a) $\frac{3x^4-9x^2+6x}{x^3-x} = ?$

b) $\frac{x\cdot(x+x^{3\cdot 2})^2}{x^{(1+4)^2}} = ?$

zu a): $\frac{3x^4-9x^2+6x}{x^3-x} = \frac{3x^3-9x+6}{x^2-1} = \frac{3\cdot(x^3-3x+2)}{(x-1)(x+1)}$

$= \frac{3\cdot\cancel{(x-1)}\cdot(x^2+x-2)}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \frac{3(x^2+x-2)}{x+1}.$

$$\begin{aligned}
x^3-3x+2 : (x-1) &= x^2+x-2 \\
-(x^3-x^2) & \\
x^2-3x+2 & \\
-(x^2-x) & \\
-2x+2 & \\
-(-2x+2) & \\
0 &
\end{aligned}$$

zu b): $\frac{x\cdot(x+x^{3\cdot 2})^2}{x^{(1+4)^2}} = \frac{x\cdot(x+x^6)^2}{x^{25}} = \frac{(x+x^6)^2}{x^{24}} = \frac{(x\cdot(1+x^5))^2}{x^{24}}$

$= \frac{x^2\cdot(1+x^5)^2}{x^{24}} = \frac{(1+x^5)^2}{x^{22}} = \frac{1+2x^5+x^{10}}{x^{22}}.$

Vollständige Induktion:

zz: $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ für alle $n\in\mathbb{N}$

$\left(\forall n\in\mathbb{N}: \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}\right)$

$= 1^3+2^3+\ldots+n^3$

Induktionsanfang: $n=1$

hier ??: $\sum_{k=1}^{1} k^3 \overset{!}{=} \frac{1^2\cdot(1+1)^2}{4}$ $\quad(*)$

Dazu: LHS: $\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1$

RHS: $\frac{1^2(1+1)^2}{4} = 1$ $\quad =$

$\rightsquigarrow$ $(*)$ ist korrekt.

Induktionsschritt:

Induktionsannahme: Sei für ein $n\in\mathbb{N}$, beliebig, aber fest gewählt, die Summenformel bereits bewiesen, d.h. es gelte

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Induktionsbeh.: Dann gilt die Summenformel auch für $n+1$, d.h.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2\cdot(n+2)^2}{4}.$$

Bew. (der Ind.beh.):

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} \boxed{k^3} + (n+1)^3$$

$$\overset{\text{Ind.}}{\underset{\text{Ann.}}{=}} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2\cdot[n^2+4\cdot(n+1)]}{4}$$

$$\underbrace{1^3+2^3+\dots+n^3}_{=\sum_{k=1}^{n} k^3}+(n+1)^3$$

$\sum^{n+1} 2k^2-1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} 2k^2-1 = \sum_{k=1}^{n} 2k^2-1 + 2(n+1)^2-1$$

$$= \ldots \quad 4$$

$$= \frac{(n+1)^2\cdot(n^2+4n+4)}{4}$$

$$\overset{\text{binom. Formel}}{=} \frac{(n+1)^2\cdot(n+2)^2}{4}. \quad \blacksquare$$

q.e.d.

$(n+2)^2 = n^2+4n+4$

1.) zz: $\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

$n! = 1\cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$

2.) zz: $6 \mid n^3 - n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

3.) zz.: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\boxed{5{,}\bar{3} = \frac{16}{3} < \frac{24}{4} = 6}$$

Zu 1.): Ind. Anfang: $n = 2$

hier $5{,}\bar{3} = \frac{4^2}{2+1} < 6 = \frac{24}{4} = \frac{4!}{(2!)^2}$ ✓

<u>Ind. Annahme</u>: Sei für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ beliebig, aber fest, bereits

$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$ gezeigt.

<u>Ind. beh.</u>: Dann gilt auch

$$\frac{4^{n+1}}{n+2} < \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2}. \qquad (**)$$

<u>Bew.</u>: LHS: $\frac{4^{n+1}}{n+2} = \frac{4^n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} \cdot 4$

RHS: $\frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2} = \frac{(2n)!\cdot(2n+1)\cdot\overbrace{(2n+2)}^{2\cdot(n+1)}}{(n!)^2\cdot(n+1)^2} = \frac{(2n)!\cdot(2n+1)\cdot 2}{(n!)^2\cdot(n+1)}$

$(n+1)! = n! \cdot (n+1)$

$$(2(n+1))! = (2n+2)! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2n}_{(2n)!} \cdot (2n+1) \cdot (2n+2)$$

$$(**) \iff \frac{4^n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ 2\cdot 2}}{4} \overset{!}{<} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{2 \cdot (2n+1)}{n+1}$$

$$\iff \frac{4^n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} \cdot 2 < \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{2n+1}{n+1}$$

$$\iff \frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{(2n+1)(n+2)}{2 \cdot (n+1) \cdot (n+1)}$$

> 1

denn dann: $\frac{(2n)!}{(n!)^2} \overset{\text{Ind.-Ann.}}{>} \frac{4^n}{n+1}$

$$\frac{2n^2+5n+2}{2n^2+4n+2} \rightsquigarrow \text{Zähler} = n + \text{Nenner}$$

d.h. Zähler > Nenner

d.h. > 1.