DHBW Mannheim | Mannheim, 24.05.2023
Informatik | Mathematik II/2

Lösungen zu Übungsblatt 7

Aufgabe 1. Die Dichte eine stetigen Zufallsvariable X ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 12 \cdot x^2 \cdot (1-x) & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bestimmen Sie Verteilungsfunktion, Erwartungswert und Varianz dieser Zufallsvariable.

Lösung:
Für $0 \leq x \leq 1$ gilt

$$f(x) = 12 \cdot x^2 - 12 \cdot x^3$$

Eine Stammfunktion von $12x^2 - 12x^3$ ist $4x^3 - 3x^4$, und daher gilt

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 4x^3 - 3x^4 & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx \\ &= \int_0^1 12x^3 - 12x^4\,dx \\ &= \left[3x^4 - \tfrac{12}{5} \cdot x^5\right]_0^1 \\ &= \tfrac{3}{5} \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \tfrac{3}{5}\right)^2 \cdot f(x)\,dx \\ &= \int_0^1 -12x^5 + \tfrac{132}{5} \cdot x^4 - \tfrac{468}{25} \cdot x^3 + \tfrac{108}{25} \cdot x^2\,dx \\ &= \left[-2x^6 + \tfrac{132}{25} \cdot x^5 - \tfrac{117}{25} \cdot x^4 + \tfrac{36}{25} \cdot x^3\right]_0^1 \\ &= \tfrac{1}{25} \end{aligned}$$

Aufgabe 2. Sei X eine stetige Zufallsgröße, für die

$$P(X \geq x) = \begin{cases} x^{-4} & \text{für} \quad x \geq 1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt.

- Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von X.
- Berechnen Sie die Dichte $f(x)$ von X.
- Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von X.

Lösung:

- Es gilt
$$P(X \geq x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x)$$
und damit
$$F(x) = \begin{cases} 1 - x^{-4} & \text{für} \quad x \geq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$
- Die Dichte von $F(x)$ erhält man als Ableitung der Verteilungsfunktion:
$$f(x) = \frac{\partial}{\partial x} F(x) = \begin{cases} 4 \cdot x^{-5} & \text{für} \quad x \geq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$
- Erwartungswert und Varianz bestimmt man als
$$\begin{aligned} E(X) &= 4 \cdot \textstyle\int_1^\infty x \cdot x^{-5} dx = 4 \cdot \int_1^\infty x^{-4} dx \\ &= 4 \cdot \left[-\tfrac{1}{3} \cdot x^{-3}\right]_1^\infty \\ &= 4 \cdot \left(0 - \left(-\tfrac{1}{3}\right)\right) = \tfrac{4}{3}, \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} E(X^2) &= 4 \cdot \textstyle\int_1^\infty x^2 \cdot x^{-5} dx = 4 \cdot \int_1^\infty x^{-3} dx \\ &= 4 \cdot \left[-\tfrac{1}{2} \cdot x^{-2}\right]_1^\infty \\ &= 4 \cdot \left(0 - \left(-\tfrac{1}{2}\right)\right) = 2, \end{aligned}$$
$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}.$$

Aufgabe 3. Die Verspätungszeit verspäteter Züge (an einem gegebenen Bahnhof) kann in sehr guter Näherung durch eine Exponentialverteilung beschrieben werden. Dabei wird jeder Zug als pünktlich betrachtet der tatsächlich in der im Fahrplan angegebenen Minute abfährt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein verspäteter Zug innerhalb von 10 Minuten nach der fahrplanmäßigen Abfahrt den Bahnhof verlässt, liegt bei 80 %.

a) Bestimmen Sie Dichte, Verteilungsfunktion, Erwartungswert und Varianz der Zufallsvariable X, die die Verspätung eines zufällig ausgewählten verspäteten Zuges beschreibt.

Lösung:

Die Dichte von X hat die folgende Gestalt.

$$f(t) = \begin{cases} \lambda \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \cdot t} & \text{für} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{für} \quad t < 0 \end{cases}$$

Damit ist die Verteilungsfunktion von X für $t > 0$ gegeben durch

$$F(t) = \int_0^t \lambda \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \cdot \tau} \, d\tau = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda \cdot \tau}\right]_0^t = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda \cdot t}$$

Nach Angabe gilt

$$0.80 = p(X \leq 10) = F(10) = 1 - \mathrm{e}^{-10 \cdot \lambda}$$

Daraus folgt

$$\mathrm{e}^{-10 \cdot \lambda} = 0.20$$

also nach Logarithmieren

$$-10 \cdot \lambda = \ln(0.20)$$

bzw.

$$\lambda = -\frac{\ln(0.20)}{10} = \frac{\ln(5)}{10} \approx 0.1609$$

also ist die Dichte gegeben durch

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\ln(5)}{10} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\ln(5)}{10} \cdot t} & \text{für} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{für} \quad t < 0 \end{cases}$$

und die Verteilungsfunktion von X ist

$$F(t) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\frac{\ln(5)}{10} \cdot t} & \text{für} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{für} \quad t < 0 \end{cases}$$

Erwartungswert und Varianz ergeben sich nun aus der Vorlesung

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{10}{\ln(5)} \approx 6.2133$$

und

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{100}{\ln(5)^2} \approx 38.6057$$

b) Sie stehen an diesem Bahnhof und warten bereits 10 Minuten auf ihren verspäteten Zug. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Zug mindestens noch weitere 10 Minuten Verspätung hat?

Lösung:

Dss besondere an der Exponentialverteilung ist die Tatsache, dass sie kein Gedächtnis hat, dass also die Situation zu jedem beliebigen Zeitpunkt (zu dem der Zug noch nicht eingetroffen ist) wieder genauso aussieht wie zu Beginn. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Zug, der noch nicht da ist, ab einem beliebigen Zeitpunkt innerhalb der nächste 10 Minuten nicht eintrifft, ist also immer so groß wie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er innerhalb der ersten 10 Minuten nach fahrplanmäßiger Abfahrt nicht eintrifft, hier also 20 %. Das kann man ganz allgemein wie folgt sehen:

Für ein $t_0 > 0$ ist die Wahrscheinlichkeit

$$p(X > t_0) = 1 - p(X \leq t_0) = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t_0}\right) = \mathrm{e}^{-\lambda t_0}$$

Damit gilt für beliebige $t_1 \geq t_0 > 0$:

$$p(X > t_1 | X > t_0) = \frac{p(X > t_1)}{p(X > t_0)} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda t_1}}{\mathrm{e}^{-\lambda t_0}} = \mathrm{e}^{-\lambda \cdot (t_1 - t_0)} = p(X > t_1 - t_0)$$

also gilt speziell in unserem Fall

$$p(X > 20 | X > 10) = p(X > 10) = 0.20$$

c) Neben den verspäteten Zügen verkehrt ein Teil der Züge auch pünktlich, und zwar an diesem Bahnhof exakt 40 %. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion für die Zufallsvariable, die für einen zufällig ausgewählten Zug die Differenz zwischen Abfahrtszeit und fahrplanmäßiger Abfahrtszeit beschreibt.

Lösung:

Diese Zufallsvariable Y ist in gewisse Weise ein Zwitterwesen, denn sie hat einen diskreten Anteil (die Elementarwahrscheinlichkeit $p(Y = 0) = 0.40$) und einen stetigen Anteil, nämlich die Verspätung der 60 % verspäteten Züge. Entsprechend hat die Verteilungsfunktion eine Sprungsstelle (für $p(Y = 0) = 0.40$) und einen stetigen Anteil, der durch die Zufallsvariable X (aus Teil a) und b)) beschrieben wird. daher gilt für ein $t > 0$:

$$\begin{aligned} p(Y \leq t) &= 0.40 + 0.60 \cdot p(X \leq t) \\ &= 0.40 + 0.60 \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\ln(5)}{10} \cdot t}\right) \\ &= 1 - 0.60 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\ln(5)}{10} \cdot t} \end{aligned}$$

Die Verteilungsfunktion von Y sieht also aus wie folgt

$$F(t) = \begin{cases} 1 - 0.60 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\ln(5)}{10} \cdot t} & \text{für} \quad t > 0 \\ 0.40 & \text{für} \quad t = 0 \\ 0 & \text{für} \quad t < 0 \end{cases}$$

(beachten Sie dabei, dass dier die Fällte $t > 0$ und $t = 0$ zusammengefasst werden können).

Bei dieser Interpretation wird die gesamte Minute der fahrplanmäsigen Abfahrtzeit als Zeitpunkt $t = 0$ betrachtet; wenn man auch in dieser Minute die Zeit kontinuierlich weiterlaufen lässt ergibt sich als Verteilungsfunktion von Y die Funktion

$$F(t) = \begin{cases} 1 - 0.60 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\ln(5)}{10}\cdot(t-1)} & \text{für} \quad t > 1 \\ 0.40 & \text{für} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{für} \quad t < 0 \end{cases}$$

Beide Sichtweisen sind bei dieser Aufgabenstellung zulässig.

Stillschweigend angenommen wird in beiden Fällen, dass kein Zug den Bahnhof vor der angegebenen Abfahrtzeit verlässt.

Aufgabe 4. In einer Aufgabe aus dem vorangegangenen Kapitel wurde die Zufallsvariable X betrachtet, die die Anzahl der Fehler, die während 12 Stunden an einem Digitalcomputer auftreten, beschreibt ($Po(0.25)$)

- Welche Verteilung hat unter den gegebenen Voraussetzungen die Zufallsvariable Y=Wartezeit auf den nächsten Fehler?
- Wie lange wird man im Mittel auf den nächsten Fehler warten?
- Wahrend 12 Stunden ist kein Fehler aufgetreten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich in den nächsten 12 Stunden ebenfalls kein Fehler ereignet?

Lösung:

- Wegen $X \sim Po(0.25)$ ist die Wartezeit Y exponentialverteilt mit Parameter $Y = 0.25$.
- Wegen $E(Y) = \frac{1}{\lambda} = 4$ beträgt die mittlere Wartezeit auf den nächsten Fehler $4 \cdot 12 = 48$ Stunden.
- Aufgrund der Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung gilt:

  $$P(Y \leq 24 | Y > 12) = P(Y \leq 12) = 1 - e^{-12/4} = 1 - e^{-3} = 0.95.$$

  Mit 95% Wahrscheinlichkeit tritt also auch in den nächsten 12 Stunden kein Fehler auf.