Statistik und empirische Methoden

Silke Bott

Sommersemester 2023

Hypothesentest

Der Hypothesentest gibt uns bei Entscheidungen eine Richtlinie für die Wahl einer Alternativentscheidung. Wir treffen unsere Entscheidung aufgrund dessen, was wir für richtig halten.
Mögliche Grundsituation für einen zu untersuchenden Parameter a:

Nullhypothese H_0: $a = \pi$.

Alternativhypothese H_1: $a \neq \pi$.

Aufgrund statistischer Stichproben soll nun eine Entscheidung getroffen werden.
Diese Entscheidung ist immer von der Form H_0 **wird abgelehnt** oder H_0 **kann nicht abgelehnt werden**.

Hypothesentest

Beispiel

Sie haben die Vermutung, dass eine Münze manipuliert wurde und „Wappen“ jetzt häufiger auftritt als „Zahl“. Wenn wir mit p_0 die Wahrscheinlichkeit für „Wappen“ bezeichnen, so betrachten in diesem Fall

Nullhypothese H_0: $p_0 = \frac{1}{2}$.

Alternativhypothese H_1: $p_0 > \frac{1}{2}$.

Aufgrund statistischer Stichproben soll auch hier eine Entscheidung getroffen werden.

Hypothesentest

Beispiel

Aus Sicht der Statistik untersuchen wir hier eine Zufallsvariable X, gegeben durch

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega = \text{ „Wappen“ wird geworfen} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist X eine Bernoullivariable mit Parameter p, wobei p die wahre Wahrscheinlichkeit für „Wappen“ ist.
Untersucht werden soll die Frage, ob $p = \frac{1}{2}$, oder ob $p > \frac{1}{2}$.

Hypothesentest

Beispiel

Beispielshafte statistische Herangehensweise

1. Wiederhole den Münzwurf 12 mal, dh. führe 12 stochastisch unabhängige Wiederholungen von X durch.
2. Zähle, wie oft „Wappen“ bei der Durchführung auftritt, dh. betrachte die Zufallsvariable $A = X_1 + \cdots + X_{12}$.
3. Ist die Nullhypothese korrekt, so würden wir etwa sechs mal „Wappen“ erwarten. Eine sehr hohe Anzahl von „Wappen“ ist dann ziemlich unwahrscheinlich.
4. Wir betrachten also die Realisation a von A und vergleichen a mit dem Wert 6, den wir bei Gültigkeit der Nullhypothese erwarten würden.
5. Ist a sehr viel größer als 6, so spricht das aus der Sicht der Alternativhypothese gegen die Nullhypothese, und wir würden H_0 ablehnen.

Exakter Binomialtest

Testproblem:
Gegeben ist eine Bernoulli–verteilte Zufallsvariable X mit Parameter p, wobei geprüft werden soll, ob p einen betimmten Wert p_0 hat.
Betrachte n unabhängige Wiederholungen $X_1, \ldots, X_n$ von X und setze

$$A = X_1 + \cdots + X_n$$

Es gilt

$$A \sim B(n, p)$$

(wobei p der tatsächliche Parameter der Bernoulli–Variable ist).
Ist die Nullhypothese richtig, so gilt

$$A \sim B(n, p_0)$$

Exakter Binomialtest

Regel (exakter Binomialtest)

Testproblem zum Parameter p einer Bernoullivariable X:

1. *Nullhypothese $H_0 : p = p_0$ gegen Alternativhypothese $H_1 : p \neq p_0$.*
2. *Nullhypothese $H_0 : p = p_0$ gegen Alternativhypothese $H_1 : p < p_0$.*
3. *Nullhypothese $H_0 : p = p_0$ gegen Alternativhypothese $H_1 : p > p_0$.*

Testgröße ist $A = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Ist H_0 korrekt, so ist $A \sim B(n, p_0)$.

Bei gegebenem Signifikanzniveau $1 - \alpha$ fällt die Entscheidung gegen H_0,

1. *falls $a \leq k$ oder $a \geq l$, wobei k maximal mit $p(B(n, p_0) \leq k) \leq \frac{\alpha}{2}$ und l minimal mit $p(B(n, p_0) \geq l) \leq \frac{\alpha}{2}$.*
2. *falls $a \leq k$, wobei k maximal mit $p(B(n, p_0) \leq k) \leq \alpha$.*
3. *falls $a \geq l$, wobei l minimal mit $p(B(n, p_0) \geq l) \leq \alpha$.*

Exakter Binomialtest

Beispiel

Die Besitzerin einer Losbude auf einem Volksfest beschäftigt einen Angestellten, der Besucher anspricht und sie zum Kauf eines Loses animieren soll. Sie ist mit der Erfolgsquote des Angestellten unzufrieden und möchte ihm das Gehalt kürzen, wenn weniger als 15 % der angesprochenen Personen Lose kaufen. Zur Entscheidung über die Gehaltskürzung will sie einen Test mit 60 (zufällig ausgewählten) angesprochenen Besuchern des Volksfests durchführen, wobei vermieden werden soll, dem Angestellten den Lohn zu unrecht zu kürzen. Ferner soll bei der Entscheidung höchstens ein Fehler von 10 % auftreten.

In diesem Fall ist ein Binomialtest durchzuführen.

Exakter Binomialtest

Beispiel

Dazu bezeichnen wir mit X die Zufallsvariable mit

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{falls der angesprochene Besucher } \omega \text{ ein Los kauft} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist X eine Bernoulli–Variable mit Parameter p, wobei p die tatsächliche Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass der Angestellte erfolgreich ist und den Besucher zum Loskauf überredet.

Nullhypothese H_0: $p = 0.15$.

Alternativhypothese H_1: $p < 0.15$.

Exakter Binomialtest

Beispiel

Wir betrachten 60 unabhängige Wiederholungen $X_1, \ldots, X_{60}$ von X (also eine Zufallsstichprobe von 60 angesprochenen Besuchern). Die Entscheidungsgröße ist

$$A = X_1 + \ldots + X_{60}$$

Dann ist $A \sim B(60, p)$. Ist also die Nullhypothese richtig, so ist $A \sim B(60,\ 0.15)$, und wir werden die Nullhypothese ablehnen, wenn für die Realisation a von A gilt: $a \leq k$ wobei k maximal mit $p(B(60,\ 0.15) \leq k) \leq 0.10$.

Exakter Binomialtest

Beispiel

Die relevanten Werte für eine binomialverteilte Zufallsvariable $B \sim B(60,\, 0.15)$ ermitteln sich aus der Formel

$$p(B = k) = \binom{60}{k} \cdot 0.15^k \cdot 0.85^{60-k}$$

Für kleine Werte von k gilt also

k	0	1	2	3	4	5	6
$p(B = k)$	0.00006	0.00062	0.0032	0.0110	0.0275	0.0544	0.0880
$p(B \leq k)$	0.00006	0.00068	0.0039	0.0148	0.0424	0.0968	0.1848

Speziell wird bei einer zugelassenen Fehlerwahrscheinlichkeit von $\alpha = 0.10$ die Nullhypothese also genau dann abgelehnt, wenn $a \leq 5$.

Exakter Binomialtest

Beispiel

Die Auswertung der Untersuchung liefert, dass genau 6 der angesprochenen 60 Besucher ein Los gekauft haben.
Es ist also $a = 6$. Das $6 \not\leq 5$, kann die Nullhypothese in diesem Fall nicht abgelehnt werden.

Exakter Binomialtest

Übung

Sie untersuchen einen Würfel, da sie vermuten, dass bei diesem Würfel die Wahrscheinlichkeit dafür, die Zahl „6“ zu würfeln weniger als $\frac{1}{6}$ beträgt. Angenommen, eine Zufallsbeobachtung von 18 unabhängigen Würfen dieses Würfels liefert die folgenden Ergebnisse

Wurf	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Wert	1	1	3	5	1	3	5	6	4	4	2	1	4	2

Wurf	15	16	17	18
Wert	5	4	1	3

Wie gehen Sie vor und was können Sie aus diesen Daten über Ihre Vermutung folgern, wenn Sie eine Fehlerwahrscheinlichkeit von 5% zulassen?

Exakter Binomialtest

Lösung

Betrachte die Bernoullivariable X mit

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{die Zahl '6' wird gewürfelt} \\ 0 & \text{eine andere Zahl fällt} \end{cases}$$

(wobei p die tatsächliche Wahrscheinlichkeit für die Zahl „6" ist).

Nullhypothese H_0: $p = \frac{1}{6}$.

Alternativhypothese H_1: $p < \frac{1}{6}$.

Für $B \sim B(18, \frac{1}{6})$ ist $p(B = 0) = 0.0376$ und $p(B \leq 1) = 0.1728$, daher kann H_0 bei $\alpha = 0.05$ nur abgelehnt werden, wenn kein einziges Mal die „6" fällt. In diesem Beispiel kann also H_0 nicht abgelehnt werden.

Approximativer Binomialtest

Regel (approximativer Binomialtest)

Test zum Parameter p einer Bernoulli–Variable bei $np_0(1-p_0) > 9$:

1. *Nullhypothese $H_0 : p = p_0$ gegen Alternativhypothese $H_1 : p \neq p_0$.*
2. *Nullhypothese $H_0 : p = p_0$ gegen Alternativhypothese $H_1 : p < p_0$.*
3. *Nullhypothese $H_0 : p = p_0$ gegen Alternativhypothese $H_1 : p > p_0$.*

Da $Z = \frac{\overline{A}-p_0}{\sqrt{p_0\cdot(1-p_0)}} \cdot \sqrt{n} \overset{a}{\sim} N(0,1)$ unter H_0, fällt die Entscheidung gegen H_0 zum Signifikanzniveau $1-\alpha$ im Testproblem, falls

1. *falls $|z| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$.*
2. *falls $z < -z_{1-\alpha}$.*
3. *falls $z > z_{1-\alpha}$.*

Dabei bezeichnet zu vorgegebenem $\beta \in]0,1[$ die Zahl z_β das β–Quantil der Standardnormalverteiung.

Approximativer Binomialtest

Beispiel

Wir greifen das Beispiel mit der Losbude nochmal auf. Die Besitzerin wiederholt ihren Test , diesmal mit 300 zufällig ausgewählten Besuchern (unter sonst gleichen Voraussetzungen und Bedingungen), die von dem Angestellten angesprochen werden.
Da $300 \cdot 0.15 \cdot 0.85 = 38.25 > 9$, kann sie jetzt auf einen approximativen Binomialtest zurückgreifen. Null– und Alternativhypothesen und die untersuchten Zufallsvariablen X und $X_1, \ldots, X_n$ bleiben gleich.
Setzt Sie jetzt $Z = \frac{\overline{A}-0.15}{\sqrt{0.15 \cdot 0.85}} \cdot \sqrt{300}$, so kann sie H_0 (bei gleichbleibendem $\alpha = 0.10$) ablehnen, falls für die Realisation z von Z gilt:

$$z < -z_{1-0.10} = -1.28$$

Approximativer Binomialtest

Beispiel

Die Auswertung der Stichprobe liefert, dass 36 der angesprochenen 300 Personen tatsächlich ein Los gekauft haben.

Damit gilt

$$\overline{a} = \frac{36}{300} = \frac{3}{25} = 0.120$$

also

$$z = \frac{0.120 - 0.150}{\sqrt{0.1275}} \cdot \sqrt{300} = -1.455$$

Da $-1.455 < -1.28$, kann die Nullhypothese jetzt bei einem $\alpha = 0.10$ abgelehnt werden. Bei $\alpha = 0.05$ wäre das nicht mehr möglich.

Hypothesentest

Viele typische Testprobleme sind jedoch Aussagen über die Erwartungswerte von Zufallsvariablen:
Wir betrachten die folgenden Testprobleme für den Parameter $E(X) = \mu$ (bei bekannter Varianz σ^2):

1. Nullhypothese $H_0 : E(X) = \mu_0$ gegen Alternativhypothese $H_1 : E(X) \neq \mu_0$.
2. Nullhypothese $H_0 : E(X) = \mu_0$ gegen Alternativhypothese $H_1 : E(X) < \mu_0$.
3. Nullhypothese $H_0 : E(X) = \mu_0$ gegen Alternativhypothese $H_1 : E(X) > \mu_0$.

Beispiel

Bei einer Maschine soll überprüft werden, ob für die gefertigten Teile eine bestimmte Sollgröße μ_0 erreicht wird. Bezeichnen wir also mit X die Zufallsvariable ”Länge des gefertigten Teils”, so geht es um die Frage, ob $E(X) = \mu_0$ oder nicht.

Hypothesentest

Beispiel

Ein Lieferant gibt an, dass die von ihm gelieferten Werkstücke ein mittleres Gewicht von 100.00 g haben, dass das tatsächliche Gewicht produktionsbedingt aber gewissen statistischen Schwankungen unterworfen ist. Sie als Abnehmer sind bereit, diese Schwankungen in Kauf zu nehmen, es ist ihnen aber wichtig, das das angegebenen mittlere Gewicht stimmt. In diesem Fall würden Sie mit der Zufallasvariable X : *Gewicht eines Werkstücks* einen Hypothesentest wie folgt aufsetzen:

- Nullhypothese $H_0 : E(X) = 100.00\,\text{g}$
- Alternativhypothese $H_1 : E(X) \neq 100.00\,\text{g}$.

Hypothesentest

Beispiel

Ein Pralinenhersteller gibt an, dass in einer Schachtel seiner Marke *Exklusiv* im Mittel 200.00 g enthalten sind, dass das tatsächliche Gewicht produktionsbedingt aber gewissen statistischen Schwankungen unterworfen ist. In diesem Fall ist es für Sie als Abnehmer vermutlich eher wichtig, dass das angegebene Gewicht im Mittel nicht unterschritten wird. Daher wäre mit der Zufallssvariable X : *Gewicht des Inhalts einer Pralinenschachtel* ein sinnvoller Hypothesentest in diesem Fall also

- Nullhypothese $H_0 : E(X) = 200.00\,\mathrm{g}$
- Alternativhypothese $H_1 : E(X) < 200.00\,\mathrm{g}$.

Hypothesentest

Für das Testproblem nehmen wir jetzt stets an, dass die Zufallsvariable X normalverteilt und die Varianz σ^2 von X bekannt ist.
Dazu betrachten wir n unabhängige Wiederholungen $X_1, \ldots, X_n$ von X und das arithmetische Mittel $\overline{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} X_k$. Prüfgröße ist

$$Z = Z_n = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n}$$

Unter der Nullhypothese ist Z standardnormalverteilt, da X normalverteilt ist. (Streichen wir diese Annahme, so ist Z immer noch approximativ normalverteilt).

Hypothesentest

Regel (Gaußtest)

Zu gegebener Realisation z und einem vorgegebenen Signifikanzniveau $1-\alpha$ *fällt die Entscheidung gegen* H_0 *im Testproblem,*

1. *falls* $|z| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$.
2. *falls* $z < -z_{1-\alpha}$.
3. *falls* $z > z_{1-\alpha}$.

Hypothesentest

Beispiel

Wir greifen das Beispiel mit den Werkstücken auf und nehmen jetzt an, dass der Hersteller zusätzlich angibt, dass das Gewicht das Werkstückes normalverteilt mit einer Varianz von $0.1\,\mathrm{g}^2$ ist. (Die Normalverteilungsannahme ist bei technischen Produktionsprozessen in der Regel gegeben). In diesem Fall kann das Testszenario wie folgt beschreiben werden:

X ist die Zufallssvariable *Gewicht eines Werkstücks*

- Nullhypothese $H_0 : E(X) = 100.00\,\mathrm{g}$
- Alternativhypothese $H_1 : E(X) \neq 100.00\,\mathrm{g}$.

Hypothesentest

Beispiel

Wir betrachten stochastisch unabhängige Wiederholungen $X_1, \ldots, X_n$ von X (das entspricht einer Zufallsstichprobe), und

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} X_k$$

Die Testgröße hat die Gestalt

$$Z = \frac{\overline{X} - 100}{\sqrt{0.1}} \cdot \sqrt{n}$$

Ist H_0 korrekt, so ist $Z \sim N(0,1)$.

Hypothesentest

Beispiel

Bei einer zugelassenen Fehlerwahrscheinlichkeit von α kommen wir zu einer Ablehnung der Nullhypothese, wenn für die Realisation z von Z gilt:

$$z < -z_{1-\frac{\alpha}{2}} \quad \text{oder} \;\; z > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

wobei z_β das β–Quantil der Standardnormalverteilung bezeichnet.
Speziell gilt: Bei einer zugelassenen Fehlerwahrscheinlichkeit von 5 % kommen wir zu einer Ablehnung der Nullhypothese, wenn für die Realisation z von Z gilt:

$$z < -1.96 \quad \text{oder} \;\; z > 1.96$$

und bei einer zugelassenen Fehlerwahrscheinlichkeit von 1 % kommen wir zu einer Ablehnung der Nullhypothese, wenn für die Realisation z von Z gilt:

$$z < -2.58 \quad \text{oder} \;\; z > 2.58$$

Hypothesentest

Beispiel

Eine Zufallsstichprobe mit $n = 16$ liefert (alle Angaben in Gramm)

100.34	100.40	99.62	100.31	100.28	99.93	100.59	100.32
100.21	99.57	100.32	99.68	99.80	100.12	100.02	99.73

In diesem Fall erhalten wir

$$\overline{x} = 100.09(\mathrm{g})$$

und damit als Realisation der Testgröße

$$z = \frac{100.09 - 100.00}{\sqrt{0.1}} \cdot \sqrt{16} = 1.1384$$

Daher kann die Nullhypothese bei einer zugelassenen Fehlerwahrscheinlichkeit von 5 % nicht abgelehnt werden (erst recht nicht bei einer zugelassenen Fehlerwahrscheinlichkeit von 1 %).

Hypothesentest

Beispiel

Angenommen bei einer Zufallsstichprobe vom Umfang $n = 200$ erhalten wir ein Durchschnittsgewicht der getesteten Werkstücke von $\overline{x} = 99.94\,\mathrm{g}$. Dann ist

$$z = \frac{99.94 - 100.00}{\sqrt{0.1}} \cdot \sqrt{200} = -2.6833$$

Da $z < -1.96$, kann H_0 bei einer zugelassenen Fehlerwahrscheinlichkeit von $\alpha = 0.05$ abgelehnt werden. Da sogar $z < -2.58$ kann H_0 sogar bei einer zugelassenen Fehlerwahrscheinlichkeit von $\alpha = 0.01$ abgelehnt werden.

Hypothesentest

Übung

Im Pralinenbeispiel gibt der Hersteller an, dass das Gewicht normalverteilt mit Varianz $1.0\,\mathrm{g}^2$ ist.

- Beschreiben Sie das Testszenario mit allen Variablen und mit den Entscheidungskriterien.
- Eine Testreihe liefert

199.20	198.25	198.60	200.80	199.10	200.70	201.05	199.10
198.95	200.50	198.30	199.25	200.50	200.30	198.40	199.80

  Zu welcher Entscheidung kommen Sie bei $\alpha = 0.05$? Bei $\alpha = 0.01$?
- Eine weitere Testreihe mit $n = 100$ liefert ein Durchschnittsgewicht von $199.73\,\mathrm{g}$. Zu welcher Entscheidung kommen Sie bei $\alpha = 0.05$? Bei $\alpha = 0.01$?

Hypothesentest

Lösung

Bezeichne mit X die Zufallssvariable *Gewicht des Inhalts einer Pralinenschachtel* und führen einen Hypothesentest

- Nullhypothese $H_0 : E(X) = 200.00\,\mathrm{g}$
- Alternativhypothese $H_1 : E(X) < 200.00\,\mathrm{g}$.

durch. Betrachte stochastisch unabhängige Wiederholungen $X_1, \ldots, X_n$ von X und $\overline{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} X_k$.

Die Testgröße hat die Gestalt

$$Z = \frac{\overline{X} - 200}{\sqrt{1.0}} \cdot \sqrt{n} = \left(\overline{X} - 200\right) \cdot \sqrt{n}$$

Ist H_0 korrekt, so ist $Z \sim N(0, 1)$.

Hypothesentest

Lösung

Bei einer zugelassenen Fehlerwahrscheinlichkeit von α kommen wir zu einer Ablehnung der Nullhypothese, wenn für die Realisation z von Z gilt:

$$z < -z_{1-\alpha}$$

wobei z_β das β–Quantil der Standardnormalverteilung bezeichnet.
Speziell gilt: Bei einer zugelassenen Fehlerwahrscheinlichkeit von 5 % kommen wir zu einer Ablehnung der Nullhypothese, wenn für die Realisation z von Z gilt:

$$z < -1.65$$

Bei einer zugelassenen Fehlerwahrscheinlichkeit von 1 % kommen wir zu einer Ablehnung der Nullhypothese, wenn für die Realisation z von Z gilt:

$$z < -2.33$$

Hypothesentest

Lösung

Bei den Daten der Testreihe mit $n = 16$ gilt:

$$\overline{x} = 199.55(\text{g})$$

Damit erhalten wir als Realisation der Testgröße

$$z = (199.55 - 200.00) \cdot \sqrt{16} = -1.80$$

Daher kann die Nullhypothese bei einer zugelassenen Fehlerwahrscheinlichkeit von 5 % abgelehnt werden, da $z = -1.80 < -1.65$. Bei einer zugelassenen Fehlerwahrscheinlichkeit von 1 % kann H_0 jedoch nicht abgelehnt werden, da $z = -1.80 \not< -2.33$.

Hypothesentest

Lösung

Im Fall der Testreihe mit $n = 100$ ist schon gegeben

$$\overline{x} = 199.73(\text{g})$$

Damit erhalten wir als Realisation der Testgröße

$$z = (199.73 - 200.00) \cdot \sqrt{100} = -2.70$$

Da $z < -1.65$, kann H_0 bei einer zugelassenen Fehlerwahrscheinlichkeit von $\alpha = 0.05$ abgelehnt werden. Da sogar $z < -2.33$ kann H_0 auch bei einer zugelassenen Fehlerwahrscheinlichkeit von $\alpha = 0.01$ abgelehnt werden.

Hypothesentest

Bemerkung

Ein **statistisches Testproblem** besteht aus einer Nullhypothese H_0 und einer Alternative H_1, die sich gegenseitig ausschließen und Aussagen über die gesamte Verteilung oder über bestimmte Parameter eines Merkmals treffen.

Das Testproblem heißt **zweiseitig**, wenn

$$\begin{aligned} H_0: &\quad \text{Merkmal} = \mu_0 \\ H_1: &\quad \text{Merkmal} \neq \mu_0 \end{aligned}$$

und es heißt **einseitig**, wenn

$$\begin{aligned} H_0: &\quad \text{Merkmal} \leq \mu_0 \\ H_1: &\quad \text{Merkmal} > \mu_0 \end{aligned}$$

oder entsprechend mit $\geq$ statt $\leq$.

Hypothesentest

Bemerkung

Ein statistischer Test heißt **Test zum Signifikanzniveau** $1 - \alpha$ **(**$0 < \alpha < 1$**)**, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, dass H_0 abgelehnt wird, obwohl H_0 wahr ist, höchstens α ist,

$$p\,(H_0 \text{ abgelehnt} \mid H_0 \text{ wahr }) \leq \alpha$$

Definition

Bei einem statistischen Testproblem H_0 gegen H_1 und einem dazugehörigen statistischen Test sprechen wir von einem

- **Fehler erster Art** oder α–**Fehler**, wenn H_0 verworfen wird, obwohl H_0 wahr ist.
- **Fehler zweiter Art** oder β–**Fehler**, wenn H_0 nicht verworfen wird, obwohl H_0 falsch ist.

Hypothesentest

Die maximale Fehlerwahrscheinlichkeit bei der Testkonstruktion eines Tests ist eine Schranke für die Wahrscheinlichkeit eines Fehler erster Art.
Der Fehler zweiter Art ist im allgemeinen schwierig zu bestimmen.

Beispiel

Betrachte den Gaußtest

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad E(X) \leq \mu_0 \\ H_1 &: \quad E(X) > \mu_0 \end{aligned}$$