§ 11 Bestimmte und unbestimmte Integrale

§ 11.1 Grundbegriffe , Hauptsatz

In unseren bisherigen Anwendungen der Differentialrechnung (z.B. Extremwerte, Grenzwerte unbestimmter Formen, Newton - Verfahren) mussten wir zu einer gegebenen Funktion f(x) jeweils die Ableitung f ´(x) bzw. höhere Ableitungen berechnen. Wir kommen jetzt zu Problemen, die die umgekehrte Fragestellung erfordern, nämlich zu einer gegebenen Funktion f ´(x) ein passendes f(x) zu finden.

Def. 11.1 : Ist g(x) auf (a,b) gegeben , so heißt jede Funktion f(x) mit f ´(x) = g(x) für alle $x \in (a,b)$ eine „**Stammfunktion**" oder ein „**unbestimmtes Integral**" von g(x).

Beispiele, Bemerkungen:

1. g(x) = 2x , f(x) = $x^2 + c$ für jedes feste $c \in \mathbb{R}$.
2. g(x) = $1/(1+x^2)$, f(x) = arctan x + c für jedes feste $c \in \mathbb{R}$.
3. g(x) = $1/\sqrt{x}$, f(x) = $2\sqrt{x} + c$ für jedes feste $c \in \mathbb{R}$.
4. Aus jedem Paar einer Funktion f und seiner Ableitung f ´ können wir wie in den Beispielen 1 - 3 ein Beispiel für eine Funktion und eine seiner Stammfunktionen machen. Darum sparen wir uns die Auflistung weiterer Beispiele.

5. Wenn wir zu einer Funktion g eine Stammfunktion kennen, so erhalten wir durch Addition einer Konstanten c wie in den Beispielen 1 - 3 unendlich viele weitere Stammfunktionen.

Der folgende Satz zeigt, dass es außer diesen keine weiteren Stammfunktionen geben kann.

Satz 11.1 : Ist f(x) auf (a,b) Stammfunktion von g(x) , so ist h(x) genau dann Stammfunktion von g(x) , wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt mit h(x) = f(x) + c.

Beweis: wegen „genau dann" sind die folgenden zwei Aussagen zu zeigen:

1. „Ist h(x) = f(x) + c , so ist h(x) Stammfunktion von g(x)" . Das folgt einfach durch Ableiten von h(x).

2. „Ist h(x) Stammfunktion von g(x) , so ist es von der Form h(x) = f(x) + c mit einem geeigneten $c \in \mathbb{R}$." Das lässt sich mit Hilfe des 1. Mittelwertsatzes beweisen.

Unser nächstes Ziel ist die Einführung des Begriffs „bestimmtes Integral". Wir gehen dabei aus von der Frage nach dem Flächeninhalt krummlinig begrenzter Flächen , genauer von der Frage nach dem Inhalt der Fläche F = { (x,y) , $a \le x \le b$, $0 \le y \le f(x)$ } bei gegebener Funktion $f(x) \ge 0$. Als Prüfstein (für Informatiker : „benchmark") legen wir uns drei Beispiele zurecht , deren Flächeninhalt wir schon jetzt kennen und bei denen sich mit einem neuen Verfahren natürlich der bekannte alte Wert ergeben muss:

1. f(x) = c > 0 , $x \in [a,b]$. Die Fläche F ist ein Rechteck mit dem Inhalt $c \cdot (b-a)$.
2. f(x) = $\frac{b}{a}\, x$, $x \in [0,a]$. Die Fläche F ist ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a und b und dem Inhalt $\frac{1}{2}\, ab$.

3. f(x) = $\sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in [-r, r]$, r > 0 fest . Die Fläche F ist ein Halbkreis mit Radius r und dem Flächeninhalt $\frac{1}{2}\pi\, r^2$.

Wir berechnen jetzt den Inhalt des Flächenstücks zwischen der x-Achse, der Parabel und der Geraden x=a, a > 0. Hinweis für Philosophen: man kann darüber streiten, ob diese Fläche a priori einen Inhalt besitzt und wir ihn bloß ausrechnen oder ob der Inhalt erst durch die folgende Rechnung definiert wird. Die Antwort darauf ist aber für uns nicht wirklich von entscheidender Bedeutung. Wir zerlegen das Intervall [0,a] durch die Punkte in n gleich große Teilintervalle.

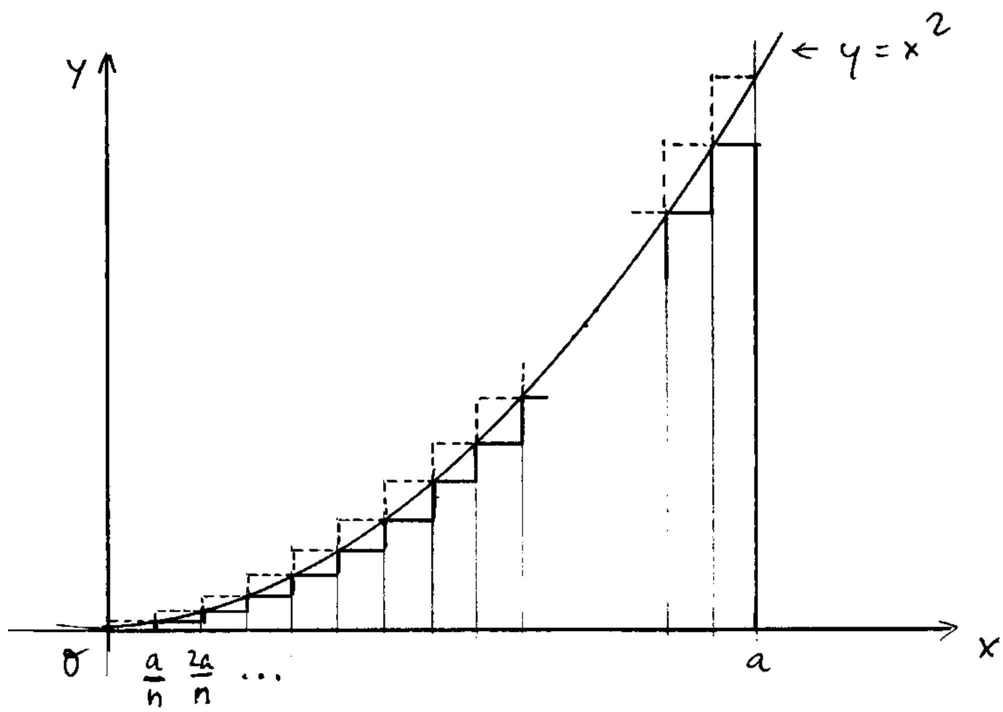

Abbildung 11.1 : Zur Berechnung der Fläche unterhalb der Parabel

Der gesuchte Flächeninhalt F lässt sich nach oben und nach unten durch die Inhalte der aus Rechtecken zusammengesetzten „Treppen"-Flächen F_{oben} bzw. F_{unten} abschätzen (s. Abbildung 11.1):

$$F_{unten} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a}{n} x_k^2 \le F \le \sum_{k=1}^{n} \frac{a}{n} x_k^2 = F_{oben} \ .$$

Wir setzen $x_k = {}^{ak}\!/_{n}$ ein und werten die Summe F_{oben} aus:

$$F_{oben} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a}{n} \left(\frac{ak}{n} \right)^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{a^3 k^2}{n^3} = \frac{a^3}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{a^3}{n^3} \cdot \frac{1}{3} n(n+1)\left(n+\tfrac{1}{2}\right) \ .$$

Hierbei haben wir eine aus § 3 bekannte Summenformel ausgenutzt. In der Summe F_{unten} läuft k statt bis n nur bis n -1. Daher ergibt sich entsprechend :

$$F_{unten} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a}{n} \left(\frac{ak}{n} \right)^2 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a^3 k^2}{n^3} = \frac{a^3}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{a^3}{n^3} \cdot \frac{1}{3} (n-1) n \left(n-\tfrac{1}{2}\right)$$ und für F die

Ungleichung

$$\frac{a^3}{n^3} \cdot \frac{1}{3} (n-1) n \left(n-\tfrac{1}{2}\right) \le F \le \frac{a^3}{n^3} \cdot \frac{1}{3} n(n+1)\left(n+\tfrac{1}{2}\right)$$. Die einzige Zahl F , die diese

Ungleichung für jedes $n \in \mathbb{N}$ erfüllt , ist der gemeinsame Grenzwert von oberer und unterer Abschätzung , nämlich $F = \frac{a^3}{3}$.

Die Tatsache, dass wir in diesem Beispiel die Fläche erfolgreich berechnen konnten, beruht auf dem Zusammentreffen zweier „Glücksfälle“ :

1. Die Funktion $f(x) = x^2$ ist auf $[0, a]$ monoton wachsend. Daher konnten wir bei F_{oben} immer mit dem Funktionswert am rechten Rand und bei F_{unten} immer mit dem Funktionswert am linken Rand des Teilrechtecks rechnen.

2. wir hatten eine passende Summenformel zur exakten Berechnung von F_{oben} und F_{unten} zur Verfügung.

Mit diesem besonderen Glück können wir im allgemeinen nicht rechnen. Die Rechnung kann aber als Vorbild für die folgende Definition 11.2 des bestimmten Integrals dienen, die wir durch folgende Bezeichnungen vorbereiten:

Def. 11.1 : Jede Menge $Z = \{ x_k , k = 0 , \dots , n\}$ mit $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ heißt eine „**Zerlegung**“ des Intervalls [a,b]. Die größte der Zahlen $| x_k - x_{k-1} |$, $k = 1, \dots , n$, heißt der „**Feinheitsgrad**“ der Zerlegung Z und wird mit $\|Z\|$ bezeichnet.

Ist f auf [a,b] definiert, so heißt jede Summe der Form $S_Z = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ mit irgendwelchen $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ eine „**Zerlegungssumme**“ oder „**Riemannsche Summe**“ (für f in [a,b]) .

Def. 11.2 : Eine auf [a,b] beschränkte Funktion heißt dort „**(Riemann-) - integrierbar**“, wenn es eine Zahl $I \in \mathbb{R}$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon)$ gibt mit der Eigenschaft :
$| S_Z - I | < \varepsilon$ für jede Zerlegung Z mit $\|Z\| < \delta$ und jede Wahl der Zwischenpunkte ξ_k .
Die Zahl **I** heißt „**bestimmtes (Riemannsches) Integral**“ (von f über dem Intervall [a,b]) .

Wir schreiben für I das Symbol $I = \int_a^b f(x)dx$.

Hierbei nennt man a, b untere bzw. obere „**Integrationsgrenze**“, [a,b] das „**Integrationsintervall**“ , die Funktion f den „**Integranden**“ und x die „**Integrationsvariable**“.

In den wenigsten Fällen ist die Def. 11.2 geeignet, ein Integral wirklich auszurechnen wie im folgenden Beispiel (vgl. „benchmark 1“ vom Anfang dieses Paragraphen)

Beispiel: $f(x) = c$, $x \in [a,b]$. Mit den oben eingeführten Bezeichnungen ist

$$S_Z = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} c \cdot (x_k - x_{k-1}) = c \cdot \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = c \cdot (x_n - x_0) = c \cdot (b-a)$$

für jede Zerlegung Z und jede Wahl der Zwischenpunkte ξ_k . Also ist nach Def. 11.2

$I = c \cdot (b-a)$, d.h. . $I = \int_a^b c \cdot dx = c \cdot (b - a)$.

In den meisten anderen Fällen ist Def. 11.2 nicht das geeignetste Mittel, ein Integral auch auszurechnen. Wir sammeln darum im folgenden Eigenschaften und Sätze, deren Anwendung die praktische Berechnung von Integralen unterstützen:

Bemerkungen, Ergänzungen , Eigenschaften des bestimmten Integrals:

1. $\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$ für jede Konstante $c \in \mathbb{R}$. (in Worten: ist f(x) auf [a,b] integrierbar, so ist auch c· f(x) integrierbar und es gilt die Gleichung ...).

2. $\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ für jedes c mit $a < c < b$.

4. Die Gleichung in 3. lässt sich so deuten, dass man die Integrationsintervalle „aneinanderhängen“ darf.
Definieren wir noch $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ für $b < a$ und $\int_a^a f(x)dx = 0$, so gilt die Gleichung in 3. nicht nur für $a < c < b$, sondern für jede Lage der Punkte a, b, c zueinander.

5. Die Aussagen unter 1. bis 3. lassen sich mit Hilfe der Def. 11.2 und bekannter Eigenschaften von Summen beweisen. Wir sparen uns diese Beweise, da sie zum Verständnis nicht unbedingt erforderlich sind.

6. Die Bezeichnung der Integrationsvariablen ist wie die Bezeichnung von Summationsbuchstaben beliebig:
$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(ü)dü$ = ... (Umlaute sind erlaubt, aber eher unüblich).

7. Ist $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$, so stellt $\int_a^b f(x)dx$ den Flächeninhalt von
$\{ (x,y) , a \leq x \leq b , 0 \leq y \leq f(x)\}$ dar, wie wir aus der Einführung wissen. Bei Def. 11.2 haben wir nicht vorausgesetzt, dass f immer ≥ 0 ist. Nimmt f(x) beide Vorzeichen an , so ist
$\int_a^b f(x)dx$ der „Saldo“ der positiv gezählten Flächenanteile oberhalb und der negativ gezählten Flächenanteile unterhalb der x-Achse (vgl. Abbildung 11. 2):

$$\int_a^b f(x)dx = F_1 - F_2 \ .$$

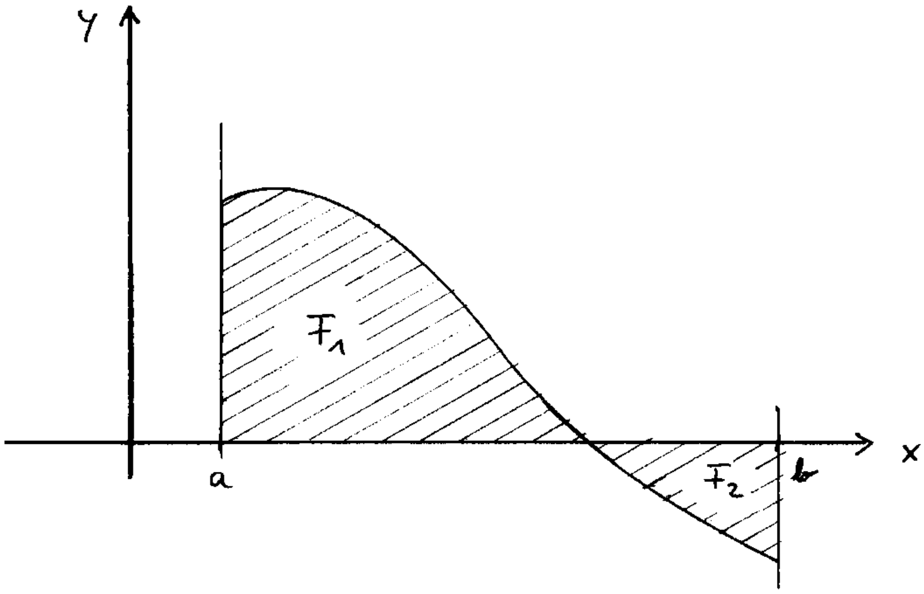

Abbildung 11.2 : Zu Bemerkung 7: Flächenanteile oberhalb und unterhalb der x-Achse

8. Das Integral einer ungeraden Funktion f über ein zu 0 symmetrisches Intervall ist = 0:

   f(-x) = - f(x) für alle $x \in [-a, a] \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$. (Beweis ergibt sich aus 7.)

9. Ähnlich wie bei 8. gilt für gerade Funktionen: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2 \int_{0}^{a} f(x)dx$.

10. Wie „Stetigkeit“ , „Differenzierbarkeit“ ist auch „Integrierbarkeit“ einer Funktion eine Eigenschaft, die eine Funktion haben kann oder auch nicht haben kann. Hinreichende Eigenschaften für die Integrierbarkeit:

    10.1: Ist f monoton auf [a,b] , so ist f dort integrierbar .
    10.2: Ist f stetig auf [a,b] , so ist f dort integrierbar .

    Der Beweis zu 10.1 lässt sich mit ein paar Zusatzüberlegungen mit Hilfe von Def. 11.2 führen; der Beweis zu 10.2 erfordert einen Umweg über die sog. „gleichmäßige Stetigkeit“. Wir können hier auf beide Beweise verzichten.

Zum weiteren Ausbau der Theorie benötigen wir zwei Sätze, die es uns ermöglichen werden , einen wichtigen Zusammenhang zwischen bestimmten und unbestimmten Integralen aufzuzeigen (Ziel: Satz 11.4 , Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung).

Satz 11.2 : Sei f(x) integrierbar über [a,b] , $m \le f(x) \le M$ für alle $x \in [a,b]$. Dann gilt die Ungleichung

$$m(b - a) \le \int_{a}^{b} f(x)dx \le M(b - a).$$

Beweis(idee) : Nutze Def. 11.2 und beachte, dass die entsprechende Ungleichung für jede Zerlegungssumme gilt.

Satz 11.3 (1. Mittelwertsatz der Integralrechnung) : Sei f stetig auf [a,b] . Dann gibt es ein

$\xi \in [a,b]$ mit der Eigenschaft : $\int_{a}^{b} f(x)dx = f(\xi) \cdot (b - a)$.

Beweis: nach dem „Zwischenwertsatz“ nimmt eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall ihr Maximum und ihr Minimum an , etwa M und m. $\Rightarrow$ $m \le f(x) \le M$ für alle $x \in [a,b]$. Aus Satz 11.2 $\Rightarrow$

$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \quad \Rightarrow \quad m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$. Da jede Zahl zwischen Minimum und Maximum einer auf [a,b] stetigen Funktion nach dem Zwischenwertsatz als Funktionswert angenommen wird, gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx = f(\xi)\cdot(b-a)$.

q.e.d.

Der angekündigte Zusammenhang zwischen bestimmtem und unbestimmtem Integral zeigt sich , wenn wir ein bestimmtes Integral einer auf [a, b] stetigen Funktion f als Funktion der oberen Integrationsgrenze auffassen und diese Funktion differenzieren. Sei dazu $I(x) := \int_a^x f(t)dt$ und $x_0 \in [a,b]$. Um $I'(x_0)$ zu berechnen , formen wir den entsprechenden Differenzenquotienten um:

$$\frac{I(x_0+h)-I(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\Big(\int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt\Big) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt = \frac{1}{h}\cdot h\cdot f(x_0+\vartheta\cdot h) = f(x_0+\vartheta\cdot h) \text{ für ein } \vartheta\in[0,1] .$$

Hierbei haben wir Eigenschaft 3. (s. oben, „Aneinanderhängen von Integrationsintervallen“) und Satz 11.3 ausgenutzt. Da f stetig ist , strebt $f(x_0+\vartheta\cdot h)$ für $h \to 0$ gegen $f(x_0)$, also ist

$I'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{I(x_0+h)-I(x_0)}{h} = f(x_0)$. Anders ausgedrückt: $I(x)$ ist eine Stammfunktion von $f(x)$. Ist $F(x)$ irgendeine (andere) Stammfunktion , so wissen wir nach Satz 11.1 , dass es eine Konstante c gibt mit der Eigenschaft $I(x) = F(x) + c$ für alle $x \in [a,b]$. Wir setzen nacheinander $x = a$ und $x = b$ und erhalten für

$x = a$: $I(a) = 0 = F(a) + c \quad \Rightarrow \quad c = -F(a)$,

$x = b$: $I(b) = \int_a^b f(t)dt = F(b) + c \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$. Wir fassen unsere Ergebnisse zusammen in

Satz 11.4 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) : Sei f stetig auf [a, b] , F eine beliebige Stammfunktion von f.

Dann gilt $$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) .$$

Bemerkungen, Beispiele :

1. Satz 11.4 ist das wichtigste Hilfsmittel zur praktischen Berechnung von Integralen. Leider ist es nicht in jedem Fall möglich , zu einer gegebenen elementaren Funktion auch eine elementare Stammfunktion zu finden. Beispiele hierzu hat zuerst J. Liouville um 1830 gefunden. Zu diesem Typ von Funktionen gehören z.B. $f(x) = 1/\ln(x)$, $f(x) = e^{-x^2}$ oder $f(x) = 1/\sin(x)$. In solchen Fällen helfen Näherungsverfahren . Aus der Existenz solcher Funktionen kann man schließen , dass es keinen kompletten Satz von Rechenregeln für das Auffinden einer Stammfunktion geben kann , wie es ihn für das Differenzieren gibt. Man weiß also nicht von vornherein , ob man zu einer gegebenen elementaren Funktion eine elementare Stammfunktion finden wird. Hier helfen nur Übung und Erfahrung.

2. $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$ fest , a, b beliebig. Stammfunktion : $F(x) = c\cdot x$, $\Rightarrow \int_a^b c\cdot dx = [c\cdot x]_a^b = c\cdot b - c\cdot a = c\cdot(b-a)$. Das bestätigt noch einmal benchmark 1.

3. $f(x) = \frac{b}{a}\cdot x$, $x \in [0,a]$, $a > 0$. $F(x) = \frac{b}{2a}x^2$, $\Rightarrow \int_0^a \frac{b}{a}\cdot x dx = \left[\frac{b}{2a}x^2\right]_0^a = \frac{b}{2a}a^2 = \frac{1}{2}a\cdot b$. Das bestätigt benchmark 2 .

4. $f(x) = x^2$, $x \in [0,a]$. $F(x) = \frac{1}{3}x^3$, $\Rightarrow \int_0^a x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^a = \frac{1}{3}a^3$. Mit dem Hauptsatz ergibt sich das gleiche Resultat wie oben mit Hilfe der Zerlegungssummen.

5. $\int_1^2 e^x dx = \left[e^x\right]_1^2 = e^2 - e^1 = e\cdot(e-1)$.

6. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \left[\arctan(x)\right]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$.

7. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)dx = ?$ für beliebiges $n \in \mathbb{Z}$. Für alle $n \neq 0$ liefert der Hauptsatz :

$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)dx = \left[\frac{1}{n}\sin(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$. Für $n = 0$ ist $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(0x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot dx = 2\pi$.

Für $n \neq 0$ hätte man auch ohne Rechnung sehen können, dass das Integral = 0 ist (s. o. , Eigenschaft 7). Allgemein: Integrale über volle Perioden von sin(x) und cos(x) sind = 0.

8. $\int_{-1}^{1} \sinh(x)dx = 0$.

9. $\int_0^{\pi/4} \tan^2 x dx = [\tan x - x]_0^{\pi/4} = \tan\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}$. (Wegen $(\tan x)' = 1 + (\tan x)^2$ ist $\tan x - x$ eine Stammfunktion von $(\tan x)^2$) .

10. $\int_0^{\pi/4} \tan(x)dx = -\int_0^{\pi/4} \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}dx = -\left[\ln(|\cos(x)|)\right]_0^{\pi/4} = -\left(\ln(\cos\frac{\pi}{4}) - \ln(\cos(0)\right) = 0{,}3465.$

Allgemein: ist f(x) in [a,b] differenzierbar, $f(x) \neq 0$, so ist $\ln(|f(x)|$ eine Stammfunktion von $\frac{f'(x)}{f(x)}$.

11. $\int_a^b \sin(x)\cdot\cos(x)dx = \left[\frac{1}{2}\sin^2 x\right]_a^b$.

Allgemein : für differenzierbares f ist $\frac{1}{2}f^2(x)$ eine Stammfunktion zu $f(x)\cdot f'(x)$. (Wie in 10. ergibt sich das aus der Kettenregel) .

12. Das Integral aus 11. kann man auch mit Hilfe des Additionstheorems $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ auswerten.

Weitere Beispiele in den Übungen.

§ 11.2 Partielle Integration , Substitution

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung stellt einen Zusammenhang zwischen Integrieren und Differenzieren her. Es ist daher naheliegend, die Regeln , die wir für das Differenzieren kennengelernt haben, für das Integrieren nutzbar zu machen. Wir übertragen zunächst die Produktregel , dann die Kettenregel.

Unter Voraussetzungen, die wir gleich präzisieren werden, gilt : $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$ $\Rightarrow$

$$\int_a^b (f(x)\cdot g(x))'\,dx = \int_a^b f'(x)\cdot g(x)dx + \int_a^b f(x)\cdot g'(x)dx \quad \Rightarrow \quad [f(x)\cdot g(x)]_a^b = \int_a^b f'(x)\cdot g(x)dx + \int_a^b f(x)\cdot g'(x)dx\,.$$

Damit die Kettenregel anwendbar ist, setzen wir f und g als differenzierbar voraus. Damit alle Integrale existieren, verlangen wir, dass die Ableitungen von f und g stetig sind. Wir erhalten dann

Satz 11.5 (Partielle Integration , Produktintegration) : Sind f und g in $[a,b]$ stetig differenzierbar, so ist

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)dx = [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)dx$$

Es hat den Anschein , dass dieser Satz nichts nützt , weil er ein unbekanntes Integral durch ein anderes unbekanntes Integral ausdrückt. Nützlich ist der Satz immer dann , wenn das Integral auf der rechten Seite leichter zu berechnen ist als das Integral auf der linken Seite. Wir erläutern das anhand einiger Beispiele:

1. $\int_a^b x\cdot e^x dx = [x\cdot e^x]_a^b - \int_a^b 1\cdot e^x dx = [x\cdot e^x]_a^b - [e^x]_a^b = [x\cdot e^x - e^x]_a^b$. (Satz 11.5 mit $f(x) = x$, $g(x) = e^x$).

2. $\int_a^b x^2 e^x dx = [x^2 e^x]_a^b - 2\int_a^b x\cdot e^x dx = [x^2 e^x]_a^b - 2[x\cdot e^x - e^x]_a^b = [(x^2 - 2x + 2)e^x]_a^b$. Hier haben wir Satz 11.5 mit $f(x) = x^2$, $g(x) = e^x$ angewandt und noch einmal das Ergebnis von 1. benutzt.

3. $\int_a^b e^x \sin x dx = [-e^x \cos x]_a^b + \int_a^b e^x \cos x dx = [-e^x \cos x]_a^b + [e^x \sin x]_a^b - \int_a^b e^x \sin x dx$. $\Rightarrow$

   $2\int_a^b e^x \sin x dx = [e^x(\sin x - \cos x)]_a^b \quad \Rightarrow \quad \int_a^b e^x \sin x dx = \left[\frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)\right]_a^b$.

   Nach zweimaliger partieller Integration steht auf der rechten Seite wieder das unbekannte Integral, das dann mit dem Integral links zusammengefasst wird. Diese Technik der „partiellen Integration mit Rückgriff“ kann auch in anderen Fällen helfen.

4. Bemerkung: gilt eine Formel der Bauart wie in 3., also $\int_a^b f(x)dx = [G(x)]_a^b$ für alle a, b in einem Intervall I, so ist $G(x)$ dort Stammfunktion von $f(x)$. Diese Aussage kann als eine Umkehrung des Hauptsatzes angesehen und zur Kontrolle solcher Rechnungen verwendet werden. Sie folgt einfach durch Differenzieren nach b.

5. Die partielle Integration kann auch manchmal da nützen, wo im Integranden gar kein Produkt erkennbar ist wie z.B. in diesem Fall:

$$\int_a^b \ln x dx = \int_a^b 1\cdot \ln x dx = [x\cdot \ln x]_a^b - \int_a^b x\cdot \frac{1}{x}dx = [x\cdot \ln x - x]_a^b$$

Wir übersetzen jetzt die Kettenregel in eine für das Integrieren brauchbare Form. Unter geeigneten Voraussetzungen über F und g gilt: $(F(g(t)))' = F'(g(t))\cdot g'(t)$. Gilt dies z.B. im Intervall $[\alpha,\beta]$, folgt daraus durch Integrieren $\int_\alpha^\beta (F(g(t)))'dt = \int_\alpha^\beta F'(g(t))\cdot g'(t)dt$ und hieraus mit $a = g(\alpha)$ und $b = g(\beta)$ durch zweimalige Anwendung des Hauptsatzes:

$\int_\alpha^\beta (F(g(t)))'dt = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx$. Diese Rechnungen sind gerechtfertigt, wenn man die Funktion g in die Funktion F einsetzen kann und alle vorkommenden Ableitungen und Integrale existieren. Wir haben also mit der Umbenennung von F' in f den folgenden

Satz 11.6 (Substitutionsregel) : Sei f stetig auf $[a,b]$, g stetig differenzierbar auf $[\alpha,\beta]$, $g(x)\in [a,b]$ für alle $x\in[\alpha,\beta]$, $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$.

Dann gilt $$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))\cdot g'(t)dt .$$

Bemerkungen , Beispiele:

1. Für Anwendungen merkt man sich diese Formel am besten in der Form $\int_{x(\alpha)}^{x(\beta)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x(t))\cdot \frac{dx}{dt}dt$, d.h. man denkt sich nicht die Funktion g in die Funktion f eingesetzt , sondern die „alte“ Variable x ersetzt (substituiert) durch die „neue“ Variable t . Mit den Symbolen dx und dt kann man dann fast so rechnen wie mit Zahlen. Das ist so, weil die Leibnizsche Schreibweise dx/dt für die Ableitung äußerst geschickt gewählt wurde.

2. $\int_0^1 (1+2x)^3 dx = \int_1^3 t^3 \frac{1}{2}dt = \left[\frac{1}{8}t^4\right]_1^3 = \frac{81-1}{8} = 10$.

   (Satz 11.6 mit a=0 , b=1 , α=1 , β=3 , $1 + 2x(t) = t$, $x(t) = \frac{1}{2}(t-1)$, $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}$) .

3. $\int_1^3 x\cdot (x^2+1)^2 dx = \int_2^{10} t^2\cdot \frac{1}{2}\ dt = \left[\frac{1}{6}t^3\right]_2^{10} = \frac{1}{6}\cdot(1000-8) = \frac{992}{6} = \frac{496}{3} = 165{,}33$.

   (Satz 11.6 mit $t = x^2+1$, $x = \sqrt{t-1}$, $dt/dx = 2x$, $x\,dx = \frac{1}{2}dt$) .

4. $\int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \int_1^{3/4} (-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}})\ dt = \left[\sqrt{t}\right]_{3/4}^1 = 1-\frac{1}{2}\sqrt{3}$. ($t = 1-x^2$) .

5. Das folgende Integral lässt sich direkt als Fläche eines Viertelkreises mit dem Radius r = 1 deuten. Wir erwarten also den Wert $\pi/4$. Die Substitution $x = \sin t$, $dx/dt = \cos t$, führt zum Ziel, weil der „trigonometrische Pythagoras“ aus der Differenz unter dem Wurzelzeichen wieder ein Quadrat macht :
   $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 t}\cos t dt = \int_0^{\pi/2} |\cos t|\cos t = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{\pi}{4}$. (Das letzte Integral kann man etwa wie Bsp. 1 zum Hauptsatz (Satz 11.4) durch eine trigonometrische Umformung oder durch eine partielle Integration mit Rückgriff lösen.

§ 11.3 Volumina von Drehkörpern , Bogenlängen usw.

Aus der Einführung des Begriffs „bestimmtes Integral“ wissen wir, dass Integrale gut geeignet zur Berechnung von Flächeninhalten sind. Die Anwendungen beschränken sich aber nicht auf dies Beispiel. Integrale lassen sich zur Berechnung einer Fülle anderer Größen aus Geometrie, Physik, Technik, Wirtschaft usw. verwenden. Wir behandeln hier exemplarisch die Berechnung von Volumina von Drehkörpern und von Bogenlängen. Die Herleitung der entsprechenden Integralformeln folgt dabei immer dem gleichen Grundmuster: die zu behandelnde Größe wird durch eine Summe angenähert, die als Riemannsche Zerlegungssumme eines Integrals gedeutet werden kann. Unter geeigneten Voraussetzungen (bei uns immer Stetigkeit des Integranden) strebt die Näherungssumme gegen ein Integral. Wir beginnen mit dem Volumen von Drehkörpern.

Satz 11.7 : Sei f stetig auf $[a,b]$, $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Dann gilt für das Volumen V des Drehkörpers, der durch Rotation der Fläche $\{(x,y) , a \leq x \leq b , 0 \leq y \leq f(x)\}$ entsteht :

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx \quad .$$

Herleitung: ist $Z = \{ x_k , k=0 , ... , n\}$ mit $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$, und sind $\xi_k \in [x_{k-1} , x_k]$ beliebige Zwischenpunkte , so wird das gesuchte Volumen V angenähert durch die Summe

$V_Z = \sum_{k=1}^{n} \pi f^2(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$. (= Summe der Volumina zylindrischer Scheiben mit Dicke $x_k - x_{k-1}$ und Radius $f(\xi_k)$). Da f stetig , strebt V_Z gegen das o. a. Integral, wenn der Feinheitsgrad der Zerlegung Z gegen 0 strebt.

Beispiele, Bemerkungen:

1. Volumen eines geraden Kreiskegels mit Radius r und Höhe h: Anwendung von Satz 11.7 mit $f(x) = \frac{r}{h} \cdot x$ und $[a,b] = [0,h]$ liefert $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

2. Volumen der Kugel mit Radius r : Anwendung von Satz 11.7 mit $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $[a,b] = [-r,r]$ liefert : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

3. Bei der Herleitung der Formel in Satz 11.7 ist $\pi \cdot f^2(x)$ der Flächeninhalt der Schnittfigur des Drehkörpers mit der Ebene senkrecht zur x - Achse an der Stelle x. Dabei kam es nicht wirklich darauf an, dass diese Schnittfigur ein Kreis ist, sondern nur darauf, dass man deren Flächeninhalt kennt. Dies ist im Kern die Beobachtung des „**Cavalierischen Prinzips**“ : Liegen zwei räumliche Körper zwischen zwei parallelen Ebenen und werden sie von jeder dazwischen verlaufenden Parallelebene in Flächenstücken gleichen Inhalts geschnitten , so haben beide Körper gleiches Volumen.

4. Aus Beispiel 1. und dem Cavalierischen Prinzip folgt: jeder Kegel mit Grundfläche F und Höhe h hat das Volumen $V = \frac{1}{3} F \cdot h$.

5. Eine hübsche Anwendung des Cavalierischen Prinzips ist die Berechnung des (Halb -) - Kugelvolumens aus den als bekannt vorausgesetzten Volumina von Zylinder und Kreiskegel. (s. Abbildung 11. 3) . Die Schnittfiguren von Halbkugel und Restkörper „Zylinder minus Kegel“ im Abstand h von der Grundfläche haben gleich großen Flächeninhalt, nämlich $\pi \cdot (r^2 - h^2)$. Also ist das gesuchte

   Halbkugelvolumen = „Zylindervolumen minus Kegelvolumen“ = $\pi \cdot r^3 - \frac{1}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{2}{3}\pi \cdot r^3$.

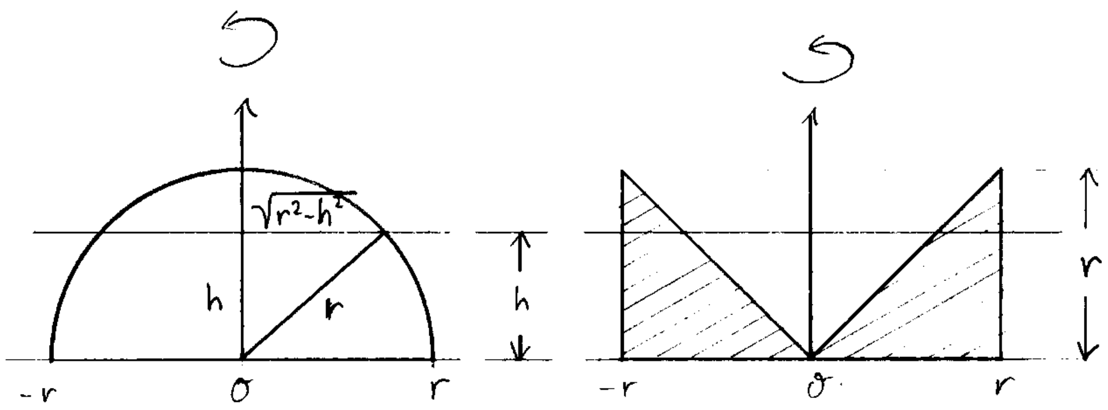

Abbildung 11.3 : Zu Bemerkung 5: Berechnung des Kugelvolumens mit dem Cavalierischen Prinzip

Wir kommen zur Berechnung von Bogenlängen (Kurvenlängen) :

Satz 11.8 : Sei f stetig differenzierbar auf [a,b] . Dann gilt für die Länge s des Bogens

$\{(x , f(x)) , a \le x \le b\}$: $$s = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx \quad .$$

Herleitung : Wie bei Satz 11.7 gehen wir von einer Zerlegung Z aus und nähern die Bogenlänge der Kurve an durch die Länge s_Z des Streckenzugs, der die Punkte $(x_k, f(x_k))$, $k = 0, \ldots , n$, verbindet :

$$s_Z = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+\left(\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right)^2} \cdot (x_k - x_{k-1}) \; .$$

Nach dem 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung können wir für die Differenzenquotienten unter der Wurzel als $f'(\xi_k)$ mit Zwischenwerten $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ schreiben. $\Rightarrow$

$s_Z = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+(f'(\xi_k))^2} \cdot (x_k - x_{k-1})$. Das ist eine Riemannsche Zerlegungssumme zu dem im Satz behaupteten Integral für s .

Beispiele:

1. Geradlinige Verbindung der Punkte (0,0) und (a, c) in einem kartesischen Koordinatensystem. (Dies ist mehr eine vertrauensbildende Maßnahme als ein ernsthaftes Anwendungsbeispiel, da wir ja die Länge von Strecken in die Herleitung des Satzes hineingesteckt haben) . Wir wenden den Satz 11.8 an mit $f(x) = \frac{c}{a} \cdot x$, dem Intervall [0,a] und erhalten wie erwartet $s = \sqrt{a^2 + c^2}$.

2. Länge eines Parabelbogens : Wir wenden Satz 11.8 an mit $f(x) = x^2$ auf dem Intervall [0,a] und erhalten für die Länge des Parabelbogens $\{(x, x^2) , 0 \le x \le a \}$:
$$s = \int_0^a \sqrt{1+4x^2}\,dx = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{1+4a^2} + \frac{1}{4} \cdot \operatorname{Ar\,sinh}(2a) \quad .$$
(wird in Vorlesung ausführlich vorgerechnet und durch Nachmessen der Bogenlänge bestätigt).