1. Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz. Geben Sie im Falle der Konvergenz den Wert der Reihe an.

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k!}$, b) $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-2)^m}{m}$.

<u>Aufgabe 1</u>

a) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} = \frac{3}{n+1} \leq \frac{3}{4}$ für $n \geq 3$

$\Rightarrow$ Konvergent nach Quotientenkriterium

Wert der Reihe $= e^3 - 1$; da die Reihe die bekannte Reihe für e^x ist ohne den ersten Summanden

b) $\frac{2^m}{m} = \frac{(1+1)^m}{m} \underset{\uparrow}{\geq} \frac{1+m}{m} > 1$

Bernoulli-Ungleichung

$\Rightarrow$ Reihe ist divergent, da die notwendige Bedingung $\lim_{m \to \infty} \frac{(-2)^m}{m} = 0$ verletzt ist.

2. Untersuchen Sie die Funktion f(x) = (x / (x+1)) ^{2} bzw. deren Schaubild auf D(f) , W(f) , Nullstellen , Extrema und Wendepunkte .

$$f(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)^2$$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $W(f) = [0, \infty)$

Nullstellen : $x = 0$, $f(0) = 0$

Ableitungen : $f'(x) = 2 \cdot \frac{x}{x+1} \cdot \frac{1}{(x+1)^2}$

$$= \frac{2x}{(x+1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{(x+1)^3 \cdot 2 - 2x \cdot 3(x+1)^2}{(x+1)^6} = \frac{2x+2-6x}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{2-4x}{(x+1)^4}$$

Extrema : $f'(x) = 0 \iff x = 0$

$f''(0) = 2 > 0 \implies$ Minimum

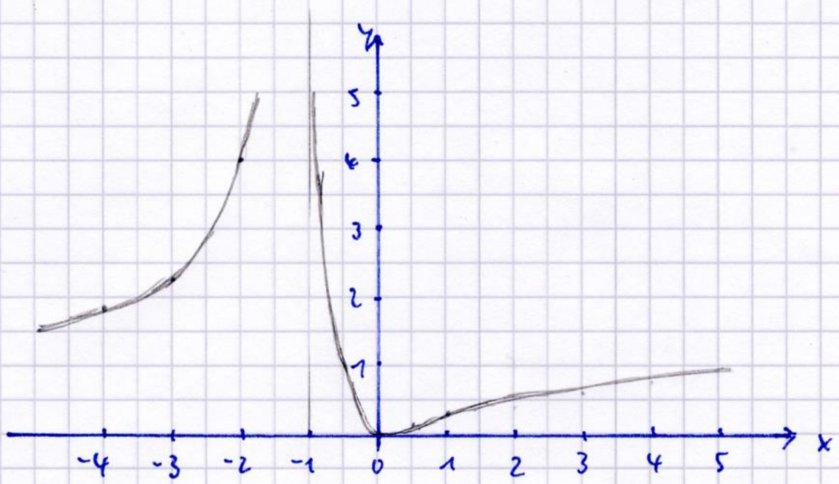
Wendepunkte : $f''(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2}$

Bei $x = 0{,}5$ wechselt das Vorzeichen von f'' von „+" nach „−". ⇒ Links-rechts-übergang

Wertetabelle :

x	−4	−3	−2	−1,5	−0,5	0	0,5	1	2	3	4
f(x)	1,78	2,25	4	9	1	0	0,111	0,25	0,44	0,56	0,64

Schaubild:



3. Bestimmen Sie die Grenzwerte

a) $\lim\limits_{x \to 1+} \dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}}$, b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos^2 x}{\sin^2 x}$, c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$.

a) $\lim\limits_{x \to 1+} \dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}} = \lim\limits_{x \to 1+} \sqrt{x-1} = 0$.

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos^2 x}{\sin^2 x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 x}{\sin^2 x} = 1$

c) de l'Hôpital: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{\sin x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{\cos x} = 0$.

4. Differenzieren Sie die Funktionen

a) $f(x) = e^{-x}(\sin x + \cos x)$, b) $g(x) = \ln(1 + x^2 + x^4)$.

Benennen Sie stichwortartig die Regeln , die Sie verwenden .

a) $f'(x) = e^{-x}(\cos x - \sin x) + (-e^{-x})(\sin x + \cos x)$

$= e^{-x}(\cancel{\cos x} - \sin x) - e^{-x}(\sin x + \cancel{\cos x})$

$= \underline{-2e^{-x}\sin x}$

Produktregel und Kettenregel $(e^{-x})' = -e^{-x}$.

b) $g'(x) = \dfrac{2x + 4x^3}{1 + x^2 + x^4}$; Kettenregel

5. Zeigen Sie für alle natürlichen Zahlen n : $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

Beweis durch vollständige Induktion :

$\underline{n=1}$: $l.S. = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$; $r.S. = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ ✓

$\underline{\text{„} n \to n+1 \text{"}}$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

$$\doteq 2 - \frac{2n+4-n-1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}} \quad ✓$$

1. Sei $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.

a) Zerlegen Sie $f(x)$ in Linearfaktoren .
b) Schreiben Sie $f(x)$ in der Form $f(x) = a_3 (x - 2)^3 + a_2 (x - 2)^2 + a_1 (x - 2) + a_0$.
c) Zerlegen Sie $g(x) = 1 / f(x)$ in Partialbrüche .

a) Eine Nullstelle : $x_1 = 1$ (erraten!)

	1	-1	-4	4
		1	0	4
1	1	0	-4	0

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_{2,3} = \pm 2$

$\Rightarrow$ Faktorzerlegung $f(x) = (x-1)(x+2)(x-2)$.

b) Vollständiges Hornerschema

	1	-1	-4	4
		2	2	-4
2	1	1	-2	0
		2	6	
2	1	3	4	
		2		
2	1	5		
	1			

$$\underline{f(x) = (x-2)^3 + 5(x-2)^2 + 4(x-2)}$$

c)

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{(x-1)(x+2)(x-2)}$$

$$= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-1}$$

$$1 = A(x-1)(x+2) + B(x-2)(x-1) + C(x-2)(x+2)$$

$x = 1$: $1 = C \cdot (-1) \cdot 3$ $\qquad C = -\frac{1}{3}$

$x = -2$: $1 = B \cdot (-4) \cdot (-3)$ $\qquad B = \frac{1}{12}$

$x = 2$: $1 = A \cdot 1 \cdot 4$ $\qquad A = \frac{1}{4}$.

$$g(x) = \frac{1}{4(x-2)} + \frac{1}{12(x+2)} - \frac{1}{3(x-1)}$$

2. a) Zeigen Sie für alle natürlichen Zahlen n : $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = \frac{2^{n+1} - n - 2}{2^n}$.

b) Zeigen Sie , dass die unendliche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$ konvergiert und bestimmen Sie deren Wert .

a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$

$\underline{n=1}$: $\quad$ l. S. $= \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$; r. S. $= 2 - \frac{3}{2^1} = \frac{1}{2}$. ✓

„$\underline{n \to n+1}$"

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

$$= 2 - \frac{2n+4}{2^{n+1}} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{2n+4-n-1}{2^{n+1}}$$

$$= 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}} .$$ ✓

b) Die Summe $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$ in a) ist die Partialsumme der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$.

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} = \lim_{n\to\infty} \Big(2 - \underbrace{\frac{n+2}{2^n}}_{(*)\ \downarrow\ n\to\infty \atop 0} \Big) = 2$$

Das „sieht man" oder rechnet es schnell nach:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \overset{(n \geq 2)}{\geq} \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\frac{n+2}{2^n} \leq \frac{2n}{2^n} \leq 2n \cdot \frac{2}{n(n-1)} = \frac{4}{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

3. Differenzieren Sie die Funktionen

a) $f(x) = e^{x}(\sin(-3x) + \cos(-3x))$, b) $g(x) = \ln((1+x^2)^2)$.

Benennen Sie stichwortartig die Regeln , die Sie verwenden .

a) $f(x) = e^x(\sin(-3x) + \cos(-3x))$

$= e^x(\cos(3x) - \sin(3x))$

$f'(x) = e^x(\cos 3x - \sin 3x) + e^x(-3\sin 3x - 3\cos 3x)$

$= e^x(-2\cos 3x - 4\sin 3x)$

(Produktregel und Kettenregel)

b) $g(x) = \ln((1+x^2)^2) = 2\ln(1+x^2)$

$g'(x) = \dfrac{2 \cdot 2x}{1+x^2} = \dfrac{4x}{1+x^2}$

(Kettenregel)

4. Sei $f(x) = 9\sqrt{x}$ und $g(x) = \frac{1}{3}x^2$.

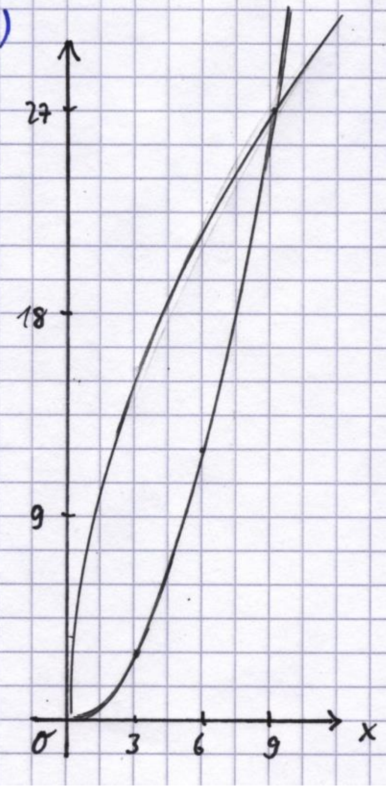
a) Skizzieren Sie die Schaubilder der Funktionen f und g .

b) Ermitteln Sie alle Schnittpunkte dieser Schaubilder .

c) Unter welchem Winkel schneiden sich die Kurven $y = f(x)$ und $y = g(x)$ in den Schnittpunkten aus b) ?

d) Wie groß ist der Inhalt des von den Schaubildern der Funktionen f und g eingeschlossenen Flächenstücks ?

a)



x	0	3	6	9
f(x)	0	15,58	22,05	27
g(x)	0	3	12	27

b) $f(x) = g(x)$

$\Rightarrow f^2(x) = g^2(x)$,

$\Rightarrow 81x = \frac{x^4}{9}$

$\Rightarrow x = 0 \lor x^3 = 9^3$

Schnittpunkte:

$(0,0)$; $(9,27)$

c) $f(x) = 9\sqrt{x}$, $f'(x) = \frac{9}{2\sqrt{x}}$,

$g(x) = \frac{1}{3}x^2$, $g'(x) = \frac{2}{3}x$

$(9,27)$: $f'(9) = \frac{3}{2} \Rightarrow \alpha = 56{,}31°$

$g'(9) = 6 \Rightarrow \beta = 80{,}537°$

Schnittwinkel $\beta - \alpha = 24{,}227°$

$(0,0)$: $g'(0) = 0$; $\lim\limits_{x \to 0+} f'(x) = \infty$,

Schnittwinkel $90°$

d) $$F = \int_0^9 \left(9\sqrt{x} - \frac{1}{3}x^2\right) dx$$

$$= \left[9 \cdot \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{3 \cdot 3}x^3\right]_0^9$$

$$= \left[6x^{3/2} - \frac{1}{9}x^3\right]_0^9 = 162 - 81 = \underline{81}$$