Musterlösungen zur Klausur lineare Algebra 1

1. Zeige durch vollständige Induktion
   Ist λ Eigenwert der Matrix A mit Eigenvektor $\vec{v}$, so ist λ^n Eigenwert zur Matrix A^n mit dem gleichen Eigenvektor $\vec{v}$.
   Induktionsanfang : $n = 1$: $A^1 \cdot \vec{v} = A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$ ist erfüllt, da dies die Eigenschaft eines Eigenvektors ist.
   Induktionsschritt : $n \to n{+}1$ mit Induktionsvorraussetzung : $A^n \cdot \vec{v} = \lambda^n \cdot \vec{v}$
   $A^{n+1} \cdot \vec{v} = A^n \cdot A \cdot \vec{v} = A^n \cdot \lambda \cdot \vec{v} = \lambda \cdot A^n \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \lambda^n \cdot \vec{v} = \lambda^{n+1} \cdot \vec{v}$
   wobei die Induktionsvorraussetzung in die vorletzte Gleichung eingegangen ist.

2. Modulorechnung

   (a) Gaußalgorithmus mit 19 und 41 :

   $$\begin{aligned} 41 &= 2 \cdot 19 + 3 \\ 19 &= 6 \cdot 3 + 1 \\ 1 &= 19 - 6 \cdot 3 \\ 1 &= 19 - 6 \cdot (41 - 2 \cdot 19) \\ 1 &= 13 \cdot 19 - 6 \cdot 41 \end{aligned}$$

   und modulo 41 gilt $1 = 13 \cdot 19$ und das Inverse lautet 13.

   (b) $17^{46} \quad mod(23) = 17^2 \cdot 17^{2 \cdot 22} = 289 \cdot (17^{22})^2 = 289 \quad mod(23) = 13 \quad mod(23)$
   $a^{23-1} = 1 \quad mod(23)$ gilt für alle teilerfremden a.

3. Multiple Choice

   (a) Ein nichttrivialer Vektoraum hat immer zwei Unterverktoräume ist wahr (V selbst und $\{\vec{0}\}$)

   (b) Es stimmt $det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot det(A)$

   (c) Drei unterschiedliche Vektoren sind immer linear abhängig (wären sie es nicht, bilden sie eine Basis mit Dimension 3)

   (d) Wahr. Wie in der Vorlseung und Skript erwähnt ist dies eine Eigenschaft, des maximalen Rangs.

4. Eine Basis von $U = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | x - 2 \cdot y + z = 0\}$ wäre $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   $$\vec{b_1} = \frac{\vec{u_1}}{||\vec{u_1}||} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   $$\vec{b_2^*} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   $$\vec{b_2} = \frac{\vec{b_2^*}}{||\vec{b_2^*}||} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5. Die augmentierte Matrix wird auf Normalform gebracht
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 9 & 4 \\ -1 & -4 & 2 & 11 & 3 \\ -2 & -8 & 0 & 6 & 2 \\ -3 & -12 & 0 & 9 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -2 & -11 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -16 & -4 \\ 0 & 0 & -6 & -24 & -6 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -2 & -11 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
Damit sind x_4 und x_3 bestimmbar und x_2 freie Variable und eine spezielle Lösung x_s ist $\vec{x}_s = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$

Die Lösung des homogenen Gleichungssystems mit $x_2 = 1$ ergibt den erzeugenden Vektor $\vec{x}_k$ des Kerns von f : $\vec{x}_k = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Der Lösungsraum besteht aus den Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

6. Damit A diagonalisierbar ist suchen wir die Eigenvektoren um eine Darstellung von $A = T \cdot D \cdot T^{-1}$ mit D als Diagonalmatrix, die die Eigenwerte enthält.
Mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ lautet das charakteristische Polynom (= die Determinante von $A - \lambda \cdot I_2) : (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2 \cdot \lambda - 3 = (\lambda + 1) \cdot (\lambda - 3)$ und damit sind die Eigenwerte -1 und 3.
Die zugehörigen Eigenvektoren lauten $\vec{e}_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sowie $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Damit ist $\tilde{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ und normiert $T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ und der Diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Da T orthogonal ist, gilt $T^{-1} = T^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und damit
$A^{13} = (T \cdot D \cdot T^{-1})^{13} = T \cdot D^{13} \cdot T^{-1} =$
$\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{13} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$
$\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3^{13} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3^{13}+1 & 3^{13}+1 \\ 3^{13}-1 & 3^{13}-1 \end{pmatrix}$

7. $det(A - \lambda \cdot I_3) = det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 0 & 4 \\ 0 & -6-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$
$(-6-\lambda) \cdot det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = -(6+\lambda) \cdot ((5-\lambda) \cdot (2-\lambda) - 4) =$
$-(6+\lambda) \cdot (\lambda^2 - 7 \cdot \lambda + 6) = -(6+\lambda) \cdot (\lambda - 1) \cdot (\lambda - 6)$ - und damit sind die Eigenwerte -6, 1 und 6.

$$\lambda = -6 : A + 6 \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -84 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_{-6} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 1 : A - 1 \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & -7 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_{1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 6 : A - 6 \cdot I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & -12 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_{6} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$