3.3 Anwendungen der Differentialrechnung

in diesem Abschnitt wollen wir uns mit verschiedenen Anwendungen der Differentialrechnung in mehreren Veränderlichen beschäftigen. Wir beginnen mit der Differentiation von implizit gegebenen Funktionen.

Dazu betrachten wir zunächst eine offene Teilmente $D \subseteq \mathbb{R}^2$, einen Punkt $(a, b) \in D$, eine stetig differenzierbare Funktion

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit $f(a, b) = 0$. Ferner betrachten wir eine stetig differenzierbare Funktion $h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I = (\alpha, \beta)$ mit $a \in I$ und mit $h(a) = b$, so dass $(x, h(x)) \in D$ für alle $x \in I$ und so dass

$$f(x, h(x)) = 0 \qquad \text{für alle } x \in I$$

Gibt es außerdem noch ein $c > 0$, so dass für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x, y) = 0, \qquad \|(x, y) - (a, b)\| < c$$

schon gilt $x \in (\alpha, \beta)$ und $y = h(x)$, so nennen wir eine solche Funktion h auch eine **lokale Auflösung** der Gleichung

$$f(x, y) = 0$$

nach y in der Nähe des Punktes (a, b).
Analog sprechen wir von einer lokalen Ausflösung von $f(x, y) = 0$ nach x in der Nähe des Punktes (a, b), wenn es eine stetig differenzierbare Funktion $g : (\alpha', \beta') \longrightarrow \mathbb{R}$ gibt mit $b \in (\alpha', \beta')$, $g(b) = a$, für die gilt: Es ist $(g(y), y) \in D$ für alle $y \in (\alpha', \beta')$ und $f(g(y), y) = 0$, und jedes (x, y) in der Nähe von (a, b) mit $f(x, y) = 0$ lässt sich in als $(g(y), y)$ schreiben.

Beispiel 3.3.1. Wir betrachten die Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4$ und die Menge

$$C = \{(x, y) |\, f(x, y) = 0\}$$

Dabei handelt es sich um einen Kreis mit Radius 2. Ist nun $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ mit $f(a, b) = 0$, also mit $a^2 + b^2 = 4$, so können wir schreiben $b^2 = 4 - a^2$ bzw. $a^2 = 4 - b^2$ und wir sehen:

- Ist $b > 0$, so ist $g : (-2, 2) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $h(x) = \sqrt{4 - x^2}$ eine lokale Auflösung von $f(x, y) = 0$ nach y in der Nähe von (a, b).

- Ist $b < 0$, so ist $g : (-2, 2) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $h(x) = -\sqrt{4 - x^2}$ eine lokale Auflösung von $f(x, y) = 0$ nach y in der Nähe von (a, b).

- Ist $a > 0$, so ist $h : (-2, 2) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $g(y) = \sqrt{4 - y^2}$ eine lokale Auflösung von $f(x, y) = 0$ nach x in der Nähe von (a, b).

- Ist $a < 0$, so ist $h : (-2, 2) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $g(y) = -\sqrt{4 - y^2}$ eine lokale Auflösung von $f(x, y) = 0$ nach x in der Nähe von (a, b).

In der Nähe der Punkte $(1, 0)$ bzw. $(-1, 0)$ gibt es keine lokale Auflösung von $f(x, y) = 0$ nach y, in der Nähe der Punkte $(0, 1)$ bzw. $(0, -1)$ gibt es keine lokale Auflösung von $f(x, y) = 0$ nach x.

Ist nun $y = h(x)$ eine lokale Auflösung von $f(x, y) = 0$ nach y bei (a, b), so setzen wir $H(t) = (t, h(t))$. Dann gilt für die Komposition $f \circ H$:

$$(f \circ H)(t) = f(H(t)) = f(t, h(t)) = 0$$

und daher trivialerweise auch

$$(f \circ H)'(t) = 0$$

Andererseits können wir aber $(f \circ H)'(t)$ auch nach der Kettenregel berechnen und erhalten

$$\begin{aligned}
(f \circ H)'(t) &= \left(\tfrac{\partial f}{\partial x}(t, h(t)), \tfrac{\partial f}{\partial y}(t, h(t))\right) \cdot \begin{pmatrix} H_1'(t) \\ H_2'(t) \end{pmatrix} \\
&= \left(\tfrac{\partial f}{\partial x}(t, h(t)), \tfrac{\partial f}{\partial y}(t, h(t))\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ h'(t) \end{pmatrix} \\
&= \tfrac{\partial f}{\partial x}(t, h(t)) + \tfrac{\partial f}{\partial y}(t, h(t)) \cdot h'(t)
\end{aligned}$$

also

Regel 3.3.1. *Ist in obiger Situation* $\frac{\partial f}{\partial y}(t, h(t)) \neq 0$, *so gilt*

$$h'(t) = -\frac{f_x(t, h(t))}{f_y(t, h(t))}$$

Ist entsprechend $x = g(y)$ eine Auflösung nach x und $\frac{\partial f}{\partial x}(g(t), t) \neq 0$, so gilt

$$g'(t) = -\frac{f_y(g(t), t)}{f_x(g(t), t)}$$

Diese Regel ist sehr hilfreich, denn in vielen Fällen weiß man, dass so ein h existiert, es ist aber schwierig, dieses h direkt anzugeben.

Bemerkung 3.3.1. Durch die Gleichung $f(x, y) = 0$ wird eine Kurve $C \subseteq \mathbb{R}^2$ definiert. Ist $(a, b) \in C$ und hat $f(x, y) = 0$ bei (a, b) eine lokale Auflösung $y = h(x)$ nach y, so ist $h'a)$ die Steigung der Tangente an die Kurve C im Punkt (a, b). Ist also $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$, so ist die Tangente gegeben durch

$$T : y = b - \frac{f_x(a, b)}{f_y(a, b)} \cdot (x - a)$$

Beispiel 3.3.2. Wir betrachten wieder den Kreis mit Radius 2,

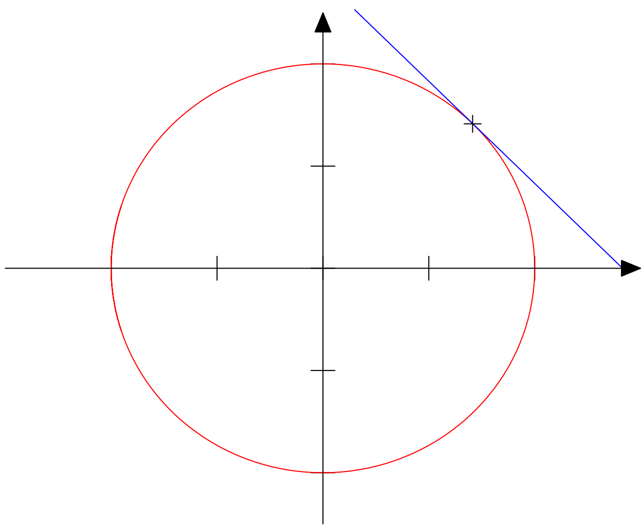


Abbildung 3.9: Tangente an Kurve

und darauf den Punkt $P = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Wie wir schon in Beispiel 3.3.1 gesehen haben ist die Kreislinie gegeben durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$

Die Kreislinie lässt sich bei P lokal nach y auflösen, also in der Form $(x, h(x))$ schreiben, wobei $h(x) = \sqrt{4 - x^2}$, wie wir in Beispiel 3.3.1 gesehen haben.

Damit können wir direkt
$$h'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$$
ermitteln und erhalten $h'(\sqrt{2}) = -1$.
Ohne dieses h explizit zu bestimmen, können wir aus Regel 3.3.1 mit $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4$ ableiten
$$\begin{aligned} h'(\sqrt{2}) &= -\tfrac{f_x(\sqrt{2},\sqrt{2})}{f_y(\sqrt{2},\sqrt{2})} \\ &= -\tfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \\ &= -1 \end{aligned}$$
Ist ganz allgemein (a,b) ein Punkt auf der Kreislinie mit $b \neq 0$, so hat die Tangente an den Kreis in diesem Punkt die Steigung $-\frac{a}{b}$, und die Tangente ist gegeben durch
$$T : y = b - \frac{a}{b}(x-a)$$
Ist (a,b) auf der Kreislinie mit $a \neq 0$, so können wir eine Auflösung $x = g(y)$ nach x benutzen und erhalten für die Tangente an diesen Punkt die Gleichung
$$T : x = a - \frac{b}{a}(y-b)$$
Speziell hat der Kreis also eine waagrechte Tangente genau in den Punkten $(0,1)$ und $(0,-1)$ und eine senkrechte Tangente genau in den Punkten $(1,0)$ und $(-1,0)$.

Aufgabe 49. Bestimmen Sie alle Punkte, in denen die Ellipse E, gegeben durch die Gleichung
$$4x^2 + 9y^2 = 72$$
eine Tangente mit der Steigung $\frac{1}{2}$ hat.

Eine Form der impliziten Differentiation gilt auch für mehr als zwei Variablen: Dazu betrachten wir eine offene Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine stetig differenzierbare Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ und einen Punkt $(a,b) \in D$ mit $a = (a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $b \in \mathbb{R}$. Gibt es eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ mit $a \in U$, ein $c > 0$ und eine stetig differenzierbare Funktion $h : U \longrightarrow \mathbb{R}$, für die gilt:

1. $(x_1, \ldots, x_{n-1}, h(x_1, \ldots x_{n-1})) \in D$ für alle $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in U$.

2. $f(x_1, \dots, x_{n-1}, h(x_1, \dots, x_{n-1})) = 0$ für alle $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in U$.

3. Ist $x = (x_1, \dots, x_n) \in D$ mit $\|x - (a,b)\| < c$ und $f(x) = 0$, so ist $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in U$ und $x_n = h(x_1, \dots, x_{n-1})$.

so nennen wir h eine **lokale Auflösung** von $f(x) = 0$ nach x_n in der Nähe von (a,b).
Dann gilt hierfür

Regel 3.3.2. *Ist in obiger Situation* $\frac{\partial f}{\partial x_n}(a, h(a)) \neq 0$ *so ist*

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(a) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(a, h(a))}{\frac{\partial f}{\partial x_n}(a, h(a))}$$

Diese Regel beweist man genauso wie Regel 3.3.1.

Bemerkung 3.3.2. Wir müssen nicht fordern, dass h stetig differenzierbar ist, es reicht zu verlangen, dass h stetig ist. Dann ist h automatisch in a (und einer kleinen Umgebung davon) differenzierbar. Das lässt sich direkt durch Betrachtung des Differenzenquotienten von h nachrechnen.

Beispiel 3.3.3. Wir betrachten die Kugel mit Radius $\sqrt{3}$, und darauf den Punkt $P = (1, -1, 1)$. Die Kugeloberfläche ist gegeben durch die Gleichung

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{3}$$

oder äquivalent als Nullstellenmenge

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0$$

Die Kupeloberfläche lässt sich in einer Umgebung von P parametrisieren, also in der Form $(x, y, h(x, y))$ schreiben (in der Tat wehen wir auch in diesem Fall leicht direkt, dass

$$h(x, y) = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$$

eine lokale Auflösung der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ nach y ist). Ohne dieses h explizit zu bestimmen, können wir aus Regel 3.3.2 mit $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3$ ableiten

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial h}{\partial u}(1,1) & = & -1 \\ \frac{\partial h}{\partial v}(1,1) & = & 1 \end{array}$$

Damit ist also die Tangentialebene an die Kugel im Punkt P gegeben durch

$$z = 1 - (x-1) + (y+1)$$

Bis jetzt haben wir immer vorausgesetzt, dass eine Funktion h existiert, für die die Gleichung $f(x, h(x)) = 0$ erfüllt ist. Das ist aber (lokal) in den Situationen, die wir betrachten gar nicht nötig. Dazu betrachten wir zunächst wieder die spezielle Situation einer Abbildung in zwei Variabeln.

Satz 3.3.3. *(Satz über implizite Funktionen I) Ist $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, und ist $(a, b) \in D$ ein Punkt mit*

$$\begin{aligned} f(a,b) &= 0 \\ f_y(a,b) &\neq 0 \end{aligned}$$

so besitzt f in der Nähe von (a, b) eine lokale Auflösung

$$h : (a-r, a+r) \longrightarrow \mathbb{R}$$

nach y und h ist stetig differenzierbar in a mit:

$$h'(a) = -\frac{f_x(a,b)}{f_y(a,b)}$$

Beweis: W ir betrachten zunächst die Hilfsfunktion

$$G(x,y) := y - \frac{f(x,y)}{f_y(a,b)}$$

Dann gilt

$$f(x,y) = 0 \iff G(x,y) = y \tag{3.6}$$

Speziell also $G(a, b) = b$. Ferner ist $G(x, y)$ stetig differenzierbar mit

$$G_y(x,y) = 1 - \frac{f_y(x,y)}{f_y(a,b)}$$

also insbesondere

$$G_y(a,b) = 0$$

Da also $G_y(x, y)$ stetig ist, finden wir $r > 0$, $s > 0$ so dass

$$|G_y(x,y)| \leq \frac{1}{2} \quad \text{für alle } x \in (a-r,\, a+r), y \in (b-s,\, b+s)$$

Wir halten jetzt ein $x_0 \in (a-r, a+r)$ fest und betrachten die Funktion

$$g(y) = G(x_0, y) \qquad (y \in (b-s, b+s))$$

Dann gilt hierfür $g'(y) = G_y(x_0, y)$, also $|g'(y)| \leq \frac{1}{2}$, und damit erhalten wir aus dem Mittelwertsatz (für ein η zwischen b und y)

$$|g(y) - b| = |g(y) - g(b)| = |g'(\eta)| \cdot |y - b| \leq \frac{1}{2} \cdot s$$

so dass also $g(y) \in (b-s, b+s)$. Damit können wir den Fixpunktsatz aus der Analysis in einer Veränderlichen anwenden: Es gibt genau ein $y_0 \in (b-s, b+s)$ mit $g(y_0) = y_0$, und wir definieren

$$h(x_0) = y_0$$

Da $x_0 \in (a-r, a+r)$ beliebig war, haben wir schon mal eine Abbildung

$$h : (a-r, a+r) \longrightarrow (b-s, b+s)$$

für die wegen Gleichung 3.6 schon gilt

$$f(t, h(t)) = 0 \qquad (t \in (a-r, a+r)$$

Wir müssen noch zeigen, dass $h(t)$ stetig ist. Dazu nutzen wir aus, dass $G(x, y)$ stetig differenzierbar nach x ist. Wenn wir eventuell r und s ein wenig kleiner machen, können wir deshalb annehmen, dass es ein K gibt, so dass

$$|G_x(x, y)| \leq K \qquad (x \in (a-r, a+r), y \in (b-s, b+s)$$

Damit gilt für $x_1, x_2 \in (a-r, a+r)$ mit $y_1 = h(x_1)$ und $y_2 = h(x_2)$ für geeignete ξ, η (nach dem Mittelwertsatz):

$$\begin{aligned} |y_2 - y_1| &= |G(x_2, y_2) - G(x_1, y_1)| \\ &\leq |G(x_2, y_2) - G(x_1, y_2)| + |G(x_1, y_2) - G(x_1, y_1)| \\ &= |G_x(\xi, y_2)(x_2 - x_1)| + |G_y(x_1, \eta)(y_2 - y_1)| \\ &\leq K \cdot |x_2 - x_1| + \tfrac{1}{2}|y_2 - y_1| \end{aligned}$$

und daraus folgt

$$|y_2 - y_1| \leq 2 \cdot K \cdot |x_2 - x_1|$$

also die Stetigkeit von $h(t)$.
Die Differenzierbarkeit von $h(t)$ und die Formel für die Ableitung erhalten wir damit automatisch, siehe etwa Bemerkung 3.3.2.

Bemerkung 3.3.3. Entsprechend erhalten wir aus $f_x(a,b) \neq 0$ die Existenz einer lokalen Auflösung von $f(x,y) = 0$ nach x.

Ähnlich beweist man folgende Aussage:

Satz 3.3.4. *(Satz über implizite Funktionen II) Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Ferner sei $(a,b) \in D$ eine Punkt mit $a = (a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $b \in \mathbb{R}$ und mit*

$$\begin{array}{lcl} f(a,b) & = & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a,b) & \neq & 0 \end{array}$$

so hat $f(x) = 0$ eine lokale Auflösung $x_n = h(x_1, \ldots, x_{n-1})$ in der Nähe von (a,b) und h ist stetig differenzierbar in a mit partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(a) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(a,b)}{\frac{\partial f}{\partial x_n}(a.b)}$$

Beispiel 3.3.4. Wir bestimmen die Steigung der Kurve mit Gleichung

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 - x^3 y + 2y^5 = 5$$

im Punkt $P = (1,\, 1)$.

Wir setzen $f(x,y) = (x^2 + y^2)^2 - x^3 y + 2y^5 - 5$ und erhalten also die Kurve als Lösungsmenge der Gleichung $f(x,y) = 0$. Eine lokale Auflösung zur Bestimmung der Tangente lässt sich hier nicht mehr explizit angeben, und daher wenden wir den Satz3.3.3 über implizite Funktionen an. Dazu benötigen wir die partiellen Ableitungen von $f(x,y)$:

$$\begin{array}{lcl} f_x(x,y) & = & 4x(x^2 + y^2) - 3x^2 y \\ f_y(x,y) & = & 4y(x^2 + y^2) - x^3 + 5y^4 \end{array}$$

Hierfür gilt

$$f_y(1,1) = 12 \neq 0, \quad f_x(1,1) = 5$$

Damit kann der Satz über implizite Funktionen angewendet werden und ergibt als Tangentensteigung den Wert

$$m = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)} = -\frac{5}{12}$$

Beispiel 3.3.5. Durch die Gleichung $(x^2+y^2)^2+6xy^2-2x^3=0$ wird eine Kurve C in Form eines dreiblättrigen Kleeblatts beschrieben

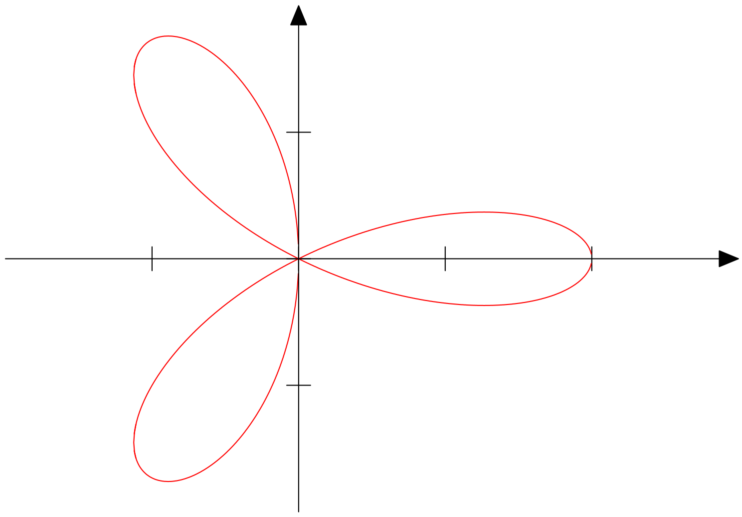


Abbildung 3.10: Kleeblattkurve

Hier handelt es sich um eine Gleichung vom Grad 4 sowohl in x als auch in y, bei der sich eine lokale Auflösung nicht in offensichtlicher Weise angeben lässt. Um diese Kurve C zu studieren, setzen wir $f(x,y)=(x^2+y^2)^2+6xy^2-2x^3$ und sehen, dass

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 4x(x^2+y^2)+6y^2-6x^2 \\ f_y(x,y) &= 4y(x^2+y^2)+12xy \end{aligned}$$

Der Punkt $P=(-1,1)$ liegt auf der Kurve C und hierfür ist $f_y(1,-1)=-4\neq 0$. Daher erhalten wir aus Satz 3.3.3, dass die Gleichung von C in der Nähe von $(-1,1)$ nach y augelöst werden kann, und ohne diese Auflösung explizit zu ermitteln, sehen wir, dass die Tangente an C im Punkt $(1,-1)$ die Steigung

$$m=-\frac{f_x(-1,1)}{f_y(-1,1)}=-\frac{-8}{-4}=-2$$

hat. Betrachten wir den Punkt $Q=(0,0)$, so liegt auch Q auf C, und hierfür erhalten wir

$$f_x(0,0)=0, \quad f_y(0,0)=0$$

Satz 3.3.3 kann damit nicht angewendet werden. In diesem Fall sehen wir auch, dass sich in Punkt Q drei *Zweige* der Kurve C treffen und wir nicht von einer Tangente an C in Q sprechen können.

Beispiel 3.3.6. Durch die Gleichung $x^4+y^4-x^2=0$ wird eine ebene Kurve C, eine sogenannte *Tacnode*, beschrieben

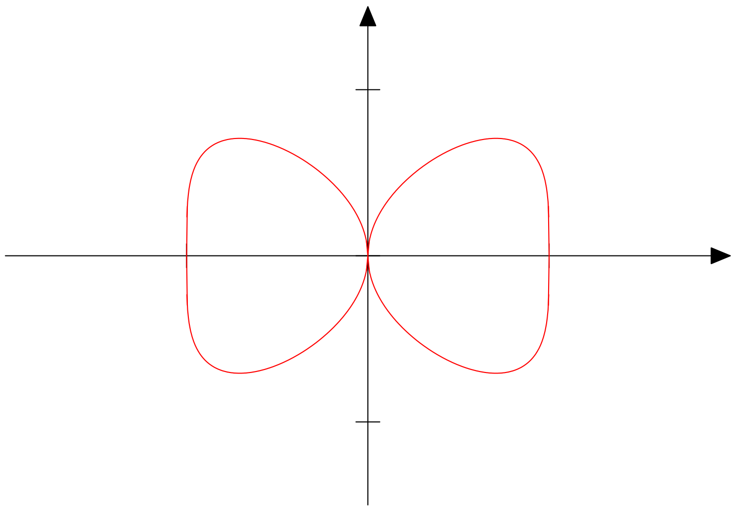


Abbildung 3.11: Tacnode

Wir wollen alle Punkte bestimmen, an denen diese Kurve eine waagrechte Tangente besitzt. Dazu benutzen wir wieder den Satz 3.3.3 über implizite Funktionen. Ist nämlich $f(x,y)=x^4+y^4-x^2$ und besitzt $f(x,y)=0$ bei einem Punkt (a,b) eine lokale Auflösung $y=h(x)$ und gilt hierfür $h'(a)=0$, so hat die Kurve im Punkt (a,b) eine waagrechte Tangente. Zunächst bestimmen wir die partiellen Ableitungen von $f(x,y)$:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 4x^3-2x \\ f_y(x,y) &= 4y^3 \end{aligned}$$

Nach Satz 3.3.3 existiert eine lokale Auflösung $y=h(x)$ bei (a,b), wenn $f_y(a,b)\neq 0$, und in diesem Fall ist $h'(a)=-\frac{f_x(a,b)}{f_y(a,b)}$. Daher $h'(a)=0$ genau dann wenn$f_x(a,b)=0$. Es gilt

$$f_x(x,y)=0 \iff 4x^3-2x=0 \iff x=0\, x=-\frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ oder } x=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Wir haben also drei x–Werte zu betrachten.
Falls $x = 0$, so muss notwendig $y = 0$ sein, damit die $f(x, y) = 0$ erfüllt ist. Im Punkt $(0, 0)$ gilt jedoch $f_y(0, 0) = 0$, und daher ist hier Satz 3.3.3 nicht anwendbar. Am Bild sehen wir jedoch, dass sich im Punkt $(0, 0)$ wiederum zwei Zweige der Kurve kreuzen und wir daher nicht von einer Tangente an C im Punkt $(0, 0)$ sprechen können.
Setzen wir $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ in die Gleichung $f(x, y) = 0$ ein, so erhalten wir

$$y^4 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 0$$

also $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Wir erhalten also zwei Kandidaten $P_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ und $P_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Hierfür ist $f(P_1) = -\frac{1}{\sqrt{2}^3} \neq 0$ und $f(P_2) = \frac{1}{\sqrt{2}^3} \neq 0$, so dass also C nach Satz 3.3.3 in P_1 und P_2 in der Tat waagrechte Tangenten besitzt.
Setzen wir $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ in die Gleichung $f(x, y) = 0$ ein, so erhalten wir wiederum

$$y^4 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 0$$

also auch hier $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Wir erhalten zwei weitere Kandidaten $P_31 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ und $P_4 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Hierfür ist $f(P_3) = -\frac{1}{\sqrt{2}^3} \neq 0$ und $f(P_4) = \frac{1}{\sqrt{2}^3} \neq 0$, so dass also C nach Satz 3.3.3 auch in P_3 und P_4 waagrechte Tangenten besitzt.
Separat betrachten müssen wir die Punkte Q mit $f_y(Q) = 0$. Dort können wir den Satz über implizite Funktionen nicht anwenden, aber dadurch ist noch nicht ausgeschlossen, dass C dort nicht vielleicht doch eine waagrechte Tangente besitzt. Der einzige Punkt Q auf C mit $f_y(Q) = 0$ ist jedoch der Punkt $Q = (0, 0)$, von dem wir schon wissen, dass C dort keine Tangente besitzt.

Komplizierter, schon von der Formulierung her, ist das allgemeine implizite Funktionentheorem. Dazu betrachten wir offene Teilmengen $U \subseteq \mathbb{R}^m$ und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ und setzen

$$U \times V := \{(x, y) |\, x \in U, y \in v\}$$

(wobei also sowohl x als auch y Vektoren mit mehreren Komponenten sind.).
Ist

$$f : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine stetig differenzierbare Abbildung, so schreiben wir

$$f_y(x,y) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

für die partiellen Ableitungen nach den letzten n Variablen $y_1, \ldots, y_n$, und analog $f_x(y,y)$ für die $m \times n$–Matrix der partiellen Ableitungen nach $x_1, \ldots, x_m$.

Satz 3.3.5. *(Satz über implizite Funktionen III) Ist in obiger Situation* $(a,b) \in U \times V$ *eine Punkt mit*

$$\begin{array}{lcl} f(a,b) & = & 0 \\ \det\left(f_y(a,b)\right) & \neq & 0 \end{array}$$

so gibt es eine offene Teilmenge $U_1 \subseteq \mathbb{R}^m$ *und eine stetig differenzierbare Funktion* $h : U_1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$*, so dass gilt:*

- $h(a) = b$.
- $f(x, h(x)) = 0$ *für alle* $x \in U_1$.
- *Nahe bei* (a,b) *gilt für alle* (x,y) *mit* $f(x,y) = 0$ *schon* $y = h(x)$.
- $h(x)$ *ist stetig differenzierbar in* a *mit Jakobi–Matrix*

$$J_h(a) = -\left(f_y(a,b)\right)^{-1} \cdot f_x(a,b)$$

Der Beweis des Satzes kann mit Hilfe eines höherdimensionalen Fixpunktsatzes geführt werden. Ein relativ elementarer Beweis, in dem die notwendigen Beweisschritte aus dem Fixpunktsatz direkt mit eingearbeitet sind, findet sich bei *Forster, Analysis 2*, § 8.

Mit einem ähnlichen Thema beschäftigt sich der folgende Satz:

Satz 3.3.6. *(Satz von der lokalen Umkehrbarkeit) Es sei* $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen,* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *eine stetig differenzierbare Funktion und* $a \in D$ *ein Punkt mit* $\det(D(f)(a)) \neq 0$. *Dann gibt es eine Umgebung* U *von* a *und eine Umgebung* V *von* $b = f(a)$ *sowie eine stetig differenzierbare Funktion* $g : V \longrightarrow U$ *mit*

- *$g(f(x)) = x$ für alle $x \in U$.*
- *$f(g(y)) = y$ für alle $y \in V$.*

Dabei gilt

$$D(g)(b) = D(f)(a)^{-1}$$

also das totale Differrential von g an der Stelle b ist das Inverse der Matrix $D(f)(a)$.

Bezeichnung:
In der Situation des Satzes sagen wir, f ist lokal in a invertierbar bzw. f ist lokal bei a ein *Diffeomorphismus.*

Beweisskizze::
Wir betrachten dazu die Abbildung

$$F(x, y) = x - f(y)$$

in $2n$–Variablen $x_1, \ldots, x_n$ und $y_1, \ldots, y_n$. Dann gilt hierfür

$$F(a, b) = 0, \qquad \det(F_y(a, b)) \neq 0$$

Damit können wir den Satz 3.3.5 über implizite Funktionen anwenden und erhalten eine Abbildung $g(x)$ mit

$$F(x, g(x)) = 0$$

also

$$x = f(g(x))$$

Die Details des Nachweises, dass es sich hier tatsächlich um eine lokale Umkehrabbidung handelt, überlassen wir dem Leser.

Bemerkung 3.3.4. Im Fall $n = 1$ haben wir diese Aussage schon in der Analysis einer Veränderlichen kennengelernt.

Beispiel 3.3.7. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f(r, \varphi) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$$

Dann gilt

$$D(f)(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

also

$$\det\left(D(f)(r,\varphi)\right) = r \cdot \left(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\right) = r \neq 0$$

falls $r \neq 0$. Damit ist f in jedem Punkt (r,φ) mit $r \neq 0$ lokal invertierbar, und für die lokale inverse Abbildung g gilt

$$D(g)(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\frac{1}{r}\sin(\varphi) & \frac{1}{r}\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Beachten Sie dabei, dass f nicht global invertierbar ist (da etwa $f(r,\varphi) = f(r,\varphi+2\pi)$.
Die Funktion f beschreibt die Umrechnung von Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten.

Beispiel 3.3.8. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x,y) = (x^3 + y^4, x^2 - 4y)$$

Dann gilt

$$D(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 & 4y^3 \\ 2x & -4 \end{pmatrix}$$

Damit gilt

$$\det\left(D(f)(x,y)\right) = -12x^2 - 8xy^3 = -4x(3x + 2y^3)$$

Also ist $\det\left(D(f)(x,y)\right) \neq 0$, wenn $x \neq 0$ und $x \neq -\frac{2}{3}y^3$. Speziell ist f lokal invertierbar bei $(1,1)$ mit $f(1,1) = (2,-3)$, und für die lokale Umkehrfunktion g gilt

$$D(g)(2,-3) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} & -\frac{3}{20} \end{pmatrix}$$

Eine wichtige Anwendung der Differenzierbarkeit war die Bestimmung von Extrempunkten einer Funktion. Die Frage nach Extremwerten können wir uns auch im Höherdimensionalen stellen. Dazu betrachten wir eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und einen Punkt $a \in D$.

Definition 3.3.1. Die Funktion f hat ein relatives **Maximum** in a, wenn es eine Umgebung U von a gibt mit

$$f(x) \leq f(a) \qquad \text{für alle } x \in U$$

und f hat ein relatives **Minimum** in a, wenn es eine Umgebung U von a gibt mit

$$f(x) \geq f(a) \qquad \text{für alle } x \in U$$

Beispiel 3.3.9. Die Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ hat ersichtlich ein relatives Minimum im Punkt $P = (0, 0)$

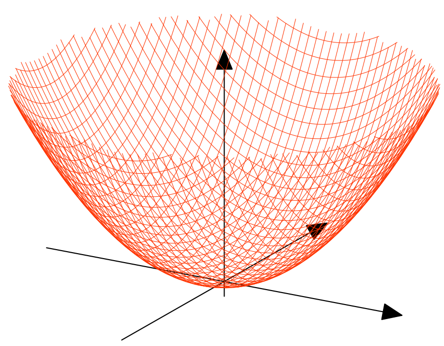


Abbildung 3.12: Paraboloid

Für diese Funktion gilt nämlich sicherlich

$$f(x, y) \geq 0 = f(0, 0) \qquad \text{für alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

und damit hat f sogar ein globales Minimum in $(0, 0)$. Gibt es aber noch weitere lokale Extrema der Funktion f oder ist $(0, 0)$ das einzige? Der Graph der Funktion deutet darauf hin, dass es keinen weiteren lokalen Extremalpunkte von f gibt, allerdings müssen wir das auch noch exakt nachweisen.

Wie im Eindimensionalen erhalten wir aus der Differentialrechnung eine notwendige Bedingung für ein Extremum

Satz 3.3.7. *Ist f stetig differenzierbar und hat f im Punkt a ein relatives Extremum, so gilt*

$$\operatorname{grad}(f)(a) = 0$$

also

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, n$$

Beweis: U m die Notation zu vereinfachen, beschränken wir uns auf den Fall $n = 2$. Der allgemeine Fall ist eine technische Übung, die dem Leser überlassen bleibt.
Hat $f(x, y)$ ein Maximum im Punkt (a, b), so gilt sicherlich auch

- $h_a(y) = f(a, y)$ hat ein Maximum in b.
- $g_b(x) = f(x, b)$ hat ein Maximum in a.

Damit muss notwendigerweise gelten

$$h_a'(b) = 0, \quad g_b'(a) = 0$$

also, nach Definition

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$$

Beispiel 3.3.10. Für die Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ aus Beispiel 3.3.9 gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$$

also

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

Damit ist $(0, 0)$ der einzige mögliche Kandidat für ein lokales Extremum. Wie wir in Beispiel 3.3.9 schon gesehen haben, befindet sich dort auch ein (lokales und globales) Minimum. Nun haben wir auch nachgewiesen, dass es keinen andere Extremalpunkt mehr geben kann, da es keinen weiteren Punkt gibt, an dem beide partielle Ableitungen verschwinden.

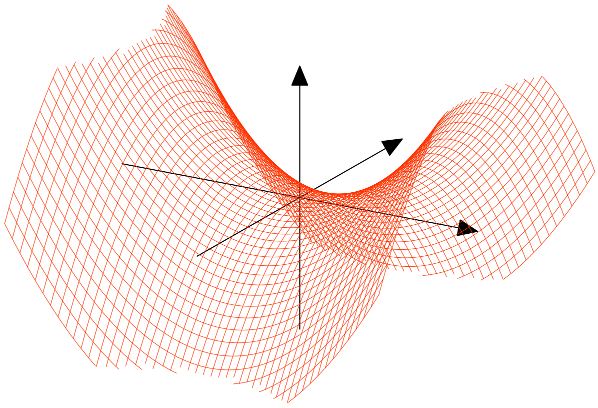
Beispiel 3.3.11. Wir betrachten die Funktion $f(x, y) = x^2 - y^2$. Hierfür gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y$$

also

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

Trotzdem hat f kein Extremum in $(0, 0)$, wie das folgende Bild zeigt



$z = x^2 - y^2$

Abbildung 3.13: Sattelfläche

Auch im Eindimensionalen war das Verschwinden der ersten Ableitung nur ein notwendiges Kriterium. In vielen Fällen half hier die Betrachtung der zweiten Ableitung. Die zweiten partiellen Ableitungen können auch im Höherdimensionalen herangezogen werden. Wir formulieren das folgende Kriterium nur im Zweidimensionalen, da die allgemeine Version technisch kompliziert und mit den uns zur Verfügung stehenden Mitteln kaum zu behandeln ist (vergleiche etwa: O. Forster, *Analysis II* § 7).

Satz 3.3.8. *Wir betrachten eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f(x, y)$ mit einem offenen Definitionsbereich D_f und einen Punkt $(a, b) \in D_f$, und wir nehmen an, dass*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$$

und

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(a,b) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(a,b) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right)^2 > 0$$

1. *Ist* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(a,b) < 0$, *so hat* f *in* (a,b) *ein lokales Maximum.*

2. *Ist* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(a,b) > 0$, *so hat* f *in* (a,b) *ein lokales Minimum.*

Auch in dieser Version ist der Nachweis des Satzes schon kompliziert und aufwändig und erfordert unsere Kenntnisse aus der Analysis einer Variablen und aus der linearen Algebra. Zur Vorbereitung werden einige Hilfsaussagen benötigt. Wir beginnen mit einer speziellen zweidimensionalen Version der Taylorformel

Lemma 3.3.9. *Für jeden Punkt* (x,y) *nahe bei* (a,b) *gibt es ein* $t \in [0,1]$ *so dass*

$$\begin{aligned} f(x,y) \quad = \quad & f(a,b) + \tfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \tfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) \\ & + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(a,b)(x-a)^2 + \tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)(x-a)(y-b) \\ & \qquad + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(a,b)(y-a)^2 \\ & + R(x,y)\left((x-a)^2 + (y-b)^2\right) \end{aligned}$$

wobei $R(x,y)$ *eine Funktion mit* $\lim\limits_{(x,y)\to 0} R(x,y) = 0$ *ist.*

Beweis von 3.3.9. Zur Vereinfachung der Notation nehmen wir an, dass $(a,b) = (0,0)$. Der allgemeine Beweis lässt sich auf diesen Spezialfall zurückführen oder (mit etwas mehr Schreibaufwand) analog behandeln. Wir halten (x,y) fest und nehmen an, dass (x,y) so nahe bei $(0,0)$ ist, dass für alle $t \in [0,1]$ der Punkt (tx,ty) in D_f liegt, und wir betrachten die Hilfsfunktion

$$h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h(t) = f(tx,ty)$$

Dann ist h zweimal stetig differenzierbar und wir können den Satz von Taylor in einer Variable anwenden und erhalten

$$h(1) = h(0) + h'(0)(1-0) + \frac{1}{2}h''(t)(1-0)^2$$

für ein geeignetes $t \in [0,1]$. Aus der Kettenregel in der Form von Bemerkung 3.2.4 aus Abschnitt 3.2 und aus Satz 3.1.8 erhalten wir

$$\begin{aligned} h'(t) \quad &= \quad \tfrac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) \cdot x + \tfrac{\partial f}{\partial y}(tx,ty) \cdot y \\ h''(t) \quad &= \quad \tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(tx,ty) \cdot x^2 + 2\tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(tx,ty) \cdot x \cdot y \\ & \qquad + \tfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(tx,ty) \cdot y^2 \end{aligned}$$

Da $h(0) = f(0,0)$ und $h(1) = f(x,y)$ schreibt sich unser Ausdruck also als

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) + \tfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) \cdot x + \tfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) \cdot y \\ &\quad + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(tx,ty) \cdot x^2 + \tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(tx,ty) \cdot x \cdot y \\ &\quad + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(tx,ty) \cdot y^2 \end{aligned}$$

Nun ist aber f nach Voraussetzung zweimal stetig differenzierbar, und wir erhalten daher aus der Stetigkeit der zweiten partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(tx,ty) &= \tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(0,0) + R_1(x,y) \\ \tfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(tx,ty) &= \tfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(0,0) + R_2(x,y) \\ \tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(tx,ty) &= \tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(0,0) + R_3(x,y) \end{aligned}$$

wobei jeweils $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} R_i(x,y) = 0$ gilt.
Setzen wir jetzt

$$R(x,y) = \begin{cases} \frac{\frac{1}{2}R_1(x,y)\cdot x^2 + R_2(x,y)\cdot x \cdot y + \frac{1}{2}R_3(x,y)\cdot y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

so gilt hierfür

$$|R(x,y)| \leq \frac{1}{2}\left(|R_1(x,y)| + |R_2(x,y)| + |R_3(x,y)|\right)$$

(wobei wir hier ausgenutzt haben, dass aus $(x \pm y)^2 \geq 0$ und den binomischen Formel folgt, dass $2\,|xy| \leq x^2 + y^2$ gilt), also

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} R(x,y) = 0$$

und ausserdem haben wir die $R_i(x,y)$ und $R(x,y)$ so definiert, dass

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) + \tfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) \cdot x + \tfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) \cdot y \\ &\quad + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(0,0) \cdot x^2 + \tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \cdot x \cdot y \\ &\quad + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(0,0) \cdot y^2 \\ &\quad + R(x,y)\,(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

Damit ist die Taylorformel bewiesen.

Zur Vereinfachung der Notation setzen wir nun

$$\begin{array}{rcl} c & = & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(a,b) \\ d & = & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \\ e & = & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(a,b) \end{array}$$

und betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} c & d \\ d & e \end{pmatrix}$$

Speziell ist also A eine symmetrische Matrix. Wir wissen daher schon, dass A diagonalisierbar ist. Ferner erhalten wir

Lemma 3.3.10. *Falls $c < 0$ und $\det \left(\begin{smallmatrix} c & d \\ d & e \end{smallmatrix} \right) = ce - d^2 > 0$, so hat A zwei negative Eigenwerte.*

Beweis von 3.3.10. Wir betrachten das charakteristische Polynom

$$\begin{array}{rcl} P_A(\lambda) & = & \det(\lambda \cdot E_2 - A) \\ & = & \det \begin{pmatrix} \lambda - c & -d \\ -d & \lambda - e \end{pmatrix} \\ & = & (\lambda - c)(\lambda - e) - d^2 \\ & = & \lambda^2 - (c+e)\lambda + ec - d^2 \end{array}$$

von A und erhalten als Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = \frac{c + e \pm \sqrt{(c+e)^2 - 4ec + 4d^2}}{2} = \frac{c + e \pm \sqrt{(c-e)^2 + 4d^2}}{2}$$

also

$$\lambda_1 = \frac{c + e - \sqrt{(c-e)^2 + 4d^2}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{c + e + \sqrt{(c-e)^2 + 4d^2}}{2}$$

Nun ist nach Voraussetzung $c < 0$. Aus $ec - d^2 > 0$ und $c < 0$ folgt ausserdem, dass auch $e < \frac{d^2}{c} \leq 0$ ist. Damit ist sicherlich $\lambda_1 < 0$. Zur genaueren Analyse von λ_2 nutzen wir aus, dass nach Voraussetzung $d^2 < ce$, so dass also

$$\begin{array}{rcl} (c-e)^2 + 4d^2 & = & c^2 - 2ec + e^2 + 4d^2 \\ & < & c^2 - 2ec + e^2 + 4ec \\ & = & c^2 + 2ec + e^2 \\ & = & (c+e)^2 \end{array}$$

woraus folgt, dass

$$\sqrt{(c-e)^2+4d^2} < \sqrt{(c+e)^2} = |c+e|$$

Hieraus wiederum erhalten wir, dass auch $\lambda_2 < 0$.

Lemma 3.3.11. *Die folgenden Ausagen sind äquivalent:*

1. $v_1^2 c + 2v_1v_2 d + v_2^2 e < 0$ *für alle* $(v_1, v_2) \neq (0,0)$.
2. $c < 0$ *und* $\det\left(\begin{smallmatrix} c & d \\ d & e \end{smallmatrix}\right) = ce - d^2 > 0$.
3. *Es gibt eine Zahl* $K < 0$ *mit* $v_1^2 c + 2v_1v_2 d + v_2^2 e \leq K(v_1^2 + v_2^2)$ *für alle Tupel* $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$.

Beweis von 3.3.11 Wir nehmen an, dass Situation (1) gegeben ist.
Wählen wir speziell $v_1 = 1$, $v_2 = 0$, so folgt auf jeden Fall $c < 0$. Analog erhalten wir aus der Betrachtung von $v_1 = 0$ und $v_2 = 1$, dass $e < 0$. Wir beweisen mit Widerspruch und nehmen an, dass $c \cdot e - d^2 \leq 0$, also $d^2 \geq c \cdot e$. Falls $d \geq 0$ bedeutet das $d \geq \sqrt{ce} \geq 0$. Setzen wir nun $v_1 = \sqrt{-e}$ und $v_2 = \sqrt{-c}$, so erhalten wir

$$v_1^2 c + 2v_1v_2 d + v_2^2 e = c \cdot e + 2\sqrt{ce} \cdot d + e \cdot c \geq 4c \cdot e \geq 0$$

eine Widerspruch. Ist $d < 0$, so ist $d \leq -\sqrt{ce}$. Setzen wir $v_1 = \sqrt{-e}$ und $v_2 = -\sqrt{-c}$ so erhalten wir analog

$$v_1^2 c + 2v_1v_2 d + v_2^2 e = c \cdot e - 2\sqrt{ce} \cdot d + e \cdot c \geq 2c \cdot e - 2c \cdot e \geq 0$$

ebenfalls ein Widerspruch.
Wir betrachten nun die Voraussetzungen in (3). Nach Lemma 3.3.10 folgt aus ihnen, dass die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} c & d \\ d & e \end{smallmatrix}\right)$ zwei negative Eigenwerte λ_1 und λ_2 hat. Da A symmetrisch ist, wissen wir aus der linearen Algebra, dass wir A mit einer orthogonalen Matrix diagonalisieren können, dass wir also zwei Vektoren $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ in $\mathbb{R}^2$ finden, die eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$ bilden, und so dass für die Matrix $U = (\overrightarrow{u_1}\,\overrightarrow{u_2})$ mit den Spaltenvektoren $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ gilt

$$U^T \cdot A \cdot U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Schreiben wir

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

und

$$\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = U^T \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

so ist $w_1^2 + w_2^2 = v_1^2 + v_2^2$. Das können wir entweder direkt nachrechnen oder aus der Tatsache, dass, wie wir in der lineaeren Algebra gelernt haben, U^T eine Isometrie ist (also $|U^T \cdot \overrightarrow{v}| = |\overrightarrow{v}|$ für jeden Vektor $\overrightarrow{v}$ gilt), ableiten. Damit ist

$$\begin{aligned}
v_1^2 c + 2v_1v_2d + v_2^2 e &= (v_1\ v_2) \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ d & e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\
&= \overrightarrow{v}^T \cdot A \cdot \overrightarrow{v} \\
&= \overrightarrow{v}^T \cdot U \cdot U^T \cdot A \cdot U \cdot U^T \cdot \overrightarrow{v} \\
&= \overrightarrow{w}^T \cdot U^T \cdot A \cdot U \cdot \overrightarrow{w} \\
&= ((w_1\, w_2) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \\
&= \lambda_1 w_1^2 + \lambda_2 w_2^2
\end{aligned}$$

Nun wissen wir aus Lemma 3.3.10, dass $\lambda_1 < 0$ und $\lambda_2 < 0$. Ist etwa $\lambda_1 \leq \lambda_2$, so folgt

$$\begin{aligned}
v_1^2 c + 2v_1v_2d + v_2^2 e &< \lambda_1 w_1^2 + \lambda_2 w_2^2 \\
&\leq \lambda_2 (w_1^2 + w_2^2) \\
&= \lambda_2 (v_1^2 + v_2^2)
\end{aligned}$$

und wir können in diesem Fall $K = \lambda_2$ setzen. Analog behandeln wir den Fall $\lambda_2 < \lambda_1$ und wählen dann $K = \lambda_1$. Insgesamt haben wir damit (3) gezeigt. Aus (3) folgt ganz offensichtlich (1).

Damit haben wir endlich die Vorbereitungen abgeschlossen

Beweis von Satz 3.3.8 Wir betrachten die Situation (1). Nach Lemma 3.3.9 können wir schreiben

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= f(a,b) + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(a,b)(x-a)^2 + \tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)(x-a)(y-b) \\
&\qquad + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(a,b)(y-a)^2 \\
&\quad + R(x,y)\,((x-a)^2 + (y-b)^2)
\end{aligned}$$

mit $\lim\limits_{(x,y)\to 0} R(x,y) = 0$, wobei wir schon ausgenutzt haben, dass

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$$

Nun können wir Lemma 3.3.11 mit $v_1 = x - a$ und $v_2 = y - b$ anwenden und finden ein $K < 0$ mit

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(a,b)(x-a)^2 + \tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)(x-a)(y-b) \;&+\; \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(a,b)(y-a)^2 \\ &\leq\; K\left((x-a)^2 + (y-b)^2\right) \end{aligned}$$

Da $\lim\limits_{(x,y)\to 0} R(x,y) = 0$ und $K < 0$, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$R(x,y) > K \quad \text{für alle } (x,y) \text{ mit } (x-a)^2 + (y-b)^2 < \delta$$

und daher gilt für alle diese (x,y), wenn wir jetzt alle Teile zusammensetzen

$$f(x,y) \leq f(a,b)$$

wie gewünscht.
In der Situation von (2) gehen wir ähnlich vor. Dabei ist zu beachten, dass unter diesen Voraussetzung gilt, dass die Matrix A in Lemma 3.3.10 zwei positive Eigenwerte hat, und dass in Lemma 3.3.11 alle < 0 durch > 0 und $\leq$ durch $\geq$ zu ersetzen sind. Die entsprechenden Details überlassen wir dem Leser.

Satz 3.3.8 zeigt, dass die zweiten partiellen Ableitungen nicht nur für sich betrachtet wichtig sind, sondern dass auch ihr Zusammenspiel und ihre Gesamtheit eine Rolle spielt. Das motiviert die folgende Definition.

Definition 3.3.2. Ist $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ (mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen) zweimal stetig differenzierbar in $a \in D$, so heißt

$$H_f(a) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

die **Hessematrix** von f an der Stelle a.

Beispiel 3.3.12. Betrachten wir wieder die Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2$, so gilt hierfür

$$\begin{aligned} \text{grad}(f)(x,y) &= (2x, 2y) \\ H_f(x,y) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Im Punkt $(0,0)$ ist unser Kriterum anwendbar, und daher hat f dort ein relatives Minimum.
Ist dagegen $g(x,y) = x^2 - y^2 - 1$, so gilt hierfür

$$\begin{aligned} \text{grad}(g)(x,y) &= (2x, -2y) \\ H_g(x,y) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit gilt zwar $\text{grad}(f)(0,0) = (0,0)$, aber die Bedingung an die zweite Ableitung ist nicht erfüllt. Beachten Sie aber, dass das noch keine Schlussfolgerung zulässt. Die Bedingungen in Satz 3.3.8 sind nur hinreichend, aber nicht notwendig. Um zu sehen, dass diese Funktion kein lokales Extremum in $(0,0)$ hat, muss die Situation noch genauer analysiert werden. In diesem Fall hilft aber auch die Hessematrix.

In Satz 3.3.8 haben wir den Fall, dass die Hessematrix nur positive oder nur negative Eigenwerte hat, betrachtet. Sind alle Eigenwerte positiv, so ist ein kritischer Punkt ein lokales Minimum, sind alle Eigenwerte negativ, so ist ein kritischer Punkt ein lokales Maximum. Neben dem Fall, in dem ein Eigenwert verschwindet (in diesem Fall ist keine Aussage möglich), bleibt also noch der Fall, dass ein Eigenwert positiv und einer negativ ist. Das ist der Inhalt der folgenden Aussage:

Satz 3.3.12. *Ist die Funktion $f(x,y)$ sei zweimal stetig differenzierbar in (a,b) und gilt*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$$

und

$$\det(H_f(a,b)) < 0$$

so hat f in (a,b) kein lokales Extremum.

Wie wir schon in der Vorbemerkungen erwähnt haben, bedeuten die Voraussetzungen dieses Satzes, dass die Hessematrix von f bei (a,b) einen negativen Eigenwert λ_1 und einen positiven Eigenwert λ_2 hat. Hierzu ist der Beweis von 3.3.10 entsprechend anzupassen. Ist nun $\overrightarrow{v}$ ein Eigenvektor zu λ_1, so rechnen wir nach, dass für

$$f_{\overrightarrow{v}}(t) := f(a + tv_1, b + tv_2)$$

gilt

i) $f'_{\overrightarrow{v}}(0) = 0.$

ii) $f''_{\overrightarrow{v}}(0) < 0$

und ist $\overrightarrow{w}$ ein Eigenvektor zu λ_2, so gilt hierfür

i) $f'_{\overrightarrow{w}}(0) = 0.$

ii) $f''_{\overrightarrow{w}}(0) > 0$

Die Details hierzu überlassen wir dem Leser.
Damit hat $f_{\overrightarrow{v}}$ ein striktes lokales Maximum in 0 und $f_{\overrightarrow{w}}$ ein striktes lokales Minimum in 0, so dass also f selbst weder ein lokales Maximum noch ein lokales Minimum haben kann.

Definition 3.3.3. Ein Punkt (a,b) heißt **Sattelpunkt** von f, wenn es eine Richtung $\overrightarrow{v}$ gibt, so dass $f_{\overrightarrow{v}}(t)$ ein striktes lokales Maximum in 0 hat, und wenn es eine Richtung $\overrightarrow{w}$ gibt, so dass $f_{\overrightarrow{w}}(t)$ ein striktes lokales Minimum in 0 hat

Bemerkung 3.3.5. Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion hat schon dann einen Sattelpunkt in (a,b), wenn

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$$

und wenn die Hessematrix $H_f(a,b)$ einen positiven und einen negativen Eigenwert hat (oder äquivalent, wenn $\det(H(f)(a,b)) < 0$).

Bemerkung 3.3.6. Das Kriterium aus Satz 3.3.8 kann wie folgt auf höhere Dimensionen verallgemeinert werden:
Ist $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar sowie $a = (a_1, \ldots, a_n)$ ein Punkt mit $\operatorname{grad}(f)(a) = (0, \ldots, 0)$, so betrachten wir die Hessematrix $H(f)(a)$ an der Stelle a. Diese Matrix ist symmetrisch und damit (über den reellen Zahlen) diagonalisierbar; insbesondere hat sie also nur reelle Eigenwerte. Dann gilt:

1. Sind alle Eigenwerte von $H(f)(a)$ negativ, so hat f in a ein lokales Maximum.

2. Sind alle Eigenwerte von $H(f)(a)$ positiv, so hat f in a ein lokales Minimum.

3. Hat $H(f)(a)$ sowohl positive als auch negative Eigenwerte, so hat f in a kein lokales Extremum.

Beispiel 3.3.13. Wir untersuchen die Funktion $f(x, y) = x^3 - 24xy + 8y^3$ auf lokale Extrema.
Als Kandidaten für lokale Extrema kommen nur Nullstellen des Gradienten von f in Frage.

$$\operatorname{grad}(f)(x, y) = \big(3x^2 - 24y,\, 24y^2 - 24x\big)$$

Wir haben also die beiden Gleichungen

$$\begin{array}{ccccc} 3x^2 & - & 24y & = & 0 \\ 24y^2 & - & 24x & = & 0 \end{array}$$

zu betrachten. Aus der ersten Gleichung erhalten wir $x^2 = 8y$ und aus der zweiten $y^2 = x$. Hieraus folgt

$$y^4 = 8y$$

und damit $y = 0$ oder $y = 2$. Falls $y = 0$ so auch $x = 0$, und falls $y = 2$ so folgt $x = 4$. Wir erhalten also zwei Kandidaten, die Punkte $P_1 = (0, 0)$ und $P_2 = (4, 2)$.
Die Hessematrix von f hat die Gestalt

$$H(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -24 \\ -24 & 48y \end{pmatrix}$$

also
$$H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -24 \\ -24 & 0 \end{pmatrix}$$
Damit gilt $\det(H(f)(0,0)) = -24^2 < 0$, und daher hat f in $(0,0)$ einen Sattelpunkt und kein lokales Extremum.

$$H(f)(4,2) = \begin{pmatrix} 24 & -24 \\ -24 & 96 \end{pmatrix}$$
Damit gilt $\det(H(f)(4,2)) = 1728 > 0$. Wegen $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(4,2) = 24 > 0$ hat f also in $(4,2)$ ein lokales Minimum.

Bei Funktionen in mehreren Veränderlichen interessieren wir uns oft nicht für lokale oder globale Extrema schlechthin. Oft kommen auch noch Nebenbedingungen ins Spiel.

Beispiel 3.3.14. Aus einem kreisrunden Baumstamm mit Durchmesser 50 cm soll ein Vierkantholz möglichst großen Querschnitts $Q = h \cdot b$ ausgeschnitten werden.

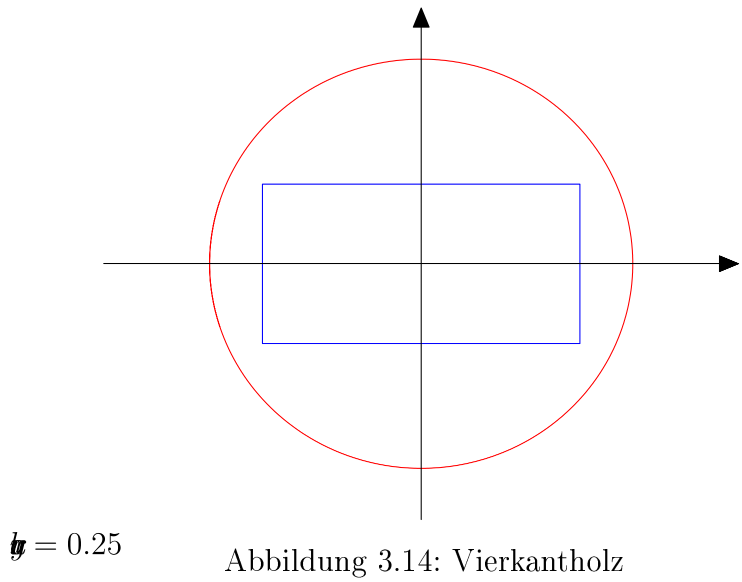


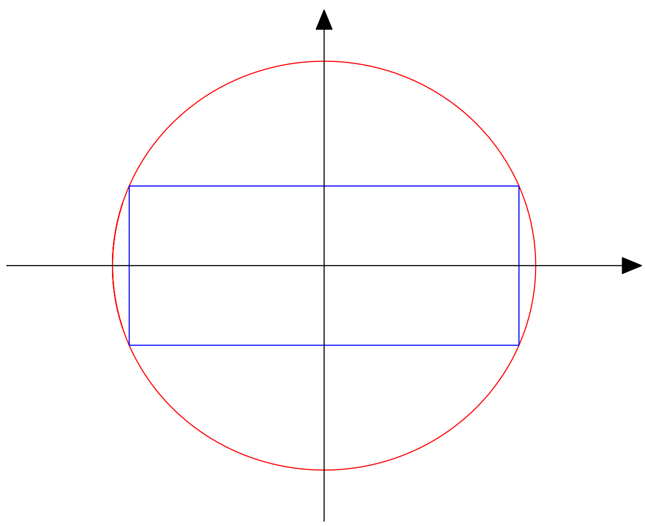
Abbildung 3.14: Vierkantholz

Beispiel 3.3.15. Welche rechteckige Fläche lässt sich maximal mit einer Mauer der Länge $50\,m$ eingrenzen?

Beispiel 3.3.16. Aus einem kugelförmigen Steinblock mit Durchmesser 3m soll ein Quader mit möglichst großen Volumen $V = b \cdot t \cdot h$ gehauen werden.

Beispiel 3.3.17. Um eine Tonne von Produkt A herzustellen werden $50\,l$ Öl benötigt, um eine Tonne von Produkt B herzustellen, werden $80l$ Öl benötigt. Produkt A kann für 900 € pro Tonne verkauf werden, Produkt B für 2000 € pro Tonne. In welcher Kombination sollen A und B produziert werden, wenn insgesamt $10000\,l$ Öl zur Verfügung stehen (und keine anderen Einschränkungen bestehen).

Alle diese Probleme haben gemeinsam, dass ein Maximum unter Nebenbedingungen gesucht wird.
In Beispiel 3.3.14 etwa überlegen wir uns leicht, dass wir immer annehmen können, dass das Vierkantholz achsenparallele Seiten hat und an den vier Ecken bis zum Rand des Baumstammes geht.



$h = 0.25$

Abbildung 3.15: Schnittproblem

Die Umfangslinie des Baumstamms wird beschrieben durch die Gleichung

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{4}$$

die Querschnittsfläche des Vierkantholzes ist gegeben durch $h \cdot b$, wobei h die Höhe und b die Breite des Holzes bezeichnet. Die vier Eckpunkte des

Vierkantholzes haben die Koordinaten

$$\left(\frac{h}{2}, \frac{b}{2}\right), \left(\frac{h}{2}, -\frac{b}{2}\right), \left(-\frac{h}{2}, -\frac{b}{2}\right), \left(-\frac{h}{2}, \frac{b}{2}\right)$$

und diese Eckpunkte liegen auf der Umfangslinie des Baumstamms. Damit haben wir also folgende Aufgabe zu lösen:
Maximiere $h \cdot b$ unter der Nebenbedingung, dass $\sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}$.

Unser Kriterium mit der ersten Ableitung greift hier nicht mehr. Wenden wir es auf die Funktion $f(h, b) = h \cdot b$ an, so liefert es nur einen Kandidaten für einen Extremwert, nämlich $h = 0, b = 0$, aber auch das ist kein Extremum dieser Funktion. Offensichtlich wird hier die Nebenbedingung ausser acht gelassen. Aber auch hier liefert und die Mathematik Hilfsmittel

Wir betrachten nun zwei stetig differenzierbare Funktionen $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definition 3.3.4. Wir sagen, f hat in a ein relatives Maximum unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$, wenn gilt

1. $g(a) = 0$.
2. Für alle x in einer kleinen Umgebung von a mit $g(x) = 0$ ist
$$f(x) \leq f(a).$$

Entsprechend hat f in a ein relatives Minimum unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$, wenn gilt

1. $g(a) = 0$.
2. Für alle x in einer kleinen Umgebung von a mit $g(x) = 0$ ist
$$f(x) \geq f(a).$$

Satz 3.3.13. *(Lagrange–Multiplikator) Ist a eine relatives Maximum oder Minimum von f unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$, und gilt* $\operatorname{grad}(g)(a) \neq 0$, *so gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit*

$$\operatorname{grad}(f)(a) = \lambda \cdot \operatorname{grad}(g)(a)$$

Diese λ heißt Lagrange–Mulitplikator.

Beweis: W ir haben $\mathrm{grad}(g)(a) \neq 0$, als $\frac{\partial g}{\partial x_i}(a) \neq 0$. Wir betrachten nur den Fall, dass $n = 2$ und $\frac{\partial g}{\partial y}(a) \neq 0$ und überlassen dem Leser die Übertragung des Beweises auf den allgemeinen Fall. Für den fraglichen Punkt schreiben wir wieder (a, b). Die Voraussetzungen des Satzes 3.3.4 über implizite Funktionen sind erfüllt und wir finden bei a eine stetig differenzierbare Funktion h mit $g(x, h(x)) = 0$, für die gilt

$$h'(a) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(a,b)}{\frac{\partial g}{\partial y}(a,b)}$$

Dann hat aber nach Voraussetzung die Funktion $F(x) = f(x, h(x))$ einen Extremwert in a und damit muss gelten

$$F'(a) = 0$$

Nach der Kettenregel gilt

$$\begin{aligned} F'(a) &= \tfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) + \tfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) \cdot g'(a) \\ &= \tfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) - \tfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) \cdot \frac{\frac{\partial g}{\partial x}(a,b)}{\frac{\partial g}{\partial y}(a,b)} \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \cdot \frac{\partial g}{\partial y}(a,b) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(a,b) = 0$$

und das bedeutet gerade, dass die beiden Vektoren $\mathrm{grad}(f)(a)$ und $\mathrm{grad}(g)(a)$ linear abhängig sind (Determinantenkriterium), und daher folgt

$$\mathrm{grad}(f)(a) = \lambda \cdot \mathrm{grad}(g)(a)$$

für ein geeignetes λ (da $\mathrm{grad}(g)(a) \neq 0$).

Beispiel 3.3.18. Wir wollen wieder Beispiel 3.3.14 aufgreifen:
Zu maximieren ist die Funktion $f(b, h) = b \cdot h$ unter der Nebenbedingung

$$\sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}$$

Diese Nebenbedingung können wir ein wenig umformulieren und erhalten durch Quadrieren

$$\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

und durch weiteres Vereinfachen

$$h^2 + b^2 - \frac{1}{4} = 0$$

Deshalb betrachten wir $g(h,b) = h^2 + b^2 - \frac{1}{4}$ und maximieren $f(h,b)$ unter der Nebenbedingung $g(h,b) = 0$.

$$\operatorname{grad}(g)(h,b) = (2h, 2b), \quad \operatorname{grad}(f)(h,b) = (b,h)$$

Zu lösen haben wir die Gleichungen

$$b = \lambda 2h$$
$$h = \lambda 2b$$

woraus zunächst $\lambda = \pm\frac{1}{2}$ folgt, also $h = b$ oder $h = -b$. Da wir keine Vierkanthölzer mit negativer Kantenlänge betrachten wollen, bleibt nur $h = b$. Nun müssen wir nochmals die Nebenbedingung

$$h^2 + b^2 = \frac{1}{4}$$

heranziehen. Setzen wir hier $h = b$ ein, so erhalten wir $h = b = \frac{1}{\sqrt{8}}$. Da ist der einzige Kandidat für ein lokales Extremum, und in der Tat haben wir hier ein (lokales und globales) Maximum, wie wir direkt Nachrechnen können. Wir können hier auch Satz 2.3.6 anwenden und argumentieren, dass durch $g(h,b) = 0$ eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ definiert wird, auf der die stetige Funktion f ein Maximum annehmen muss. Da wir nur einen einzigen Kandidaten heirfür gefunden haben, handelt es sich hierbei notwendigerweise um das Maximum.
Beachten Sie, dass wir in diesem Beispiel eigentlich noch zwei weitere Nebenbedingungen zu beachten haben, nämlich $h \geq 0$ und $b \geq 0$. Wir überlassen es dem Leser, sich davon zu überzeugen, dass am "Rand" des positiven Quadranten keine weiteren Maxima liegen.

Beispiel 3.3.19. Wir wollen uns jetzt Beispiel 3.3.16 zuwenden: Wieder überzeugen wir uns direkt, dass wir nur Quader zu betrachten brauchen, deren Seitenflächen parallel zu den Kooridantenebenen sind und deren Eckpunkte auf der Kugeloberfläche liegen. Damit haben die Eckpunkte des Quaders die Koordinaten $(\pm\frac{b}{2}, \pm\frac{t}{2}, \pm\frac{h}{2})$. Die Oberfläche der Steinkugel wird beschrieben durch die Gleichung

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{3}{2}$$

oder äquivalent durch

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{9}{4} = 0$$

Damit müssen die Seitenlängen unseres Quaders also die Beziehung

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{t}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = 0$$

erfüllen, oder äquivalent

$$b^2 + t^2 + h^2 - 9 = 0$$

Damit haben wir folgende Extremwertaufgabe zu lösen:
Maximiere $f(b, t, h) = b \cdot t \cdot h$ unter der Nebenbedingung

$$g(b, t, h) = b^2 + t^2 + h^2 - 9 = 0$$

Beide Funktionen sind stetig differenzierbar mit

$$\operatorname{grad}(f)(b, h, t) = (th, bh, tb)$$

und

$$\operatorname{grad}(g)(b, h, t) = (2b, 2t, 2h)$$

ausserdem gilt für alle Punkte (b, t, h) auf der Kugeloberfläche

$$\operatorname{grad}(g)(b, h, t) \neq (0, 0, 0)$$

Aus der Beziehung

$$(th, bh, tb) = \lambda \cdot (2b, 2t, 2h)$$

erhalten wir zunächst $\lambda = \frac{1}{2}\sqrt[3]{bth}$ und hieraus wieder

$$\pm b = \pm t = \pm h$$

Da wir auch hier negative Lösungen ausschließen, bliebt als Kandidat

$$b = t = h$$

aus der Nebenbedingung

$$b^2 + t^2 + h^2 - 9 = 0$$

erhalten wir

$$b = t = h = \sqrt{3}$$

und dabei handelt es sich wirklich um ein Maximum.
Wie in obigen Beispiel haben wir auch hier noch die Nichtnegativitätsbedingung zu beachten, und auch hier überlassen wir es dem leser, sich davon zu überzeugen, dass keine Maxima am Rand des positiven Quadranten liegen.

Aufgabe 50. Bestimmen Sie die Tangentensteigung der Ellipse

$$3x^2 + 7y^2 = 55$$

im Punkt $P = (-3, 2)$).

Aufgabe 51. Bestimmen Sie die Steigung der Kurve mit Gleichung

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 - xy(x^2 - y^2) - y^2 = 0$$

im Punkt $P = (0, 1)$.

Aufgabe 52. Bestimmen Sie die Tangentialebene an die Fläche

$$3x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 15$$

im Punkt $P = (1, -2, 1)$.

Aufgabe 53. An welchen Punkten ist die Funktion $f(x, y) = (x^2 - y^2, x^2 + y^2)$ lokal invertierbar?
Bestimmen Sie $D(g)(3, 5)$, wenn g die lokale Umkehrfunktion von f bei $(2, 1)$ ist.

Aufgabe 54. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, gegeben durch

$$f(x, y) = (x^3 + xy^2 + y, \sin(xy))$$

lokal invertierbar im Punkt $(0, 1)$ ist mit lokaler Umkehrfunktion g und bestimmen Sie das totale Differential $D(g)(1, 0)$.

Aufgabe 55. Untersuchen Sei die Funktion $f(x, y) = 7 - x^2 - 4x - y^2 + 2y$ auf lokale Extrema.

Aufgabe 56. Untersuchen Sie die Funktion $f(x,y) = (x^2 + 9y^2) \cdot e^{-9x^2-y^2}$ auf lokale Extrema.

Aufgabe 57. Untersuchen Sie die Funktion $f(x,y) = x^4 + 3y^6$ auf lokale Extrema.

Aufgabe 58. Lösen Sie die Extremwertaufgabe mit Nebenbedinung aus Beispiel 3.3.15.

Aufgabe 59. Lösen Sie die Extremwertaufgabe mit Nebenbedinung aus Beispiel 3.3.17.

Aufgabe 60. Berechnen Sie die lokalen Maxima und Minima der Funktion

$$f(x,y) = x^2 - 2xy$$

auf der offenen Kreisscheibe

$$U := \{(x,y) |\, x^2 + y^2 < 1\}$$

Berechnen Sie die lokalen Maxima und Minima der Funktion

$$f(x,y) = x^2 - 2xy$$

auf der abgeschlossenen Kreisscheibe

$$U := \{(x,y) |\, x^2 + y^2 \leq 1\}$$