Probeklausur

1.) ZZ: $5^n + 7 \equiv 0 \mod 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Bew.: Ind.-Anf.: $n = 0$:

ZZ: $5^0 + 7 \equiv 0 \mod 4$

Bew.: $5^0 + 7 = 8 \equiv 0 \mod 4$. ✓

Ind.-Ann.: Sei für $n \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest, bereits gezeigt:

$$5^n + 7 \equiv 0 \mod 4.$$

Ind.-Beh.: Dann gilt auch

$$5^{n+1} + 7 \equiv 0 \mod 4.$$

Bew.: Es gilt: $5^{n+1} + 7 = 5 \cdot 5^n + 7 = (4+1) \cdot 5^n + 7$

$$= \underbrace{4 \cdot 5^n}_{\equiv 0 \mod 4} + 5^n + 7$$

$$\equiv 5^n + 7$$

$$\overset{\text{Ind.-Ann.}}{\equiv} 0 \mod 4. \qquad \square$$

2.) a) Best. $\frac{1}{17}$ in $\mathbb{F}_{71}$

Dazu: Mit erw. eukl. Algo:

$71 = 4 \cdot 17 + 3 \longrightarrow 3 = 71 - 4 \cdot 17 \quad \Leftarrow$

$17 = 5 \cdot 3 + 2 \longrightarrow 2 = 17 - 5 \cdot 3$ ✓

$17 = 5 \cdot 3 + 2 \longrightarrow 2 = 17 - 5 \cdot 3$ ✓

$3 = 1 \cdot 2 + 1 \longrightarrow 1 = 3 - 1 \cdot 2$

ggT(17,71)

$2 = 2 \cdot 1 + 0$

$= 3 - 1 \cdot (17 - 5 \cdot 3)$

$= 6 \cdot 3 - 1 \cdot 17$

$= 6 \cdot (71 - 4 \cdot 17) - 1 \cdot 17$

$= 6 \cdot 71 - 25 \cdot 17$

$\Longrightarrow 1 \equiv -25 \cdot 17 \mod 71$

$\Longrightarrow 17^{-1} = -25 \equiv 46 \mod 71.$

$\frac{1}{17}$

b) $21^{35} \mod 43$

$21^2 \equiv 11 \mod 43$

$21^4 \equiv (11)^2 \equiv -8 \mod 43$

$21^8 \equiv (-8)^2 \equiv 21 \mod 43 \rightsquigarrow 21^7 \equiv 1 \mod 43$

$\Longrightarrow 21^{35} = (21^7)^5 \equiv 1^5 \equiv 1 \mod 43$

$21^{16} \equiv 21^2 \equiv 11 \mod 43$

$21^{32} \equiv 11^2 \equiv -8 \mod 43$

$\Longrightarrow 21^{35} = 21^{32+2+1} = 21^{32} \cdot 21^2 \cdot 21 \equiv -8 \cdot 11 \cdot 21$

$= -88 \cdot 21 \equiv -2 \cdot 21 \equiv -42 \equiv 1 \mod 43.$

4.) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & \alpha \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

1. $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & \alpha \end{pmatrix} : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$

$\mathrm{rang}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A))$

a) Frage: Für welche α ist A regulär? $\rightsquigarrow \mathrm{rang}(A) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3) \Rightarrow \mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^3$

$\Updownarrow$

$\det(A) \neq 0$.

Dazu: $\det(A) \overset{\text{Entw.}}{\underset{\text{nach 3. Zeile}}{=}} 2 \cdot \det\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}_{2\cdot 3-(-1)\cdot(-4) = 2}$

$- 0 \cdot \det\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

$+ \alpha \cdot \underbrace{\det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}}_{=1}$

$= 4 + \alpha$

$\rightsquigarrow \det(A) \neq 0 \iff 4 + \alpha \neq 0 \iff \alpha \neq -4$.

b) $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ für reguläres A.

$\xrightarrow[\text{quadr.}]{\text{da } A}$ A ist invertierbar, d.h. A^{-1} ex.

$\Big\Downarrow A^{-1} \cdot$

$\vec{x} = \vec{0}$ (einzige Lösung).

c) Wann hat (welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)

$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}$ keine Lösung?

$\rightsquigarrow$ 1. Fall: $\alpha \neq -4$: A^{-1} existiert.

$$\Longrightarrow \quad \vec{x} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}$$

↳ wenn $\alpha \neq -4$, $\beta \in \mathbb{R}$ bel., dann hat LGS immer eine Lsg.

2. Fall: $\alpha = -4$: LGS:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= -1 \quad &(\mathrm{I}) \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 1 \quad &(\mathrm{II}) \\ 2x_1 \qquad - 4x_3 &= \beta \quad &(\mathrm{III}) \end{aligned}$$

(Gauss-Algo)/el. Zeilenumformungen:

$$(\mathrm{I}) + 2\cdot(\mathrm{II}): \quad -x_1 + 2x_3 = 1$$

$$\overset{\cdot(-2)}{\Longrightarrow} \quad 2x_1 - 4x_3 = -2$$

Wenn $\beta \neq -2$, dann ex. keine Lösung.

Für $\beta = -2$ erhalte die Lösung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Antwort: Für $\{(\alpha,\beta) \mid \alpha = -4, \beta \neq -2\}$ ex. keine Lösung.

d) Gauss-Algo.

6.)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -4 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte: NST des char. Polynoms.

char. Polynoms: $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot E_3)$

$$= \det\begin{pmatrix} -2-\lambda & -1 & 2 \\ 4 & 5-\lambda & -4 \\ 3 & 3 & -3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (-2-\lambda) \cdot \det\begin{pmatrix} 5-\lambda & -4 \\ 3 & -3-\lambda \end{pmatrix}$$
$$- (-1) \cdot \det\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -3-\lambda \end{pmatrix}$$
$$+ 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 4 & 5-\lambda \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= (-2-\lambda) \cdot \left[(5-\lambda)(-3-\lambda) + 12\right]$$
$$+ 4 \cdot (-3-\lambda) + 12$$
$$+ 2 \cdot \left[12 - 3 \cdot (5-\lambda)\right]$$

$$= (-2-\lambda) \cdot (-3 - 2\lambda + \lambda^2)$$
$$- 4\lambda$$
$$- 6 + 6\lambda$$

$$= \cancel{6} + \cancel{4\lambda} \cancel{- 2\lambda^2} + 3\lambda \cancel{+ 2\lambda^2} - \lambda^3 \cancel{- 4\lambda} \cancel{- 6} + 6\lambda$$

$$= -\lambda^3 + 9\lambda$$
$$= \lambda \cdot (-\lambda^2 + 9) = \lambda \cdot (3-\lambda)(3+\lambda)$$

$\rightsquigarrow$ EW sind $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -3$.

EV für $\lambda_1 = 0$:

Zu lösen ist das LGS

$$(A - \lambda_1 \cdot E_3) \cdot \vec{v}_1 \overset{!}{=} \vec{0}$$

$$\underbrace{(A - \lambda_1 \cdot E_3)} \cdot \vec{V}_1 \doteq \vec{0}$$

Konkret: $A \cdot \vec{V}_1 = \vec{0}$.

$\{\vec{V}_1\}$ $\{\vec{V}_2, \vec{V}_3\}$

$$\{\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3\}$$