1. Zeige durch vollständige Induktion
   $5^n + 7 \equiv 0 \pmod 4$

2. Modulorechnung
   (a) Berechne in $\mathbb{F}_{71}$ den Wert $\frac{1}{17}$
   (b) Berechne $21^{35} \pmod{43}$

3. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis (bezüglich des Standardskalarproduktes) des Untervektorraums U des $\mathbb{R}^5$ der durch folgende linear unabhängige Vektoren aufgespannt wird
   $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\\2\\3\end{pmatrix}$

4. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem (LGS) $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$
   $A = \begin{pmatrix}3 & 2 & -4\\-2 & -1 & 3\\2 & 0 & \alpha\end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix}-1\\1\\\beta\end{pmatrix}$
   (a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist A regulär ?
   (b) Wie lautet für reguläres A die Lösungsmenge der Gleichung $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$?
   (c) Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ hat das LGS keine Lösung ?
   (d) Bestimen Sie die Lösung des LGS für $\alpha = 2, \beta = 10$

5. Eine Spiegelung ist eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft $\varphi^2 = id_{\mathbb{R}^3}$
   Sei φ dargestellt durch die Matrix $A = \begin{pmatrix}-5 & 8 & 6\\-3 & -5 & 3\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$
   (a) Zeige, daß φ eine Spiegelung ist.
   (b) Bestimme die Basen von $ker(\varphi - id_{\mathbb{R}^3})$ sowie von $ker(\varphi + id_{\mathbb{R}^3})$
   (c) Zeige, daß die Vereinigung dieser Basen eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist
   (d) Stellen Sie φ in dieser Basis dar

   Anmerkung $id_{\mathbb{R}^3}$ wird dargestellt durch E_3.

6. Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren der Matrix
   $A = \begin{pmatrix}-2 & -1 & 2\\4 & 5 & -4\\3 & 3 & -3\end{pmatrix}$