Graphentheorie

DHBW Mannheim
MA-TINF15AIBC
Matrikel-Nr [redacted]
Name: Joshua Töpfer

am Beispiel Google

Gerichtete Graphen:

benötigt man z.B in der Navigation (Einbahnstraßen usw.)

Def. Ein gerichteter Graph ist ein Paar o. Tupel $G = (V, E)$ mit einer endlichen Menge $V \neq \emptyset$ und einer endlichen Menge $E \subseteq \{(u,v) \mid u,v \in V, u \neq v\}$.
Die Elemente von V heißen Knoten (eng. vertex) von G. Die Elemente von E heißen Kanten (eng. edge) von G teils auch Pfeile genannt. ~~von~~ Eine Kante $e \in E$ ist also ein der Form $e = (u, v)$ mit gewissen $u, v \in V, u \neq v$, wobei u als Anfangsknoten und v als Endknoten von v bezeichnet wird.

Parallele Kanten:

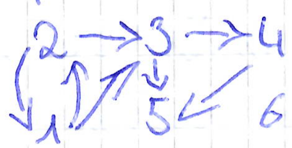
Zwei Kanten $e_1, e_2 \in E$ mit $e_1 = (u, v)$ und $e_2 = (u, v)$ heißen parallel.

Inverse Kanten:

Zwei Kanten $e_1, e_2 \in E$ mit $e_1 = (u, v)$ und $e_2 = (v, u)$ heißen invers.

Beispiel eines gerichteten Graphen (1.4)

$G = (V, E)$



Knoten $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Kanten $E = \{<1,2>, <2,1>, <1,3>, <2,3>, <3,4>, <3,5>, <4,5>\}$

[redacted]

Graphentheorie

inzident & adjazent:

Es sei $G = (V,E)$ ein gerichtetes graph. Ein Knoten $v \in V$ und eine Kante $e \in E$ heißen inzident, wenn v der Anfangs- oder Endknoten von e ist. Zwei Kanten $e_1, e_2 \in E$ heißen benachbart oder adjazent, wenn es einen Knoten $v \in V$ gibt der mit e_1 & e_2 inzidiert. Zwei Knoten heißen benachbart oder adjazent, wenn es eine Kante $e \in E$ gibt die mit u und v inzidiert.

Ob zwei Knoten / Kanten benachbart sind hängt also nicht von der Richtung der Pfeile des Graphen ab.

In dem Graphen G aus dem vorherigen Beispiel (1.4) sind z.B die Knoten 5 und 3 benachbart/adjazent, 5 und 1 hingegen nicht. Die Kanten $\langle 1,2 \rangle$ und $\langle 2,3 \rangle$ sind benachbart, der Knoten 4 und die Kante $\langle 4,5 \rangle$ sind inzident

Innengrad, Außengrad & Grad:

Es sei $G = (V,E)$ ein gerichteter Graph und $v \in V$ ein beliebiger Knoten. Dann bezeichnet man mit $deg^+(v)$ den Außengrad des Knotens v, d.h. die Anzahl der Kanten $e \in E$ mit Anfangsknoten v und mit $deg^-(v)$ den Innengrad des Knotens v, d.h. die Anzahl der Kanten $e \in E$ mit Endknoten v. Beides zusammen als $deg(v) := deg^+(v) + deg^-(v)$, nennt man den Grad von v.

Graphentheorie

DHBW Mannheim
MA-TINF15AIBC
Matrikel-Nr[redacted]
Name: Joshua Töpfer

Betrachten wir erneut den Graphen G aus dem vorherigen Beispiel (1.4) so ist z.B.

$$\deg^+(1) = 2, \deg^-(1) = 1.$$

Die Betrachtung von Knotengraden kann hilfreich sein um die Frage nach der Existens mancher Graphen zu beantworten

Beispiel (1.7):

Gibt es einen (gerichteten) Graphen mit 5 Knoten und denn Knotengraden 1,2,3,4,5 ?

Handshaking Lemma:

Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter graph. Dann gilt

$$\sum_{v \in V} \deg^+(v) = \sum_{v \in V} \deg^-(v) = |E|$$

wobei $|E|$ die Anzahl der Kanten in G bezeichnet. Insbesondere gilt also

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

d.h. die Summe aller Knotengrade ist immer gerade.

Die Namensgebung folgt daher, das bei einem Handshake immer zwei Personen diesen ausführen und somit die Summe aller von Personen ausgeführten Handshakes immer gerade ist.

Graphentheorie

Wenden wir diese Lemma nun auf das vorher genannte Beispiel (1.7) an. Wir bilden also die Summe der angegebenen Knoten Grade. Diese ist 15. Das Handshake-Lemma besagt jedoch, dass diese Summe gerade sein müsste. Somit ist zu sagen, dass ~~da~~ es den gefragten Graphen nicht gibt.

Adjazenzmatrix & Inzidenzmatrix:

Es sei $G=(V,E)$ ein gerichteter Graph mit Knotenmenge $V=\{v_1,\dots,v_n\}$ und Kantenmenge $E=\{e_1,\dots,e_m\}$.

- Die Adjazenzmatrix des Graphen G ist die $n \times n$ Matrix A mit den Einträgen
  $\rightarrow a_{j,k}$ = Anzahl der Kanten mit Anfangspunkt v_j und Endpunkt v_k

Beispiel Adjazenzmatrix (1.4):

$$A = \begin{array}{c c}
\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} & \\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}
\end{array}$$

$G=(V,E)$

$V=\{1,2,3,4,5,6\}$

$E=\{\langle 1,2\rangle \langle 2,1\rangle \langle 1,3\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 3,5\rangle, \langle 4,5\rangle\}$

Graphentheorie

DHBW Mannheim
MA-TINF15AIBC
Matrikel-Nr: [redacted]
Name: Joshua Töpfer

Inzidenzmatrix:

Die Inzidenzmatrix des Graphen g ist die $n \times m$ Matrix I mit den Einträgen

$$i_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v_j \text{ der Anfangspunkt der Kante } e_k \text{ ist,} \\ -1 & \text{falls } v_j \text{ der Endpunkt der Kante } e_k \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispiel Inzidenzmatrix (1.4):

$$\begin{array}{cc} & e \rightarrow \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \quad v\downarrow \\ I = & \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \end{array}$$

Suchalgorithmen für Graphen

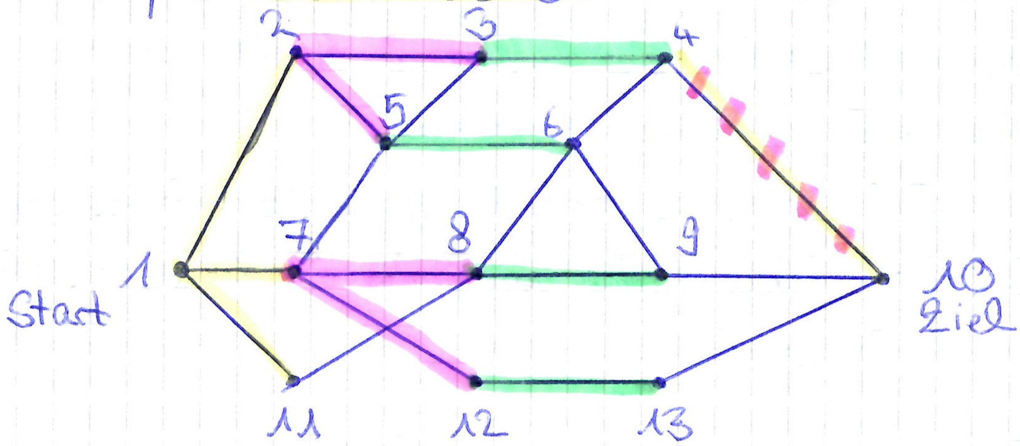
Breitensuche:

Wie finden wir einen Weg von unser Knoten zu Mr. X?
Wir untersuchen dann Nachbarschaftsbeziehungen, das heißt wir zunächst nur unsere direkten Nachbarknoten. Kennen wir selbst Mr. X nicht, so fragen wir all unsere Nachbarknoten ob Sie Mr. X kennen. Kennt auch keiner unser Nachbarn Mr. X, so fragen die auch ihre Nachbarn ob diese Mr X. kennen. Dies geht als so weiter bis jemand Mr. X kennt, dabei wird darauf geachtet, das kein Knoten mehrfach gefragt wird

[redacted]

Graphentheorie

Beispiel Breitensuche:



1

Schritt 1 <1,2>, <1,7>, <1,11>

Schritt 2 <2,3>, <2,5>, <7,8>, <7,12>

Schritt 3 <3,4>, <5,6>, <8,9> <12,13>

Schritt 4 <4,10>

10