Lineare Algebra
Grundlagen der Logik

Reinhold Hübl

Wintersemester 2020/21

Duale Hochschule Baden-Württemberg Mannheim

Aussagen

Die *Logik* ist die *Lehre vom Argumentieren* oder der *Lehre vom Schlussfolgern* und beschäftigt sich damit, Sicherheit in die Regeln das Schließens und des Argumentierens zu bringen.

Definition

Eine **Aussage** A ist ein Satz der (in einem gegebenen Kontext) eindeutig entweder wahr w oder falsch f ist.

Aussagen

Die *Logik* ist die *Lehre vom Argumentieren* oder der *Lehre vom Schlussfolgern* und beschäftigt sich damit, Sicherheit in die Regeln das Schließens und des Argumentierens zu bringen.

Definition

Eine **Aussage** A ist ein Satz der (in einem gegebenen Kontext) eindeutig entweder wahr w oder falsch f ist.

Beispiel

Beispiele für Aussagen sind etwa:

- A_1 : Berlin ist die Hauptstadt von Österreich.
- A_2 : 3 ist größer als 7
- A_3 : 5 ist eine Quadratzahl (in $\mathbb{R}$)

Aussagen

Die *Logik* ist die *Lehre vom Argumentieren* oder der *Lehre vom Schlussfolgern* und beschäftigt sich damit, Sicherheit in die Regeln das Schließens und des Argumentierens zu bringen.

Definition

Eine **Aussage** A ist ein Satz der (in einem gegebenen Kontext) eindeutig entweder wahr w oder falsch f ist.

Beispiel

Beispiele für Aussagen sind etwa:

- A_1 : Berlin ist die Hauptstadt von Österreich.
- A_2 : 3 ist größer als 7
- A_3 : 5 ist eine Quadratzahl (in $\mathbb{R}$)

Negation

Aussagen können mit **Junktoren** miteinander verknüpft werden, wodurch neue Aussagen entstehen, deren Wahrheitswert formal aus dem der eingehenden Aussagen ermittelt werden kann.

Die Negation einer Aussage A ist eine Aussage, die mit $\neg A$ bezeichnet wird. Der Wahrheitswert von $\neg A$ kann aus dem von A durch folgende Tabelle ermittelt werden:

Negation

Aussagen können mit **Junktoren** miteinander verknüpft werden, wodurch neue Aussagen entstehen, deren Wahrheitswert formal aus dem der eingehenden Aussagen ermittelt werden kann.
Die Negation einer Aussage A ist eine Aussage, die mit $\neg A$ bezeichnet wird. Der Wahrheitswert von $\neg A$ kann aus dem von A durch folgende Tabelle ermittelt werden:

A	$\neg A$
w	f
f	w

Negation

Aussagen können mit **Junktoren** miteinander verknüpft werden, wodurch neue Aussagen entstehen, deren Wahrheitswert formal aus dem der eingehenden Aussagen ermittelt werden kann.
Die Negation einer Aussage A ist eine Aussage, die mit $\neg A$ bezeichnet wird. Der Wahrheitswert von $\neg A$ kann aus dem von A durch folgende Tabelle ermittelt werden:

A	$\neg A$
w	f
f	w

Konjunktion , Disjunktion und Kontravalenz

Die **Konjunktion** oder UND–Verknüpfung von zwei Aussagen A und B ist eine Aussage, die mit $A \wedge B$ bezeichnet wird.

Die **Disjunktion** oder ODER–Verknüpfung von zwei Aussagen A und B ist eine Aussage, die mit $A \vee B$ bezeichnet wird.

Konjunktion , Disjunktion und Kontravalenz

Die **Konjunktion** oder UND–Verknüpfung von zwei Aussagen A und B ist eine Aussage, die mit $A \wedge B$ bezeichnet wird.
Die **Disjunktion** oder ODER–Verknüpfung von zwei Aussagen A und B ist eine Aussage, die mit $A \vee B$ bezeichnet wird.
Die **Kontravalenz** oder ENTWEDER–ODER–Verknüpfung von zwei Aussagen A und B ist eine Aussage, die mit $A \oplus B$ bezeichnet wird.

Konjunktion , Disjunktion und Kontravalenz

Die **Konjunktion** oder UND–Verknüpfung von zwei Aussagen A und B ist eine Aussage, die mit $A \wedge B$ bezeichnet wird.
Die **Disjunktion** oder ODER–Verknüpfung von zwei Aussagen A und B ist eine Aussage, die mit $A \vee B$ bezeichnet wird.
Die **Kontravalenz** oder ENTWEDER–ODER–Verknüpfung von zwei Aussagen A und B ist eine Aussage, die mit $A \oplus B$ bezeichnet wird.
Konjunktion, Disjunktion und Kontravalenz werden durch folgende Wahrheitstafel beschreiben:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \oplus B$
w	w	w	w	f
w	f	f	w	w
f	w	f	w	w
f	f	f	f	f

Konjunktion , Disjunktion und Kontravalenz

Die **Konjunktion** oder UND–Verknüpfung von zwei Aussagen A und B ist eine Aussage, die mit $A \wedge B$ bezeichnet wird.
Die **Disjunktion** oder ODER–Verknüpfung von zwei Aussagen A und B ist eine Aussage, die mit $A \vee B$ bezeichnet wird.
Die **Kontravalenz** oder ENTWEDER–ODER–Verknüpfung von zwei Aussagen A und B ist eine Aussage, die mit $A \oplus B$ bezeichnet wird.
Konjunktion, Disjunktion und Kontravalenz werden durch folgende Wahrheitstafel beschreiben:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \oplus B$
w	w	w	w	f
w	f	f	w	w
f	w	f	w	w
f	f	f	f	f

Konjunktion , Disjunktion und Kontravalenz

Die Konjunktion von zwei Aussagen ist also nur dann wahr, wenn beide Aussagen wahr sind, die Disjunktion von zwei Aussagen ist genau dann wahr, wenn eine von beiden Aussagen wahr ist (oder auch beide), und die Kontravalenz ist genau dann wahr, wenn genau eine der beiden Aussagen wahr und eine der beiden Aussagen falsch ist.

Beispiel

Wir betrachten die beiden Aussagen

- A: *Berlin ist die Hauptstadt von Deutschland.*
- B: *Mannheim ist die Hauptstadt von Baden—Württemberg.*

Dann gilt

Konjunktion , Disjunktion und Kontravalenz

Die Konjunktion von zwei Aussagen ist also nur dann wahr, wenn beide Aussagen wahr sind, die Disjunktion von zwei Aussagen ist genau dann wahr, wenn eine von beiden Aussagen wahr ist (oder auch beide), und die Kontravalenz ist genau dann wahr, wenn genau eine der beiden Aussagen wahr und eine der beiden Aussagen falsch ist.

Beispiel

Wir betrachten die beiden Aussagen

- A: *Berlin ist die Hauptstadt von Deutschland.*
- B: *Mannheim ist die Hauptstadt von Baden—Württemberg.*

Dann gilt

- $A \wedge B$ ist falsch.

Konjunktion , Disjunktion und Kontravalenz

Die Konjunktion von zwei Aussagen ist also nur dann wahr, wenn beide Aussagen wahr sind, die Disjunktion von zwei Aussagen ist genau dann wahr, wenn eine von beiden Aussagen wahr ist (oder auch beide), und die Kontravalenz ist genau dann wahr, wenn genau eine der beiden Aussagen wahr und eine der beiden Aussagen falsch ist.

Beispiel

Wir betrachten die beiden Aussagen

- A: *Berlin ist die Hauptstadt von Deutschland.*
- B: *Mannheim ist die Hauptstadt von Baden—Württemberg.*

Dann gilt

- $A \wedge B$ ist falsch.
- $A \vee B$ ist wahr.

Konjunktion , Disjunktion und Kontravalenz

Die Konjunktion von zwei Aussagen ist also nur dann wahr, wenn beide Aussagen wahr sind, die Disjunktion von zwei Aussagen ist genau dann wahr, wenn eine von beiden Aussagen wahr ist (oder auch beide), und die Kontravalenz ist genau dann wahr, wenn genau eine der beiden Aussagen wahr und eine der beiden Aussagen falsch ist.

Beispiel

Wir betrachten die beiden Aussagen

- A: *Berlin ist die Hauptstadt von Deutschland.*
- B: *Mannheim ist die Hauptstadt von Baden—Württemberg.*

Dann gilt

- $A \wedge B$ ist falsch.
- $A \vee B$ ist wahr.
- $A \oplus B$ ist wahr.

Konjunktion , Disjunktion und Kontravalenz

Die Konjunktion von zwei Aussagen ist also nur dann wahr, wenn beide Aussagen wahr sind, die Disjunktion von zwei Aussagen ist genau dann wahr, wenn eine von beiden Aussagen wahr ist (oder auch beide), und die Kontravalenz ist genau dann wahr, wenn genau eine der beiden Aussagen wahr und eine der beiden Aussagen falsch ist.

Beispiel

Wir betrachten die beiden Aussagen

- A: *Berlin ist die Hauptstadt von Deutschland.*
- B: *Mannheim ist die Hauptstadt von Baden—Württemberg.*

Dann gilt

- $A \wedge B$ ist falsch.
- $A \vee B$ ist wahr.
- $A \oplus B$ ist wahr.

Implikation und Äquivalenz

Die **Implikation** oder WENN–DANN–Beziehung von A nach B ist eine neue Aussage, die mit $A \Longrightarrow B$ bezeichnet wird.

Die **Äquivalenz** oder GENAU–DANN–WENN–Beziehung von A und B ist eine neue Aussage, die mit $A \iff B$ bezeichnet wird.

Implikation und Äquivalenz

Die **Implikation** oder WENN–DANN–Beziehung von A nach B ist eine neue Aussage, die mit $A \Longrightarrow B$ bezeichnet wird.
Die **Äquivalenz** oder GENAU–DANN–WENN–Beziehung von A und B ist eine neue Aussage, die mit $A \iff B$ bezeichnet wird.
Implikation und Äquivalenz werden durch folgende Wahrheitstafel beschreiben:

A	B	$A \Longrightarrow B$	$A \iff B$
w	w	w	w
w	f	f	f
f	w	w	f
f	f	w	w

Implikation und Äquivalenz

Die **Implikation** oder WENN–DANN–Beziehung von A nach B ist eine neue Aussage, die mit $A \Longrightarrow B$ bezeichnet wird.
Die **Äquivalenz** oder GENAU–DANN–WENN–Beziehung von A und B ist eine neue Aussage, die mit $A \iff B$ bezeichnet wird.
Implikation und Äquivalenz werden durch folgende Wahrheitstafel beschreiben:

A	B	$A \Longrightarrow B$	$A \iff B$
w	w	w	w
w	f	f	f
f	w	w	f
f	f	w	w

Implikation und Äquivalenz

Die Implikation von A nach B besagt, dass A eine hinreichende Bedingung für das Auftreten von B ist (wenn A wahr ist, dann auch B), die Äquivalenz von A und B besagt, dass A hnireichend und notwendig für B ist (A ist genau dann wahr, wenn auch B wahr ist).

Beispiel

Wir betrachten die beiden Aussagen

- A: *Berlin ist die Hauptstadt von Deutschland.*
- B: *Mannheim ist die Hauptstadt von Baden—Württemberg.*

Dann gilt

Implikation und Äquivalenz

Die Implikation von A nach B besagt, dass A eine hinreichende Bedingung für das Auftreten von B ist (wenn A wahr ist, dann auch B), die Äquivalenz von A und B besagt, dass A hnireichend und notwendig für B ist (A ist genau dann wahr, wenn auch B wahr ist).

Beispiel

Wir betrachten die beiden Aussagen

- A: *Berlin ist die Hauptstadt von Deutschland.*
- B: *Mannheim ist die Hauptstadt von Baden—Württemberg.*

Dann gilt

- $A \Longrightarrow B$ ist falsch.

Implikation und Äquivalenz

Die Implikation von A nach B besagt, dass A eine hinreichende Bedingung für das Auftreten von B ist (wenn A wahr ist, dann auch B), die Äquivalenz von A und B besagt, dass A hnireichend und notwendig für B ist (A ist genau dann wahr, wenn auch B wahr ist).

Beispiel

Wir betrachten die beiden Aussagen

- A: *Berlin ist die Hauptstadt von Deutschland.*
- B: *Mannheim ist die Hauptstadt von Baden—Württemberg.*

Dann gilt

- $A \Longrightarrow B$ ist falsch.
- $A \iff B$ ist falsch.

Implikation und Äquivalenz

Die Implikation von A nach B besagt, dass A eine hinreichende Bedingung für das Auftreten von B ist (wenn A wahr ist, dann auch B), die Äquivalenz von A und B besagt, dass A hnireichend und notwendig für B ist (A ist genau dann wahr, wenn auch B wahr ist).

Beispiel

Wir betrachten die beiden Aussagen

- A: *Berlin ist die Hauptstadt von Deutschland.*
- B: *Mannheim ist die Hauptstadt von Baden—Württemberg.*

Dann gilt

- $A \Longrightarrow B$ ist falsch.
- $A \iff B$ ist falsch.
- $B \Longrightarrow A$ ist wahr.

Implikation und Äquivalenz

Die Implikation von A nach B besagt, dass A eine hinreichende Bedingung für das Auftreten von B ist (wenn A wahr ist, dann auch B), die Äquivalenz von A und B besagt, dass A hnireichend und notwendig für B ist (A ist genau dann wahr, wenn auch B wahr ist).

Beispiel

Wir betrachten die beiden Aussagen

- A: *Berlin ist die Hauptstadt von Deutschland.*
- B: *Mannheim ist die Hauptstadt von Baden—Württemberg.*

Dann gilt

- $A \Longrightarrow B$ ist falsch.
- $A \iff B$ ist falsch.
- $B \Longrightarrow A$ ist wahr.

Die Sprache der Aussagenlogik

Formal besteht die Sprache einer Aussagenlogik aus

- einer (abzählbaren) Menge von elementaren Aussagevariablen $\mathscr{A}_0, \mathscr{A}_1, \ldots$.

Die Sprache der Aussagenlogik

Formal besteht die Sprache einer Aussagenlogik aus

- einer (abzählbaren) Menge von elementaren Aussagevariablen $\mathscr{A}_0, \mathscr{A}_1, \dots$.
- den Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ und $\leftrightarrow$.

Die Sprache der Aussagenlogik

Formal besteht die Sprache einer Aussagenlogik aus

- einer (abzählbaren) Menge von elementaren Aussagevariablen $\mathscr{A}_0, \mathscr{A}_1, \dots$.
- den Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ und $\leftrightarrow$.
- den Gliederungssysmbolen (und).

Die Sprache der Aussagenlogik

Formal besteht die Sprache einer Aussagenlogik aus

- einer (abzählbaren) Menge von elementaren Aussagevariablen $\mathscr{A}_0, \mathscr{A}_1, \ldots$.
- den Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ und $\leftrightarrow$.
- den Gliederungssysmbolen (und).

und aus aussagenlogischen Formeln. Dabei sind alle Aussagevariablen Formeln, und alles, was mit Hilfe von Junktoren und Gliederungssysmbolen in endlich vielen Schritten aus Formeln gewonnen werden kann ist wieder eine Formel.

Die Sprache der Aussagenlogik

Formal besteht die Sprache einer Aussagenlogik aus

- einer (abzählbaren) Menge von elementaren Aussagevariablen $\mathscr{A}_0, \mathscr{A}_1, \ldots$.
- den Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ und $\leftrightarrow$.
- den Gliederungssysmbolen (und).

und aus aussagenlogischen Formeln. Dabei sind alle Aussagevariablen Formeln, und alles, was mit Hilfe von Junktoren und Gliederungssysmbolen in endlich vielen Schritten aus Formeln gewonnen werden kann ist wieder eine Formel.

Die Menge aller Formeln wird mit $\mathcal{A}$ bezeichnet.

Die Sprache der Aussagenlogik

Formal besteht die Sprache einer Aussagenlogik aus

- einer (abzählbaren) Menge von elementaren Aussagevariablen $\mathscr{A}_0, \mathscr{A}_1, \ldots$.
- den Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ und $\leftrightarrow$.
- den Gliederungssysmbolen (und).

und aus aussagenlogischen Formeln. Dabei sind alle Aussagevariablen Formeln, und alles, was mit Hilfe von Junktoren und Gliederungssysmbolen in endlich vielen Schritten aus Formeln gewonnen werden kann ist wieder eine Formel.
Die Menge aller Formeln wird mit $\mathcal{A}$ bezeichnet.

Die Sprache der Aussagenlogik

Um mit diesen Formeln arbeiten zu können, ist es notwendig, ihnen Wahrheitswerte zuzuweisen. Dazu sei $\mathbb{B} = \{\mathrm{wahr}, \mathrm{falsch}\}$ oder kurz $\mathbb{B} = \{w, f\}$ die Menge der Wahrheitswerte.

Definition

Eine Abbildung $f : V \longrightarrow \mathbb{B}$, die jeder Aussagenvariable einen Wert zuordnet, heißt **Belegung der Aussagevariablen**

Die Sprache der Aussagenlogik

Um mit diesen Formeln arbeiten zu können, ist es notwendig, ihnen Wahrheitswerte zuzuweisen. Dazu sei $\mathbb{B} = \{\mathrm{wahr}, \mathrm{falsch}\}$ oder kurz $\mathbb{B} = \{w, f\}$ die Menge der Wahrheitswerte.

Definition

Eine Abbildung $f : V \longrightarrow \mathbb{B}$, die jeder Aussagenvariable einen Wert zuordnet, heißt **Belegung der Aussagevariablen**

Aus jeder Belegung der Aussagenvariablen lässt sich auch eine eindeutige Belegung aller Formeln, also eine Abbildung $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ herleiten. Dazu verwenden wir die Wahrheitstafeln, die wir oben betrachtet haben. Dadurch werden die Formeln zu Aussagen, die mit eindeutigen Wahrheitswerten belegt sind.

Die Sprache der Aussagenlogik

Um mit diesen Formeln arbeiten zu können, ist es notwendig, ihnen Wahrheitswerte zuzuweisen. Dazu sei $\mathbb{B} = \{\text{wahr}, \text{falsch}\}$ oder kurz $\mathbb{B} = \{w, f\}$ die Menge der Wahrheitswerte.

Definition

Eine Abbildung $f : V \longrightarrow \mathbb{B}$, die jeder Aussagenvariable einen Wert zuordnet, heißt **Belegung der Aussagevariablen**

Aus jeder Belegung der Aussagenvariablen lässt sich auch eine eindeutige Belegung aller Formeln, also eine Abbildung $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ herleiten. Dazu verwenden wir die Wahrheitstafeln, die wir oben betrachtet haben. Dadurch werden die Formeln zu Aussagen, die mit eindeutigen Wahrheitswerten belegt sind.

Die Sprache der Aussagenlogik

Definition

Wir betrachten eine Formel $\alpha \in \mathcal{A}$.

- α heißt **erfüllbar**, wenn es eine Belegung f mit $f(\alpha) = w$ gibt.
- α heißt **Tautologie**, wenn für jede Belegung f gilt: $f(\alpha) = w$.
- α heißt **Kontradiktion** oder **widersprüchlich**, wenn für jede Belegung f gilt $f(\alpha) = f$.

Beispiel

Die Aussage $\alpha \leftrightarrow \alpha$ ist eine Tautologie, die Aussage $\alpha \leftrightarrow \neg\alpha$ dagegen ist eine Kontradiktion. Das folgt sofort aus obigen Verknüpfungstabellen.

Die Sprache der Aussagenlogik

Definition

Wir betrachten eine Formel $\alpha \in \mathcal{A}$.

- α heißt **erfüllbar**, wenn es eine Belegung f mit $f(\alpha) = w$ gibt.
- α heißt **Tautologie**, wenn für jede Belegung f gilt: $f(\alpha) = w$.
- α heißt **Kontradiktion** oder **widersprüchlich**, wenn für jede Belegung f gilt $f(\alpha) = f$.

Beispiel

Die Aussage $\alpha \leftrightarrow \alpha$ ist eine Tautologie, die Aussage $\alpha \leftrightarrow \neg\alpha$ dagegen ist eine Kontradiktion. Das folgt sofort aus obigen Verknüpfungstabellen.

Bemerkung

Die Verneinung einer Tautologie ist eine Kontradiktion, die Verneinung einer Kontradiktion ist eine Tautologie.

Die Sprache der Aussagenlogik

Definition

Wir betrachten eine Formel $\alpha \in \mathcal{A}$.

- α heißt **erfüllbar**, wenn es eine Belegung f mit $f(\alpha) = w$ gibt.
- α heißt **Tautologie**, wenn für jede Belegung f gilt: $f(\alpha) = w$.
- α heißt **Kontradiktion** oder **widersprüchlich**, wenn für jede Belegung f gilt $f(\alpha) = f$.

Beispiel

Die Aussage $\alpha \leftrightarrow \alpha$ ist eine Tautologie, die Aussage $\alpha \leftrightarrow \neg\alpha$ dagegen ist eine Kontradiktion. Das folgt sofort aus obigen Verknüpfungstabellen.

Bemerkung

Die Verneinung einer Tautologie ist eine Kontradiktion, die Verneinung einer Kontradiktion ist eine Tautologie.

Die Sprache der Aussagenlogik

Definition

Ist $\alpha \to \beta$ eine Tautologie, so schreiben wir hierfür $\alpha \Longrightarrow \beta$.
Ist $\alpha \leftrightarrow \beta$ eine Tautologie, so schreiben wir hierfür $\alpha \iff \beta$.

Regel

Die Sprache der Aussagenlogik

Definition

Ist $\alpha \to \beta$ eine Tautologie, so schreiben wir hierfür $\alpha \implies \beta$.
Ist $\alpha \leftrightarrow \beta$ eine Tautologie, so schreiben wir hierfür $\alpha \iff \beta$.

Regel

- *Es gelten die* **Distributivgesetze**
  - $(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma \iff (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma)$.
  - $(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma \iff (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma)$.

Die Sprache der Aussagenlogik

Definition

Ist $\alpha \to \beta$ eine Tautologie, so schreiben wir hierfür $\alpha \Longrightarrow \beta$.
Ist $\alpha \leftrightarrow \beta$ eine Tautologie, so schreiben wir hierfür $\alpha \iff \beta$.

Regel

- *Es gelten die* **Distributivgesetze**
  - $(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma \iff (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma)$.
  - $(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma \iff (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma)$.
- *Es gelten die* **Absorptionsgesetze**
  - $\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \iff \alpha$.
  - $\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \iff \alpha$.

Die Sprache der Aussagenlogik

Definition

Ist $\alpha \to \beta$ eine Tautologie, so schreiben wir hierfür $\alpha \implies \beta$.
Ist $\alpha \leftrightarrow \beta$ eine Tautologie, so schreiben wir hierfür $\alpha \iff \beta$.

Regel

- *Es gelten die* **Distributivgesetze**
  - $(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma \iff (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma)$.
  - $(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma \iff (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma)$.
- *Es gelten die* **Absorptionsgesetze**
  - $\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \iff \alpha$.
  - $\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \iff \alpha$.
- *Es gelten die* **Gesetze von de Morgan**
  - $\neg(\alpha \wedge \beta) \iff \neg\alpha \vee \neg\beta$.
  - $\neg(\alpha \vee \beta) \iff \neg\alpha \wedge \neg\beta$.

Die Sprache der Aussagenlogik

Definition

Ist $\alpha \to \beta$ eine Tautologie, so schreiben wir hierfür $\alpha \implies \beta$.
Ist $\alpha \leftrightarrow \beta$ eine Tautologie, so schreiben wir hierfür $\alpha \iff \beta$.

Regel

- *Es gelten die* **Distributivgesetze**
  - $(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma \iff (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma)$.
  - $(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma \iff (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma)$.
- *Es gelten die* **Absorptionsgesetze**
  - $\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \iff \alpha$.
  - $\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \iff \alpha$.
- *Es gelten die* **Gesetze von de Morgan**
  - $\neg(\alpha \wedge \beta) \iff \neg\alpha \vee \neg\beta$.
  - $\neg(\alpha \vee \beta) \iff \neg\alpha \wedge \neg\beta$.

Die Sprache der Aussagenlogik

Übung

Zeigen Sie die folgenden Gesetze über Negationen

1. $\neg(\neg\alpha) \iff \alpha.$
2. $\alpha \vee \neg\alpha$ ist eine Tautologie
3. $\alpha \wedge \neg\alpha$ ist eine Kontradiktion.

Die Sprache der Aussagenlogik

Übung

Zeigen Sie die folgenden Gesetze über Negationen

1. $\neg(\neg\alpha) \iff \alpha$.
2. $\alpha \vee \neg\alpha$ ist eine Tautologie
3. $\alpha \wedge \neg\alpha$ ist eine Kontradiktion.

Lösung:

Alle drei Aussagen sind wahr.

Die Sprache der Aussagenlogik

Übung

Zeigen Sie die folgenden Gesetze über Negationen

1. $\neg(\neg\alpha) \iff \alpha.$
2. $\alpha \vee \neg\alpha$ ist eine Tautologie
3. $\alpha \wedge \neg\alpha$ ist eine Kontradiktion.

Lösung:

Alle drei Aussagen sind wahr.

Die Sprache der Aussagenlogik

Regel

Es gelten die folgenden Regeln zum Schließen:

- *Der* **Kettenschluss***: Für Formeln* α , β *und* γ *gilt:*

$$(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma) \Longrightarrow (\alpha \to \gamma)$$

Die Sprache der Aussagenlogik

Regel

Es gelten die folgenden Regeln zum Schließen:

- *Der* **Kettenschluss***: Für Formeln α , β und γ gilt:*

$$(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma) \Longrightarrow (\alpha \to \gamma)$$

- *Die* **Abtrennungsregel***: Für Formeln α und β gilt:*

$$\alpha \wedge (\alpha \to \beta) \Longrightarrow \beta$$

Die Sprache der Aussagenlogik

Regel

Es gelten die folgenden Regeln zum Schließen:

- *Der* **Kettenschluss***: Für Formeln α , β und γ gilt:*

$$(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma) \Longrightarrow (\alpha \to \gamma)$$

- *Die* **Abtrennungsregel***: Für Formeln α und β gilt:*

$$\alpha \wedge (\alpha \to \beta) \Longrightarrow \beta$$

- *Die* **Aufhebungsregel***: Für Formeln α und β gilt:*

$$\neg\alpha \wedge (\beta \longrightarrow \alpha) \Longrightarrow \neg\beta$$

Die Sprache der Aussagenlogik

Regel

Es gelten die folgenden Regeln zum Schließen:

- *Der* **Kettenschluss**: *Für Formeln α , β und γ gilt:*

$$(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma) \Longrightarrow (\alpha \to \gamma)$$

- *Die* **Abtrennungsregel**: *Für Formeln α und β gilt:*

$$\alpha \wedge (\alpha \to \beta) \Longrightarrow \beta$$

- *Die* **Aufhebungsregel**: *Für Formeln α und β gilt:*

$$\neg\alpha \wedge (\beta \longrightarrow \alpha) \Longrightarrow \neg\beta$$

- *Der* **Umkehrschluß**: *Für Formeln α und β gilt:*

$$(\alpha \longrightarrow \beta) \Longrightarrow (\neg\beta \longrightarrow \neg\alpha)$$

Die Sprache der Aussagenlogik

Regel

Es gelten die folgenden Regeln zum Schließen:

- *Der* **Kettenschluss***: Für Formeln α , β und γ gilt:*

$$(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma) \Longrightarrow (\alpha \to \gamma)$$

- *Die* **Abtrennungsregel***: Für Formeln α und β gilt:*

$$\alpha \wedge (\alpha \to \beta) \Longrightarrow \beta$$

- *Die* **Aufhebungsregel***: Für Formeln α und β gilt:*

$$\neg\alpha \wedge (\beta \longrightarrow \alpha) \Longrightarrow \neg\beta$$

- *Der* **Umkehrschluß***: Für Formeln α und β gilt:*

$$(\alpha \longrightarrow \beta) \Longrightarrow (\neg\beta \longrightarrow \neg\alpha)$$

Die Sprache der Aussagenlogik

Beispiel

Sind die beiden Aussagen:
Wenn Montag ist, besuche ich eine Mathematikvorlesung und *Wenn ich eine Mathematikvorlesung besuche, dann lerne ich etwas Neues* wahr, so auch
Wenn Montag ist lerne ich etwas Neues.

Beispiel

Sind die beiden Aussagen:
Wenn Montag ist, besuche ich eine Mathematikvorlesung und *Wenn ich eine Mathematikvorlesung besuche, dann lerne ich etwas Neues* wahr, so auch
Wenn ich nichts Neues lerne, dann ist nicht Montag.

Die Sprache der Aussagenlogik

Beispiel

Sind die beiden Aussagen:
Wenn Montag ist, besuche ich eine Mathematikvorlesung und *Wenn ich eine Mathematikvorlesung besuche, dann lerne ich etwas Neues* wahr, so auch
Wenn Montag ist lerne ich etwas Neues.

Beispiel

Sind die beiden Aussagen:
Wenn Montag ist, besuche ich eine Mathematikvorlesung und *Wenn ich eine Mathematikvorlesung besuche, dann lerne ich etwas Neues* wahr, so auch
Wenn ich nichts Neues lerne, dann ist nicht Montag.

Nicht korrekt ist es aber, daraus abzuleiten:
Wenn nicht Montag ist, lerne ich nichts Neues.

Die Sprache der Aussagenlogik

Beispiel

Sind die beiden Aussagen:
Wenn Montag ist, besuche ich eine Mathematikvorlesung und *Wenn ich eine Mathematikvorlesung besuche, dann lerne ich etwas Neues* wahr, so auch
Wenn Montag ist lerne ich etwas Neues.

Beispiel

Sind die beiden Aussagen:
Wenn Montag ist, besuche ich eine Mathematikvorlesung und *Wenn ich eine Mathematikvorlesung besuche, dann lerne ich etwas Neues* wahr, so auch
Wenn ich nichts Neues lerne, dann ist nicht Montag.

Nicht korrekt ist es aber, daraus abzuleiten:
Wenn nicht Montag ist, lerne ich nichts Neues.

Die Sprache der Aussagenlogik

Übung

Gegeben ist, dass die beiden Aussagen:
Wenn Montag ist, besuche ich eine Mathematikvorlesung und *Ich besuche heute keine Mathematikvorlesung* wahr sind.
Kann man daraus ableiten, dass die Aussage

Es ist nicht Montag.

wahr ist?

Die Sprache der Aussagenlogik

Übung

Gegeben ist, dass die beiden Aussagen:
Wenn Montag ist, besuche ich eine Mathematikvorlesung und *Ich besuche heute keine Mathematikvorlesung* wahr sind.
Kann man daraus ableiten, dass die Aussage

Es ist nicht Montag.

wahr ist?

Lösung:

Die Aussage ist wahr nach der Aufhebungsregel.

Die Sprache der Aussagenlogik

Übung

Gegeben ist, dass die beiden Aussagen:
Wenn Montag ist, besuche ich eine Mathematikvorlesung und *Ich besuche heute keine Mathematikvorlesung* wahr sind.
Kann man daraus ableiten, dass die Aussage

Es ist nicht Montag.

wahr ist?

Lösung:

Die Aussage ist wahr nach der Aufhebungsregel.

Die Prädikatenlogik

Die Aussagenlogik befasst sich mit konkreten Aussagen wie etwa „$\alpha : 1 > 0$“, denen sich eine eindeutiger Wahrheitswert zuweisen lässt. In der Mathematik wichtig sind aber oft Formeln wie

$$„\ \beta(x) : x > 0\ “ \quad \text{oder} \quad „\ \gamma(x, y) : x^2 - y^2 > 0\ “,$$

in denen (ein oder mehrere) Platzhalter oder Variablen auftreten. Diese Formeln sind keine Aussagen, denn ihnen lässt sich kein Wahrheitswert zuweisen. Das kann erst erfolgen, wenn für die Platzhalter konkrete Werte eingesetzt werden.

Die Prädikatenlogik

Die Aussagenlogik befasst sich mit konkreten Aussagen wie etwa „$\alpha : 1 > 0$“, denen sich eine eindeutiger Wahrheitswert zuweisen lässt. In der Mathematik wichtig sind aber oft Formeln wie

$$„\, \beta(x) : x > 0\,“ \quad \text{oder} \quad „\, \gamma(x,y) : x^2 - y^2 > 0\,“,$$

in denen (ein oder mehrere) Platzhalter oder Variablen auftreten. Diese Formeln sind keine Aussagen, denn ihnen lässt sich kein Wahrheitswert zuweisen. Das kann erst erfolgen, wenn für die Platzhalter konkrete Werte eingesetzt werden. So ist etwa $\beta(1)$ wahr, aber $\beta(-3)$ nicht.

Die Prädikatenlogik

Die Aussagenlogik befasst sich mit konkreten Aussagen wie etwa „$\alpha : 1 > 0$“, denen sich eine eindeutiger Wahrheitswert zuweisen lässt. In der Mathematik wichtig sind aber oft Formeln wie

$$„\, \beta(x) : x > 0 \,“ \quad \text{oder} \quad „\, \gamma(x, y) : x^2 - y^2 > 0 \,“,$$

in denen (ein oder mehrere) Platzhalter oder Variablen auftreten. Diese Formeln sind keine Aussagen, denn ihnen lässt sich kein Wahrheitswert zuweisen. Das kann erst erfolgen, wenn für die Platzhalter konkrete Werte eingesetzt werden. So ist etwa $\beta(1)$ wahr, aber $\beta(-3)$ nicht. Entsprechend ist $\gamma(4, 2)$ wahr aber $\gamma(2, 4)$ nicht.

Die Prädikatenlogik

Die Aussagenlogik befasst sich mit konkreten Aussagen wie etwa „$\alpha : 1 > 0$“, denen sich eine eindeutiger Wahrheitswert zuweisen lässt. In der Mathematik wichtig sind aber oft Formeln wie

$$„\ \beta(x) : x > 0\ “ \quad \text{oder} \ „\ \gamma(x,y) : x^2 - y^2 > 0\ “,$$

in denen (ein oder mehrere) Platzhalter oder Variablen auftreten. Diese Formeln sind keine Aussagen, denn ihnen lässt sich kein Wahrheitswert zuweisen. Das kann erst erfolgen, wenn für die Platzhalter konkrete Werte eingesetzt werden. So ist etwa $\beta(1)$ wahr, aber $\beta(-3)$ nicht. Entsprechend ist $\gamma(4,2)$ wahr aber $\gamma(2,4)$ nicht.

Solche Ausdrücke mit Platzhaltern werden als **Prädikate** bezeichnet, und mit ihrer Behandlung beschäftigt sich die **Prädikatenlogik**

Die Prädikatenlogik

Die Aussagenlogik befasst sich mit konkreten Aussagen wie etwa „$\alpha : 1 > 0$“, denen sich eine eindeutiger Wahrheitswert zuweisen lässt. In der Mathematik wichtig sind aber oft Formeln wie

$$„\ \beta(x) : x > 0\ “ \quad \text{oder} \quad „\ \gamma(x,y) : x^2 - y^2 > 0\ “,$$

in denen (ein oder mehrere) Platzhalter oder Variablen auftreten. Diese Formeln sind keine Aussagen, denn ihnen lässt sich kein Wahrheitswert zuweisen. Das kann erst erfolgen, wenn für die Platzhalter konkrete Werte eingesetzt werden. So ist etwa $\beta(1)$ wahr, aber $\beta(-3)$ nicht. Entsprechend ist $\gamma(4,2)$ wahr aber $\gamma(2,4)$ nicht.

Solche Ausdrücke mit Platzhaltern werden als **Prädikate** bezeichnet, und mit ihrer Behandlung beschäftigt sich die **Prädikatenlogik**

Die Prädikatenlogik

Der **Prädikatenlogik** liegen zwei **Alphabete** zugrunde, ein Alphabet der logischen Zeichen, bestehend aus Variablen, Konnektoren, Trennzeichen, Quantoren und logischen Atomen, und ein Alphabet der Theoriezeichen, bestehend aus einer Menge von Konstanten (also Objekten aus einem vorgegebenen Individuenbereich, der betrachtet wird), einer Menge von Funktionszeichen und von Relationszeichen.

Funktionszeichen f sind dabei mathematische Funktionszeichen, etwa $f(x, y) = x \cdot y$, und Relationszeichen r entsprechen mathematische Relationen wie $r(x, y) : x > y$ vorstellen

Die Prädikatenlogik

Der **Prädikatenlogik** liegen zwei **Alphabete** zugrunde, ein Alphabet der logischen Zeichen, bestehend aus Variablen, Konnektoren, Trennzeichen, Quantoren und logischen Atomen, und ein Alphabet der Theoriezeichen, bestehend aus einer Menge von Konstanten (also Objekten aus einem vorgegebenen Individuenbereich, der betrachtet wird), einer Menge von Funktionszeichen und von Relationszeichen.

Funktionszeichen f sind dabei mathematische Funktionszeichen, etwa $f(x, y) = x \cdot y$, und Relationszeichen r entsprechen mathematische Relationen wie $r(x, y) : x > y$ vorstellen

Variablen sind Platzhalter, die zu einem gegebenen Zeitpunkt genau einen Wert aus dem Individuenbereich annehmen können.

Die Prädikatenlogik

Der **Prädikatenlogik** liegen zwei **Alphabete** zugrunde, ein Alphabet der logischen Zeichen, bestehend aus Variablen, Konnektoren, Trennzeichen, Quantoren und logischen Atomen, und ein Alphabet der Theoriezeichen, bestehend aus einer Menge von Konstanten (also Objekten aus einem vorgegebenen Individuenbereich, der betrachtet wird), einer Menge von Funktionszeichen und von Relationszeichen.

Funktionszeichen f sind dabei mathematische Funktionszeichen, etwa $f(x, y) = x \cdot y$, und Relationszeichen r entsprechen mathematische Relationen wie $r(x, y) : x > y$ vorstellen

Variablen sind Platzhalter, die zu einem gegebenen Zeitpunkt genau einen Wert aus dem Individuenbereich annehmen können.

Ein Term ist alles, was sich aus Konstanten, Variablen und Funktionszeichen in endlich vielen Schritten bilden lässt. Mit Konstanten $\mathbb{R}$ etwa können wir den Term $t_1 = f(x, 2) = 2 \cdot x$ bilden, mit diesem Term wiederum den Term $f(x, t_1) = x \cdot t_1 = 2x^2$. Konstanten und Variablen selbst sind auch Terme.

Die Prädikatenlogik

Der **Prädikatenlogik** liegen zwei **Alphabete** zugrunde, ein Alphabet der logischen Zeichen, bestehend aus Variablen, Konnektoren, Trennzeichen, Quantoren und logischen Atomen, und ein Alphabet der Theoriezeichen, bestehend aus einer Menge von Konstanten (also Objekten aus einem vorgegebenen Individuenbereich, der betrachtet wird), einer Menge von Funktionszeichen und von Relationszeichen.
Funktionszeichen f sind dabei mathematische Funktionszeichen, etwa $f(x, y) = x \cdot y$, und Relationszeichen r entsprechen mathematische Relationen wie $r(x, y) : x > y$ vorstellen
Variablen sind Platzhalter, die zu einem gegebenen Zeitpunkt genau einen Wert aus dem Individuenbereich annehmen können.
Ein Term ist alles, was sich aus Konstanten, Variablen und Funktionszeichen in endlich vielen Schritten bilden lässt. Mit Konstanten $\mathbb{R}$ etwa können wir den Term $t_1 = f(x, 2) = 2 \cdot x$ bilden, mit diesem Term wiederum den Term $f(x, t_1) = x \cdot t_1 = 2x^2$. Konstanten und Variablen selbst sind auch Terme.

Die Prädikatenlogik

Bei Prädikaten ist es nicht nur interessant, zu untersuchen, für welche Belegungen der Platzhalter eine wahre Aussage besteht, es ist auch von Bedeutung, festzustellen, ob es überhaupt Belegungen gibt, die zu wahren Aussagen führen, oder ob alle Belegungen wahre Aussagen ergeben.
Für diese Untersuchungen werden **Quantoren** verwendet, der **Allquantor** $\forall$ und der **Existenzquantor** $\exists$. Dadurch wird aus einem Prädikat (mit einem Platzhalter) eine Aussage

Die Prädikatenlogik

Bei Prädikaten ist es nicht nur interessant, zu untersuchen, für welche Belegungen der Platzhalter eine wahre Aussage besteht, es ist auch von Bedeutung, festzustellen, ob es überhaupt Belegungen gibt, die zu wahren Aussagen führen, oder ob alle Belegungen wahre Aussagen ergeben.
Für diese Untersuchungen werden **Quantoren** verwendet, der **Allquantor** $\forall$ und der **Existenzquantor** $\exists$. Dadurch wird aus einem Prädikat (mit einem Platzhalter) eine Aussage

- $\forall x\ \alpha(x)$ ist die Aussage „*Für alle x (aus dem Individuenbereich) gilt $\alpha(x)$*“. Sie ist genau dann wahr, wenn für **jede** zulässige Belegung von x mit einem konkreten Wert x_0 die Aussage $\alpha(x_0)$ wahr ist.
- $\exists x\ \alpha(x)$ ist die Aussage „*Es gibt ein x (aus dem Individuenbereich) für das $\alpha(x)$ gilt*“. Sie ist genau dann wahr, wenn für **mindestens eine** zulässige Belegung von x mit einem konkreten Wert x_0 die Aussage $\alpha(x_0)$ wahr ist.

Die Prädikatenlogik

Bei Prädikaten ist es nicht nur interessant, zu untersuchen, für welche Belegungen der Platzhalter eine wahre Aussage besteht, es ist auch von Bedeutung, festzustellen, ob es überhaupt Belegungen gibt, die zu wahren Aussagen führen, oder ob alle Belegungen wahre Aussagen ergeben.
Für diese Untersuchungen werden **Quantoren** verwendet, der **Allquantor** $\forall$ und der **Existenzquantor** $\exists$. Dadurch wird aus einem Prädikat (mit einem Platzhalter) eine Aussage

- $\forall x\ \alpha(x)$ ist die Aussage „*Für alle x (aus dem Individuenbereich) gilt* $\alpha(x)$“. Sie ist genau dann wahr, wenn für **jede** zulässige Belegung von x mit einem konkreten Wert x_0 die Aussage $\alpha(x_0)$ wahr ist.
- $\exists x\ \alpha(x)$ ist die Aussage „*Es gibt ein x (aus dem Individuenbereich) für das* $\alpha(x)$ *gilt*“. Sie ist genau dann wahr, wenn für **mindestens eine** zulässige Belegung von x mit einem konkreten Wert x_0 die Aussage $\alpha(x_0)$ wahr ist.

Die Prädikatenlogik

Beispiel

Mit der Sprache der Prädikatenlogik lassen sich mathematische Fragenstellungen knapp und präzise fromulieren und definieren. Die Aussage

Die Zahlenfolge $a_n = \frac{2n+3}{3n}$ konvergiert gegen $\frac{2}{3}$ für $n \to \infty$.

formuliert sich dann etwa so

Die Prädikatenlogik

Beispiel

Mit der Sprache der Prädikatenlogik lassen sich mathematische Fragenstellungen knapp und präzise fromulieren und definieren. Die Aussage

Die Zahlenfolge $a_n = \frac{2n+3}{3n}$ konvergiert gegen $\frac{2}{3}$ für $n \to \infty$.

formuliert sich dann etwa so

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in N \; \forall n \geq N \; : \; \left| a_n - \frac{2}{3} \right| < \varepsilon$$

Die Prädikatenlogik

Beispiel

Mit der Sprache der Prädikatenlogik lassen sich mathematische Fragenstellungen knapp und präzise fromulieren und definieren. Die Aussage

Die Zahlenfolge $a_n = \frac{2n+3}{3n}$ konvergiert gegen $\frac{2}{3}$ für $n \to \infty$.

formuliert sich dann etwa so

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in N \; \forall n \geq N \; : \; \left| a_n - \frac{2}{3} \right| < \varepsilon$$

Dabei handelt es sich um eine wahre Aussage.

Die Prädikatenlogik

Beispiel

Mit der Sprache der Prädikatenlogik lassen sich mathematische Fragenstellungen knapp und präzise fromulieren und definieren. Die Aussage

Die Zahlenfolge $a_n = \frac{2n+3}{3n}$ *konvergiert gegen* $\frac{2}{3}$ *für* $n \to \infty$.

formuliert sich dann etwa so

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in N \ \forall n \geq N \ : \ \left| a_n - \frac{2}{3} \right| < \varepsilon$$

Dabei handelt es sich um eine wahre Aussage.

Die Prädikatenlogik

Beispiel

Die Aussage

Jede gerade Zahl, die größer als zwei ist, ist die Summe von zwei Primzahlen.

lässt sich wie folgt formulieren:

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \left((2n > 2) \to (\exists x \in \mathbb{P}\, \exists y \in \mathbb{P} \,:\, 2n = x + y)\right)$$

wobei $\mathbb{N}$ die natürlichen Zahlen und $\mathbb{P}$ die Primzahlen bezeichnet.

Die Prädikatenlogik

Beispiel

Die Aussage

Jede gerade Zahl, die größer als zwei ist, ist die Summe von zwei Primzahlen.

lässt sich wie folgt formulieren:

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \left((2n > 2) \to (\exists x \in \mathbb{P}\, \exists y \in \mathbb{P} \,:\, 2n = x + y)\right)$$

wobei $\mathbb{N}$ die natürlichen Zahlen und $\mathbb{P}$ die Primzahlen bezeichnet.

Bei dieser Aussage ist nicht bekannt, ob sie wahr oder falsch ist (*Goldbach–Vermutung*).

Die Prädikatenlogik

Beispiel

Die Aussage

Jede gerade Zahl, die größer als zwei ist, ist die Summe von zwei Primzahlen.

lässt sich wie folgt formulieren:

$$\forall n \in \mathbb{N} \ ((2n > 2) \to (\exists x \in \mathbb{P} \, \exists y \in \mathbb{P} : 2n = x + y))$$

wobei $\mathbb{N}$ die natürlichen Zahlen und $\mathbb{P}$ die Primzahlen bezeichnet.
Bei dieser Aussage ist nicht bekannt, ob sie wahr oder falsch ist (*Goldbach–Vermutung*).

Die Prädikatenlogik

Übung

Formulieren Sie die Aussage

Das Quadrat einer geraden ganzen Zahl ist eine gerade Zahl.

in der Sprache der Prädikatenlogik

Die Prädikatenlogik

Übung

Formulieren Sie die Aussage

Das Quadrat einer geraden ganzen Zahl ist eine gerade Zahl.

in der Sprache der Prädikatenlogik

Lösung:

Die Aussage kann entweder wie folgt formuliert werden

$$\forall x \in \mathbb{Z} \left(2|x \implies 2|x^2\right)$$

oder als

$$\forall x \in \mathbb{Z} \left((\exists k \in \mathbb{Z}\ x = 2 \cdot k) \implies (\exists l \in \mathbb{Z}\ x^2 = 2l)\right)$$

Die Prädikatenlogik

Übung

Formulieren Sie die Aussage

Das Quadrat einer geraden ganzen Zahl ist eine gerade Zahl.

in der Sprache der Prädikatenlogik

Lösung:

Die Aussage kann entweder wie folgt formuliert werden

$$\forall x \in \mathbb{Z} \left(2|x \implies 2|x^2\right)$$

oder als

$$\forall x \in \mathbb{Z} \left((\exists k \in \mathbb{Z}\ x = 2 \cdot k) \implies (\exists l \in \mathbb{Z}\ x^2 = 2l)\right)$$

mathematische Beweise

In der Mathematik geht es oft darum, dass eine Voraussetzung gegeben ist, und dass dann daraus eine Behauptung abzuleiten ist. Das lässt sich häufig wie folgt formulieren:

Für alle x, die eine Bedingung erfüllen, gilt eine bestimmte Behauptung

In der Sprache der Prädikatenlogik:

$$\forall x \; \alpha(x) \Longrightarrow \beta(x)$$

mathematische Beweise

In der Mathematik geht es oft darum, dass eine Voraussetzung gegeben ist, und dass dann daraus eine Behauptung abzuleiten ist. Das lässt sich häufig wie folgt formulieren:

Für alle x, die eine Bedingung erfüllen, gilt eine bestimmte Behauptung

In der Sprache der Prädikatenlogik:

$$\forall x \; \alpha(x) \Longrightarrow \beta(x)$$

Die Aussage ist genau dann bewiesen, wenn für jede (mögliche) Belegung von x durch ein x_0 die resultierende Aussage $\alpha(x_0) \Longrightarrow \beta(x_0)$ wahr ist.

mathematische Beweise

In der Mathematik geht es oft darum, dass eine Voraussetzung gegeben ist, und dass dann daraus eine Behauptung abzuleiten ist. Das lässt sich häufig wie folgt formulieren:

Für alle x, die eine Bedingung erfüllen, gilt eine bestimmte Behauptung

In der Sprache der Prädikatenlogik:

$$\forall x \; \alpha(x) \Longrightarrow \beta(x)$$

Die Aussage ist genau dann bewiesen, wenn für jede (mögliche) Belegung von x durch ein x_0 die resultierende Aussage $\alpha(x_0) \Longrightarrow \beta(x_0)$ wahr ist.

direkte Beweise

Von einem direkten Beweis sprechen wir, wenn aus der Voraussetzung unmittelbar durch logische Umformungen die Behauptung abgeleitet werden kann.

Zum Beweis von

$$\forall x\ \alpha(x) \Longrightarrow \beta(x)$$

ist dabei durch die Umformungsregeln der Logik zu zeigen, dass für alle x, für die $\alpha(x)$ wahr ist, auch $\beta(x)$ wahr ist.

direkte Beweise

Von einem direkten Beweis sprechen wir, wenn aus der Voraussetzung unmittelbar durch logische Umformungen die Behauptung abgeleitet werden kann.
Zum Beweis von

$$\forall x \ \alpha(x) \Longrightarrow \beta(x)$$

ist dabei durch die Umformungsregeln der Logik zu zeigen, dass für alle x, für die $\alpha(x)$ wahr ist, auch $\beta(x)$ wahr ist.

Beispiel

Wir zeigen mit einem direkten Beweis, dass

$$\forall x \in \mathbb{Z} \ \left(2|x \Longrightarrow 2|x^2\right)$$

eine korrekte Aussage ist.

direkte Beweise

Von einem direkten Beweis sprechen wir, wenn aus der Voraussetzung unmittelbar durch logische Umformungen die Behauptung abgeleitet werden kann.
Zum Beweis von

$$\forall x \ \alpha(x) \Longrightarrow \beta(x)$$

ist dabei durch die Umformungsregeln der Logik zu zeigen, dass für alle x, für die $\alpha(x)$ wahr ist, auch $\beta(x)$ wahr ist.

Beispiel

Wir zeigen mit einem direkten Beweis, dass

$$\forall x \in \mathbb{Z} \ \left(2|x \Longrightarrow 2|x^2\right)$$

eine korrekte Aussage ist.

direkte Beweise

Übung

Zeigen Sie die folgende Aussage mit einem direkten Beweis:
Ist $x \in \mathbb{Z}$ eine positive ganze Zahl, für die $\sqrt{x}$ rational ist, so ist $\sqrt{x}$ schon eine ganze Zahl, dh. zeigen Sie

$$\forall x \in \mathbb{Z}, x > 0 \ \left(\sqrt{x} \in \mathbb{Q} \Longrightarrow \sqrt{x} \in \mathbb{Z}\right)$$

direkte Beweise

Übung

Zeigen Sie die folgende Aussage mit einem direkten Beweis:
Ist $x \in \mathbb{Z}$ eine positive ganze Zahl, für die $\sqrt{x}$ rational ist, so ist $\sqrt{x}$ schon eine ganze Zahl, dh. zeigen Sie

$$\forall x \in \mathbb{Z}, x > 0 \ \left(\sqrt{x} \in \mathbb{Q} \Longrightarrow \sqrt{x} \in \mathbb{Z}\right)$$

Lösung:

Der entscheidende Punkt ist, dass wir $\sqrt{x} = \frac{m}{n}$ (mit $m, n \in \mathbb{N}$) schreiben und zeigen, dass $n|m$. Dazu nutzen wir aus, dass $x^2 = \frac{m^2}{n^2} \in \mathbb{Z}$.

direkte Beweise

Übung

Zeigen Sie die folgende Aussage mit einem direkten Beweis:
Ist $x \in \mathbb{Z}$ eine positive ganze Zahl, für die $\sqrt{x}$ rational ist, so ist $\sqrt{x}$ schon eine ganze Zahl, dh. zeigen Sie

$$\forall x \in \mathbb{Z}, x > 0 \ \ (\sqrt{x} \in \mathbb{Q} \Longrightarrow \sqrt{x} \in \mathbb{Z})$$

Lösung:

Der entscheidende Punkt ist, dass wir $\sqrt{x} = \frac{m}{n}$ (mit $m, n \in \mathbb{N}$) schreiben und zeigen, dass $n|m$. Dazu nutzen wir aus, dass $x^2 = \frac{m^2}{n^2} \in \mathbb{Z}$.

indirekte Beweise

Von einem indirekten Beweis sprechen wir, wenn für den Beweis der Umkehrschluss benutzt wird.

Zum Beweis von

$$\forall x \; \alpha(x) \Longrightarrow \beta(x)$$

ist dabei durch die Umformungsregeln der Logik zu zeigen, dass für alle x, für die $\beta(x)$ falsch ist, auch $\alpha(x)$ falsch ist.

indirekte Beweise

Von einem indirekten Beweis sprechen wir, wenn für den Beweis der Umkehrschluss benutzt wird.
Zum Beweis von

$$\forall x \ \alpha(x) \Longrightarrow \beta(x)$$

ist dabei durch die Umformungsregeln der Logik zu zeigen, dass für alle x, für die $\beta(x)$ falsch ist, auch $\alpha(x)$ falsch ist.

Beispiel

Wir zeigen mit einem indirekten Beweis, dass

$$\forall x \in \mathbb{Z} \ \left(2|x \longrightarrow 2|x^2\right)$$

eine korrekte Aussage ist.

indirekte Beweise

Von einem indirekten Beweis sprechen wir, wenn für den Beweis der Umkehrschluss benutzt wird.
Zum Beweis von

$$\forall x\ \alpha(x) \Longrightarrow \beta(x)$$

ist dabei durch die Umformungsregeln der Logik zu zeigen, dass für alle x, für die $\beta(x)$ falsch ist, auch $\alpha(x)$ falsch ist.

Beispiel

Wir zeigen mit einem indirekten Beweis, dass

$$\forall x \in \mathbb{Z}\ \left(2|x \longrightarrow 2|x^2\right)$$

eine korrekte Aussage ist.

indirekte Beweise

Übung

Zeigen Sie die folgende Aussage mit einem indirekten Beweis:
Ist $x \in \mathbb{Z}$ eine positive ganze Zahl, für die $\sqrt{x}$ rational ist, so ist $\sqrt{x}$ schon eine ganze Zahl, dh. zeigen Sie

$$\forall x \in \mathbb{Z}, x > 0 \ \ (\sqrt{x} \in \mathbb{Q} \Longrightarrow \sqrt{x} \in \mathbb{Z})$$

indirekte Beweise

Übung

Zeigen Sie die folgende Aussage mit einem indirekten Beweis:
Ist $x \in \mathbb{Z}$ eine positive ganze Zahl, für die $\sqrt{x}$ rational ist, so ist $\sqrt{x}$ schon eine ganze Zahl, dh. zeigen Sie

$$\forall x \in \mathbb{Z}, x > 0 \ \left(\sqrt{x} \in \mathbb{Q} \Longrightarrow \sqrt{x} \in \mathbb{Z}\right)$$

Lösung:

Hier schreiben wir wieder $\sqrt{x} = \frac{m}{n}$ (mit $m, n \in \mathbb{N}$) und nehmen an, dass m und n teilerfremd sind und $n \neq 1$ (also das die Folgerung nicht stimmt). Daraus leiten wir über $x = \frac{m^2}{n^2}$ ab, dass x nicht ganzzahlig ist.

indirekte Beweise

Übung

Zeigen Sie die folgende Aussage mit einem indirekten Beweis:
Ist $x \in \mathbb{Z}$ eine positive ganze Zahl, für die $\sqrt{x}$ rational ist, so ist $\sqrt{x}$ schon eine ganze Zahl, dh. zeigen Sie

$$\forall x \in \mathbb{Z}, x > 0 \ \left(\sqrt{x} \in \mathbb{Q} \Longrightarrow \sqrt{x} \in \mathbb{Z}\right)$$

Lösung:

Hier schreiben wir wieder $\sqrt{x} = \frac{m}{n}$ (mit $m, n \in \mathbb{N}$) und nehmen an, dass m und n teilerfremd sind und $n \neq 1$ (also das die Folgerung nicht stimmt). Daraus leiten wir über $x = \frac{m^2}{n^2}$ ab, dass x nicht ganzzahlig ist.

Induktionsbeweis

In der Mathematik gibt es viele Formeln, die für alle natürlichen Zahlen formuliert werden können, z.B.

$$A(n): \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Wir haben also eine Folge von Aussagen $A(n)$ über deren Wahrheitswert entschieden werden soll.

Induktionsbeweis

In der Mathematik gibt es viele Formeln, die für alle natürlichen Zahlen formuliert werden können, z.B.

$$A(n): \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Wir haben also eine Folge von Aussagen $A(n)$ über deren Wahrheitswert entschieden werden soll.

In diesen Situationen ist es oft schwierig, einen (direkten oder indirekten) Beweis zu finden, der für alle $n \in \mathbb{N}$ gleichmäßig arbeitet.

Induktionsbeweis

In der Mathematik gibt es viele Formeln, die für alle natürlichen Zahlen formuliert werden können, z.B.

$$A(n): \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Wir haben also eine Folge von Aussagen $A(n)$ über deren Wahrheitswert entschieden werden soll.
In diesen Situationen ist es oft schwierig, einen (direkten oder indirekten) Beweis zu finden, der für alle $n \in \mathbb{N}$ gleichmäßig arbeitet.
Oft hilft hier aber das Prinzip der vollständigen Induktion.

Induktionsbeweis

In der Mathematik gibt es viele Formeln, die für alle natürlichen Zahlen formuliert werden können, z.B.

$$A(n): \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Wir haben also eine Folge von Aussagen $A(n)$ über deren Wahrheitswert entschieden werden soll.
In diesen Situationen ist es oft schwierig, einen (direkten oder indirekten) Beweis zu finden, der für alle $n \in \mathbb{N}$ gleichmäßig arbeitet.
Oft hilft hier aber das Prinzip der vollständigen Induktion.

Induktionsbeweis

Wir betrachten Aussagen $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Gilt dann

1. Induktionsanfang: $A(1)$ ist wahr.

Induktionsbeweis

Wir betrachten Aussagen $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Gilt dann

1. Induktionsanfang: $A(1)$ ist wahr.
2. Induktionsschluß: $A(n) \Longrightarrow A(n+1)$ für alle $n \geq 1$.

Induktionsbeweis

Wir betrachten Aussagen $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Gilt dann

1. Induktionsanfang: $A(1)$ ist wahr.
2. Induktionsschluß: $A(n) \Longrightarrow A(n+1)$ für alle $n \geq 1$.

so ist $A(n)$ wahr für alle $n \geq 1$

Induktionsbeweis

Wir betrachten Aussagen $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Gilt dann

1. Induktionsanfang: $A(1)$ ist wahr.
2. Induktionsschluß: $A(n) \Longrightarrow A(n+1)$ für alle $n \geq 1$.

so ist $A(n)$ wahr für alle $n \geq 1$

Das Prinzip der vollständigen Induktion funktioniert auch mit einem beliebigen Startwert $n_0 \in \mathbb{N}$ (anstelle von 1). Dann gilt $A(n)$ für alle $n \geq n_0$

Induktionsbeweis

Wir betrachten Aussagen $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Gilt dann

1. Induktionsanfang: $A(1)$ ist wahr.
2. Induktionsschluß: $A(n) \Longrightarrow A(n+1)$ für alle $n \geq 1$.

so ist $A(n)$ wahr für alle $n \geq 1$
Das Prinzip der vollständigen Induktion funktioniert auch mit einem beliebigen Startwert $n_0 \in \mathbb{N}$ (anstelle von 1). Dann gilt $A(n)$ für alle $n \geq n_0$

Induktionsbeweis

Beispiel

Wir beweisen

$$A(n): \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

für alle $n \geq 1$ mit vollständiger Induktion.

Induktionsbeweis

Übung

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:
Für alle $n \geq 0$ gilt

$$A(n): \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

Induktionsbeweis

Übung

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:
Für alle $n \geq 2$ gilt

$$A(n): \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}$$