Übungen zur linearen Algebra Gruppe, Ring, Körper

1. Wir betrachten die Gruppe $G = ((\mathbb{Z}/43\mathbb{Z})^*; \cdot; 1)$ (das sind die Restklassen modulo 43 ohne die 0 mit der Multiplikation als Verknüpfung) mit der Ordnung 42. Es ist (ohne Beweis) $G =< 3 >$, d.h. $ord(3) = 42$. Finden sie zu jedem Teiler von 42 ein Element der Gruppe, welches diese Ordnung hat.

2. Sei R ein Ring mit genau 5 Einheiten. Zeigen Sie, daß gilt : $-1 = 1$

3. Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring, gilt dann

   (a) R ist nullteilerfrei

   (b) $(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$

   (c) R ist Integritätsring $\Longrightarrow$ R ist Körper ?

4. Sind folgende Objekte Körper ?

   (a) $\mathbb{Z} \cup \{\frac{1}{z} \in \mathbb{Q} \quad | \quad \forall z \in \mathbb{Z}, z \neq 0\}$

   (b) $\mathbb{Q}(\sqrt{5}) = \{a + b \cdot \sqrt{5} \quad | \quad a, b \in \mathbb{Q}\}$

5. Für folgende $z \in \mathbb{Z}$ bestimmen Sie $\overline{z}, \frac{1}{z}, |z|$

   (a) $3 + 4 \cdot i$

   (b) $\frac{1+i}{1-i}$