Generelles

Gerade & Ungerade Funktionen

$(f(-x) = -f(x)) \iff$ f ist ungerade $\iff$ f st punktsymmetrisch

$(f(x) = f(-x)) \iff$ f ist gerade $\iff$ f ist achsensymmetrisch

Newton-Verfahren

1. **Iteratives Verfahren zum Finden von Nullstellen**
2. x_0 **ist geeignete Startstelle**
3. **Verfahren:**

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Konvergenzkriterien

Absolute & Bedingte Konvergenz

1. **Absolut Konvergent:** $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ **konv.**
2. **Bedingt Konvergent:** $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ **konv. und** $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ **div.**
3. **Absolut konv.** $\implies$ **konv.**

Notwendiges Kriterium

$$\textbf{Ist } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \textbf{ konv. } \rightarrow \lim_{4 \to \infty} a_k = 0$$

Majorantenkriterium

$$0 \leq a_k \leq b_k, \sum_{k=1}^{\infty} b_k \textbf{ konv.} \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \textbf{ konv.}$$

Minorantenkriterium

$$0 \leq c_k \leq a_k, \sum_{k=1}^{\infty} c_k \textbf{ div.}, \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \textbf{ div.}$$

Quotientenkriterium

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \textbf{ mit } a_k > 0 \textbf{ konv. } \Longleftarrow \exists q : 0 < q < 1 : \forall k \geq k_0 : \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q$$

Wurzelkriterium

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \textbf{ mit } a_k > 0 \textbf{ konv. } \Longleftarrow \exists q : 0 < q < 1 : \forall k \geq k_0 : \sqrt[k]{a_k} \leq q$$

Leibniz-Kriterium

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} b_k \textbf{ konv. } \Longleftarrow (b_k) \textbf{ monoton fallend}, b_k > 0, \lim_{k\to\infty} b_k = 0$$

Satz von L'Hôpital

Sei $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ eine unbestimmte Form, so gilt:

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Partialsumme

$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ ist eine Partialsumme für die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Wenn die Partialsumme der Reihe konvergiert, konvergiert die Reihe gegen den selben Wert

Wichtige Reihen

Name	Def.	Konv.	Wert
Geometrische Reihe	$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$	$\|q\| < 1 \implies$ konv, ansonsten div.	Falls konv.: $\frac{A}{1-q}$ mit A = Anfangswert der Reihe
...	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$	konv.	$\lim 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$
Harmonische Reihe (für a=1)	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^a}$	$a > 1 \implies$ konv., ansonsten div.	...
...	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$	konv.	...
...	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\binom{2k}{k}}$	konv.	...
Alternierende Harmonische Reihe	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$	konv.	...

Ableitungsregeln

Faktorregel

$$(a \cdot f)' = a \cdot f'$$

Summenregel

$$(f + g)' = f' + g'$$

Potenzregel

$$(f^a)' = a \cdot f^{a-1}$$

Produktregel

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Quotientenregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Kettenregel

$$(f(g))' = f'(g) \cdot g'$$

Ableitung der Umkehrfunktion

$$f'(x_0) \neq 0 \text{ und g Umkehrfunktion von f } \implies g'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Integrieren

Partielle Integration

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx$$

Substitionsregel

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(g(y)) \cdot g'(y) dy$$

1. **Grenzen berechnen:**

$$a, b \to g(a), g(b)$$

2. **Substitution ableiten & nach dx umformen:**

$$(\frac{dx}{dy} = g'(y)) \to (dx = g'(y) \cdot dy)$$

3. **Substitution einsetzen & ausrechnen:**

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(g(y)) \cdot g'(y) dy$$

Rotationskörper

Rotation um X-Achse:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Rotation um Y-Achse:

$$V = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) dx$$

Bogenlänge

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Logarithmus

$$log_a(x) = \frac{ln(x)}{ln(a)} \tag{1}$$

$$ln(x) = log_a(x) \cdot ln(a) \tag{2}$$

$$log_a(x) + log_a(y) = log_a(x \cdot y) \tag{3}$$

$$log_a(x) - log_a(y) = log_a(\frac{x}{y}) \tag{4}$$

$$log_a(x^y) = y \cdot log_a(x) \tag{5}$$

$$\tag{6}$$

Elementare Ableitungen & Stammfunktionen

Stammfunktion	Funktion	Ableitung
$\frac{1}{a}e^{a \cdot x}$	$e^{a \cdot x}$	$a \cdot e^{a \cdot x}$
$x \cdot ln(x) - x$	$ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$ln(f(x))$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$	...
$\frac{f(x)^2}{2}$	$f'(x) \cdot f(x)$	...
$\sqrt{f(x)}$	$\frac{f'(x)}{2 \cdot \sqrt{f(x)}}$	...

Winkelfunktionen

x	0	π / 2	π	3π / 2	nπ (n ganz)
sin x	0	1	0	- 1	0
cos x	1	0	- 1	0	$(- 1)^n$

Gradmaß	- 45°	90°	180°	360°	405°	720°
Bogenmaß	- π / 4	π / 2	π	2 π	9π / 4	4 π

Name	Definition	Ableitung	Weiteres
sin	$\frac{GK}{H}$	cos	$sin^2 = 1 - cos^2$, $sin(-x) = -sin(x)$, $sin(x+y) = sinx \cdot cosy + cosx \cdot siny$, $sin(x + \frac{\pi}{2}) = cos(x)$
cos	$\frac{AK}{H}$	$-sin$	$cos^2 = 1 - sin^2$, $cos(x) = cos(-x)$, $cos(x+y) = cosx \cdot cosy - sinx \cdot siny$
tan	$\frac{sin}{cos}$	$\frac{1}{cos^2} = 1 + tan^2$	$tan(-x) = -tan(x)$,
cot	$\frac{cos}{sin}$	$\frac{-1}{sin^2} = -(1 + cot^2)$	$cot(-x) = -cot(x)$,
$arcsin$	...	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$D(f) = [-1,1], W(f) = [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$arccos$	...	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$D(f) = [-1,1], W(f) = [0,\pi]$
$arctan$	...	$\frac{1}{1+x^2}$	$D(f) = (-\infty,\infty), W(f) = (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$arcot$	...	$\frac{-1}{1+x^2}$	$D(f) = (-\infty,\infty), W(f) = (0,\pi)$
$sinh$	$\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$	$cosh$	...
$cosh$	$\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$	$sinh$	...
$tanh$	...	$\frac{1}{cosh^2} = 1 - tanh^2$	...
$coth$	...	$\frac{-1}{sin^2} = 1 - coth^2$	...
$arsinh$	...	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	...
$arcosh$	...	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}(x > 1)$	...
$artanh$	...	$\frac{1}{1-x^2}(\|x\| < 1)$	...
$arcoth$	...	$\frac{1}{1-x^2}(\|x\| > 1)$	...

Table 1: Winkelfunktionen (GK = Gegenkathete, AK = Ankathete und H = Hypotenuse)