom{0}{1}$

$\Rightarrow w = \binom{x}{y} \in \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow \binom{x}{y} = f(v) = f(\lambda \binom{1}{3} + \mu \binom{0}{1})$

$\overset{\text{lin!}}{=} \lambda \cdot f\binom{1}{3} + \mu\, f\binom{0}{1} = \lambda \binom{3}{1} + \mu \binom{1}{2}$

$\Rightarrow x = 3\lambda + \mu$ → I $x = 3\lambda + \mu$
$y = \lambda + 2\mu$ → $\mathrm{II} - \frac{1}{3}\mathrm{II}$ $y - \frac{1}{3}x = \frac{5}{3}\mu$

$\Rightarrow$ zu $\binom{x}{y}$ bel ist $\mu = (y - \frac{1}{3}x) \cdot \frac{3}{5}$

$$\lambda = \frac{x - \frac{3}{5}(y - \frac{1}{3}x)}{3}$$

$\Rightarrow$ Für bel $w = \binom{x}{y}$ gibt es

$$v = \underbrace{\frac{x - \frac{3}{5}(y - \frac{1}{3}x)}{3}}_{\lambda} \cdot \binom{1}{3} + \underbrace{(y - \tfrac{1}{3}x) \cdot \tfrac{3}{5}}_{\mu} \cdot \binom{1}{2}$$

mit $Av = w$ $\Rightarrow$ Jedes $w \in Im(f)$ $\Rightarrow Im(f) = W = \mathbb{R}^2$

<u>Variante 3:</u> (Darstellungsmatrix)

$w = \binom{x}{y} \in Im(f) \Leftrightarrow \exists\, v \in V : A \cdot v = w$

Für $v = \binom{s}{t}$ ist

$$A \cdot v = A \cdot \binom{s}{t} = \begin{pmatrix} t \\ -5s + 2t \end{pmatrix} = \binom{x}{y}$$

$\Rightarrow t = x$

$s = -\dfrac{y - 2t}{5}$

$\Rightarrow$ Für bel $w = \binom{x}{y}$ gibt es

$$v = \begin{pmatrix} x \\ -\frac{(y-2t)}{5} \end{pmatrix} \text{ mit } A \cdot v = \binom{x}{y} = w$$

$\Rightarrow$ Jedes $w \in Im(f) \Rightarrow Im(f) = W = \mathbb{R}^2$

<u>Variante 4</u> (Standardbasis in W)

Bestimme (wie in ~~Teil sat~~ Variante 3 oder ähnlich)

Urbild zu $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, also $f\begin{pmatrix}2/5\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

" " $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ " $f\begin{pmatrix}-1/5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in W$ bel, dann ist

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x \cdot \cancel{f}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = x \cdot f\begin{pmatrix}2/5\\1\end{pmatrix} + y \cdot f\begin{pmatrix}-1/5\\0\end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Lin. Abb}}{=} f\Big(\underbrace{x \cdot \begin{pmatrix}2/5\\1\end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix}-1/5\\0\end{pmatrix}}_{v}\Big)$$

$\Rightarrow$ $f(v) = w$ $\Rightarrow$ $w \in Im(f)$

4)

a)

$$E_{1,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow f(E_{1,1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow f(E_{1,2}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_{2,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow f(E_{2,1}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$E_{2,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow f(E_{2,2}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

b) $f(A) = \vec{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$f(\lambda_1 E_{1,1} + \lambda_2 E_{1,2} + \mu_1 E_{2,1} + \mu_2 E_{2,2})$$

$$= \lambda_1 f(E_{1,1}) + \lambda_2 f(E_{1,2}) + \mu_1 f(E_{2,1}) + \mu_2 f(E_{2,2})$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 + 3\lambda_2 & 2\lambda_1 + 6\lambda_2 \\ \mu_1 + 3\mu_2 & 2\mu_1 + 6\mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = -3\lambda_2$ und $\mu_1 = -3\mu_2$

$\Rightarrow$ Basis des Kerns

$\lambda_2 = 1 \quad \lambda_1 = -3$

$$b_1 = -3 \cdot E_{1,1} + 1 \cdot E_{1,2} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mu_2 = 1 \quad \mu_1 = -3$

$$b_2 = -3\, E_{2,1} + 1 \cdot E_{2,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

4 Part 51

c) $f(B) = B \cdot B = \begin{bmatrix} 7 & 14 \\ 21 & 42 \end{bmatrix} = 7 \cdot E_{1,1} + 14 \cdot E_{1,2} + 21 \cdot E_{2,1} + 42 \cdot E_{2,2}$

$\boxed{5}$ Ein Vektor $v \in V$ ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \hat{=} a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 x^0 = f(x)$$

$$\frac{df}{dx} = 3a_3 x^2 + 2a_2 x + a_1$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 3a_3 \\ 2a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = D \cdot \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Die n-te Ableitung ist durch $D^n v = \overbrace{D \cdot D \circ \ldots \circ D}^{n} v$ gegeben.

$$D^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$D^n = 0$ für $n \geq 4$.