Kapitel 5

Mehrfachintegrale

In der Anaylsis in einer Variablen haben wir uns intensiv mit Integralen beschäftigt, als mit dem Inhalt der Fläche, die durch eine Kurve in einem bestimmten Abschnitt begrenzt wird. Wie wir schon gesehen haben, berschreiben Funktionen in zwei Variablen Flächen, und wir können uns fragen, welches Volumen der durch diese Fläche begrenzten Körper hat. Auch hier hilft uns die Integrationstheorie.

5.1 Parameterabhängige Intgrale

Wir betrachten zunächst wieder die Situation in zwei Variablen, und dabei ganz speziell zwei Punkte $a < b$ in $\mathbb{R}$, ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ (offen, abgeschlossen oder halboffen) und eine stetige Funktion

$$f : [a, b] \times I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto f(x, y)$$

Wie schon bei der partiellen Differenzierbarkeit betrachten wir Funktionen, bei denen wir eine Variable festhalten, hier

$$h(x) = h_y(x) = f(x, y)$$

Dadurch erhalten wir (für jedes $y \in I$) eine stetige Funktion

$$h_y : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x, y)$$

und für diese Funktion ist das Integral $\int\limits_a^b h_y(x)\,dx$ erklärt. Hierfür scheiben wir $F(y)$, also

$$F(y) = \int\limits_a^b h_y(x)\,dx$$

und erhalten dadurch eine neue Funktion

$$F : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

Satz 5.1.1. *Die Funktion $F(y)$ ist stetig*

Beweis: E s sei $y_0 \in I$ vorgegeben und es sei $(y_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in I, die gegen y_0 konvergiert. Ferner sei $\varepsilon > 0$ geben. Dann gilt zunächst

$$\lim_{n\to\infty} f(x, y_n) = f(x, y_0),$$

da f stetig ist, und da das Intervall $[a, b]$ beschränkt und abgeschlossen ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $x \in [a, b]$ und alle $n > N$ gilt

$$|f(x, y_n) - f(x, y_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
|F(y_n) - F(y_0)| &= |\int\limits_a^b f(x, y_n)\,dx - \int\limits_a^b f(x, y_0)\,dx| \\
&= |\int\limits_a^b (f(x, y_n) - f(x, y_0))\,dx| \\
&\leq \int\limits_a^b |f(x, y_n) - f(x, y_0)|\,dx \\
&\leq \int\limits_a^b \tfrac{\varepsilon}{2(b-a)}\,dx \\
&= \tfrac{\varepsilon}{2} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

und daher ist F stetig in y_0.

Definition 5.1.1. Der Ausdruck

$$F(y) = \int\limits_a^b f(x, y)\,dx$$

heißt **parameterabhängiges Integral** von $f(x, y)$.

Eine analoge Aussage (mit einem ähnlichen Beweise) gilt auch für mehrere Variablen: Dazu sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ eine beliebige Teilmenge und

$$f : [a, b] \times U \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto f(x, y)$$

stetig. Dann können wir wieder genauso

$$F : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

durch $F(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$ definieren, und wir erhalten

Satz 5.1.2. *Die Funktion $F(y)$ ist stetig*

Wir kehren nun aber zurück zu unserer ursprünglichen Situation

$$f : [a, b] \times I \longrightarrow \mathbb{R}$$

und nehmen jetzt auch noch an, dass f stetig partiell nach y differenzierbar ist.

Satz 5.1.3. *Die Funktion $F(y)$ ist stetig differenzierbar und*

$$F'(y) = \int_a^b f_y(x, y)\, dx$$

Bemerkung 5.1.1. Satz 5.1.3 besagt, dass wir Integration und Differentiation vertauschen, also "unter dem Integralzeichen" differenzieren können.

Beweis: W ir geben uns wieder ein y_0 in I, eine Folge $(y_n)_{n\geq 1}$, die gegen y_0 konvergiert und ein $\varepsilon > 0$ vor. Betrachten wir die Differenzenquotienten

$$\frac{f(x, y_n) - f(x, y_0)}{y_n - y_0}$$

so wissen wir, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x, y_n) - f(x, y_0)}{y_n - y_0} = f_y(x, y_0) \quad \text{für alle } x \in [a, b]$$

und da $[a, b]$ abgeschlossen und beschränkt ist, existiert wieder ein $N \in N$ mit

$$|\frac{f(x, y_n) - f(x, y_0)}{y_n - y_0} - f_y(x, y_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2(a - b)}$$

für alle $n \geq N$ und alle $x \in [a, b]$. Damit gilt für $n \geq N$:

$$\begin{aligned}
|\tfrac{F(y_n)-F(y_0}{y_n-y_0} - \int_a^b f_y(x,y)\,dx| &= |\int_a^b \tfrac{f(x,y_n)-F(x,y_0}{y_n-y_0}\,dx - \int_a^b f_y(x,y)\,dx| \\
&= |\int_a^b \left(\tfrac{f(x,y_n)-f(x,y_0}{y_n-y_0} - f_y(x,y)\right)\,dx| \\
&\leq \int_a^b |\tfrac{f(x,y_n)-f(x,y_0}{y_n-y_0} - f_y(x,y)|\,dx \\
&\leq \int_a^b \tfrac{\varepsilon}{2(a-b)}\,dx \\
&= \tfrac{\varepsilon}{2} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

und es folgt die Behauptung.

Beispiel 5.1.1. Wir wollen das Integral

$$\int_0^\pi x^2 \sin(x)\,dx$$

berechnen. Das könnten wir durch zweimalige partielle Integration bewerkstelligen, wir können aber auch unsere neu gewonnenen Resultate zur Anwendung bringen. Dazu betrachten wir die Funktion $f(x,y) = -\sin(xy)$ und die zugehörige Integralfunktion

$$F(y) = \int_0^\pi -\sin(xy)\,dx$$

Dann wissen wir nach Satz 5.1.3

$$F'(y) = \int_0^\pi -x\cos(xy)\,dx$$

und

$$F''(y) = \int_0^\pi x^2 \sin(xy)\,dx$$

So dass also $\int_0^\pi x^2 \sin(x)\,dx = F''(1)$.

Andererseits können wir $F(y)$ recht einfach berechnen:

$$\begin{aligned} F(y) &= \int_0^\pi -\sin(xy)\,dx \\ &= \left[\frac{\cos(xy)}{y}\right]_0^\pi \\ &= \frac{\cos(\pi y)}{y} - \frac{1}{y} \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} F'(y) &= \frac{-\pi\cdot\sin(\pi y)\cdot y - \cos(\pi y)}{y^2} + \frac{1}{y^2} \\ F''(y) &= \frac{2\cdot(\cos(\pi y) + y\cdot\pi\cdot\sin(\pi y)) - y^2\pi^2\cos(\pi y)}{y^3} - \frac{2}{y^3} \end{aligned}$$

und damit gilt

$$\int_0^\pi x^2\sin(x)\,dx = F''(1) = -\pi^2$$

Aufgabe 86. Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^a x^2\sin(x)\,dx$$

für jedes $a > 0$.

Aufgabe 87. Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^a x^2 e^{-x}\,dx$$

für jedes $a > 0$. (Hinweis: Betrachten Sie das parameterabhängige Integral

$$F(y) = \int_0^a e^{-xy}\,dx$$

und gehen Sie vor wie im Beispiel 5.1.1.)

5.2 Doppelintegrale

Wir wollen in diesem Abschnitt die Ergebnisse aus 5.1 anwenden um einige einfache Volumina ovn dreidimensionalen Körpern zu berechnen. Dazu betrachten wir reelle Zahlen $a < b$ und $c < d$ und eine stetige Funktion

$$f : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$$

Durch f wird eine Fläche über dem Rechteck mit den Endpunkten (a, c), (a, d), (b, c) und (b, d) definiert, und wir können uns fragen, welches Volumen dadurch abgegrenzt wird

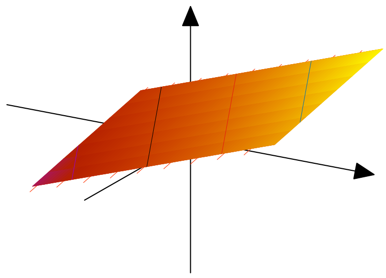


Abbildung 5.1: $f(x, y) = 1 + \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{4} \cdot y$

In der Analysis einer Veränderlichen haben wir Flächen mit Hilfe des Integrals berechnet. Wir können nun versuchen, einen ähnlichen Weg im Zweidimensionalen zu gehen. Im Abschnitt 5.1 haben wir gesehen, dass für jedes $y \in [c, d]$ durch

$$F(y) := \int_a^b f(x, y)\, dx$$

eine stetige Funktion $F : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ in einer Variablen y definiert wird, so dass also das Integral $\int_c^d F(y)\, dy$ erklärt ist.

Definition 5.2.1. Der Ausdruck

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dxdy := \int_c^d F(y)dy$$

heißt **Doppelintegral** von $f(x,y)$ über $[a,b] \times [c,d]$.

Beispiel 5.2.1. Es sei $f(x,y) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{2}\int_{-1}^{2} f(x,y)dxdy &= \int_{-1}^{2} \left(1 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}y\right) dxdy \\
&= \int_{-1}^{2} \left[x + \tfrac{1}{4}yx + \tfrac{1}{4}x^2\right]_{x=-1}^{2} dy \\
&= \int_{-1}^{2} \left(\tfrac{15}{4} + \tfrac{3}{4}y\right) dy \\
&= \left[\tfrac{15}{4}y + \tfrac{3}{8}y^2\right]_{y=-1}^{2} \\
&= \tfrac{99}{8}
\end{aligned}$$

Zunächst scheint unserer Definition eine gewisse Willkür zugrunde zu liegen: Warum haben wir erst die Funktion $f(x,y)$ nach x integriert *(inneres Integral)* und erst dann nach y *(äusseres Integral)*. Wir hätten ja genauso gut zunächst

$$G(x) := \int_c^d f(x,y)\,dy$$

bilden können, und dann $\int_a^b G(y)\,dy$. Erfreulicherweise macht das aber keinen Unterschied:

Satz 5.2.1. *Es gilt*

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

Beweis: W ir betrachten hierzu die Hilfsfunktion

$$g(x,y) := \int_c^y f(x,t)\,dt$$

nach dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung ist $g(x,y)$ stetig partiell nach der zweiten Variable ableitbar mit

$$g_y(x,y) = f(x,y).$$

Damit ist nach Satz 5.1.3 auch die Funktion

$$G(y) := \int_a^b g(x,y)\,dx = \int_a^b \left(\int_c^y f(x,t)\,dt \right) dx$$

stetig differenzierbar mit

$$G'(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$

und $G(c) = 0$, und daher gilt

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy = \int_c^d G'(y)\,dy = G(d) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

Beispiel 5.2.2. Wir wollen nochmal $f(x,y) = 1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}y$ betrachten, diesmal mit der anderen Integrationsreihenfolge:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{2}\int_{-1}^{2} f(x,y)dydx &= \int_{-1}^{2} \left(1+\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{4}y\right) dydx \\
&= \int_{-1}^{2} \left[y+\tfrac{1}{2}xy+\tfrac{1}{8}y^2\right]_{x=-1}^{2} dy \\
&= \int_{-1}^{2} \left(\tfrac{27}{8}+\tfrac{3}{2}x\right) dx \\
&= \left[\tfrac{27}{8}x+\tfrac{3}{4}x^2\right]_{x=-1}^{2} \\
&= \tfrac{99}{8}
\end{aligned}$$

Damit ist das Doppelintegral unabhängig von der Integrationsreihenfolge. Das ist nicht nur theoretisch interessant, es ermöglicht uns auch, die für uns günstigste Reihenfolge auszuwählen.

Zu klären bleibt jetzt noch die Frage, ob dieses Doppelintegral tatsächlich das gewünschte Volumen berechnet. Dazu zerlegen wir das Rechteck $[a,b] \times [c,d]$

in geeignete kleine Rechtecke, indem wir etwa für $n, m \in \mathbb{N}$ und $0 \leq i < n, 0 \leq j < n$ die Rechtecke

$$A_{i,j} := [a_i, b_i] \times [c_j, d_j] := \{(x, y) | \, a_i \leq x \leq b_i, c_j \leq y \leq d_j\}$$

betrachten, wobei

$$\begin{array}{rclcrcl} a_i & = & a + i \cdot \frac{b-a}{n} & \quad & b_i & = & a + (i+1) \cdot \frac{b-a}{n} \\ c_j & = & c + j \cdot \frac{d-c}{m} & \quad & d_j & = & c + (j+1) \cdot \frac{d-c}{m} \end{array}$$

Wir überdecken also $[a, b] \times [c, d]$ mit nm kleinen Rechtecken. Über jedem dieser Rechtecke $A_{i,j}$ approximieren wir nun $f(x, y)$ durch die konstante Funktion $g_{n,m}$ mit dem Wert $f(a_i, c_j)$, also etwa

$$g_{n,m}(x, y) = \begin{cases} f(a_i, c_j) & \text{falls } a_i \leq x < b_i, c_j \leq y < d_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Da f stetig ist, ist offensichtlich, dass mit zunehmendem n und m (also mit kleiner werdenden Rechtecken $A_{i,j}$) dadurch eine immer bessere Approximation an $f(x, y)$ über $[a, b] \times [c, d]$ durch eine Art zweidimensionale Stufenfunktion gegeben wird. In der Tat folgt aus der Stetigkeit von f und der Beschränktheit der Intervalle $[a, b]$ und $[c, d]$, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ natürliche Zahlen N und M gibt mit

$$d(g_{n,m}(x, y), f(x, y) < \varepsilon \quad \text{für alle } (x, y) \in [a, b] \times [c, d],\ n \geq N,\ m \geq M$$

Damit wird aber auch das Volumen, das durch $f(x, y)$ über $[a, b] \times [c, d]$ begrenzt wird, immer besser durch den Ausdruck

$$\zeta_{n,m} := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(a_i, c_j)(b_i - a_i)(d_j - c_j) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{n,m}(a_i, c_j) \frac{b-a}{n} \cdot \frac{d-c}{m}$$

approximiert. (Das lässt sich ganz präzise machen, wenn wir den Volumeninhalt über Grenzwerte von Ober- und Untersummen definieren und die (absolute) Konvergenz dieser beiden Reihen gegen ein und denselben Grenzwert fordern, wie wir das für Flächen gemacht haben; diese Präzisierung überlassen wir dem Leser).

Satz 5.2.2. $\lim\limits_{n,m \to \infty} \zeta_{n,m} = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x, y) \, dx \right) dy \,.$

Beweis: W ir haben

$$\zeta_{n,m} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(a_i, c_j)(b_i - a_i)(d_j - c_j)$$

Wir haben also eine Doppelsumme zu betrachten, die wegen der Stetigkeit von $f(x, y)$ und der absoluten Beschränktheit von f auf $[a, b] \times [c, d]$ absolut konvergiert:
(Wir finden $K > 0$ mit $|f(x, y)| \leq K$ für alle $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$. Damit gilt für alle n, m:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} |f(a_i, c_j)(b_i - a_i)(d_j - c_j)| &\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} |K \cdot (b_i - a_i)(d_j - c_j)\\ &\leq K \cdot (b - a) \cdot (d - c)\end{aligned}$$

woraus die gewünschte absolute Konvergenz folgt.)
Also können wir den Umordnungssatz für Reihen anwenden und erhalten

$$\begin{aligned}\lim_{n,m\to\infty} \zeta_{n,m} &= \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(a_i, c_j)(b_i - a_i)(d_j - c_j) \right)\\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \int_{c_j}^{d_j} \int_{a}^{b} f(x, y)\, dx\\ &= \int_{c}^{d} \left(\int_{a}^{b} f(x, y)\, dx \right) dy\end{aligned}$$

Beispiel 5.2.3. Wir betrachten die Funktion $f(x, y) = x \cdot e^{xy}$ und erhalten

$$\begin{aligned}\int_{0}^{2}\int_{-1}^{1} f(x, y) dy dx &= \int_{0}^{2}\int_{-1}^{1} (x e^{xy})\, dy dx\\ &= \int_{0}^{2} \left[e^{xy}\right]_{y=-1}^{1}\, dx\\ &= \int_{0}^{2} (e^{x} - e^{-x})\, dx\\ &= \left[e^{x} + e^{-x}\right]_{x=0}^{2}\\ &= e^{2} + e^{-2} - 2\\ &\approx 5,52439\end{aligned}$$

In diesem Fall ist es günstiger, zunächst über y und erst dann über x zu integrieren.

Bemerkung 5.2.1. Können wir $f(x,y) = g(x) \cdot h(y)$ schreiben, so gilt

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dxdy = \int_a^b h(y)\,dy \cdot \int_c^d g(x)\,dx$$

Ist nämlich $G(x)$ eine Stammfunktion von $g(x)$ (bezüglich x), so ist $G(x) \cdot h(y)$ eine Stammfunktion von $f(x,y) = g(x)h(y)$ bezüglich x, und daraus folgt sofort die Behauptung.

Beispiel 5.2.4. Wir betrachten die Funktion $f(x,y) = x \cdot \sin(y)$ und erhalten

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 f(x,y)dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 x \cdot \sin(y)\,dxdy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{x^2}{2} \cdot \sin(y)\right]_{x=0}^1 dy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cdot \sin(y)\,dy \\
&= \left[-\frac{1}{2}\cos(y)\right]_{y=0}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Hier wiederum ist es günstiger, zunächst über x und dann über y zu integrieren.

In diesem Beispiel können wir aber auch Bemerkung 5.2.1 benutzen und erhalte

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 f(x,y)dxdy &= \int_0^1 x\,dx \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(y)\,dy \\
&= \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^1 \cdot [-\cos(y)]_{y=0}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Unsere Vorgehensweise bis jetzt hat einen entscheidenden Nachteil: Wir können nur Volumina über Rechtecken $[a,b] \times [c,d]$ damit berechnen. Damit können schon so einfache Volumina wie Zylinder nicht mehr berechnet werden. Unsere Techniken lassen sich jedoch auf diese Situation ausdehnen.

Dazu betrachten wir jetzt wieder ganz allgemein eine stetige Funktion

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Ferner betrachten wir zwei stetig Funktionen

$$u, o : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit $u(t) \leq o(t)$ für alle $t \in [a, b]$, und so dass für alle $y \in [c, d]$ gilt

$$\{(x, y) : u(y) \leq x \leq o(y)\} \subseteq D$$

dadurch erhalten wir (für jedes $y \in I$) eine stetige Funktion

$$h_y : [u(y), o(y)] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x, y)$$

und für diese Funktion ist das Integral $\int\limits_{u(y)}^{o(y)} h_y(x)\, dx$ erklärt. Hierfür scheiben wir $F(y)$, also

$$F(y) = \int\limits_{u(y)}^{o(y)} h_y(x)\, dx$$

und erhalten dadurch eine neue Funktion

$$F : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$$

Die Argumente aus Abschnitt 5.1 lassen sich nun auf diese Situation ausdehnen und liefern

Satz 5.2.3. *Die Funktion $F(y)$ ist stetig*

Damit ist also die Funktion $F(y)$ integrierbar, und wir können $\int\limits_c^d F(y)\, dy$ bilden. Mit einer ähnlichen Rechnung wie oben überzeugen wir uns davon, dass diese Integral nun das Volumen misst, dass über der Grundfläche

$$A = \{(x, y) |\, y \in [c, d], x \in [u(y), 0(y)]\}$$

durch $f(x, y)$ abgegrenzt wird. Wir schreiben hierfür kurz

$$\iint\limits_A f(x, y)\, dxdy := \int\limits_c^d F(y)\, dy$$

und nennen es das **Integral über** A **von** $f(x, y)$.

Beispiel 5.2.5. Wir betrachten die Dreiecksfläche A, die begrenzt wird durch die drei Punkte $(-1,-2),(-1,2),(1,0)$ und wollen das Volumen V des durch die Funktion

$$f(x,y) = 1 + 3x^2 + 2xy$$

begrenzten Körpers berechnen. Dazu bringen wir zunächst A in die gewünschte Form

$$A = \{(x,y)|\, x \in [-1,1],\ -1+x \le y \le 1-x\}$$

und damit erhalten wir

$$\begin{aligned} V &= \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-1+x}^{1-x} (1+3x^2+2xy)\, dydx \\ &= \int\limits_{-1}^{1} \left[y + 3x^2y + xy^2\right]_{y=-1+x}^{1-x} dy \\ &= \int\limits_{-1}^{1} (2-2x+6x^2(1-x))\, dx \\ &= \left[2x - x^2 + 2x^3 - \tfrac{3}{2}x^4\right]_{x=-1}^{1} \\ &= 8 \end{aligned}$$

Beispiel 5.2.6. Gegeben sei die Fläche

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2|\, x^2+y^2 \le 1\}$$

(also die abgeschlossene Einheitskreisscheibe). Wir berechnen das Volumen der Körpers, der durch die Funktion $f(x,y) = 3 + x - y$ nach oben begrenzt wird. Dazu schreiben wir zunächst

$$A = \{(x,y)|\, y \in [-1,1],\ -\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2}\}$$

Damit können wir Integration anwenden und erhalten für das gewünschte Volumen

$$\begin{aligned} V &= \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (3+x-y)\, dxdy \\ &= \int\limits_{-1}^{1} \left[3x + \frac{x^2}{2} - yx\right]_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dy \\ &= \int\limits_{-1}^{1} \left(6\sqrt{1-y^2} - 2y\sqrt{1-y^2}\right) dy \\ &= \left[3y\sqrt{1-y^2} + 3\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)\right]_{y=-1}^{1} \\ &= 3\pi \end{aligned}$$

An diesem Beispiel sehen wir also schon, dass Doppelintegrale sehr schnell sehr kompliziert werden können. In einigen Fällen können wir daraus entstehende Probleme dadurch lösen, dass wir die Abbildungen die wir integrieren bzw. die Flächen, über die wir integrieren, in einfachere verwandeln. Dabei hilft folgender Satz, der eine gewisse Ähnlichkeit mit der Substitutionsregel aus der Analysis I hat, der vom Beweis her aber den Rahmen des für uns möglichen sprengt.

Satz 5.2.4 (Transformationssatz). *Wir betrachten zwei offene Teilmengen $C, D \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine stetig–differenzierbare Funktion $\varphi : C \longrightarrow D$, die bijektiv ist, und für die die Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : D \longrightarrow C$ wieder stetig differenzierbar ist. Ist $A \subseteq C$ eine abgeschlossene Teilmenge, so gilt für jede stetige Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$:*

$$\iint\limits_{\varphi(A)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{A} f(\varphi(r,s))|\det(D(\varphi)(r,s))|\, drds$$

Dieser zunächst etwas verwirrend klingende Satz wird anschaulicher, wenn wir ihn an einem Beispiel erklären:

Beispiel 5.2.7. Wir wollen die Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2$ über die Fläche

$$A = \{(x,y)|x \geq 0, y \geq 0,\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

also einen Ausschnitt eines konzentrischen Kreisrings integrieren.
Der direkte Ansatz ist möglich aber kompliziert. Sattdessen benutzen wir obigen Satz und betrachten die Transformation auf **Polarkoordinaten**, also die Abbildung

$$\varphi : [1,2] \times [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow A$$

mit $\varphi(r,s) = (r\cos(s), r\sin(s))$. Wir wissen schon, dass die Transformation auf Polarkoordinaten lokal umkehrbar mit stetig differenzierbarer Inversen ist. In unserem Fall überzuegen wir uns sogar, dass φ das Rechteck $R = [1,2] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ tatsächlich bijketiv auf die Fläche A abbildet. Um den Satz anzuwenden müssten wir eigentlich geeignete offen Umgebenung von R und A finden, aber wir überlassen es dem Leser, sich davon zu überzeugen, dass das möglich ist. Wir haben

$$D(\varphi)(r,s) = \begin{pmatrix} \cos(s) & -r\sin(s) \\ \sin(s) & r\cos(s) \end{pmatrix}$$

und damit

$$|\det(D(\varphi)(r,s))| = r$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
\iint\limits_A (x^2+y^2)\,dxdy &= \int\limits_1^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} ((r\cos(s))^2 + (r\sin(s))^2) \cdot r\,dsdr \\
&= \int\limits_1^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} r^3\,dsdr \\
&= \int\limits_1^2 \tfrac{\pi}{2} r^3\,dr \\
&= \left[\tfrac{\pi}{8} r^4\right]_{r=1}^2 \\
&= \tfrac{15}{8}\pi
\end{aligned}$$

Bemerkung 5.2.2. Die Transformation auf Polarkoordinaten wird in der Regel nit in der in Beispiel 5.2.7 gegeben Ausführlichkeit angegeben sondern direkt als Koordinatenumrechnung:

$$x = r\cdot\cos(s), \quad y = r\cdot\sin(s), \quad dxdy = r\cdot drds$$

Die Umrechnung der Grenzen ergibt sich dann aus den Bedingungen an die Menge A:
Setzen wir in $1 \le x^2+y^2 \le 4$ die neuen Koordinaten ein, so wird diese Gleichung zun

$$1 \le (r\cdot\cos(s))^2 + (r\cdot\sin(s))^2 \le 4$$

also zu

$$1 \le r^2\cdot\cos^2(s) + r^2\cdot\sin^2(s) \le 4$$

und damit zu

$$1 \le r^2\cdot(\cos^2(s)+\sin^2(s)) = r^2 \le 4$$

Da r (als Abstand) nicht negativ sein darf, ergibt sich daraus

$$1 \le r \le 2$$

Aus dem Begindungen $x \ge 0$ und $y \ge 0$ ergibt sich für den Winkel s:

$$0 \le s \le \frac{\pi}{2}$$

Ganz allgemein kann das für eine Transformation auf Polarkoordinaten verwendet werden. Wir betrachten dazu eine Menge

$$A = \{(x, y) |\, b^2 \leq x^2 + y^2 \leq B^2\}$$

(mit $b \geq 0, B > b$). Der Transformationssatz wird dann oft in folgender Notation als Substitution formuliert:
Wir setzen

$$x = r\cos(s), \quad y = r\sin(s), \quad dxdy = rdrds$$

mit den Grenzen $b \leq r \leq B$, $0 \leq s \leq 2\pi$ und wenden den Transformationssatz in der Form

$$\iint\limits_A f(x, y)dxdy = \int\limits_b^B \int\limits_0^{2\pi} f(r\cos(s), r\sin(s)) \cdot r\,drds$$

an.

Beispiel 5.2.8. Wir wollen die Funktion $f(x, y) = x + y$ über die Fläche

$$A = \{(x, y)|x \geq 0, y \geq 0,\, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

also eine Viertelkreisscheibe integrieren.
Auch hier ist ein direkter Ansatz umständlich, und wir betrachten wiederum die Transformation auf Polarkoordinaten: Transformation auf Polarkoordinaten, also die Abbildung

$$\varphi : [0, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow A$$

mit $\varphi(r, s) = (r\cos(s), r\sin(s))$. Hier haben wir nun tatsächlich ein gewisses Problem, denn diese „Transformation" ist jetzt nicht mehr bijektiv. In der Tat gilt etwa $\varphi(0, 0) = (0, 0) = \varphi(0, 1)$. Allerdings ist die Einschränkung auf $[\varepsilon, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ für jedes $\varepsilon > 0$ eine Transformation wie wir sie brauchen, und wir können uns leicht davon überzeugen, dass in dieser speziellen Situaton der Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ erlaubt ist. Damit haben wir wieder

$$\begin{aligned}
\iint\limits_A (x + y)\, dxdy &= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (r\cos(s) + r\sin(s))\, dsdr \\
&= \int\limits_0^1 [r \cdot (\sin(s) - \cos(s))]_{s=0}^{\frac{\pi}{2}}\, dr \\
&= \int\limits_0^1 2r\, dr \\
&= 1
\end{aligned}$$

Aus diesem Grund werden wir auch dann, wenn der Punkt $(0, 0)$ in einem kreisförimgen oder kreisringförmigen Gebiet enthalten ist, die Transformation auf Polarkoordinaten, also die Koordinatenumrechnung

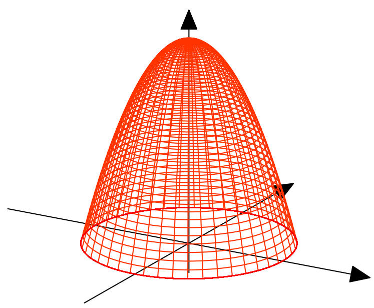
$$x = r \cdot \cos(s), \quad y = r \cdot \sin(s), \quad dxdy = r \cdot drds$$

verwenden.

Beispiel 5.2.9. Wir wollen das Volumen, das durch die Rotationsfläche $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$ über der Kreisscheibe

$$A = \{(x, y) |\, x^2 + y^2 \le 9\}$$

definiert wird, berechnen.



$z = f(x, y)$

Abbildung 5.2: Paraboloidvolumen

Auch hier empfiehlt sich eine Transformation auf Polarkoordianten

$$\varphi : [0, 3] \times [0, 2\pi] \longrightarrow A$$

mit $\varphi(r, s) = (r\cos(s), r\sin(s))$, also mit der vereinfachten Notation

$$x = r\cos(s), \quad y = r\sin(s), \quad dxdy = rdrds$$

Hier tritt das Problem, das wir schon in Beispiel 5.2.8 gesehen haben, erneut auf (sogar doppelt), denn diese Koordinatentransformation ist keine Koordinatentransformation im eigentlich Sinne (da nicht nur $\varphi(0, s) = \varphi(0, s')$ für alle s, s' sondern auch noch $\varphi(r,0) = \varphi(r,2\pi)$. Wir überlassen es dem Leser, sich zu vergewissern, dass hier ein zulässiger Grenzübergang durchgeführt wurde, und erhalten daher

$$\begin{aligned}
\iint\limits_A (9-x^2-y^2)\,dxdy &= \int\limits_0^3 \int\limits_0^{2\pi} (9-(r\cos(s))^2+(r\sin(s))^2)\cdot r\,dsdr \\
&= \int\limits_0^3 \int\limits_0^{9r-2\pi} r^3\,dsdr \\
&= \int\limits_0^3 2\pi(9r-r^3)\,dr \\
&= \left[9\pi r^2 - \tfrac{\pi}{2}r^4\right]_{r=0}^3 \\
&= \tfrac{81\pi}{2}
\end{aligned}$$

Die Transformation auf Polarkoordinaten ist sicherlich die wichtigste Transformation für uns. Deshalb wollen wir sie speziell notieren. Dazu setzen wir

$$V := (0,\infty)\times(0,2\pi), \qquad U = \{(x,y)|\, x<0 \text{ oder } x\geq 0 \text{ und } y\neq 0\}$$

Dann ist

$$\varphi : V \longrightarrow U$$

mit $\varphi(r,s) = (r\cos(s), r\sin(s))$ eine Transformation, die die Voraussetzungen des Satzes erfüllt, und es gilt

Regel 5.2.5. *Sind $A \subseteq U$ und $B \subseteq V$ abgeschlossene Teilmengen mit $\varphi(B) = A$, so gilt*

$$\begin{aligned}
\iint\limits_A f(x,y)\,dxdy &= \iint\limits_B f(rcos(s), r\sin(s))\cdot r\,dsdr \\
&= \iint\limits_B f(rcos(s), r\sin(s))\cdot r\,drds
\end{aligned}$$

Bemerkung 5.2.3. Die Grenzfälle, die in den Beispielen 5.2.8 und 5.2.9 behandelt wurden, müssen immer separat betrachtet werden. Für solche Situationen kann keine allgemein gültige Regel aufgestellt werden.

Beispiel 5.2.10. Wir wollen jetzt noch das Integral

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

berechnen, das eine wichtige Rolle in der Stastik und der Wahrscheinlichkeitslehre spielt. Zunächst scheint hier kein Bezug zu einem Doppelintegral und schon gar keiner zu Polarkoordinaten vorzuliegen. Mit den bekannten Methoden der Analysis in einer Veränderlichen ist dieses Integral nicht (oder zumindest nicht in offensichtlicher Weise) zu berechnen. Wir wenden daher einen Trick an, der angeblich auf den Mathematiker Poisson (1781-1840) zurückgeht und berechnen zunächst I^2, also das Quadrat unseres Integrals:

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\, dxdy \end{aligned}$$

Wobei wir hier zunächst Bemerkung 5.2.1 und dann die Beziehung $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$ ausgenutzt haben. Nun haben wir ein Doppelintegral, wenden die Transformation auf Polarkoordinaten wie in Regel 5.2.5 an und erhalten

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\, dxdy \\ &= \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} e^{-\frac{r^2\cos^2(s)+r^2\sin^2(s)}{2}} \cdot r\, dsdr \\ &= \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r\, dsdr \\ &= 2\pi \cdot \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r\, dr \\ &= -2\pi \int_{0}^{\infty} e^{-t}\, dt \\ &= -2\pi \lim_{T\to\infty} \left[-e^{-t}\right]_{t=0}^{T} \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

wobei wir in der drittletzten Zeile die Substitution $r(t) = \frac{t^2}{2}$ benutzt haben. Damit ergibt sich für das Integral, das wir eigentlich berechnen wollen (das sicherlich positiv ist)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \sqrt{2\pi}$$

Das Doppelintegral kann auch benutzt werden, um Flächen in der Ebene zu berechnen.

Regel 5.2.6. *Für den Inhalt* $\mathrm{area}(A)$ *der Fläche* $A \subseteq \mathbb{R}^2$ *gilt*

$$\mathrm{area}(A) = \iint\limits_A 1\, dxdy$$

Das ist klar, denn die Funktion $f(x,y) = 1$ begrenzt über A einen Körper der Dicke 1, so dass dessen Volumen (wertmäßig) mit der Fläche übereinstimmt.

Beispiel 5.2.11. Wir wollen die Fläche des Ellipsenstücks

$$A := \{(x,y) |\, x \geq 0, y \geq 0 \text{ und } 6 \leq 2x^2 + 3y^2 \leq 12\}$$

berechnen. Hierzu führen wir zunächst eine "gestreckte Polarkoordinatentransformation" durch, d.h. wir betrachten

$$\varphi : [1, \sqrt{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

mit $\varphi(r,s) = (\sqrt{3}r\cos(s), \sqrt{2}r\sin(s))$. Diese Abbildung hat als Bild die Fläche A und ist bijektiv und stetig differenzierbar mit stetig differenzierbarer Inversen (auf einer geeigneten Umgebung ..., siehe auch Beispiel 5.2.7). Es ist

$$D(\varphi)(r,s) = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\cos(s) & -\sqrt{3}r\sin(s) \\ \sqrt{2}\sin(s) & \sqrt{2}r\cos(s) \end{pmatrix}$$

als $|\det(D(\varphi)(r,s))| = \sqrt{6} \cdot r$, und damit gilt nach der Transformationsregel

$$\begin{aligned} \iint\limits_A dxdy &= \int\limits_1^{\sqrt{2}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{6} \cdot r\, dsdr \\ &= \int\limits_1^{\sqrt{2}} \left[\sqrt{6} \cdot r \cdot s\right]_{s=0}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \int\limits_1^{\sqrt{2}} \sqrt{6} \cdot \tfrac{\pi}{2} \cdot r\, dr \\ &= \left[\sqrt{6}\tfrac{\pi}{4} \cdot r^2\right]_{r=1}^{\sqrt{2}} \\ &= \tfrac{\pi}{4} \cdot \sqrt{6} \end{aligned}$$

Auch in dieser Situation können wir eine Notation mit Substitution benutzen

$$x = \sqrt{3}r\cos(s), \quad y = \sqrt{2}r\sin(s), \quad dxdy = \sqrt{6}rdrds$$

Die Integrationsgrenzen für die Integration nach r ermitteln sich jetzt direkt aus der Gleichung

$$6 \leq 2x^2 + 3y^2 \leq 12$$

die nach Einsetzen der substituierten Variablen übergeht in

$$6 \leq 2\left(\sqrt{3}r\cos(s)\right)^2 + 3\left(\sqrt{2}r\sin(s)\right)^2 \leq 12$$

also

$$6 \leq 6(\cos^2(s) + \sin^2(s)) \cdot r^2 \leq 12$$

Wegen $\cos^2(s) + \sin^2(s) = 1$ erhalten wir hieraus

$$6 \leq 6r^2 \leq 12$$

oder

$$1 \leq r \leq \sqrt{2}$$

Damit erhalten wir unmittelbar

$$\iint\limits_A dA = \int\limits_1^{\sqrt{2}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{6} \cdot r\, dsdr$$

Beispiel 5.2.12. Wir wollen die Fläche der Ellipse

$$E = \{(x, y) |\, 2x^2 + 3y^2 \leq 6\}$$

berechnen, und betrachten dazu wieder "elliptische Polarkoordinaten"

$$\varphi : [0, 1] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

mit $\varphi(r, s) = (\sqrt{3}r\cos(s), \sqrt{2}r\sin(s))$, führen also die Substitution

$$x = \sqrt{3}r\cos(s), \quad y = \sqrt{2}r\sin(s), \quad dxdy = \sqrt{6}rdrds$$

mit den Grenzen

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq s \leq 2\pi$$

durch. Wie schon im Beispiel 5.2.9 überzeugen wir uns davon, dass die mangelnde Bijketivität an den Rändern harmlos ist und erhalten deshalb aufgrund der Transformationsformel und mit den Rechnungen aus Beispiel

$$\begin{aligned} \iint\limits_A dxdy &= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{6} \cdot r\, dsdr \\ &= \sqrt{6} \cdot \pi \end{aligned}$$

Bemerkung 5.2.4. Bei Ellipsenflächen, also Flächen der Form

$$A = \{(x, y) |\, ax^2 + by^2 \leq c\}$$

mit fest vorgegebenen $a, b, c > 0$ bieten sich zwei Transformationen an:
Analog zu Beispiel 5.2.12 können wir die Transformation

$$\Phi_1 : [\,0, \sqrt{\frac{c}{ab}}\,] \times [\,0, 2\,\pi\,] \longrightarrow A$$

mit $\Phi_1(r, s) = (\sqrt{b}\cos(s), \sqrt{a}\sin(s))$ und $|\det((D)(\Phi_1)(r, s))\,| = \sqrt{ab} \cdot r$ betrachten.
Es ist aber genauso möglich mit der Transformation

$$\Phi_2 : [\,0, \sqrt{c}\,] \times [\,0, 2\,\pi\,] \longrightarrow A$$

mit $\Phi_2(r, s) = (\frac{1}{\sqrt{a}}\cos(s), \frac{1}{\sqrt{b}}\sin(s))$ und $|\det((D)(\Phi_2)(r, s))\,| = \frac{r}{\sqrt{ab}}$ zu arbeiten.

Beispiel 5.2.13. Wir wollen das Flächenstück

$$A = \{(x, y)|x \geq 0, y \geq 0,\ y \geq 2 - x \text{ und } x^2 + y^2 \leq 4\}$$

berechnen. Das können wir entweder direkt durch Doppelintegration machen oder etwas geschickter durch Betrachtung der beiden Flächen

$$B = \{(x, y)|x \geq 0, y \geq 0 \text{ und } x^2 + y^2 \leq 4\}$$

und

$$C = \{(x, y)|x \geq 0, y \geq 0 \text{ und } y \leq 2 - x\}$$

Dann gilt sicherlich $C \subseteq B$ und

$$\text{area}(A) = \text{area}(B) - \text{area}(C)$$

(es spielt hier keine Rolle, dass wir den inneren Rand von A abgezogen haben, da dieser offensichtlich Flächeninhalt 0 hat). Dabei ist C ein einfaches Dreieck, dessen Fläche sich als $\frac{2 \cdot s}{2} = 2$ berechnet (oder auch

$$\begin{aligned} \text{area}(C) &= \int_0^2 \int_0^{2-x} dy dx \\ &= \int_0^2 (2 - x)\, dx \\ &= 2 \qquad) \end{aligned}$$

und die Fläche von B berechnet sich wie in den obigen Beispielen am besten über Polarkoordinaten,

$$\begin{aligned} \operatorname{area}(B) &= \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\, ds dr \\ &= \int_0^2 r \cdot \tfrac{\pi}{2} \\ &= \pi \end{aligned}$$

und damit gilt

$$\operatorname{area}(A) = \pi - 2$$

Beispiel 5.2.14. Wir betrachten die Menge

$$A = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ und } |x| > \frac{1}{2},\ |y| > \frac{1}{2}\}$$

und die Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2$. Auch hier ist es zweckmäßig, die Berechnung von $\int_A f(x,y)dxdy$ in die Berechnung von zwei Integralen zu zerlegen. Dazu betrachten wir

$$\begin{aligned} B &= \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \\ C &= [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}] \times [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}] \end{aligned}$$

und erhalten

$$\int_A f(x,y)dxdy = \int_B f(x,y)dxdy - \int_C f(x,y)dxdy$$

wobei wir uns auch hier zunächst überlegen, dass es für den Wert des Integrals keinen Unterschied macht, wenn wir den inneren Rand nicht berücksichtigen. Es bietet sich nun an, $\int_B f(x,y)dxdy$ durch Polarkoordinatentransformation zu berechnen, und wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_A (x^2+y^2)dxdy &= \int_B (x^2+y^2)dxdy - \int_C (x^2+y^2)dxdy \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3 d\varphi dr - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (x^2+y^2)dxdy \\ &= \int_0^1 2 \cdot \pi \cdot r^3\, dr - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\tfrac{1}{12} + y^2\right)\, dy \\ &= \left[\tfrac{\pi \cdot r^4}{2}\right]_0^1 - \left[\tfrac{y}{12} + \tfrac{y^3}{3}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &= \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{1}{6} \end{aligned}$$

Definition 5.2.2. Der **Schwerpunkt** einer Fläche A mit $\operatorname{area}(A) > 0$ ist der Punkt $S = (p_S, q_S)$ mit den Kooridanaten

$$p_S = \frac{1}{\operatorname{area}(A)} \cdot \iint_A x\,dxdy, \qquad q_S = \frac{1}{\operatorname{area}(A)} \cdot \iint_A y\,dxdy$$

Beispiel 5.2.15. Wir wollen den Schwerpunkt der Einheitskreisscheibe

$$E = \{(x,y) |\, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

berechnen. Hierfür gilt

$$\begin{aligned} p_S &= \tfrac{1}{\pi} \cdot \iint_A x\,dxdy \\ &= \tfrac{1}{\pi} \cdot \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \cos(s)\,dsdr \\ &= \tfrac{1}{\pi} \cdot \int_0^1 [-r^2 \sin(s)]_{s=0}^{2\pi}\,dr \\ &= \tfrac{1}{\pi} \cdot \int_0^1 0\,dr \\ &= 0 \end{aligned}$$

und analog

$$q_S = 0$$

Der Kreis hat also, wie nicht anders zu erwarten, seinen Schwerpunkt im Punkt $(0,0)$

Bemerkung 5.2.5. Der Schwerpunkt lässt sich häufig einfacher mit Polarkoordianten berechnen. Daher notieren wir die Formeln für diesen Fall: Ist A eine Fläche (in kartesischen Koordinaten), die der Fläche B in Polarkoordinaten entspricht, so gilt für den Schwerpunkt $S = (p_S, q_S)$ von A:

$$\begin{aligned} p_S &= \iint_B r^2 \cos(s)\,dsdr \\ q_S &= \iint_B r^2 \sin(s)\,dsdr \end{aligned}$$

Aufgabe 88. Berechnen Sie das Doppelintegral

$$\int_1^3 \int_\pi^{2\pi} y \cos(x)\,dxdy$$

Aufgabe 89. Berechnen Sie das Doppelintegral

$$\int_0^2 \int_0^3 xye^{xy^2}\,dxdy$$

Aufgabe 90. Berechnen Sie das Doppelintegral

$$\int_0^2 \int_{-1+\frac{y}{2}}^{1-\frac{y}{2}} \left(xy - x^2 + y^2\right) dxdy$$

Aufgabe 91. Berechnen Sie das Integral

$$\int_A xy\,dxdy$$

wobei $A = \{(x, y)|\, x^2 + y^2 \leq 4\}$

Aufgabe 92. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche

$$A = \{(x, y)|\, 15 \leq 3x^2 + 5y^2 \leq 45\}$$

Aufgabe 93. Berechnen sie den Flächeninhalt der allgemeinen Ellipse

$$E = \{(x, y)|\, a^2x^2 + b^2y^2 \leq ab\}$$

5.3 Dreifachintegrale

Zur Definition von Doppelintegralen haben wir Satz 5.1.1 herangezogen, der zeigt, dass für eine stetige Funktion $f(x,y)$ in zwei Variablen, die auf $[a,b] \times [c,d]$ definiert ist, durch $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ eine stetige Funktion definiert wird. Damit konnten wir das Doppelintegral $\int\int f(x,y)\,dxdy$ als das Integral $\int F(y)dy$ erklären. In Abschnitt 5.1 haben wir auch noch das allgemeinere Resultat 5.1.2 kennengelernt, das unter anderem folgendes besagt: Ist $f(x,yz)$ eine stetige Funktion in drei Variablen, die auf $[a,b] \times [c,d] \times [e,f]$ definiert ist, so wird durch

$$F(y,z) := \int\limits_a^b f(x,y,z)\,dx$$

eine stetige Funktion in den Variablen y und z auf definiert $[c,d] \times [e,f]$ definiert. Daher können wir die Ergebnisse des vorangegangenen Abschnitts 5.2 anwenden und das Doppelintegral

$$\int\limits_e^f \int\limits_c^d F(y,z)dydz$$

betrachten.

Definition 5.3.1. Der Ausdruck

$$\int\limits_e^f \int\limits_c^d \int\limits_a^b f(x,y,z)\,dxdydz := \int\limits_e^f \int\limits_c^d F(y,z)dydz$$

heißt **Dreifachintegral** von $f(x,y,z)$ über $[a,b] \times [c,d] \times [e,f]$.

Beispiel 5.3.1. Wir betrachten $f(x,y,z) = xy^2z^3$ auf $[0,1] \times [0,2] \times [0,3]$.

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^1\int_0^2\int_0^3 f(x,y,z)\,dxdydz &= \int_0^1\int_0^2 \left(\int_0^3 xy^2z^3\,dx\right) dydz \\
&= \int_0^1\int_0^2 \left[\tfrac{1}{2}x^2y^2z^3\right]_{x=0}^1 dydz \\
&= \int_0^1\int_0^2 \tfrac{1}{2}y^2z^3\,dydz \\
&= \int_0^1 \left[\tfrac{1}{6}y^3z^3\right]_{y=0}^2 dz \\
&= \int_0^1 \tfrac{4}{3}z^3\,dz \\
&= \left[\tfrac{1}{3}z^4\right]_{z=0}^3 \\
&= 27
\end{aligned}$$

Wie schon im Fall von Doppelintegralen berechnet sich also auch das Dreifachintegral durch sukkzessives Anwenden der Integrationstheorie in einer Variablen.

Im Fall des Doppelintegrals haben wir auch eine Beschreibung mit Partialsummen kennengelernt. Ein ähnlicher Ansatz besteht für Dreifachintegrale: Dazu überdecken wir hier $[a,b]\times[c,d]\times[e,f]$ mit kleinen Quadern indem wir für positive ganze Zahlen n,m,l und $0\le i\le n$, $0\le j\le m$ und $0\le k\le l$ den Quader

$$A_{i,j,k} := [a_i,b_i]\times[c_j,d_j]\times[e_k,f_k]$$

mit

$$\begin{array}{ll}
a_i = a + i\cdot\frac{b-a}{n} & b_i = a+(i+1)\cdot\frac{b-a}{n} \\
c_j = c + j\cdot\frac{d-c}{m} & d_j = c+(j+1)\cdot\frac{d-c}{m} \\
e_k = e + k\cdot\frac{f-e}{l} & f_k = e+(k+1)\cdot\frac{f-e}{l}
\end{array}$$

betrachten. Dann überdecken die $A_{i,j,k}$ den Quader $[a,b]\times[c,d]\times[e,f]$, und wir können dei Partialsummen

$$\zeta_{n,m,l} := \sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(a_i,c_j,e_k)(b_i-a_i)(d_j-c_j)(f_k-e_k)$$

definieren. Wie für Doppelintegrale erhalten wir

Satz 5.3.1. *Es gilt*

$$\lim_{n,m,l\to\infty}\zeta_{n,m,l}=\int_e^f\int_c^d\int_a^b f(x,y,z)\,dxdydz$$

Bemerkung 5.3.1. Satz 5.3.1 besagt, dass das Dreifachintegral wieder als eine Art „Volumen“ aufgefasst werden kann, nämlich als der Inhalt eines vierdimensionalen Körpers, der über die „Grundfläche“ $[a,b]\times[c,d]\times[e,f]$ von der Funktion $f(x,yz)$ begrenzt wird.

Aus der absoluten Konvergenz der Partialsummen folgt auch wieder

Satz 5.3.2. *Es gilt*

$$\begin{array}{rcll}
\int_e^f\int_c^d\int_a^b f(x,y,z)\,dxdydz & = & \int_e^f\int_a^b\int_c^d f(x,y,z)\,dydxdz & = \\
\int_c^d\int_a^b\int_e^f f(x,y,z)\,dzdxdy & = & \int_a^b\int_e^f\int_c^d f(x,y,z)\,dydzdx & = \\
\int_c^d\int_e^f\int_a^b f(x,y,z)\,dxdzdy & = & \int_a^b\int_c^d\int_e^f f(x,y,z)\,dzdxdy &
\end{array}$$

Bemerkung 5.3.2. Der Satz besagt, dass wir für die Integration immer die für uns günstigste Reihenfolge auswählen können.

Beispiel 5.3.2. Wir betrachten die Funktion $f(x,y,z)=xe^{xz}+y$ auf $[0,3]\times[0,2]\times[0,1]$. In diesem Fall ist es günstiger, die Integration nach z vor der Integration nach x durchzuführen. Es gilt nämlich für festes x und y nach der Substitutionsregel

$$\begin{array}{rcl}
\int_0^1 (xe^{xz}+y)\,dz & = & \int_0^1 xe^{xz}\,dz+\int_0^1 y\,dz \\
& = & \int_0^x e^z\,dz+\int_0^1 y\,dz \\
& = & e^x-1+y
\end{array}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\int_0^1\int_0^2\int_0^3 f(x,y,z)\,dxdydz &= \int_0^3\int_0^2\int_0^1 (xe^{xz}+y)\,dzdydx \\
&= \int_0^3\int_0^2 (e^x-1+y)\,dydz \\
&= \int_0^3 \left[ye^x - y + \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^2 dx \\
&= \int_0^3 2e^x\,dx \\
&= [2e^x]_{x=0}^3 \\
&= 2e^3-2
\end{aligned}$$

Wie schon im Fall von Doppelintegralen haben wir auch bei Dreifachintegralen das Problem, dass das gewünschte Integrationsgebiet oft nicht von der Form eines Quaders $[a,b]\times[c,d]\times[e,f]$ ist. Hier können wir uns auf zweierlei Art behelfen: Entweder wir benutzen den Partialsummenansatz und wir definieren das Integral auf allen Gebieten, die sich mit kleinen Quadern vollständig ausschöpfen lassen als den Grenzwert $\lim\limits_{n,m,l\to\infty}\zeta_{n,m,l}$ der Partialsummen, falls dieser exsitiert, oder wir verallgemeinern Satz 5.1.2, wie wir das mit Satz 5.1.1 schon bei Doppelintegralen getan haben:
Dazu betrachten wir zunächst eine stetige Funktion $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ in drei Variablen, zwei abgeschlossene Intervalle $[a,b]$ und $[c,d]$ und zwei stetige Funktionen

$$u, o : [a,\, b]\times[c,\, d] \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit $u(y,z)\le o(y,z)$ für alle $(y,z)\in[a,b]\times[cd]$, und so, dass

$$A := \{x,y,z)|\,(y,z)\in[a,b]\times[cd],\; u(y,z)\le x\le o(y,z)\}\subseteq U$$

Wir definieren

$$F(y,z) := \int_{u(y,z)}^{o(y,z)} f(x,y,z)\,dx$$

Dann ist auch $F(y,z)$ eine stetige Funktion und daher auch das Doppelintegral $\iint F(y,z)\,dydz$ erklärt.

Definition 5.3.2. Der Ausdruck

$$\iiint\limits_A f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_c^d \int\limits_a^{b)} F(y,z)\,dydz = \int\limits_c^d \int\limits_a^b \int\limits_{u(y,z)}^{o(y,z)} f(x,y,z)\,dxdydz$$

heißt Dreifachintegral von $f(x,y,z)$ über A.

Beispiel 5.3.3. Wir betrachten $f(x,y,z) = xyz$ auf

$$A = \{(x,y,z)|\,(y,z) \in [-1,1] \times [-1,1]| - 2 + y + z \leq x \leq 2 - y - z\}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_A f(x,y,z)\,dxdydz &= \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-2+y+z}^{2-y-z} xyzdxdydz \\
&= \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \left[yz\tfrac{x^2}{2}\right]_{-2+y+z}^{2-y-z} \\
&= \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} yz(2-y-z)^2\,dydz \\
&= \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} (yz(2-z)^2 - 2y^2z(2-z) + y^3z)\,dydz \\
&= \int\limits_{-1}^{1} \left[\tfrac{y^2}{2}z(2-z)^2 - \tfrac{2y^3}{3}z(2-z) + \tfrac{y^4}{4}z\right]_{y=-1}^{1} dz \\
&= \int\limits_{-1}^{1} -\tfrac{4}{3}z(2-z)\,dz \\
&= \left[\tfrac{4}{9}z^3 - \tfrac{8}{6}z^2\right]_{z=-1}^{1} \\
&= \tfrac{8}{9}
\end{aligned}$$

Beispiel 5.3.4. Wir betrachten die Funktion $f(x,y,z) = 2xz$ über dem Zylinder

$$A = \{(x,y,z)|\,z \in [0,2], x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Diese Menge scheint nicht die für uns wünschenswerte Form zu haben. Wir können sie aber umschreiben und erhalten

$$A = \{(x,y,z)|\,z \in [0,2], y \in [-1,1] \text{ und } \sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_A f(x,y,z)\,dxdydz &= \int\limits_0^2 \int\limits_{-1}^1 \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 2xz\,dxdydz \\
&= \int\limits_0^2 \int\limits_{-1}^1 [x^2 z]_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\,dydz \\
&= \int\limits_0^2 \int\limits_{-1}^1 0\,dydz \\
&= 0
\end{aligned}$$

Auch diese Art von Berandung ist aber noch nicht ausreichend für viele praktische Zwecke. Schon eine so einfache Mengen wie

$$A := \{(x,y,z) |\, x^2 + y^2 + z^2 \le 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

also die Einheitskugel, lässt sich damit nicht mehr beschreiben. Natürlich können wir jetzt hingehen, die Einheitskugel durch kleine Quader ausschöpfen und Integrale über der Einheitskugel mit Hilfe von Grenzwerten berechnen. Wir können aber auch die Argumente aus dem Beweis von Satz 5.1.2 noch ein wenig strecken und folgende Situation betrachten:
Wir betrachten wieder eine stetige Funktion $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ in drei Variablen, und zwei stetige Funktionen $u(z), o(z)$ in einer Veränderlichen z mit $u(z) \le o(z)$ sowie zwei stetige Funktionen $r(y,z), s(y,z)$ in zwei Veränderlichen y und z mit $r(y,z) \le s(y,z)$ und ein Intervall $[a,b]$, so daß gilt:

$$A := \{(x,y,z) |\, z \in [a,b],\ u(z) \le y \le o(z) \text{ und } r(y,z) \le x \le s(y,z)\} \subseteq U$$

Dann ist auch in dieser Situation die Funktion

$$F(y,z) := \int\limits_{u(y,z)}^{o(y,z)} f(x,y,z)\,dx$$

stetig, und damit ist, wie wir schon im Abschnitt 5.2 gesehen haben, auch das Doppelintegral

$$\int\limits_a^b \int\limits_{u(z)}^{o(z)} F(y,z)\,dydz$$

erklärt.

Definition 5.3.3. Der Ausdruck

$$\iiint\limits_A f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_a^b \int\limits_{u(z)}^{o(z)} F(y,z)\,dydz = \int\limits_a^b \int\limits_{u(z)}^{o(z)} \int\limits_{r(y,z)}^{s(y,z)} f(x,y,z)\,dxdydz$$

heißt Dreifachintegral von $f(x,y,z)$ über A.

Beispiel 5.3.5. Wir betrachten wieder die Kugel

$$A = \{\ (x,y,z)|\, x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$$

Sie lässt sich auch schreiben als

$$\begin{aligned} A \;=\; & \Big\{(x,y,z)|\, z \in [-1,1],\ -\sqrt{1-z^2} \leq y \leq \sqrt{1-z^2} \\ & \quad \text{und } -\sqrt{1-z^2-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-z^2-y^2}\Big\} \end{aligned}$$

hat also die gewünschte Form. Wir wollen das Integral von $f(x,y,z=1$ auf der Kugel berechnen.

$$\begin{aligned} &\iiint\limits_A f(x,y,z)\quad dx \quad dydz \\ &= \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \int\limits_{-\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{1-y^2-z^2}} 1\,dxdydz \\ &= \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} [x]_{x=-\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{1-y^2-z^2}} \\ &= \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} 2\sqrt{1-y^2-z^2}\,dydz \\ &= \int\limits_{-1}^{1} \left[y\sqrt{1-z^2-y^2} + (1-z^2)\arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{1-z^2}}\right)\right]_{y=-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \\ &= \int\limits_{-1}^{1} (1-z^2)\pi\,dz \\ &= \left[z\cdot\pi - \frac{z^3}{3}\cdot\pi\right]_{z=-1}^{1} \\ &= \frac{4}{3}\cdot\pi \end{aligned}$$

Wie wir also schon an diesem recht einfachen Beispiel sehen, werden Dreifachintegrale sehr schnell sehr kompliziert. Manchmal hilft aber auch hier eine Koordinatentransformation.

Satz 5.3.3 (Transformationssatz). *Wir betrachten zwei offene Teilmengen $C, D \subseteq \mathbb{R}^3$ und eine stetig–differenzierbare Funktion $\varphi : C \longrightarrow D$, die bijektiv ist, und für die die Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : D \longrightarrow C$ wieder stetig differenzierbar ist. Ist $A \subseteq C$ eine abgeschlossene Teilmenge, so gilt für jede stetige Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$:*

$$\iiint\limits_{\varphi(A)} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{A} f(\varphi(r,s,t))|\det(D(\varphi)(r,s,t))|\,drdsdt$$

Auch das wollen wir uns wieder an einem Beispiel klarmachen:

Beispiel 5.3.6. Wir betrachten die Funktion $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ auf

$$A = \{(x,y,z)|\, x \geq 0, y \geq 0,\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \text{ und } z \in [0,2]\}$$

Hier empfiehlt sich eine Tranformation auf Zylinderkoordinaten, also die Betrachtung von

$$\varphi[1,2] \times [0, \frac{\pi}{2}] \times [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

mit $\varphi(r,s,t) = (r\cos(s), r\sin(s), t)$. Dann ist φ eine Bijektion auf A (wie schon im zweidimensionalen überlassen wir die Ausdehnung von φ auf geeignete offene Umgebungen, die die Anwendung des Satzes erst erlauben, dem Leser) mit

$$D(\varphi)(r,s,t) = \begin{pmatrix} \cos(s) & -r\sin(s) & 0 \\ \sin(s) & r\cos(s) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

also $|\det(D(\varphi)(r,s,t))| = r$ und damit

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_A f(x,y,z)\,dxdydz &= \int\limits_0^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_1^2 (r^2\cos^2(s) + r^2 sin^2(s) + t^2) \cdot r\,drdsdt \\
&= \int\limits_0^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_1^2 (r^2 + t^2)\ drdsdt \\
&= \int\limits_0^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\tfrac{r^3}{3} + rt^2\right]_{r=1}^2 \\
&= \int\limits_0^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\tfrac{7}{3} + t^2\right) dsdt \\
&= \int\limits_0^2 \tfrac{\pi}{2} \left(\tfrac{7}{3} + t^2\right) dt \\
&= \tfrac{22}{3}\pi
\end{aligned}$$

Neben Zylinderkoordinaten sind häufig auch noch Kugelkoordinaten von Interesse.

Beispiel 5.3.7. Wir betrachten nochmals das Integral von $f(x, y, z) = 1$ auf

$$A = \{\ (x, y, z) | \, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

in diesem Fall machen wir die Transformation

$$\varphi : [0, 1] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

mit $\varphi(r, s, t) = (r \sin(s) \cos(t), r \sin(s) \sin(t), r \cos(s))$. Auch hier ist wieder zu beachten, dass diese Abbildung eigentlich keine Transformation in unserem Sinn ist, da etwa $\varphi(0, 0, 0) = \varphi(0, \pi, 2\pi)$, aber auch hier überlassen wir die Grenzübergänge $r \to 0$, $s \to \pi$ und $t \to \pi$ dem Leser. Es ist

$$D(\varphi)(r, s, t) = \begin{pmatrix} \sin(s) \cos(t) & r \cos(s) \cos(t) & -r \sin(s) \sin(t) \\ \sin(s) \sin(t) & r \cos(s) \sin(t) & r \sin(s) \cos(t) \\ \cos(s) & -r \sin(s) & 0 \end{pmatrix}$$

also $|\det(D(\varphi)(r, s, t))| = r^2 \sin(s)$ und damit

$$\begin{aligned} \iiint\limits_A f(x, y, z)\, dxdydz &= \int\limits_0^1 \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} r^2 \sin(s) dtdsdr \\ &= \int\limits_0^1 \int\limits_0^\pi 2\pi r^2 \sin(s) dsdr \\ &= \int\limits_0^1 [-2\pi r^2 \cos(s)]\, s = 0^\pi \\ &= \int\limits_0^1 4\pi r^2\, dr \\ &= \tfrac{4}{3}\pi \end{aligned}$$

Bemerkung 5.3.3. Wie beim Doppelintegral benutzen wir auch beim Dreifachintegral in der Regel eine vereinfachte Notation.
So wird etwa die Transformation auf Zylinderkoordinaten wie in Beispiel 5.3.6 in folgender Form beschrieben:

$$x = r \cdot \cos(s), \quad y = r \cdot \sin(s), \quad z = t, \quad dxdydz = r \cdot drdsdt$$

wobei

$$1 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq s \leq 2\pi, \quad 0 \leq t \leq 2$$

Entsprechend schreiben wir die Transformation auf Kugelkoordinaten als

$$x = r\cdot\sin(s)\cdot\cos(t), \quad y = r\cdot\sin(s)\cdot\sin(t), \quad z = r\cdot\cos(s), \quad dxdydz = r^2\cdot\sin(s)\cdot drdsdt$$

wobei

$$0 \le r \le 1, \quad 0 \le s \le \pi, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

Die Anwendungen des Dreifachintegrals sind ähnlich zu denen des Doppelintegrals. So erlaubt das Dreifachintegral etwa die Volumenberechnung von Körpern in $\mathbb{R}^3$.

Regel 5.3.4. *Für den Inhalt* $\mathrm{vol}(A)$ *des Körpers* $A \subseteq \mathbb{R}^3$ *gilt*

$$\mathrm{vol}(A) = \iiint\limits_A dxdydz$$

Beispiel 5.3.8. Wir wollen das Volumen des Ellipsoids

$$A = \{(x, y, z) |\, 4x^2 + 9y^2 + 25z^2 \le 900\}$$

berechnen. Dazu betrachten wir "elliptische Koordinaten", also

$$\varphi : [0, 1] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

mit $\varphi(r, s, t) = (15r\sin(s)\cos(t), 10r\sin(s)\sin(t), 6r\cos(s))$. Auch hier überlassen wir die Frage der Grenzübergänge dem Leser. Ist das zufriedenstellend geklärt, so gilt

$$|\det(D(\varphi)(r, s, t))| = 900r^2\sin(s)$$

und damit

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(A) &= \iiint\limits_A dxdydz \\
&= \int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi} 900r^2\sin(s)dtdsdr \\
&= \int_0^1\int_0^\pi 1800\pi r^2\sin(s)dsdr \\
&= \int_0^1 [-1800\pi r^2\cos(s)]\, s = 0^\pi \\
&= \int_0^1 3600\pi r^2\, dr \\
&= 1200\pi
\end{aligned}$$

Eine weitere interessante Anwendung ist die Berechnung des Schwerpunktes:

Definition 5.3.4. Der **Schwerpunkt** eines Körpers A mit $\mathrm{vol}(A) > 0$ ist der Punkt

$$S = (o_S, p_S, q_S)$$

mit den Koordinaten

$$\begin{aligned} o_S &= \tfrac{1}{\mathrm{vol}(A)} \cdot \iiint\limits_A x\, dxdydz \\ p_S &= \tfrac{1}{\mathrm{vol}(A)} \cdot \iiint\limits_A y\, dxdydz \\ q_S &= \tfrac{1}{\mathrm{vol}(A)} \cdot \iiint\limits_A z\, dxdydz \end{aligned}$$

Beispiel 5.3.9. Wir wollen nun den Schwerpunkt des Zylinders

$$A = \{(x, y, z) |\, z \in [0, 2],\ x^2 + y^2 \leq 1\}$$

ermitteln. Wie in Beispiel 5.3.6 benutzen wir Zylinderkoordinaten, betrachten also

$$\varphi[0, 1] \times [0, 2\pi] \times [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

mit $\varphi(r, s, t) = (r\cos(s), r\sin(s), t)$ und $|\det D(\varphi)(r, s, t)| = r$. Sein Volumen ist 2π, wie man leicht nachrechnet. Damit gilt

$$\begin{aligned} o_S &= \tfrac{1}{2\pi} \cdot \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^2 \cos(s) dtdsdr \\ &= \tfrac{1}{2\pi} \cdot \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2r^2 \cos(s) dsdr \\ &= \tfrac{1}{2\pi} \cdot \int_0^1 \left[2r^2 \sin(s)\right]_{s=0}^{2\pi}\, dr \\ &= \tfrac{1}{2\pi} \cdot \int_0^1 0\, dr \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ähnlich zeigt man

$$p_S = 0$$

Schließlich

$$\begin{aligned}
o_S &= \tfrac{1}{2\pi}\cdot\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^2 rt\,dtdsdr\\
&= \tfrac{1}{2\pi}\cdot\int_0^1\int_0^{2\pi}\left[r\tfrac{t^2}{2}\right]_{t=0}^{2} dsdr\\
&= \tfrac{1}{2\pi}\cdot\int_0^1\int_0^{2\pi} 2rdsdr\\
&= \tfrac{1}{2\pi}\cdot\int_0^1 4\pi r\,dr\\
&= \tfrac{1}{2\pi}\cdot\left[r\pi\tfrac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{1}\\
&= 1
\end{aligned}$$

so dass also der Zylinder seinen Schwerpunkt im Punkt $(0,0,1)$ hat.

Bemerkung 5.3.4. Auch bei der Arbeit mit Zylinderkoordinaten und mit Kugelkoordinaten bietet sich eine vereinfachte Notation mit Koordinatensubstituion an:
Ist $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^2|\,b\le x^2+y^2\le B,\ c\le z\le ZC$ mit $0\le b<B$, so substituieren wir

$$x=r\cos(s),\quad y=r\sin(s),\quad z=z,\quad dA=r\,dxdydz$$

mit den Grenzen $\sqrt{b}\le r\le\sqrt{B}$, $0\le s\le 2\pi$ und $c\le z\le C$ und erhalten

$$\iiint_A f(x,y,z)dA=\int_c^C\int_{\sqrt{b}}^{\sqrt{B}}\int_0^{2\pi} f(r\cos(s),r\sin(s),z)\cdot r\,dsdrdz$$

Ist $K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^2|\,b\le x^2+y^2+z^2\le B\}$, so substituieren wir

$$x=r\sin(s)\cos(t),\quad y=r\sin(s)\sin(t),\quad z=r\cos(s),\quad dA=r^2\sin(s)\,dxdydz$$

mit den Grenzen $\sqrt{b}\le r\le\sqrt{B}$, $0\le s\le\pi$ und $0\le t\le 2\pi$ und erhalten

$$\iiint_A f(x,y,z)dA=\int_{\sqrt{b}}^{\sqrt{B}}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(r\sin(s)\cos(t)),r\sin(s)\sin(t),r\cos(s))\cdot r^2\sin(s)\,dsdrdz$$

Aufgabe 94. Berechnen Sie das Integral

$$\int_1^2\int_0^3\int_1^3\big(x^2+xy+xy+yz\big)\,dxdydz$$

Aufgabe 95. Berechnen Sie das Integral

$$\int_1^2 \int_0^\pi \int_1^3 (xyz + x\cos(y) + z\sin(y))\, dxdydz$$

Aufgabe 96. Berechnen Sie das Volumen $\mathrm{vol}(Z_{a,b})$ des Zylinders

$$Z_{a,b} = \{(x,y,z)|\, z \in [0,a],\; x^2 + y^2 \leq b\}$$

für alle $a, b > 0$.

Aufgabe 97. Berechnen Sie das Volumen von

$$A = \{(x,y,z)|\, 6 \leq x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 18\}$$

Aufgabe 98. Berechnen Sie das Volumen und den Schwerpunkt von

$$A = \{(x,y,z)|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \text{ und } z \geq 0\}$$

Aufgabe 99. Berechnen Sie das Volumen von

$$K_{a,b} = \{(x,y,z)|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 \text{ und } z \geq b\}$$

für alle a, b mit $0 \leq b \leq a$.