Übungen zur linearen Algebra - Eigenwerte, Eigenvektoren

1. Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der symmetrischen Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Gegeben sei die Matrix der linearen Abbildung von $\mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5$
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

   (a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda)$

   (b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren. Nummerieren sie die Eigenwerte so, daß λ_1 der negative Eigenwert ist.

   (c) Bestimmen Sie eine Basis von V wie folgt : Neben b_1 als Eigenvektor zu λ_1 wähle einen Vektor b_2 so , daß $(A - \lambda_1 \cdot E_5)b_2 = b_1$ gilt. Zusammen mit den anderen Eigenvektoren b_3, b_4 und b_5 erhält man eine Basis.

   (d) Bestimmen Sie die Darstellung der linearen Abbildung in dieser Basis.

3. Eine wichtige Rolle in der Kryptographie und der Polynominterpolation spielt die Vandermonde-Matrix mit $r_1, \cdots, r_n \in \mathbb{R}, (n \geq 2)$
$$V(r_1, \cdots, r_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & \cdots & r_n^2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \cdots & r_n^{n-1} \end{pmatrix}$$
Zur Berechnung ihrer Determinante bilden Sie zunächst die Matrix, die entsteht, wenn Sie von der $(i+1)$-ten Zeile das r_1-fache der i-ten Zeile abziehen :
$$W(r_1, \cdots, r_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & r_2 - r_1 & \cdots & r_n - r_1 \\ 0 & r_2^2 - r_1 \cdot r_2 & \cdots & r_n^2 - r_1 \cdot r_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & r_2^{n-1} - r_1 \cdot r_2^{n-2} & \cdots & r_n^{n-1} - r_1 \cdot r_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

   (a) Überlegen Sie, daß $det(V(r_1, \cdots, r_n)) = det(W(r_1, \cdots, r_n))$

   (b) Analog zur Multiplikation einer Zeile mit einem Vielfachen gilt nun auch die Multiplikation einer Spalte mit einem Vielfachen die Determinantenberechnung. Zusammen mit der Eigenschaft
   $r_i^k - r_1 \cdot r_i^{k-1} = (r_i - r_1) \cdot r_i^{k-1}$
   entwickeln Sie zur Berechnung der Determinante von $W(r_1, \cdots, r_n)$ nach der ersten Spalte und ziehen Sie geeignete Faktoren aus den Spalten.

(c) Zeigen Sie nun durch vollständige Induktion

$$det(V(r_1, \cdots, r_n)) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (r_j - r_i)$$

4. Bereiten Sie sich auf die Klausur vor

   (a) Vollständige Induktion
   (b) Modulorechung
   (c) Basen von Untervektorräumen
   (d) Orthonormalbasen
   (e) Lösen von linearen Gleichungssystemen
   (f) Bestimmen des Kerns einer linearen Abbildung (Basis)
   (g) Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren