§ 6 Funktionen einer Veränderlichen

Den Begriff der Funktion kennen Sie schon von der Schule her und haben dort auch gesehen , wo dieser Begriff verwendet wird , nämlich überall da , wo man beschreiben will , wie eine Größe von einer anderen abhängt. Wir können es darum kurz machen :

Def. 6.1 : Eine „ **Funktion** “ f ist eine Vorschrift , durch die jedem Element x einer Menge $D(f) \subset \mathbb{R}$ eindeutig eine reelle Zahl $f(x)$ zugeordnet wird.
In diesem Zusammenhang bezeichnet man die Menge $D(f)$ als den „ **Definitionsbereich** “ von f und die Menge $W(f) := \{ y , y = f(x) , x \in D(f) \}$ den „ **Wertebereich** “ von f .

Bemerkungen :

1. Zur Angabe einer Funktion gehören also die Angabe des Definitionsbereichs und die Angabe der Vorschrift .

2. Funktionen mit $D(f) = \mathbb{N}$ haben wir früher „Folgen“ genannt und in einem eigenen Kapitel behandelt . Obwohl Folgen also auch Funktionen sind , macht es Sinn , für Folgen einen eigenen Begriff zu verwenden , weil man sich für spezielle Eigenschaften wie Konvergenz usw. interessiert , die es so bei Funktionen im allgemeinen nicht gibt. Allgemein nennt man in der Mathematik Vorschriften, die den Elementen einer Menge irgendwelche Elemente einer zweiten Menge zuordnen , auch „ **Abbildungen** “ .

3. Beim Begriff „Funktion“ denkt man aber typischerweise an Funktionen , deren Definitionsbereiche Intervalle oder Vereinigungen von Intervallen sind . Für Intervalle werden wir folgende Bezeichnungen verwenden:

   $[a, b] := \{ x ; a \le x \le b \}$ abgeschlossenes Intervall
   $(a, b) := \{ x ; a < x < b \}$ offenes Intervall
   $(a, b] := \{ x ; a < x \le b \}$ halboffenes Intervall

   weitere symbolische Bezeichnungen :

   $(-\infty, b) := \{ x ; x < b \}$, $(-\infty, b] := \{ x ; x \le b \}$, $(a, \infty) := \{ x ; a < x \}$, $(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$.

Es ist oft hilfreich , sich den Verlauf von Funktionen graphisch zu veranschaulichen , z.B. in einem rechtwinkligen Koordinatensystem , d.h. einem Paar von Zahlengeraden , die sich im gemeinsamen Nullpunkt rechtwinklig schneiden .

Def. 6.2 : Die Menge $G = \{ (x, y) ; x \in D(f) , y = f(x) \}$ heißt „ **Graph** “ (oder „ **Schaubild** “) der Funktion f .

Beispiele , Bemerkungen :

1. $f(x) = x^2$; $D(f) = \mathbb{R}$, $W(f) = [0,\infty)$,
2. $f(x) = |x|$; $D(f) = \mathbb{R}$, $W(f) = [0,\infty)$,
3. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$; $D(f) = [-1, 1]$, $W(f) = [0,1]$,
4. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } x \text{ rational} \\ 1-x^2 & \text{, falls } x \text{ irrational} \end{cases}$.

5. Konvention : ist die Vorschrift , wie zu gegebenem x die Zahl $f(x)$ zu bilden ist , wie in den Beispielen 1 - 3 durch einen Formelausdruck gegeben und wird $D(f)$ nicht angegeben , so soll für $D(f)$ immer die umfassendste Menge genommen werden , für die die Formel sinnvoll ist.
6. Nach der Konvention unter 5. wäre also für $f(x) = 1 / x$: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$.

§ 6.1 Polynome

Eine wichtige Klasse von Funktionen sind die sogenannten „Polynome“ , die wir darum etwas eingehender behandeln.

Def. 6.3 : Ein „ **Polynom** “ ist eine Funktion der Form $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ mit festen $a_k \in \mathbb{R}$.

Die Zahlen a_k heißen die „ **Koeffizienten** “ des Polynoms f , die höchste Zahl k mit $a_k \neq 0$ heißt der „ **Grad** “ von f .

Bemerkungen , Beispiele :

1. $f(x) = x^2$ ist ein Polynom vom Grad 2 ,
2. $f(x) = 3x + 4$ ist ein Polynom vom Grad 1 ,
3. $f(x) = 5$ ist ein Polynom vom Grad 0 ,
4. $f(x) = 0$ besitzt nach Def. 6.3 überhaupt keinen Grad , da wir dort nur solchen Polynomen einen Grad zuordnen, die mindestens einen von 0 verschiedenen Koeffizienten besitzen. Manchmal gibt man per Def. dem Nullpolynom den Grad ∞ . Warum das sinnvoll ist, werden wir weiter unten erläutern.
5. Die Verwendung des Begriffs „Polynom“ in der Def. 6.3 ist nicht ganz normgerecht. Streng genommen nennt man Summenausdrücke wie in der Def. 6.3 Polynome , während man Funktionen , bei denen die Vorschrift die Form eines Polynoms hat , „ **ganze rationale Funktionen** “ nennt. Dieser feine Unterschied spielt aber für uns keine Rolle.

Will man das Schaubild eines Polynoms zeichnen, benötigt man einige Funktionswerte. Eine Art , Funktionswerte von Polynomen mit möglichst geringem Rechenaufwand zu ermitteln , ist das so genannte „ **Horner - Schema** “ (Motivation , Herleitung und Beispiele ausführlich in der Vorlesung).

Will man wissen , ob und wenn ja wo ein Polynom einen bestimmten Funktionswert c annimmt , stellt man die Frage nach der Lösbarkeit und den Lösungen x von Gleichungen der Form $g(x) = c$. Da mit $g(x)$ auch $f(x) = g(x) - c$ ein Polynom ist , kann man eine solche Frage auch immer speziell in der Form von Gleichungen $f(x) = 0$ stellen.

Def. 6.4 : Eine Zahl $x_0 \in D(f)$ mit $f(x_0) = 0$ heißt „ **Nullstelle** “ der Funktion f .

Im folgenden beschäftigen wir uns mit der Berechnung von Nullstellen von Polynomen. Die Schwierigkeit dieser Fragestellung nimmt mit dem Grad des Polynoms zu :

Grad 1 : $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$: $x_0 = -b/a$ ist einzige Nullstelle von f .

Grad 2 : $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a \neq 0$: es gibt keine , eine oder zwei Lösungen, wie Sie aus der Schule wissen („abc - Formel“ , „pq - Formel“)

Grade 3, 4 : es genügt zu wissen , dass es auch für diese Fälle geschlossenen Formeln gibt, die die Lösungen durch Wurzeln ausdrücken („ Cardanosche Formeln “) . Die Formeln sind aber so spröde zu handhaben, dass man auch in diesen Fällen besser zu numerischen Näherungsverfahren greift .

Grade 5 und höher : es gibt (beweisbar) keine allgemeinen Formeln , die die Lösungen durch Wurzeln ausdrücken . Das wurde Anfang des 19. Jahrhunderts unabhängig von Niels Henrik Abel (1802 - 1829) und Evariste Galois (1811 - 1832) bewiesen.

Die Aufgabe , Nullstellen von Polynomen zu finden , ist also , wie wir gesehen haben , tendenziell umso leichter , je kleiner der Grad des Polynoms ist. Im folgenden lernen wir einige Beobachtungen und Tricks kennen , die dabei helfen können, den Grad zu erniedrigen . Die erste Beobachtung ist , dass man den Grad immer um 1 erniedrigen kann , wenn man eine Nullstelle kennt :

Satz 6.1 : Sei $f(x)$ ein Polynom , $f(x_0) = 0$. Dann gibt es ein Polynom $g(x)$ mit $f(x) = (x - x_0) \cdot g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Hat f den Grad $n \geq 1$, so hat g den Grad $n - 1$.

Allgemeiner gilt :

Satz 6.2 : Sei $f(x)$ ein Polynom, $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann gibt es ein Polynom $g(x)$ mit
$f(x) = (x - x_0) \cdot g(x) + f(x_0)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Hat f den Grad $n \geq 1$, so hat g den Grad $n - 1$.

Beweis und Beispiele in der Vorlesung . Weitere Stichworte in diesem Zusammenhang : Polynomdivision; Berechnung der Koeffizienten von g mit Hilfe des Horner – Schemas; vollständiges Horner – Schema .

Für die Berechnung eines Wertes eines Polynoms

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$$

vom Grad n braucht man n Additionen und $2n-1$ Multiplikationen , $n-1$ Multiplikationen für die Berechnung der x-Potenzen und n für die Multiplikationen der x-Potenzen mit den Koeffizienten. Weil die Berechnungen von Polynomwerten häufig vorkommen, lohnt es sich, darüber nachzudenken, wie man den Rechenaufwand erniedrigen kann, egal, ob man von Hand rechnet oder das einen Computer tun lässt. Da Multiplikationen mehr Aufwand bedeuten als Additionen, wäre insbesondere interessant, Multiplikationen einzusparen.

Wie spart man Multiplikationen ein ? Denken Sie an das Distributivgesetz $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Auf der rechten Seite braucht man zwei Multiplikationen und links nur eine. Also: ausklammern hilft ! Im Beispiel zeigen wir, wie man bei einem Polynom ausklammern kann.

$$\begin{aligned} & 4x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 3 \\ = \; & x(4x^3 + 2x^2 + x + 2) + 3 \\ = \; & x(x(4x^2 + 2x + 1) + 2) + 3 \\ = \; & x(x(x(4x+2) + 1) + 2) + 3 \end{aligned}$$

Wir berechnen den Wert an den Stellen $x_0 = 1$ und $x_0 = 0.5$, indem wir mit der innersten Klammer beginnen.

	4	2	1	2	3
		4	6	7	9
$x_0 = 1$	4	6	7	9	12

	4	2	1	2	3
		2	2	1,5	1,75
$x_0 = \frac{1}{2}$	4	4	3	3,5	4,75

Diese Art, die Berechnung anzuordnen, nennt man „**Hornerschema**“.

Wir brauchen für die Berechnung jetzt 4 Additionen und 4 Multiplikationen. Für Polynome vom Grad n brauchen wir n Additionen , aber nur noch n Multiplikationen. Die Anzahl der Multiplikationen hat sich also fast halbiert. Die letzte Zahl der unteren Zeile ist der Funktionswert an der Stelle x_0 . Auch für die übrigen Zahlen der unteren Zeile führen wir Bezeichnungen ein :

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ & & b_{n-1}x_0 & b_{n-2}x_0 & \cdots & b_1x_0 & b_0x_0 \\ \hline x_0 & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_0 & f(x_0) \end{array}$$

Aus dem Hornerschema lesen wir ab :

$$b_{n-1} = a_n \quad , \quad b_k = a_{k+1} + b_{k+1}x_0 \quad , \quad f(x_0) = a_0 + b_0x_0$$

$$b_k - b_{k+1}x_0 = a_{k+1} \quad , \quad -b_0x_0 = a_0 - f(x_0)$$

$$k = 0, \ldots, n-2$$

Die Bedeutung der Zahlen b_k erschließt sich, wenn wir sie als Koeffizienten eines Polynoms g(x) vom Grad n-1 deuten und $(x - x_0)g(x)$ ausrechnen.

$$(x - x_0)\left(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1x + b_0\right)$$

$$\begin{aligned} = \; & b_{n-1}x^n + b_{n-2}x^{n-1} + \cdots + b_0x \\ & \qquad - b_{n-1}x_0x^{n-1} - \cdots - b_1x_0x - b_0x_0 \\ = \; & a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x - b_0x_0 \\ = \; & a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 - f(x_0) \\ = \; & f(x) - f(x_0) \end{aligned}$$

Damit ist Satz 6.2, also auch Satz 6.1 bewiesen. Wir haben außerdem gesehen, dass die Koeffizienten von $g(x)$ die ersten n Zahlen der dritten Zeile des Hornerschemas für die Berechnung von $f(x_0)$ sind.

Bemerkung:

> Der Satz lässt sich auch als Ergebnis der Polynomdivision von $f(x)$ durch den Linearfaktor $(x - x_0)$ deuten.

Wir wenden das Hornerschema mit immer dem gleichen x_0 auf die Ergebniszeile an, dann wieder auf die Ergebniszeile usw. …

4	2	1	2	3
	4	6	7	9
4	6	7	9	12
	4	10	17	
4	10	17	26	
	4	14		
4	14	31		
	4			
4	18			
4				

(Diese Anordnung nennt man „**vollständiges Hornerschema**“)

… und interpretieren jede Ergebniszeile gemäß obigem Satz

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x-1)\left(4x^3+6x^2+7x+9\right)+12\\
&= (x-1)\left((x-1)\left(4x^2+10x+17\right)+26\right)+12\\
&= (x-1)\left((x-1)\left((x-1)\left(4x+14\right)+31\right)+26\right)+12\\
&= (x-1)\left((x-1)\left((x-1)\left((x-1)\cdot 4+18\right)+31\right)+26\right)+12\\
&= 4(x-1)^4+18(x-1)^3+31(x-1)^2+26(x-1)+12
\end{aligned}
$$

Allgemein: mit Hilfe des vollständigen Hornerschemas kann man jedes Polynom, das in der Standardform

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$$

gegeben ist, für festes x_0 nach Potenzen von $(x - x_0)$ sortieren.

Anhand zweier Beispiele zeigen wir noch, wie man durch Substitutionen den Grad erniedrigen kann, wenn das Polynom eine spezielle Form hat.

1. $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$. Das ist formal eine Gleichung 4. Grades. Da aber die ungeraden Potenzen von x nicht vorkommen, kann man die Gleichung durch die Substitution $y = x^2$ auf die Lösung von quadratischen Gleichungen zurückführen.
Dies Verfahren funktioniert immer, wenn das Polynom auf der linken Seite nur gerade Potenzen enthält und halbiert in einem solchen Fall den Grad.

$x^4 - 5x^2 + 6 = 0$, $u = x^2$

$u^2 - 5u + 6 = 0$ $\qquad u_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}$.

$u_1 = 3 \longrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$

$u_2 = 2 \longrightarrow x_{3,4} = \pm\sqrt{2}$

2. $x^4 - x^3 - x + 1 = 0$. Die Substitution $u = x + \frac{1}{x}$ führt die Gleichung auf die quadratische Gleichung $u^2 - u - 2 = 0$ zurück. Diese Gleichung hat die Lösungen $u_1 = 2$ und $u_2 = -1$.
Die Rücksubstitution $u = x + \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 + 1 = xu$ führt auf die quadratischen Gleichungen $x^2 - x u_1 + 1 = 0$ und $x^2 - x u_2 + 1 = 0$.

$x^4 - x^3 - x + 1 = 0$, $u = x + \frac{1}{x}$, $u^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$

$x^2 - x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$ $\qquad x^2 + \frac{1}{x^2} = u^2 - 2$

$u^2 - 2 - u = 0$, $\qquad u_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$

Rücksubstitution

$x^2 - ux + 1 = 0$ $\qquad x = \frac{u}{2} \pm \sqrt{\frac{u^2}{4} - 1}$

$u_1 = 2 \longrightarrow x_{1,2} = 1 \pm 0$

$u_2 = -1 \longrightarrow x_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} \notin \mathbb{R}$

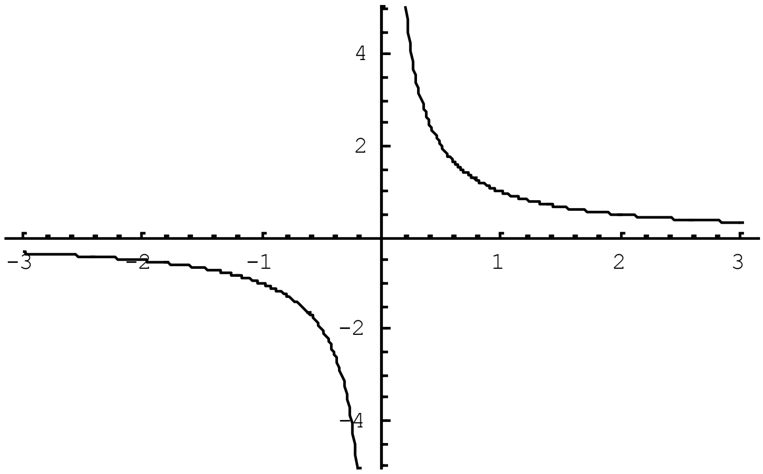
Dies Verfahren funktioniert immer, wenn das Polynom auf der linken Seite einen geraden Grad $2n$ hat und die Koeffizienten „symmetrisch" sind, d.h. wenn der Koeffizient bei x^{2n} gleich dem Absolutglied ist, der Koeffizient bei x^{2n-1} gleich dem Koeffizient bei x^1 ist usw. In diesen Fällen halbiert die genannte Substitution den Grad.

§ 6.2 Rationale Funktionen

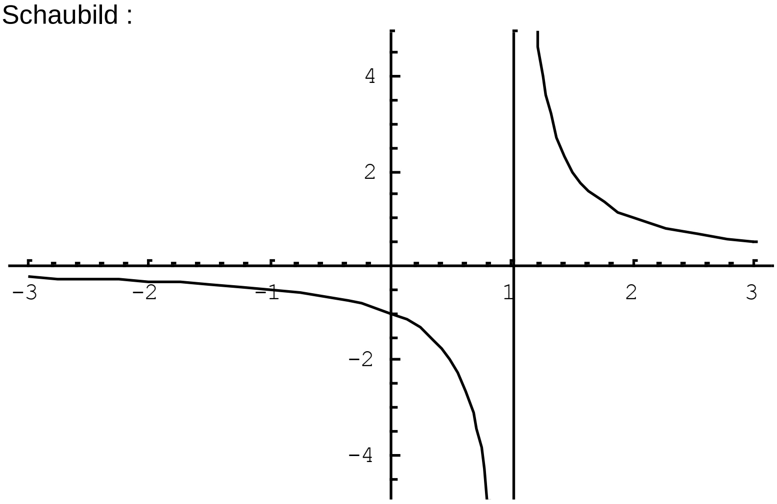
Funktionen der Form $f(x) = \frac{p_1(x)}{p_2(x)}$ mit Polynomen $p_1(x)$ und $p_2(x)$ nennt man „**rationale Funktionen**". Ihr Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$ ohne die Nullstellen des Nenners :
$D(f) = \{ x \in \mathbb{R}, p_2(x) \neq 0 \}$.

Beispiele :

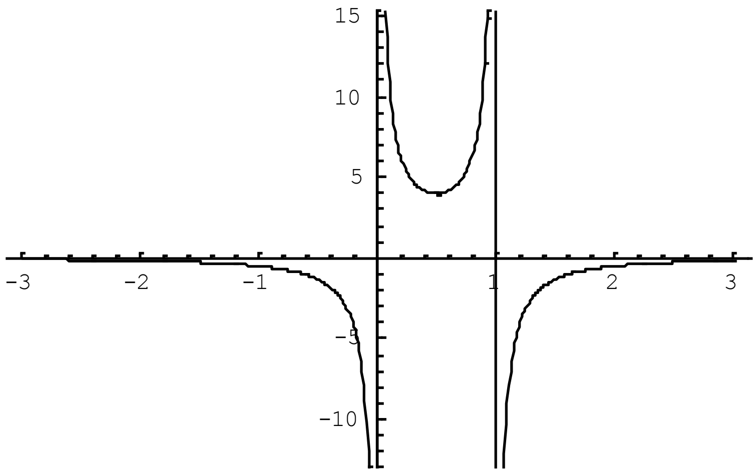
1. $f(x) = \frac{1}{x}$, $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$, $W(f) = \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$,
Schaubild :



2. $g(x) = \frac{1}{x-1}$, $D(g) = \mathbb{R} \setminus \{ 1 \}$, $W(g) = \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$,
Schaubild :



3. $h(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x(1-x)}$, $D(h) = \mathbb{R} \setminus \{ 0 , 1 \}$, $W(h) = \mathbb{R} \setminus [0 , 4)$,
Schaubild :



Bemerkung : das Schaubild lässt eine Symmetrie zu $x = 1/2$ erkennen. Das kann man auch rechnerisch nachweisen : $h(\frac{1}{2} + x) = h(\frac{1}{2} - x)$.

In Beispiel 3 haben wir h in zwei verschiedenen Formen geschrieben , $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$ und $\frac{1}{x(1-x)}$. Von der ersten zur zweiten Form kommt man, indem man den Hauptnenner sucht, beide Brüche so erweitert, dass die Nenner gleich dem Hauptnenner sind und dann zusammenfasst.Wir werden später häufiger , z.B. beim Integrieren, der umgekehrten Fragestellung begegnen : ein Bruch ist in der zweiten Form gegeben und es ist eine Zerlegung in Summanden wie in der ersten Form gesucht.

Für solche Zerlegungen gibt es ein rezeptartig formulierbares Verfahren , genannt „ **Partialbruchzerlegung** “. Ein allgemeines Rezept werden wir im Anschluss an eine Reihe von Beispielen aufsteigenden Schwierigkeitsgrades formulieren. In jedem Falle beginnt man mit einer Zerlegung des Nenners in Faktoren und einem Ansatz , in dem die „richtigen“ Teilbrüche vorkommen. Die Konstanten , die in den Ansätzen vorkommen, müssen dann noch bestimmte werden. Bei der Überlegung , welche Anteile die „richtigen“ sind , hilft die Überlegung , was alles bei dem umgekehrten Vorgang , nämlich dem „auf den Hauptnenner bringen“ auf den gegebenen Hauptnenner führen würde.

Beispiele :

1. $f(x) = \frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{x}{(x-1)(x-2)}$, Ansatz $f(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$

Ansatz $\frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$ $\quad | \cdot (x-1)(x-2)$

$x = A(x-2) + B(x-1)$ $\quad (*)$

$x = x(A+B) - 2A - B$

$A + B = 1 \wedge 2A + B = 0 \Leftrightarrow \underline{A = -1} , \underline{B = 2}$

oder : Einsetzen spezieller Werte in (*)

$x = 2 \quad 2 = A \cdot 0 + B(2-1) \quad B = 2$

$x = 1 \quad 1 = A \cdot (1-2) + B(1-1) \quad A = -1$

2. $f(x) = \frac{x^2+2}{x^3+6x^2+11x+6} = \frac{x^2+2}{(x+1)(x+2)(x+3)}$, Ansatz $f(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$

$$\frac{x^2+2}{x^3+6x^2+11x+6} = \frac{x^2+2}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$$

$$x^2+2 = A(x+2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x+2)$$

$x=-1$: $3 = A(-1+2)(-1+3) = 2A$, $A = \frac{3}{2}$

$x=-2$: $6 = B(-2+1)(-2+3) = -B$, $\boxed{B = -6}$

$x=-3$: $11 = C(-3+1)(-3+2) = 2C$, $C = \frac{11}{2}$

3. $f(x) = \frac{3x}{x^3-x^2-x+1} = \frac{3x}{(x-1)(x^2-1)} = \frac{3x}{(x-1)^2(x+1)}$, Ansatz $f(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$

4. $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)(x+2)^2}$,

$$\frac{1}{(x^2+1)(x+2)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{(x+2)} + \frac{D}{(x+2)^2}$$

5. $f(x) = \frac{x^5+x^4+3x^2+1}{x^2-1}$,

$$\frac{x^5+x^4+3x^2+1}{x^2-1} = \frac{x^5+x^4+3x^2+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \quad ??$$

Polynomdivision !

$$(x^5+x^4+3x^2+1) : (x^2-1) = x^3+x^2+x+4+\frac{x+5}{x^2-1}$$

$$\begin{aligned}
&-(x^5-x^3)\\
&\quad x^4+x^3+3x^2+1\\
&\quad -(x^4-x^2)\\
&\qquad x^3+4x^2+1\\
&\qquad -(x^3-x)\\
&\qquad\quad 4x^2+x+1\\
&\qquad\quad -(4x^2-4)\\
&\qquad\qquad x+5
\end{aligned}$$

Den Anteil $(x+5) / (x^2 - 1)$ behandelt man wie oben durch Partialbruchzerlegung und addiert am Ende das Polynom $x^3 + x^2 + x + 4$ wieder dazu.

Die Rechnungen ausführlich in der Vorlesung !

Ein allgemeines Rezept lässt sich so in einem Satz formulieren:

Satz 6.3 : Sei die gebrochen rationale Funktion $f(x) = \frac{z(x)}{n(x)}$ mit Grad (z(x)) < Grad (n(x)) gegeben. Der Nenner sei in Faktoren $n(x) = g_1(x) \cdot g_2(x) \cdot \ldots \cdot g_k(x)$, Grad ($g_i(x)$) ≥ 1 , so zerlegt , dass keine zwei der Polynome $g_i(x)$ gemeinsame Nullstellen haben . Dann lässt sich f (x) in der Form

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i(x)}{g_i(x)}$$ mit Polynomen $a_i(x)$ mit Graden Grad ($a_i(x)$) < Grad ($g_i(x)$) schreiben.

Auf einen Beweis können wir an dieser Stelle verzichten. Es genügt , sich in jedem konkreten Fall durch eine Probe davon zu überzeugen , dass der Ansatz tatsächlich zum Ziel führt.

§ 7 Stetigkeit, Grenzwerte, Umkehrfunktion

Wir beginnen mit der außerordentlich wichtigen Frage , ob es immer möglich ist , ein Spiegelei , das in einer kreisrunden kleinen Bratpfanne den Boden ganz ausfüllt , durch einen geraden Schnitt so in zwei Teile zu zerlegen, dass beide Teile gleich viel vom Eigelb abbekommen. Dabei muss das Eigelb weder kreisrund noch in der Mitte der Pfanne sein .

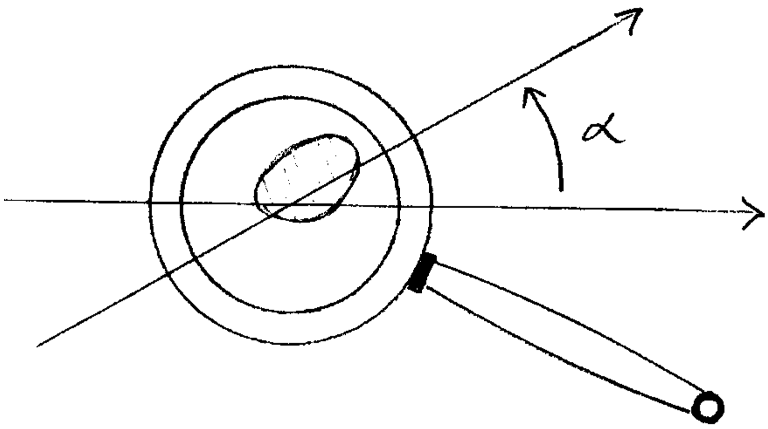


Abbildung 7.1 : Spiegelei in einer Pfanne

Die Antwort heißt „ ja “ . Begründung : wir legen einen Schnitt durch den Mittelpunkt fest, z.B. den waagerechten Schnitt von links nach rechts, also so, wie wir üblicherweise die positive x - Richtung zeichnen. Für jeden Winkel α zwischen 0 und 180 Grad betrachten wir den Schnitt durch den Mittelpunkt, der gegenüber der x - Achse um α links herum gedreht ist. Den Anteil am Eigelb , der links dieses Schnittes liegt , bezeichnen wir mit $A(\alpha)$. Der Anteil oberhalb der x-Achse ist also A(0), der Anteil unterhalb der x - Achse ist A(180) . Ist z.B. A(0) < 1/2 , so ist A(180) > 1/2 . Tragen wir die Funktion $A(\alpha)$ auf , so sehen wir , dass es zwischen 0 und 180 einen Winkel geben muss, an dem der Funktionswert genau = 1/2 ist .

Bei dieser Argumentation nutzen wir eine Eigenschaft aus , die der Funktion $A(\alpha)$ zukommt , aber nicht jeder beliebigen Funktion.

Diese Eigenschaft nennen wir „Stetigkeit“. Die anschauliche Vorstellung, eine stetige Funktion sei eine, deren Schaubild man „ohne abzusetzen mit dem Bleistift zeichnen kann“ , ließ sich nicht zu einer tragfähigen Definition ausbauen. Der Begriff wurde im 19. Jahrhundert so festgelegt, dass man erst definiert, was Stetigkeit einer Funktion an einer Stelle x_0 bedeutet („lokal“) und dann erst die Stetigkeit auf einer Menge („global“) definiert.

Def. 7.1 : Eine auf einer Menge D(f) definierte Funktion heißt „**an der Stelle x_0 stetig** “ („**bei x_0 stetig** “), wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon)$ existiert mit der Eigenschaft

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in D(f) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Def. 7.2 : Eine Funktion f heißt „**auf der Menge $M \subset D(f)$ stetig**“, wenn f an jeder Stelle $x_0 \in M$ nach Def. 7.1 stetig ist.

Beispiele, Bemerkungen:

1. Def. 7.1 präzisiert die Vorstellung, dass sich bei einer stetigen Funktion f (x) an f (x_0) annähern muss, wenn sich x gegen x_0 bewegt.
2. $f(x) = c$,
3. $f(x) = 3x + 4$,
4. $f(x) = x^2$,
5. allgemein: Polynome sind stetige Funktionen.

Ein verwandter Begriff ist der des Grenzwerts einer Funktion an einer Stelle x_0 :

Def. 7.3 : Sei f in einer Umgebung $(x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\}$, $r > 0$ definiert. Wir sagen, f habe „**bei x_0 den Grenzwert a** “ , wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon)$ existiert mit der Eigenschaft

$$|f(x) - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}.$$

Beispiele, Bemerkungen :

1. Bei der Definition 7.3 kommt es nicht darauf an, welchen Funktionswert f bei x_0 hat. Die Funktion f muss nicht einmal bei definiert x_0 sein.

2. Wie bei Folgen kann man zeigen, dass der Grenzwert eindeutig bestimmt ist, wenn er existiert. Man schreibt im Anschluss an Def. 7.3 ähnlich wie bei Folgen für den Grenzwert einer Funktion $a = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

3. Beispiel : $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 > 0$: $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$ (vorrechnen !) .

$\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$; $x_0 > 0$;

$\varepsilon > 0$ gegeben , $\delta = \delta(\varepsilon)$ gesucht mit

$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \varepsilon$ f. alle x : $|x - x_0| < \delta$.

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \left| \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \right| = \left| \frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \right|$$

$$\le \frac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}} < \frac{\delta}{\sqrt{x_0}} .$$

Wählt man $\delta = \varepsilon\sqrt{x_0}$, ist also

$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \varepsilon$ für alle $x : |x-x_0| < \delta$.

4. $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 0$. Diesen Grenzwert können wir schon deswegen nicht untersuchen, weil wir den Begriff gekoppelt haben an die Möglichkeit, sich von beiden Seiten an x_0 anzunähern. Das ist aber hier nicht möglich, weil wir uns im Definitionsbereich der Quadratwurzel nur von rechts der Stelle 0 nähern können. Das motiviert die folgende

Def. 7.4 : Sei f in einer Umgebung $(x_0, x_0 + r)$, $r > 0$ definiert. Wir sagen, f habe „**bei x_0 den rechtsseitigen Grenzwert a**“ , wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon)$ existiert mit der Eigenschaft

$$| f(x) - a | < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in (x_0, x_0 + \delta) .$$

Wir schreiben für a das Symbol $a = \lim\limits_{x \to x_0 +} f(x)$.

In naheliegender Weise definiert man den linksseitigen Grenzwert.

Zurück zu Beispiel 4 : $\lim\limits_{x \to 0+} \sqrt{x} = 0$. (nachrechnen)

$\lim\limits_{x \to 0+} \sqrt{x} = 0$; $\varepsilon > 0$ geg. , $\delta = \delta(\varepsilon) = ?$

$|\sqrt{x} - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{x} < \varepsilon \Leftrightarrow x < \varepsilon^2$, $x > 0$

Wähle $\delta = \varepsilon^2$

Der Vollständigkeit halber definieren wir noch $\lim\limits_{x \to \infty}$ und $\lim\limits_{x \to -\infty}$.

Exemplarisch : Sei f auf einem Intervall $[c, \infty)$ definiert. Wir sagen, f „habe für x gegen unendlich den Grenzwert a“ falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein M existiert mit der Eigenschaft $| f(x) - a | < \varepsilon$ für alle $x > M$.

Wir schreiben dann $a = \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

Satz 7.1 : Sei f in $0 < | x - x_0 | < r$ definiert. Dann gilt: f hat bei x_0 genau dann einen Grenzwert, wenn f dort sowohl einen links- als auch einen rechtsseitigen Grenzwert besitzt und beide übereinstimmen.

Satz 7.2 : Sei f in $| x - x_0 | < r$ definiert. Dann gilt: f ist bei x_0 genau dann stetig, wenn

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x) .$$

Ähnlich wie bei Folgen gilt auch bei Grenzwerten von Funktionen :

Satz 7.3 : Sei $a = \lim_{x \to x_0} f(x)$ und $b = \lim_{x \to x_0} g(x)$. Dann ist auch

(i) $\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b$,

(ii) $\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b$,

und

(iii) $\lim_{x \to x_0} (f(x) \div g(x)) = a \div b$, falls noch $b \neq 0$ vorausgesetzt wird .

Auf den Beweis können wir hier verzichten , da er ähnlich wie bei Folgen verläuft. Aus den Sätzen 7.2 und 7.3 folgt, dass mit zwei Funktionen auch Summe , Differenz , Produkt und Quotient stetig sind , letzteres unter der Zusatzvoraussetzung , dass der Nenner an der betrachteten Stelle von null verschieden ist. Satz 7.3 gilt auch sinngemäß für einseitige Grenzwerte und für Bewegungen $x \to \infty$ und $x \to -\infty$.

Globale Eigenschaften stetiger Funktionen

Satz 7.4 : Eine auf einem abgeschlossenen Intervall stetige Funktion ist dort beschränkt.

Satz 7.5 : Eine auf einem abgeschlossenen Intervall [a, b] stetige Funktion nimmt an mindestens einer Stelle $x_{min} \in [a, b]$ ein absolutes Minimum und an mindestens einer Stelle $x_{max} \in [a,b]$ ein absolutes Maximum an, d.h. es gilt $f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max})$ für alle $x \in [a, b]$.

Satz 7.6 (Zwischenwertsatz) : Sei f auf [a, b] stetig und (mit den Bezeichnungen des vorigen Satzes) $m = f(x_{min})$, $M = f(x_{max})$. Dann gibt es zu jedem $y_0 \in (m, M)$ ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) = y_0$.

Auf die Beweise können wir hier verzichten. Satz 7.6 enthält die Eigenschaft einer stetigen Funktion , die wir am Anfang des Paragraphen bei der Frage mit dem Spiegelei ausgenutzt haben.

Satz 7.6 garantiert , dass jede auf einem Intervall stetige Funktionen jeden Wert zwischen zwei Funktionswerten mindestens einmal annimmt. Besonders interessant sind solche Funktionen, die jeden Zwischenwert genau einmal annehmen, denn sie besitzen eine „Umkehrfunktion“ . Dazu definieren wir :

Def. 7.5 : Sei f auf D(f) definiert , W(f) der Wertebereich. Gibt es zu jedem $y \in W(f)$ genau ein $x \in D(f)$ mit $y = f(x)$, so nennen wir f „**umkehrbar**“ . Die Abbildung f * , die jedem $y \in W(f)$ dieses „**Urbild**“ x zuordnet , heißt die „**Umkehrfunktion**“ von f . Es gilt also

$D(f^*) = W(f)$, $D(f) = W(f^*)$,

$f(f^*(y)) = y$ für alle $y \in W(f)$, $f^*(f(x)) = x$ für alle $x \in D(f)$.

Def. 7.6 : Eine Funktion f heißt auf einer Menge M

(i) „**monoton wachsend**“ , wenn $f(x_1) \leq f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in M$ mit $x_1 < x_2$,
(ii) „**monoton fallend**“ , wenn $f(x_1) \geq f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in M$ mit $x_1 < x_2$,
(iii) „**streng monoton wachsend**“ , wenn $f(x_1) < f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in M$ mit $x_1 < x_2$,
(iv) „**streng monoton fallend**“ , wenn $f(x_1) > f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in M$ mit $x_1 < x_2$.

Funktionen mit einer der Eigenschaft (iii) oder (iv) heißen „**streng monoton**“ , Funktionen mit mindestens einer der Eigenschaften (i) bis (iv) heißen „**monoton**“ .

Die strenge Monotonie und die Stetigkeit zusammen sind hinreichend für die Existenz der Umkehrfunktion :

Satz 7.7 : Sei f auf $[a, b]$ streng monoton und stetig. Dann existiert die Umkehrfunktion f^* und es gilt :

(i) ist f auf $[a, b]$ streng monoton wachsend , so ist f^* auf $[\, f(a), f(b)\,]$ streng monoton wachsend ,

(ii) ist f auf $[a, b]$ streng monoton fallend , so ist f^* auf $[\, f(b), f(a)\,]$ streng monoton fallend .

Bew. : Die Existenz der Umkehrfunktion folgt aus dem Zwischenwertsatz und der Monotonie ; die Monotonie der Umkehrfunktion dann direkt aus den Definitionen 7.5 und 7.6 .

Bemerkungen , Beispiele :

1. Satz 7.7 gilt sinngemäß auch für offene Intervalle (a, b) und für unendliche Intervalle wie $[1, \infty)$, $(-\infty, b)$ usw.

2. $f(x) = x^2$, ist auf $D(f) = [0, \infty)$ streng monoton wachsend , $W(f) = [0, \infty)$.
Zu jedem $y \in W(f) = [0, \infty)$ gibt es genau ein $x \in D(f) = [0, \infty)$ mit $f(x) = x^2 = y$; die Umkehrfunktion f^* zu f ($f(x) = x^2$) nennt man üblicherweise Wurzelfunktion (genauer : Quadratwurzel) und schreibt dafür wahlweise $f^*(y) = \sqrt{y} = x$ oder $f^*(y) = y^{1/2}$.

3. Allgemeiner als in 2. gilt :
für gerades $n \geq 2$ ist $f(x) = x^n$ auf $D(f) = [0, \infty)$ streng monoton wachsend, $W(f) = [0, \infty)$;
für ungerades $n \geq 1$ ist $f(x) = x^n$ auf $D(f) = \mathbb{R}$ streng monoton wachsend, $W(f) = \mathbb{R}$;
in beiden Fällen bezeichnet man die Umkehrfunktion „ n. Wurzel “ mit $\sqrt[n]{y}$ bzw. mit $y^{1/n}$.

4. Für $x > 0$, $r \in \mathbb{Q}$ (etwa $r = p/q$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$) setzt man $x^r := x^{p/q} := (x^{1/q})^p$ und $0^r := 0$ für $r > 0$.

5. Man kann nicht „beweisen“ , dass $y^{1/n} = \sqrt[n]{y}$ ist . Man kann aber begründen , warum es geschickt ist , für $\sqrt[n]{y}$ das Symbol $y^{1/n}$ zu schreiben . Ein guter Grund ist etwa , dass bei dieser Festlegung die Potenzgesetze $x^{m+n} = x^m \cdot x^n$ und $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$, die zunächst nur für natürliche Zahlen n und m gelten , für rationale m und n weiter ihre Gültigkeit behalten.

6. Für Wurzeln $\sqrt[n]{y}$ beliebiger Ordnung $n \in \mathbb{N}$ gilt die Rechenregel $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.
Allgemeiner gilt : ist f umkehrbar und $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$ für alle $a, b \in D(f)$, so ist auch $f^*(A \cdot B) = f^*(A) \cdot f^*(B)$ für alle $a, b \in D(f^*)$. (Nachweis s. Vorlesung).

$f(a) = A$, $f(b) = B$; $a = f^*(A)$, $b = f^*(B)$

$\underline{f^*(A \cdot B)} = f^*(f(a) \cdot f(b)) = f^*(f(a \cdot b)) = a \cdot b$

$\underline{= f^*(A) \cdot f^*(B)}$

§ 8 Elementare Funktionen

In diesem Paragraphen werden wir die wichtigsten bisher nicht behandelten Funktionen und ihre Haupteigenschaften kennenlernen. Den in der Überschrift genannten Begriff „elementare Funktion“ brauchen wir nicht formal zu definieren. Wir verstehen darunter grob alle Funktionen, die sich durch Addition, Subtraktion, Multiplikation , Division und Ineinandereinsetzen aus Polynomen, Wurzelfunktionen, Exponentialfunktionen und Winkelfunktionen sowie deren Umkehrfunktionen zusammensetzen lassen. Zu den elementaren Funktionen gehören also insbesondere die üblichen „Formelfunktionen“.

Im Folgenden führen wir weitere Begriffe für einige Klassen von Funktionen ein und definieren Exponential- und Winkelfunktionen und deren Umkehrfunktionen.

§ 8.1 Exponentialfunktion und Logarithmus

Def. 8.1 : Als „**Exponentialfunktion**“ bezeichnen wir die für alle $x \in \mathbb{R}$ definierte

Funktion $\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Bemerkungen :

1. Die Definition ist zulässig, da die unendliche Reihe auf der rechten Seite für alle reellen x konvergiert und damit für jedes reelle x einen wohldefinierten Wert hat. Dass die Reihe für jedes x konvergiert, zeigt man mit den Mitteln aus § 5.

2. Die Bezeichnung $\exp(x)$ werden wir später zugunsten der Bezeichnung e^x aufgeben. Das können wir aber im Augenblick noch nicht, da das Symbol e^x z.B. für rationale Zahlen x bereits definiert ist und damit die Gleichung $e^x = \exp(x)$ ein Satz ist, der erst bewiesen werden muss.

Eigenschaften der Exponentialfunktion :

1. $\exp(0) = 1$, (ergibt sich direkt aus der Reihe in Def. 8.1) ,

2. $\exp(1) = e$, (Das ist gleichbedeutend mit $\lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$. Es ist nicht wirklich schwer zu beweisen . Wir verzichten aber hier auf den Beweis, um den roten Faden nicht abzuschneiden.) .

3. $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$ für alle $x , y \in \mathbb{R}$. („**Funktionalgleichung der Exponentialfunktion**“).

Die Gültigkeit der Funktionalgleichung 3. ist die wichtigste Eigenschaft der Exponentialfunktion. Aus ihr werden wir weitere Eigenschaften von $\exp(x)$ ableiten. Zum Beweis der Funktionalgleichung: die rechte Seite der Behauptung ist ein Produkt aus zwei unendlichen Reihen. Für solche Produkte gilt der

Satz 8.1 : Seien $a = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $b = \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ zwei absolut konvergente Reihen. Dann konvergiert jede Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, deren Summanden c_n genau die Zahlen $a_k \cdot b_j$ in irgendeiner Anordnung sind , gegen das Produkt $a \cdot b$.

Bemerkungen :

1. Den Beweis sparen wir uns hier. Er ist sehr technisch und würde unserem Verständnis nicht viel weiterhelfen.

2. Der Satz gilt nicht mehr allgemein, wenn man auf die Voraussetzung der absoluten Konvergenz verzichtet. Das passt gut zu der Beobachtung von § 5.3 , dass bedingt konvergente unendliche Reihen bei Umordnung ihrer Summanden den Wert ändern können.

3. Für viele Zwecke ist die Cauchysche „**Anordnung nach Schräglinien**“ besonders übersichtlich und geschickt , bei der man alle Produkte $a_k \cdot b_j$ zusammenfasst , bei denen k+j den gleichen Wert hat , und dann diese Summen summiert :

$$
\begin{aligned}
a \cdot b \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k \;&=\; \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k} \\
&= (a_0 \cdot b_0) \\
&\quad + (a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0) \\
&\quad + (a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_0) \\
&\quad + (a_0 \cdot b_3 + a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1 + a_3 \cdot b_0) \\
&\quad + (a_0 \cdot b_4 + a_1 \cdot b_3 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_1 + a_4 \cdot b_0) \\
&\quad + \ldots \\
&\quad \ldots \quad .
\end{aligned}
$$

Der Name „Anordnung nach Schräglinien“ ist wörtlich zu verstehen. Die doppelt indizierte Folge $a_k \cdot b_j$ kann man in einem zweidimensionalen Schema wie Abbildung 8.1 darstellen. In diesem Schema fasst man bei der Anordnung nach Schräglinien jeweils Summanden zusammen, die von links unten nach rechts oben führen .

$$
\begin{array}{cccccccccc}
a_0 \cdot b_0 & a_0 \cdot b_1 & a_0 \cdot b_2 & a_0 \cdot b_3 & a_0 \cdot b_4 & a_0 \cdot b_5 & a_0 \cdot b_6 & a_0 \cdot b_7 & & * \\
a_1 \cdot b_0 & a_1 \cdot b_1 & a_1 \cdot b_2 & a_1 \cdot b_3 & a_1 \cdot b_4 & a_1 \cdot b_5 & a_1 \cdot b_6 & & * & \\
a_2 \cdot b_0 & a_2 \cdot b_1 & a_2 \cdot b_2 & a_2 \cdot b_3 & a_2 \cdot b_4 & a_2 \cdot b_5 & & * & & \\
a_3 \cdot b_0 & a_3 \cdot b_1 & a_3 \cdot b_2 & a_3 \cdot b_3 & a_3 \cdot b_4 & & * & & & \\
a_4 \cdot b_0 & a_4 \cdot b_1 & a_4 \cdot b_2 & a_4 \cdot b_3 & & * & & & & \\
a_5 \cdot b_0 & a_5 \cdot b_1 & a_5 \cdot b_2 & & * & & & & & \\
a_6 \cdot b_0 & a_6 \cdot b_1 & & * & & & & & & \\
a_7 \cdot b_0 & & * & & & & & & & \\
 & * & & & & & & & & \\
* & & & & & & & & &
\end{array}
$$

Abbildung 8.1 : Anordnung nach Schräglinien

Diese Anordnung nach Schräglinien verwenden wir auch zum Beweis der Funktionalgleichung . Dazu verwenden wir Satz 8.1 mit $a_k = x^k / k!$ und $b_j = y^j / j!$:

$$
\begin{aligned}
\exp(x) \cdot \exp(y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{(n-k)!} \cdot x^k \cdot y^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \cdot x^k \cdot y^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x+y)^n = \exp(x+y) \, .
\end{aligned}
$$

Folgerungen aus der Funktionalgleichung :

1. $\exp(x) \cdot \exp(-x) = 1$ für alle x .
   (man setze in der Funktionalgleichung $y = -x$ und beachte $\exp(0) = 1$) .

2. Aus 1. folgt , dass die Funktion $\exp(x)$ keine Nullstellen besitzt . Da $\exp(x) \ge 1$ für $x \ge 0$, was man leicht aus der Reihe in Def. 8.1 sieht , folgt sogar $\exp(x) > 0$ für alle x . Also ist
   $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$ für alle x .

3. $\exp(2x) = (\exp(x))^2$, $\exp(3x) = (\exp(x))^3$, ... , $\exp(n\cdot x) = (\exp(x))^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(durch mehrfache Anwendung der Funktionalgleichung und vollständige Induktion) .

4. $\exp(n\cdot x) = (\exp(x))^n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. (folgt aus 3. für natürliche n , ist für n = 0 trivial und folgt für negative ganze Zahlen aus 2. und 3.) .

5. $\exp(\frac{x}{n}) = \sqrt[n]{\exp(x)} = (\exp(x))^{\frac{1}{n}}$, (ersetze x in 3. durch x/n und ziehe die n. Wurzel).

6. Der „krönende Abschluss“ der Folgerungen : es gilt $\exp(x) = e^x$ für alle rationalen x .
Beweis: sei etwa $x = r/s$, r ganz , s natürlich . Dann ist

$$\exp(x) = \exp(r/s) = (\exp(r))^{\frac{1}{s}} = ((\exp(1)^r)^{\frac{1}{s}} = (e^r)^{\frac{1}{s}} = e^{\frac{r}{s}} .$$

Dabei haben wir exp(1) = e und die Folgerungen 4. und 5. und bekannte Rechenregeln für die Wurzel verwendet.

Wir können ab sofort wieder auf die Bezeichnung exp(x) verzichten und definieren :

Def. 8.2 : Die „**Exponentialfunktion**“ e^x wird für alle reellen x definiert durch den Wert der unendlichen Reihe

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} .$$

Wir konnten diese Schreibweise nicht gleich von Anfang verwenden, weil das Symbol e^x für rationale x bereits definiert war. Durch Def. 8.2 erweitern wir diese Definition auf alle reellen x. Die wichtigsten oben notierten Formeln für die Exponentialfunktion lauten in dieser Schreibweise :

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y \quad , \quad e^{-x} = 1/e^x \quad , \quad e^x > 0 \text{ für alle } x .$$

Weitere Eigenschaften und Begriffe :

1. $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} x^{-k} e^x = \infty$ für alle natürlichen k .
(Folgerungen : der Wertebereich der Exponentialfunktion ist $(0, \infty)$, die Exponentialfunktion wächst schneller als jede Potenz von x) .

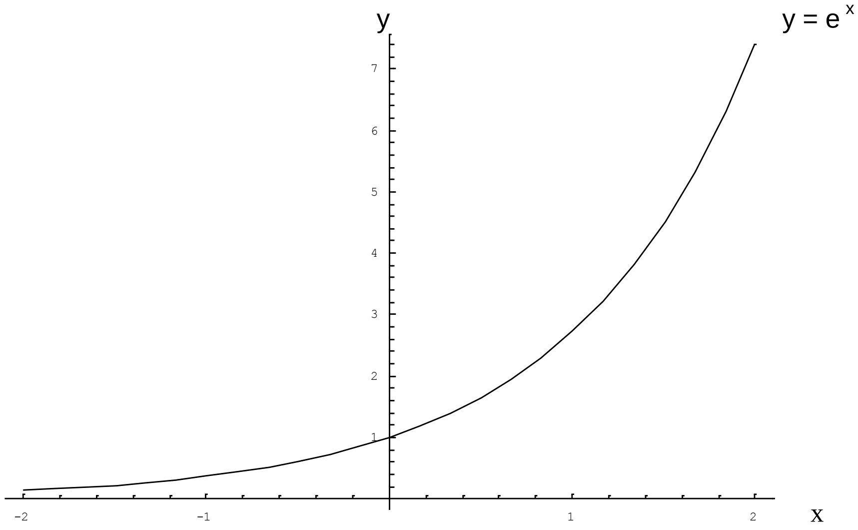
$k \in \mathbb{N}$; $\lim\limits_{x\to\infty} x^{-k} e^x = \infty$

$e^x = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{x^h}{h!} \geq \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$ für $x \geq 0$

$\Rightarrow e^x \cdot x^{-k} \geq \frac{x}{(k+1)!}$

2. Die Funktion e^x ist überall stetig und monoton wachsend . (Die Monotonie folgt direkt aus der unendlichen Reihe , den Beweis der Stetigkeit erledigen wir im nächsten Paragraphen zusammen mit dem Nachweis der Differenzierbarkeit) .

3. Schaubild :



4. Wegen 2. besitzt die Exponentialfunktion eine Umkehrfunktion , die wir den „**natürlichen Logarithmus**“ nennen und für die wir das Formelzeichen $\ln x$ schreiben . Es gelten also die Formeln $e^{\ln x} = x$ für alle $x > 0$ und $\ln (e^x) = x$ für alle x .

Anders ausgedrückt : für gegebenes $x > 0$ ist $y = \ln x$ die Lösung der Gleichung $e^y = x$. Den natürlichen Logarithmus $\ln x$ nennt man darum auch den

„**Logarithmus von x zur Basis e**“ .

Entsprechend definiert man den „**Logarithmus von x zur Basis a**“ als Lösungen der Gleichung $a^y = x$ und verwendet dafür das Formelzeichen $y = \log_a x$. Das ist für alle $a > 0$ mit $a \neq 1$ möglich. Übliche Werte für a sind z.B. $a = 2$, $a = 10$ und $a = e$.

5: Logarithmen zu verschiedenen Basen kann man mit Hilfe der Formel $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ ineinander umrechnen . (Beweis ergibt sich leicht aus den Definitionen) .

Aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion folgt für den natürlichen Logarithmus : $\ln (x \cdot y) = \ln x + \ln y$. Für andere Basen gilt entsprechend $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$.

$a = e^x$, $b = e^y$; $x = \ln a$, $y = \ln b$

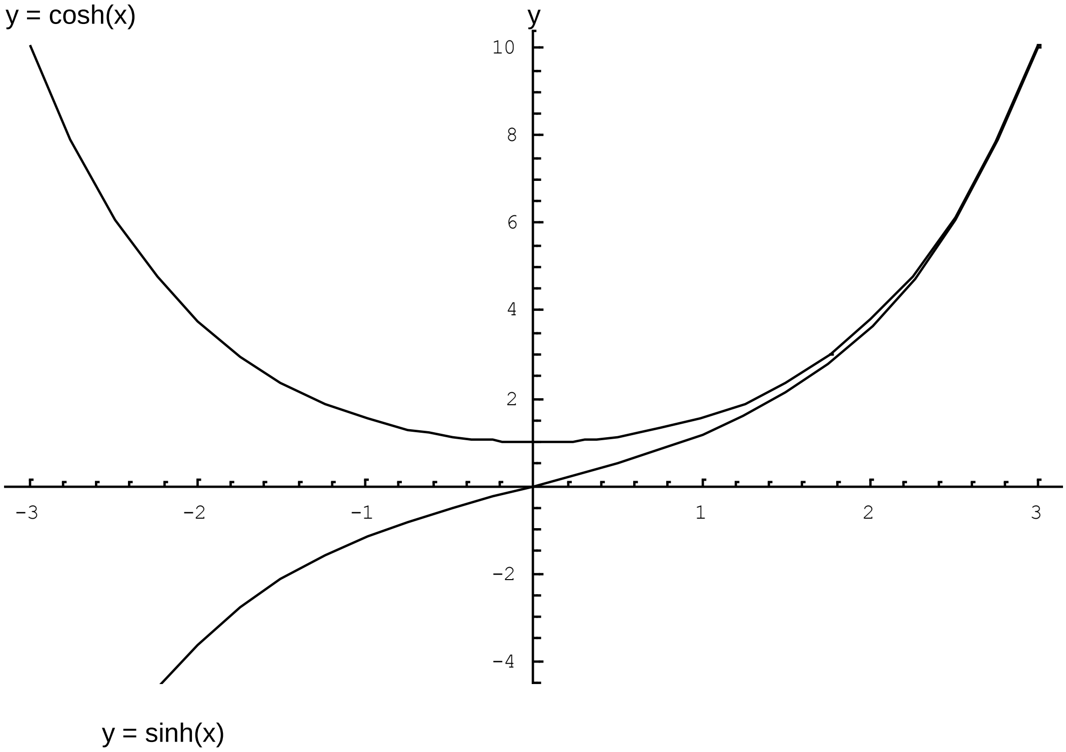
$$\underline{\ln(a \cdot b)} = \ln(e^x \cdot e^y) = \ln(e^{x+y})$$
$$= x+y = \underline{\ln a + \ln b}$$

Mit der Exponentialfunktion hängen zwei in der Technik wichtige Funktionen zusammen, nämlich

$\sin h\, x := \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})$ („**Sinus hyberbolicus**“) und

$\cos h\, x := \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$ („**Cosinus hyberbolicus**“) .

Schaubilder :



Eigenschaften dieser beiden Funktionen werden wir in den Übungen kennenlernen. Zur Bedeutung : z.B. nimmt ein Seil unter dem Einfluss der Schwerkraft die Form des Schaubilds von Cosinus hyperbolicus an. Darum nennt man diese Kurve auch „**Seilkurve**“ oder „**Kettenlinie**“ . Dass dies so ist, lässt sich mit Hilfe einer Differentialgleichung beweisen.

§ 8.2 Winkelfunktionen und ihre Umkehrfunktionen

Winkelmessung : von der Schule her und aus dem täglichen Leben sind Sie gewohnt, die Größe von Winkeln in Grad anzugeben. In Mathematik, Naturwissenschaften und Technik ist es üblich, Winkel im „**Bogenmaß**“ anzugeben. Am besten prägt man sich dazu die Abbildung 8.2 ein . Die Größe des Winkels α (in der Abbildung ca. 30°) lässt sich ebensogut durch die Länge des Kreisbogens k

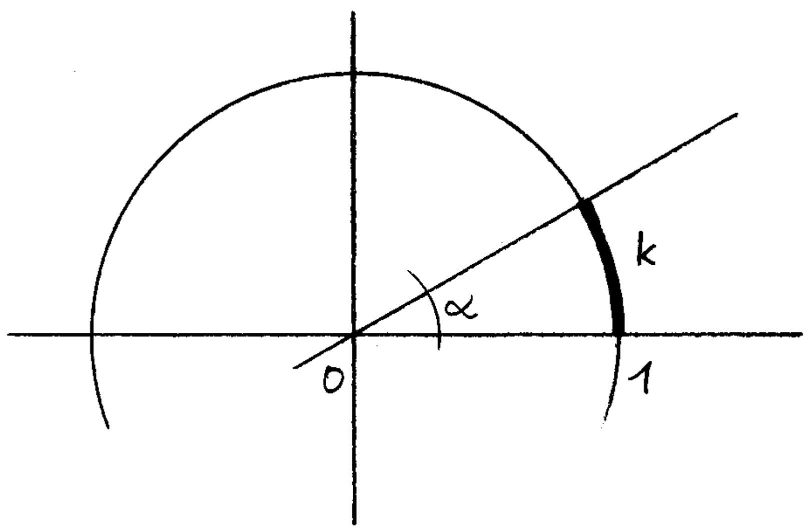


Abbildung 8.2: zur Definition des Bogenmaßes

beschreiben. Da der Halbkreis mit dem Radius 1 die Länge π hat und einem Winkel von 180° entspricht und Winkel und Bogenlänge zueinander proportional sind , hängen Gradmaß α und Bogenmaß x über die Formeln $\frac{\alpha}{180}=\frac{x}{\pi}$, $\alpha = x \cdot \frac{180}{\pi}$, $x = \alpha \cdot \frac{\pi}{180}$ zusammen . Das Bogenmaß eines Winkels ist eine unbenannte (physikalisch dimensionslose) Zahl. In der folgenden Tabelle sind einige Beispiele zusammengestellt . In der Tabelle kommen auch negative Winkel vor und solche, die größer als 360° sind . Das macht Sinn , da in der Technik Drehbewegungen gerne mit Winkeln beschrieben werden. Ein Winkel von 720° entspricht zwei vollen Umdrehungen , ein Winkel von -180° einer halben Umdrehung rückwärts. Bei Darstellungen in der Ebene nennt man Drehungen „links herum“ auch „**mathematisch positiv**“ und „rechts herum“ auch „**mathematisch negativ**“ .

Gradmaß	- 45°	90°	180°	360°	405°	720°
Bogenmaß	$-\pi / 4$	$\pi / 2$	π	2π	$9\pi / 4$	4π

Im Folgenden werden wir Winkel in der Regel im Bogenmaß angeben. Insbesondere ist bei den folgenden „**Winkelfunktionen**“ das Argument , also der Winkel , stets im Bogenmaß gemeint .

Definition 8.3 : Sei P = P (x, y) ein Punkt auf dem Einheitskreis, α der zugehörige Winkel im Bogenmaß (s. Abbildung 8.3) . Dann setzen wir $\cos\alpha := x$ (sprich „cosinus alpha“) und $\sin\alpha = y$ (sprich „sinus alpha“).

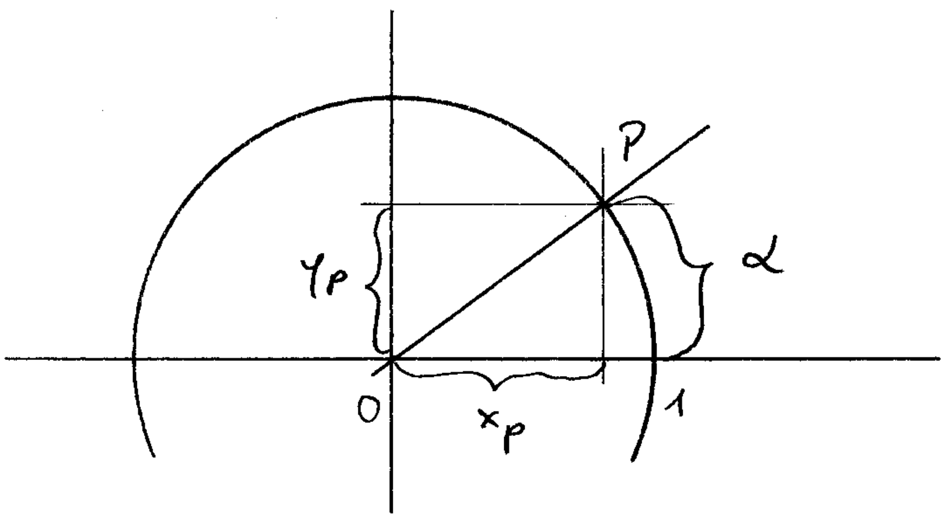


Abbildung 8.3 : zur Definition der Funktionen $\sin\alpha$, $\cos\alpha$

Bemerkungen, Eigenschaften :

1. Definition 8.3 verallgemeinert die Definitionen für $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ anhand von Seitenverhältnissen am rechtwinkligen Dreieck , die Sie aus der Schule (hoffentlich) kennen, auf beliebige Winkel . Mit den Standardbezeichnungen für Seiten und Winkel im rechtwinkligen Dreieck (s. Abbildung 8.4) wurde dort festgelegt :

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} \quad , \quad \sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}} \quad .$$

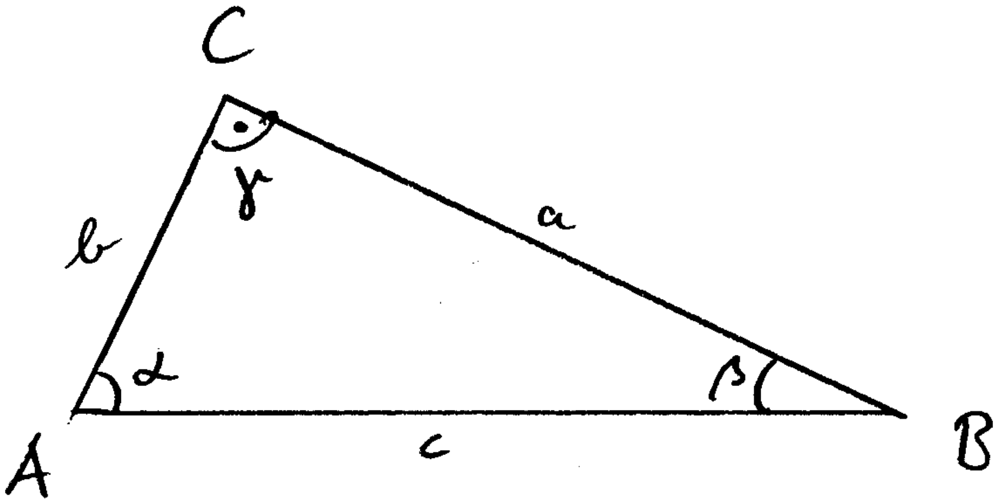


Abbildung 8.4 : Standardbezeichnungen beim rechtwinkligen Dreieck

2. $\sin(x+2\pi) = \sin x$, $\cos(x+2\pi) = \cos x$, („ sinus und cosinus sind 2π - periodisch“) ,
(Bemerkung: Argumente von sin und cos setzt man wie hier nur in Klammern, wenn dies aus Gründen der Klarheit erforderlich ist) .

3. Ein paar Werte tabellarisch :

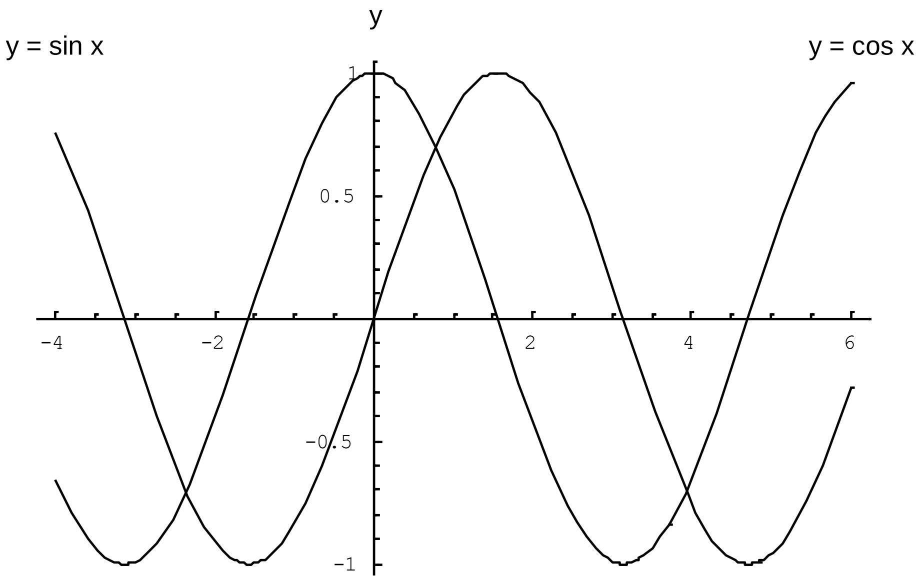
x	0	$\pi / 2$	π	$3\pi / 2$	$n\pi$ (n ganz)
sin x	0	1	0	- 1	0
cos x	1	0	- 1	0	$(-1)^n$

4. $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$ für alle x . („trigonometrischer Pythagoras“) .
(Bemerkung: statt $(\sin x)^2$ schreibt man auch $\sin^2 x$) .

5. $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$. („ sinus x ist eine ungerade Funktion, cosinus ist eine gerade Funktion“) .

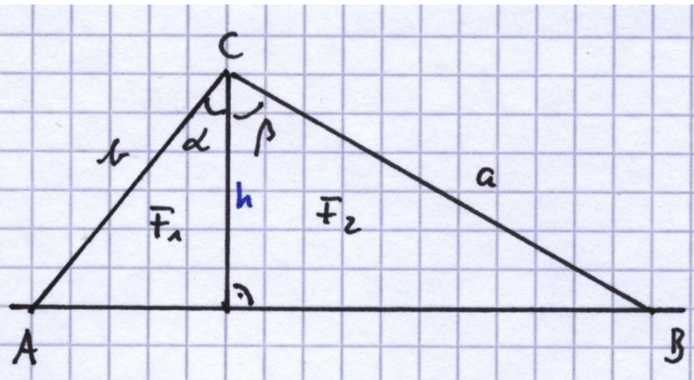
Die Eigenschaften 1. bis 5. sind leicht anhand der Definition einzusehen.

6. Schaubilder :



7. $\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$ („**Additionstheoreme**“)
$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$.

Beweise und Anwendungen , z.B. auf Schwebungen , in der Vorlesung . Die Additionstheoreme haben für die Winkelfunktionen sinus und cosinus in etwa die gleiche Bedeutung wie die Funktionalgleichung für die Exponentialfunktion.



$$F_1 = \frac{1}{2} h b \sin \alpha \quad , \quad F_2 = \frac{1}{2} h a \sin \beta .$$

$$\cos \alpha = \frac{h}{b} \quad , \quad \cos \beta = \frac{h}{a}$$

$$h = b \cos \alpha \quad , \quad h = a \cos \beta$$

$$F_1 + F_2 = \frac{1}{2} a b \underline{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$= \frac{1}{2} a b \underline{\sin \alpha \cos \beta} + \frac{1}{2} a b \underline{\cos \alpha \sin \beta}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

8. Es gibt zahlreiche Formeln , die aus den Additionstheoremen folgen. Einige davon :
$\sin (x + \pi/2) = \cos x$, $\sin (x + \pi) = - \sin x$, $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$, ...

Mit Hilfe der Funktionen sinus und cosinus definieren wir noch die Funktionen tangens (tan x) und cotangens (cot x) durch die Festlegungen

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x} \quad , \quad x \neq \pm \pi/2 , \pm 3\pi/2 , \pm 5\pi / 2 , \ldots ,$$

$$\cot x := \frac{\cos x}{\sin x} \quad , \quad x \neq 0 , \pm \pi , \pm 2\pi , \pm 3\pi , \ldots .$$

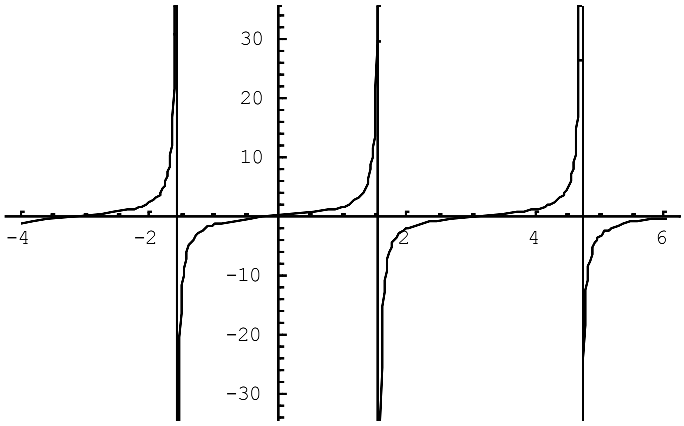
Bemerkungen, Eigenschaften :

1. Diese Festlegungen verallgemeinern die Definitionen aus der Dreieckslehre, die Sie aus der Schule kennen , auf beliebige Winkel (mit Ausnahme der Winkel, bei denen der Nenner = 0 würde) . Zur Erinnerung : die Definitionen aus der Schulmathematik waren

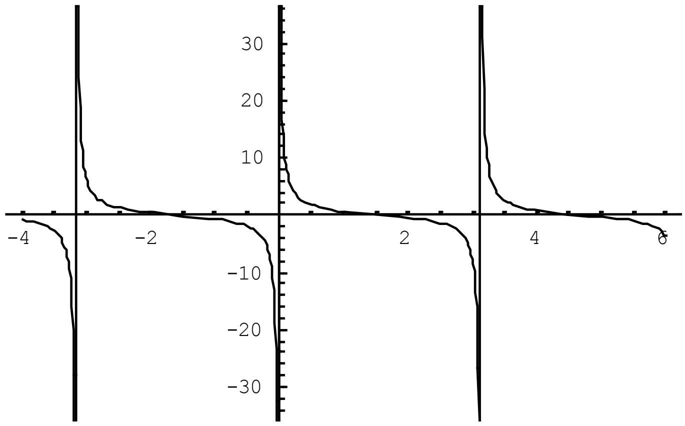
$$\cot \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} \quad , \quad \tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \quad .$$

2. Schaubilder :

y = tan x



y = cot x :



3. Die Funktionen tan x und cot x sind π - periodisch . (Beweis mit Hilfe der Additionstheoreme für sin x und cos x) .

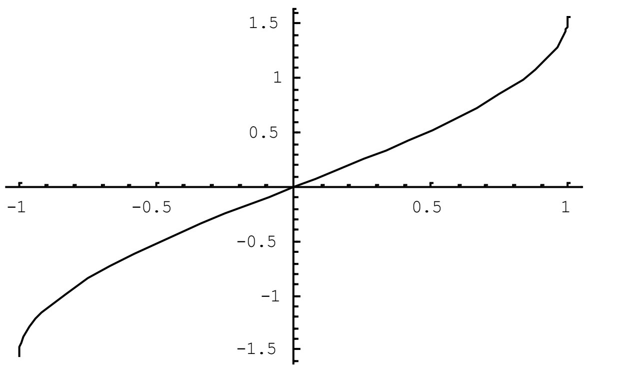
Die Umkehrfunktionen von sin x , cos x , tan x und cot x :

Da alle diese Funktionen periodisch sind , also jeden Funktionswert beliebig oft annehmen, lassen sie sich nicht auf dem gesamten Definitionsbereich umkehren. Um trotzdem Umkehrfunktionen definieren zu können, muss man den Definitionsbereich jeweils geeignet einschränken auf ein Intervall, auf dem die Funktion streng monoton ist. Die Umkehrfunktionen nennt man arcus sinus , arcus cosinus usw. und verwendet für sie die Funktionssymbole arcsin x usw. (von lat. arcus : der Bogen) . Welche Intervalle man für die Umkehrung zu Grunde legt , ließe sich auf viele verschiedene Arten festlegen. Man hat sich weltweit auf folgende Intervalle geeinigt :

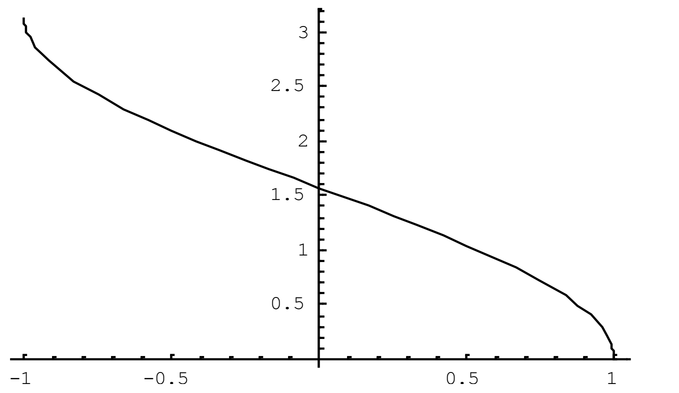
	arc sin x	arc cos x	arc tan x	arc cot x
Definitionsbereich	[- 1 , 1]	[- 1 , 1]	(- ∞ , ∞)	(- ∞ , ∞)
Wertebereich	[- π/2 , π/2]	[0 , π]	(- π/2 , π/2)	(0 , π)

Schaubilder :

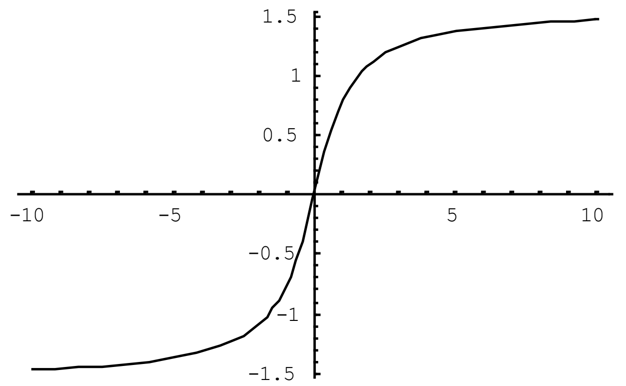
y = arcsin x



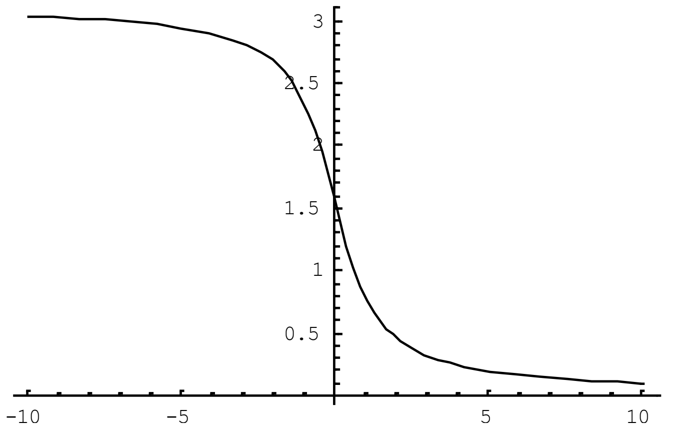
y = arccos x



y = arctan x



y = arccot x



§ 9 Differenzierbare Funktionen

In diesem Paragraphen werden die Begriffe der „Steigung“ bzw. des „Gefälles“ einer Strecke auf Schaubilder von Funktionen übertragen. Diese Begriffe kennen Sie z.B. aus § 40 der Straßenverkehrsordnung von den „Gefahrzeichen“ 108 und 110 :

a) b)

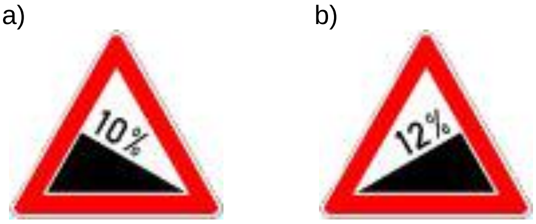


Abbildung 9.1 : Gefahrzeichen a) „Gefälle“ (§ 40 StVO , 108) und b) „Steigung“ (§ 40 StVO , 110) .

Die Zahlenangaben 10 % bzw. 12 % bedeuten, dass die Straße auf 100 m horizontale Entfernung 10 m abfällt bzw. 12 m ansteigt. Genau so definiert man den Begriff der „Steigung“ einer Strecke in einem rechtwinkligen Koordinatensystem:

Def. 9.1 : Sei $x_0 \neq x_1$. Die „**Steigung**“ m der Strecke , die die Punkte $P(x_0, y_0)$ und $Q(x_1, y_1)$ verbindet , wird definiert durch den Quotienten $m = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$.

Bemerkungen :

1. Wir definieren nur den Begriff „Steigung“ . Gefälle sind dann negative Steigungen.
2. Alle Strecken einer Geraden haben die gleiche Steigung. Man kann daher auch von der Steigung einer Geraden reden.
3. Die Strecke von P nach Q hat die gleiche Steigung wie die Strecke von Q nach P . Es kommt also nicht darauf an , welchen der beiden Punkte man zuerst nennt.

Im folgenden verwenden wir den Begriff „**Kurve**“ gleichbedeutend mit „**Schaubild einer Funktion**“. (Später werden wir den Begriff „Kurve“ allgemeiner fassen)

Beim Schaubild einer beliebigen Funktion f hängt die Steigung der Strecke , die zwei seiner Punkte $P(x_0, f(x_0))$ und $Q(x_1, f(x_1))$ miteinander verbindet , im allgemeinen von der Wahl der Punkte P und Q ab. Man kann daher nicht ohne weiteres von der „Steigung“ einer Kurve reden. Durch folgende Definition kann man aber wenigstens die Steigung einer Kurve in einem ihrer Punkte einführen :

Def. 9.2 : Ist f(x) in einer Umgebung von x_0 definiert und existiert der Grenzwert $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, so heißt f(x) bei x_0 „**differenzierbar**“ . Die Zahl $f'(x_0)$ nennt man die „**Ableitung**“ oder auch „**Differentialquotient**“ (von f an der Stelle x_0) .

Außer dem Formelzeichen $f'(x_0)$ verwendet man auch das Symbol $\left.\frac{d}{dx} f(x)\right|_{x = x_0}$.

Weitere Bezeichnungen , Bemerkungen :

1. Die Ableitung ist die Steigung der „**Tangente**“ an die Kurve $\{ (x, f(x) , x \in D(f) \}$.
2. Der Ausdruck $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ heißt „**Differenzenquotient** “ .
3. Tätigkeitswort für das Berechnen einer Ableitung : „**differenzieren**“ , „**ableiten**“ .

4. Dass es nützlich sein kann, die Tangentensteigung in jedem Punkt einer Kurve ausrechnen zu können, liegt auf der Hand : um nur ein Beispiel zu nennen : Bestimmung von Maxima und Minima einer Funktion. Diese und weitere Anwendungen : s. § 10.

Beispiele (werden in der Vorlesung ausführlich vorgerechnet) :

1. $f(x) = 3$, $D(f) = \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, beliebig , aber fest gewählt , (allgemeiner. $f(x) = a$, a fest) ,

$$f(x) = a \quad (\text{const.}) \quad ; \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a-a}{h} = 0$$

2. $f(x) = 3x + 4$, $D(f) = \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, beliebig , aber fest gewählt ,
3. $f(x) = ax + b$, $D(f) = \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ fest , $x_0 \in \mathbb{R}$, beliebig , aber fest gewählt ,
4. $f(x) = x^2$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x_0^2} + 2x_0 h + h^2 - \cancel{x_0^2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (2x_0 + h) = 2x_0$$

5. $f(x) = \sqrt{x}$, $D(f) = [\,0 , \infty\,)$, $x_0 > 0$ (damit noch eine ganze beiderseitige Umgebung von x_0 in D(f) liegt) .
6. $f(x) = 1/x$, $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$, $x_0 \neq 0$.
7. Ein Beispiel einer nicht differenzierbaren Funktion : $f(x) = |x|$ bei $x_0 = 0$.

$$f(x) = |x| \quad , \quad x_0 + 0$$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{|h| - 0}{h} = \begin{cases} 1 & h > 0 \\ -1 & h < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{h \to 0} \text{ ex. nicht.}$$

In Def. 9.2 wird der Begriff ´differenzierbar´ „lokal“ definiert, d.h. als eine Eigenschaft, die einer Funktion an einer Stelle x_0 zukommt (oder auch nicht) . Ähnlich wie bei der Stetigkeit erweitern wir den Begriff auf Mengen :

Def. 9.3 : Sei M eine Teilmenge von D(f) . Ist f(x) für alle $x \in M$ differenzierbar , so heißt f „**auf M differenzierbar**“ .

Bemerkungen :

1. Die Mengen M sind bei uns in der Regel Intervalle oder Vereinigungen von Intervallen .
2. Ist f auf M differenzierbar , so ist $f'(x)$ für jedes $x \in M$ erklärt , ist also wieder eine Funktion auf M .

Die Differenzierbarkeit ist eine stärkere Eigenschaft als die Stetigkeit , d.h. aus der Differenzierbarkeit folgt die Stetigkeit :

Satz 9.1 : Sei f bei x_0 differenzierbar . Dann ist f bei x_0 stetig .

Der Beweis ergibt sich direkt aus den entsprechenden Definitionen Man muss nur zeigen , dass aus der Existenz des Grenzwerts $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ folgt : $\lim_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$.
(ausführlich in der Vorlesung) .

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \Rightarrow$$

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) + r(h) , \quad r(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + h \cdot r(h) \xrightarrow[h \to 0]{} f(x_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$$

Damit wir möglichst von jeder differenzierbaren , aber auf jeden Fall von jeder elementaren Funktion die Ableitung bestimmen können , werden wir weitere Beispiele betrachten und eine Reihe von Sätzen beweisen, die es erlauben , kompliziertere Funktionen auf einfachere zurückzuführen. Die Sätze werden jeweils „global“ formuliert und „lokal“ bewiesen.

§ 9.1 Ableitungsregeln

Satz 9.2 (Faktorregel) : Sei f differenzierbar , $a \in \mathbb{R}$ konstant, $g(x) = a \cdot f(x)$. Dann ist auch g differenzierbar und es ist $g'(x) = (a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x)$.

Beweis : folgt sofort aus der Definition der Ableitung und Satz 8.3 (ii)

Beispiele :

1. $(x^2)' = 2x \Rightarrow (3x^2)' = 3 \cdot (x^2)' = 3 \cdot 2x = 6x$,
2. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \left(2\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Satz 9.3 (Summenregel) : Seien f und g differenzierbar , $s(x) = f(x) + g(x)$. Dann ist auch s differenzierbar und es ist $s'(x) = (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.

Beweis : folgt sofort aus der Definition der Ableitung und Satz 8.3 (i)

Beispiel :

1. $(x^2 + 3x + 4)' = 2x + 3$,

Satz 9.4 (Produktregel) : Seien f und g differenzierbar , $p(x) = f(x) \cdot g(x)$. Dann ist auch p differenzierbar und es ist $p'(x) = (f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Beweis : nach Voraussetzung existieren die Grenzwerte $f'(x_0) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ und $g'(x_0) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$. Zu bestimmen ist der Grenzwert $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{p(x_0+h)-p(x_0)}{h}$.

Dazu formen wir den entsprechenden Differenzenquotienten um :

$$\frac{p(x_0+h)-p(x_0)}{h} = \frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{h}$$

$$= \frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h)-f(x_0)\cdot g(x_0+h)+f(x_0)\cdot g(x_0+h)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{h}$$

$$= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot g(x_0+h)+f(x_0)\cdot\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$

Beispiele :

1. $(\sqrt{x}\,(x^2 + 3x + 4))' = \left(\sqrt{x}\right)' \cdot (x^2 + 3x + 4) + \sqrt{x} \cdot (x^2 + 3x + 4)'$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 + 3x + 4) + \sqrt{x} \cdot (2x + 3) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(5x^2 + 9x + 4) .$$

2. $(x^3)' = (x^2 \cdot x)' = (x^2)' \cdot x + x^2 \cdot (x)' = (2x)\cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2$,
3. $(x^4)' = (x^3 \cdot x)' = (x^3)' \cdot x + x^3 \cdot (x)' = (3x^2)\cdot x + x^3 \cdot 1 = 4x^3$,
4. $(x^5)' = (x^4 \cdot x)' = (x^4)' \cdot x + x^4 \cdot (x)' = (4x^3)\cdot x + x^3 \cdot 1 = 5x^4$,
5. allgemein (z.B. durch vollständige Induktion) : $(x^n)' = n x^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Satz 9.5 (Quotientenregel) : Seien f und g differenzierbar , $g(x) \neq 0$, $q(x) = f(x) / g(x)$. Dann ist auch q differenzierbar und es ist $q'(x) = \frac{g(x)\cdot f'(x)-g'(x)\cdot f(x)}{g^2(x)}$.

Beweis : durch Umformung des Differenzenquotienten wie beim vorigen Satz .

Beispiele :

1. $q(x) = \frac{x^2+1}{x+3}$, $q'(x) = \frac{(x+3)\cdot(x^2+1)'-(x+3)'\cdot(x^2+1)}{(x+3)^2} = \frac{(x+3)\cdot 2x - 1\cdot(x^2+1)}{(x+3)^2} =$

$$= \frac{x^2+6x-1}{(x+3)^2} .$$

2. $(x^{-1})' = (\frac{1}{x})' = \frac{x\cdot 1'-x'\cdot 1}{x^2} = \frac{x\cdot 0-1\cdot 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$.
3. allgemein gilt für natürliches n :

$$(x^{-n})' = (\frac{1}{x^n})' = \frac{x^n\cdot 1'-(x^n)'\cdot 1}{x^{2n}} = \frac{x^n\cdot 0-n\cdot x^{n-1}\cdot 1}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}.$$

Als letzte der allgemeinen Regeln für das Ableiten beweisen wir noch den folgenden Satz , der es erlaubt , „**mittelbare Funktionen**“ abzuleiten. Darunter versteht man Funktionen, die durch Einsetzen

einer Funktion in eine andere entstehen , wie z.B. $m_1(x) = (x^2+1)^{100}$ oder $m_2(x) = \sqrt{1-x^2}$.
Während man m_1 (als Polynom) noch ausmultiplizieren und dann mit Hilfe der bisherigen Regeln ableiten kann , dürfte das bei m_2 schwerfallen. Hier nützt :

Satz 9.6 (Kettenregel) : Seien f und g differenzierbar , m(x) = f (g(x)) . Dann ist auch m differenzierbar und es ist $m'(x) = (f(g(x)))' = f'(g(x))\, g'(x)$.

Zum Beweis muss man wieder das Verhalten des Differenzenquotienten $\dfrac{m(x_0+h)-m(x_0)}{h}$ für $h \to 0$ betrachten und die Voraussetzung in der Form ausnutzen , dass die Differentialquotienten

$$g'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} \quad \text{und} \quad f'(y_0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(y_0+k)-f(y_0)}{k} \quad , \ (y_0 = g(x_0)) ,$$

existieren . (Ausführlich in der Vorlesung) .

$$m(x_0+h) - m(x_0) = f(g(x_0+h)) - f(g(x_0)) = \dots$$

$$\Big(g(x_0+h) = g(x_0) + \underbrace{h\cdot g'(x_0) + h\cdot \varepsilon_1(h)}_{k(h)} \ , \quad \varepsilon_1(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \ , \Big)$$

$$\dots = f(g(x_0)+k) - f(g(x_0)) = f(y_0+k) - f(y_0)$$

$$\Big(f(y_0+k) = f(y_0) + k\cdot f'(y_0) + k\cdot\varepsilon_2(k) \ , \quad \varepsilon_2(k) \xrightarrow[k\to 0]{} 0 \Big)$$

$$= h\cdot\big(g'(x_0)+\varepsilon_1(h)\big)\cdot\big(f'(y_0)+\varepsilon_2(k)\big)$$

$$\frac{m(x_0+h)-m(x_0)}{h} = \big(g'(x_0)+\varepsilon_1(h)\big)\cdot\big(f'(y_0)+\varepsilon_2(k)\big)$$

$$\xrightarrow[h\to 0]{} g'(x_0)\cdot f'(y_0) \quad \checkmark$$

Beispiele :

1. $m_1(x) = (x^2+1)^{100}$, $(m_1(x))' = 100\,(x^2+1)^{99}\cdot 2x = 200\,x\cdot(x^2+1)^{99}$,
($f(u) = u^{100}$, $f'(u) = 100\,u^{99}$, $g(x) = x^2+1$, $g'(x) = 2x$) .

2. $m_2(x) = \sqrt{1-x^2}$, $(m_2(x))' = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$,
($f(u) = \sqrt{u}$, $f'(u) = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$, $g(x) = 1 - x^2$, $g'(x) = -2x$)

Satz 9.7 (Ableitung der Umkehrfunktion) : Sei die Funktion f auf (a, b) stetig und umkehrbar .
Ist f in $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar , $f'(x_0) \neq 0$, so ist die Umkehrfunktion $g = f^*$ in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar und es ist $g'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Der Beweis ist nicht schwer . Die Aussage ist aber auch unmittelbar anschaulich einleuchtend : Besitzt eine Kurve in einem Punkt eine Tangente und spiegelt man diese Kurve an der ersten Winkelhalbierenden , so besitzt auch die gespiegelte Kurve in dem gespiegelten Punkt eine Tangente und die Steigung des Spiegelbilds ist der Kehrwert der Steigung des Urbilds. (s. Abbildung 9.2) .

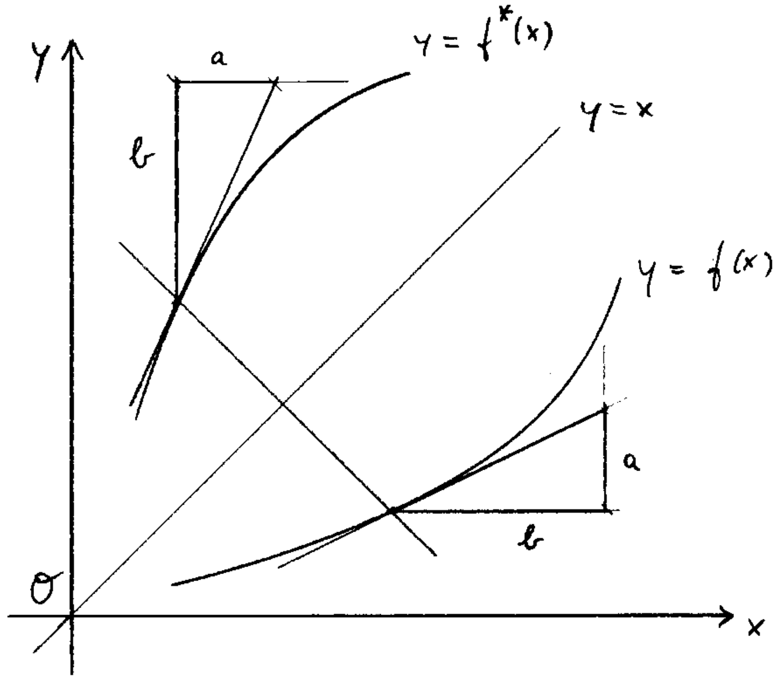


Abbildung 9.2 : zu Satz 9.7 , Ableitung der Umkehrfunktion .

Beispiele zu Satz 9.7 .

1. noch einmal Ableitung der Wurzelfunktion $g(x) = \sqrt{x}$, gedeutet als Umkehrfunktion von $f(x) = x^2$.
2. $g(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$,
3. $g(x) = \arctan x$, $g(x) = \arcsin x$.

§ 9.2 Ableitungen wichtiger elementarer Funktionen

Die Regeln aus § 9.1 nützen uns nur, wenn wir die Ableitungen genügend vieler verschiedener „Grundfunktionen“ kennen. Die wichtigsten dieser Ableitungen leiten wir hier her. Danach sollte das Prinzip klar geworden sein, so dass Sie alle weiteren Formeln den üblichen Formelsammlungen entnehmen können und trotzdem wissen , wie sie zustande kommen.

Exponentialfunktion und Logarithmus:

1. Vorübung : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$ (Nachweis anhand der unendlichen Reihe für e^h) .

$$\frac{e^h-1}{h} - 1 = \frac{1}{h}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k}{k!} - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^{k-1}}{k!} - 1$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^{k-1}}{k!} = h\sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^{k-2}}{k!}$$

Für $|h| < 1 \Longrightarrow$

$$\left|\frac{e^h-1}{h} - 1\right| \le |h| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \le |h| \quad ✓$$

2. Für beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^{x_0}(e^h - 1)}{h} = e^{x_0} \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = e^{x_0}$.

Also :

$(e^x)' = e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

$$\frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = \frac{e^{x_0}(e^h-1)}{h} = e^{x_0}\,\frac{e^h-1}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} e^{x_0}$$

3. Aus 2. folgt mit Satz 9.6 :

$(\ln x)' = 1/x$ für alle $x > 0$.

Winkelfunktionen :

1. Vorübungen : a) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 1$, b) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos h - 1}{h} = 0$.

Die Behauptungen a) und b) lassen sich deuten als „die Ableitungen der Funktionen $\sin x$ bzw. $\cos x$ bei 0 sind gleich 1 bzw. gleich 0 “ . Wir zeigen a) anhand der Figur in Abbildung 9.3. Für $0 < h < \pi/2$ liefert der Vergleich der Flächeninhalte des Dreiecks OAC, des Kreissektors OBC und des Dreiecks OBD die Ungleichungen

$\frac{1}{2}\sin h \cdot \cos h \le \frac{h}{2} \le \frac{1}{2}\tan h$.

Daraus folgt $\sin h \cdot \cos h < h < \dfrac{\sin h}{\cos h}$, weiter $\cos h < \dfrac{\sin h}{h} < \dfrac{1}{\cos h}$ und hieraus die Behauptung a) , da $\cos h$ für $h \to 0$ gegen 1 strebt .

Für b) formen wir $\dfrac{\cos h - 1}{h}$ wie folgt um : $\dfrac{\cos h - 1}{h} = \dfrac{(\cos h - 1)\cdot(\cos h + 1)}{h\cdot(\cos h + 1)} = \dfrac{\cos^2 h - 1}{h\cdot(\cos h+1)} = \dfrac{-\sin^2 h}{h\cdot(\cos h + 1)} = -\dfrac{\sin h}{h}\cdot\dfrac{\sin h}{\cos h + 1}$. Der erste Faktor strebt wegen a) gegen 1 und der zweite gegen 0 . Damit ist b) gezeigt .

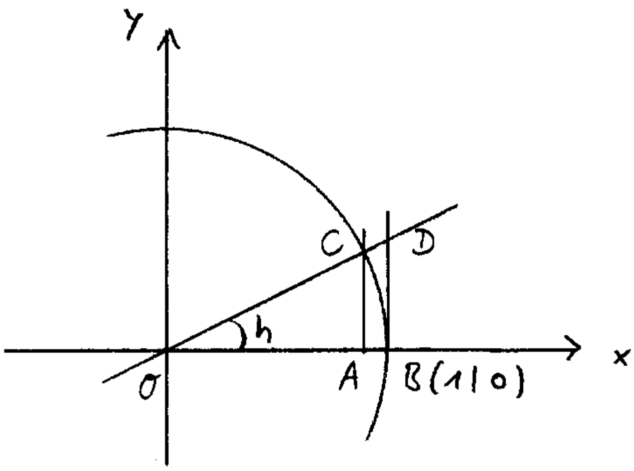


Abbildung 9.3 : zur Herleitung der Formeln für die Ableitungen von sin x und cos x

2. Aus 1. lassen sich jetzt mit Hilfe der Additionstheoreme (§ 8 , Bemerkung 7, S. 42) die Ableitungen von sin x und cos x an jeder reellen Stelle x_0 berechnen . Dazu betrachten wir wieder die Differenzenquotienten :

$$\frac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h} = \frac{\sin x_0 \cdot \cos h + \cos x_0 \cdot \sin h - \sin x_0}{h} = \cos x_0 \cdot \frac{\sinh}{h} + \sin x_0 \cdot \frac{\cos h - 1}{h} .$$

Mit $h \to 0$ strebt dies wegen 1. a) und b) gegen $\cos x_0$.

Ähnlich gilt für cos x :

$$\frac{\cos(x_0+h)-\cos x_0}{h} = \frac{\cos x_0 \cdot \cos h - \sin x_0 \cdot \sin h - \cos x_0}{h} = -\sin x_0 \cdot \frac{\sinh}{h} + \cos x_0 \cdot \frac{\cos h - 1}{h}$$

und das strebt für $h \to 0$ gegen - $\sin x_0$. Kurz :

(sin x) ´ = cos x für alle $x \in \mathbb{R}$,

(cos x) ´ = - sin x für alle $x \in \mathbb{R}$.

3. Mit der Quotientenregel berechnet man aus 2. die Ableitungen von tan x und cot x :

(tan x) ´

$$= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot (\sin x)' - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} .$$

Je nachdem , ob man den Zähler zu 1 zusammenfasst oder den Bruch als Summe von zwei Brüchen schreibt , erhält man

(tan x)´ = 1 / (cos^2 x)

oder **(tan x)´ = 1 + tan^2 x** für alle x mit $\cos x \neq 0$.

4. Für die Umkehrfunktionen erhält man mit der Kettenregel bzw. Satz 9.6 :

(arctan x)´ = 1 / (1 + x^2) für alle $x \in \mathbb{R}$,

$$(\tan(\arctan x))' = (1 + \tan^2(\arctan x)) \cdot (\arctan x)'$$

$$= (1 + x^2) \cdot (\arctan x)'$$

$$\tan(\arctan x) = x$$

$$\Rightarrow (\tan(\arctan x))' = 1$$

$$(1 + x^2) \cdot (\arctan x)' = 1$$

$$\underline{(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}}$$

(arccot x)´ = - 1 / (1 + x^2) für alle $x \in \mathbb{R}$,

(arcsin x)´ = (1 - x^2)$^{-1/2}$ für alle $x \in (-1, 1)$,

(arccos x)´ = - (1 - x^2)$^{-1/2}$ für alle $x \in (-1, 1)$.

(wird zum Teil in der Vorlesung ausführlich gezeigt) .

Sie haben jetzt gesehen , wie man derlei Formeln „im Prinzip“ herleiten kann. Wir müssen in dieser Hinsicht keine Vollständigkeit anstreben. Alle weiteren Ableitungsformeln können Sie sich jetzt selbst herleiten bzw. werden Sie in der Regel den Formelsammlungen entnehmen oder durch Computer - Algebra - Programme berechnen lassen , die ja schon auf sehr handlichen Rechnern laufen . Um Missverständnissen vorzubeugen : auch wenn Sie Ihren Taschenrechner fragen können , was das Ergebnis ist , müssen Sie die Sache verstanden haben !

§ 10 Höhere Ableitungen , Anwendungen

§ 10.1 Extremwerte , Wendepunkte

Aus der Schule ist den meisten von Ihnen bekannt, dass man Minima und Maxima von Funktionen mit Hilfe der Nullstellen der Ableitung finden und mit Hilfe des Vorzeichens der zweiten Ableitung zwischen Minima und Maxima unterscheiden kann. Was ein absolutes Minimum oder Maximum ist, haben wir bereits in § 9 bei Satz 9.5 definiert. Mit Hilfe der Ableitung findet man aber zunächst nur lokale Minima oder Maxima.

Wir klären diese Begriffe und Aussagen im folgenden:

Def. 10.1: Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Jedes offene Intervall $(x_0 - r, x_0 + r)$ mit $r > 0$ heißt eine "**Umgebung**" von x_0.

Def. 10.2: Sei f eine auf $D \subset \mathbb{R}$ definierte Funktion. Man sagt, f habe in $x_0 \in D$ ein "**lokales Maximum**", wenn es eine Umgebung U von x_0 gibt mit $f(x) \le f(x_0)$ für alle $x \in U$; entsprechend : "**lokales Minimum**", falls $f(x) \ge f(x_0)$ für alle $x \in U$.

Bemerkungen, Beispiele:
1. Statt "lokales Maximum (Minimum)" sagt man auch "relatives Maximum (Minimum)".
2. Der Oberbegriff zu Maximum und Minimum heißt "**Extremum**".
3. Die Begriffe "Minimum" , "Maximum" haben also zunächst gar nichts mit einer Ableitung zu tun, sondern nur mit dem Bestehen einer gewissen Ungleichung für gewisse x-Werte.
4. $f(x) = |x|$ hat bei 0 ein relatives Minimum.
5. $f(x) = x^2 - 2x + 3$ hat bei $x_0 = 1$ ein relatives Minimum. (Nachweis mit quadratischer Ergänzung).

Satz 10.1 : Ist f differenzierbar auf D und besitzt f bei $x_0 \in D$ ein lokales Extremum , so ist $f'(x_0) = 0$.

Bew.: o. B. d. A. können wir annehmen , das Extremum sei ein Maximum. Aus der Def. für "lokales Maximum" folgt, dass für den Differenzenquotienten gilt:

$(f(x) - f(x_0))/(x - x_0) \le 0$ für alle x mit $x_0 < x < x_0 + r$, und

$(f(x) - f(x_0))/(x - x_0) \ge 0$ für alle x mit $x_0 - r < x < x_0$.

Aus der Differenzierbarkeit folgt , dass $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0))/(x - x_0)$ existiert. Also existieren auch die links- und rechtsseitigen Grenzwerte und diese sind gleich. Wegen der Ungleichungen ist der rechtsseitige Grenzwert ≤ 0 und der linksseitige Grenzwert ≥ 0. Also kann der gemeinsame Wert beider nur $= 0$ sein. q.e.d.

Beispiele, Bemerkungen:
1. Satz 10.1. lässt sich auch so ausdrücken: ist f differenzierbar, so ist $f'(x_0) = 0$ eine notwendige Bedingung dafür , dass f bei ein relatives Extremum hat.
2. $f(x) = x^3$ hat bei 0 die Ableitung 0 , aber dort kein Extremum.
3. noch einmal Beispiel 5 von oben, aber jetzt mit Ableitung.

Für die weitere Entwicklung der Theorie verwenden wir die folgenden beiden Sätze. Sie sind einfach und anschaulich einleuchtend, haben aber trotzdem erstaunlich weitreichende Konsequenzen.

Satz 10.2 (Satz von Rolle) : Sei f(x) auf [a,b] stetig , auf (a,b) differenzierbar und es sei $f(a) = f(b)$. Dann gibt es eine Stelle $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Beweisskizze: ist f(x) konstant , so ist jedes $\xi \in (a,b)$ geeignet. Ist f(x) nicht konstant, so wissen wir nach Satz 8.5 , dass f ihr absolutes Maximum und ihr absolutes Minimum annimmt. Mindestens eins von beiden liegt im Inneren des Intervalls (andernfalls wäre f im Gegensatz zur Fallannahme doch konstant). Auf diese Stelle wenden wir Satz 10.1 an.

Satz 10.3 (1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung) : Sei f(x) auf [a,b] stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann gibt es eine Stelle $\xi \in (a,b)$ mit $f\,'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Bemerkung:

Satz 10.3 hat die gleichen Voraussetzungen wie der Satz von Rolle, aber ohne die Bedingung, dass die Funktionswerte am Anfang und am Ende des Intervalls gleich sein sollen. Jetzt wird die Existenz einer Stelle $\xi \in (a,b)$ behauptet, an der die Steigung des Schaubilds von f gleich der Steigung der Geraden ist, die Anfangs- und Endpunkt des Schaubilds verbindet.

Beweis: wende Satz 10.2 auf die Funktion $h(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)$ an.

Satz 10.4 : Sei f(x) für $x \in (a,b)$ differenzierbar. Dann gilt : ist

(i) $f\,'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a,b)$, so ist f auf (a,b) monoton wachsend .

(ii) $f\,'(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$, so ist f auf (a,b) streng monoton wachsend .

(iii) $f\,'(x) \leq 0$ für alle $x \in (a,b)$, so ist f auf (a,b) monoton fallend .

(iiii) $f\,'(x) < 0$ für alle $x \in (a,b)$, so ist f auf (a,b) streng monoton fallend .

Beweis: wir zeigen (i). Die anderen Fälle lassen sich ähnlich beweisen.
Seien $x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$. Dann gilt nach Satz 10.3 : $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)\cdot f\,'(\xi)$ für ein $\xi \in (x_1, x_2)$, also $\xi \in (a,b)$. Das Produkt rechts ist also ≥ 0 , daher $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$. q.e.d.

Zurück zur Suche nach Extremwerten einer Funktion. Als Standardvoraussetzungen nehmen wir die Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsannahmen wie bei Satz 10.3, also Stetigkeit auf dem abgeschlossenen Intervall [a,b] und Differenzierbarkeit auf dem offenen Intervall (a,b). Unter diesen Annahmen besitzt eine Funktion immer ein absolutes Minimum und ein absolutes Maximum (Satz 7.5) . Liegt ein solches Extremum im Innern des Intervalls, so ist dort nach Satz 10.1 die Ableitung = 0.

Die gesuchten Extrema werden also immer in den Endpunkten des Intervalls oder an Stellen im Innern des Intervalls angenommen, wo die Ableitung verschwindet.

Beispiele, Bemerkungen:

1. In welchem Winkel müssen die Fäden des Stützgewebes eines Druckschlauchs ansteigen, damit das elastische Gewebe am besten vor Verformung geschützt wird ? Ohne Stützgewebe würde das elastische Gewebe dem Innendruck dadurch nachgeben, dass es sich dehnt, d.h. das Volumen des Schlauchs würde größer und damit der Druck kleiner werden. Das Volumen kann dadurch größer werden, dass der Schlauch länger oder dicker wird. Das Stützgewebe kann beides verhindern, wenn der Winkel so gewählt wird, dass ein Faden gegebener Länge das größtmögliche Zylindervolumen umspannt. Dann nämlich wirkt sich der Druck im Innern weder in einer Zunahme der Länge noch in einer Zunahme der Dicke des Schlauchs, sondern wie gewünscht als Beanspruchung der Fäden auf Zug aus. Die Frage lässt sich also folgendermaßen als Extremwertaufgabe formulieren: wie müssen Radius r und Höhe h eines Zylinders gewählt werden, damit ein Faden gegebener Länge s das größtmögliche Volumen umspannt ? (s. Abbildung 10.1) .

   $V = \pi\cdot r^2 h = \pi\cdot\dfrac{1}{4\pi^2}(s^2-h^2)\cdot h$; (Pythagoras: $s^2 = (2\pi\cdot r)^2 + h^2 \Rightarrow r^2 = \dfrac{1}{4\pi^2}(s^2-h^2)$) .

   Gesucht wird also das (absolute) Maximum von $V(h) = \dfrac{1}{4\pi}(s^2-h^2)\cdot h = \dfrac{1}{4\pi}(s^2h - h^3)$ für $0 \leq h \leq s$.

   Werte in den Endpunkten des Intervalls : V(0) = V(s) = 0.

Ableitung: $V'(h) = \frac{1}{4\pi}(s^2 - 3h^2) = 0 \Leftrightarrow s^2 = 3h^2 \Leftrightarrow h = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot s$. Für den gesuchten Winkel α gilt also $\sin\alpha = \frac{h}{s} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 35{,}264°$. Da das Volumen $V(h)$ für diesen Wert von h positiv ist , ist dies das gesuchte absolute Maximum.

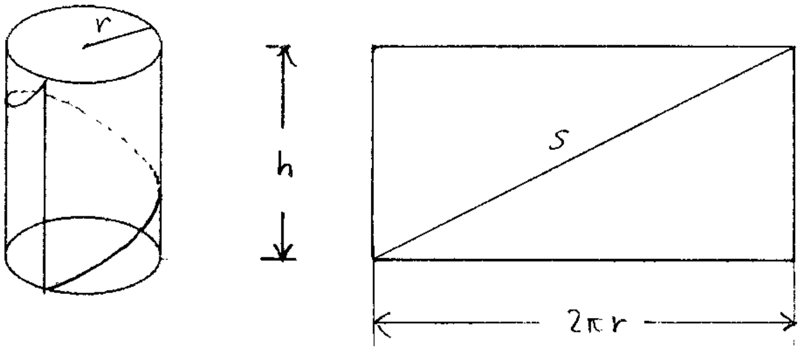


Abbildung 10.1: Zylinder mit einer Windung des Fadens ; aufgetrennt längs einer Mantellinie .

2. Da der Winkel in 1. kleiner ist als 45° , hat die Kraft, die in dem Faden des Gewebes wirkt, in Längsrichtung des Schlauchs eine kleinere Komponente als in Querrichtung. Dies ist u.a. der Grund dafür, dass eine Bockwurst immer in Längsrichtung platzt.

Satz 10.1 sagt aus, dass bei differenzierbaren Funktionen $f'(x_0) = 0$ eine notwendige Bedingung für das Auftreten eines lokalen Extremums ist. Mit Hilfe der zweiten Ableitung, die wir gleich definieren, lässt sich eine hinreichende Bedingung formulieren.

Def . 10.3 : Sei f auf $M \subset D(f)$ differenzierbar. Ist f' auf M differenzierbar , so heißt f “**zweimal (auf M) differenzierbar”**. Die Ableitung von f' heißt die “**zweite Ableitung von f** ” und wir schreiben $f''(x) := (f'(x))'$. Ist f'' differenzierbar , so nennt man $f''' = (f'')'$ die dritte Ableitung von f usw. Statt erster, zweiter, dritter Ableitung usw. sagt man auch Ableitung der **Ordnung** 1, 2, 3 usw. Für Ableitungen der Ordnungen 4 und höher schreibt man i.a. nicht mehr die entsprechende Anzahl von Strichen an das Funktionssymbol, sondern setzt die Ordnung der Ableitung als Hochzahl in Klammern , also gilt z.B.

$$f^{(2)}(x) = f''(x)\ ,\ f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))'.$$

Zwischen f' und f'' besteht derselbe Zusammenhang wie zwischen f und f', wie er in Satz 10.4 formuliert wird. Also:

Ist $f''(x) > 0$, so ist $f'(x)$ streng monoton wachsend $\Rightarrow$ beim Durchlaufen der Kurve mit wachsendem x wächst die Steigung $\Rightarrow$ das Schaubild ist eine “**Linkskurve**” oder ein “**konvexer Bogen**” . Umgekehrt ist $f'(x)$ für $f''(x) > 0$ streng monoton fallend $\Rightarrow$ das Schaubild ist eine “**Rechtskurve**” oder ein “**konkaver Bogen**”.

Erläuterung anhand der Schaubilder von f , f' , f'' für $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

Weitere Begriffe, Bemerkungen:

1. Die Begriffe “konxexer Bogen” , “konkaver Bogen” erfordern nicht , dass f zweimal differenzierbar ist, was wir hier der Einfachheit halber angenommen haben. Die Begriffe lassen sich durch Ungleichungen erklären, die zum Ausdruck bringen, dass jede Sehne des Bogens oberhalb bzw. unterhalb der Kurve verläuft.

2. Ein Punkt $(x_0, f(x_0))$ heißt “**Wendepunkt**” der Kurve $(x , f(x))$, wenn er einen konvexen von einem konkaven Bogen trennt.

3. Mit Hilfe der zweiten Ableitung können wir jetzt die angekündigte hinreichende Bedingung für das Auftreten lokaler Extrema formulieren. Nehmen wir die dritte Ableitung dazu, können wir in ähnlicher Weise die Lage von Wendepunkten charakterisieren. Die beiden folgenden Sätze lassen sich streng mit Hilfe des 1. Mittelwertsatzes (Satz 10.3) beweisen. Aus Zeitgründen begnügen wir uns mit der Bemerkung, dass sie "anschaulich klar" sind.

Satz 10.5 : Sei f auf (a, b) zweimal differenzierbar , $x_0 \in (a,b)$, $f'(x_0) = 0$. Ist $f''(x_0) \neq 0$, so besitzt f bei x_0 ein lokales Extremum. Dies ist ein Maximum, falls $f''(x_0) < 0$, und ein Minimum, falls $f''(x_0) > 0$.

Bemerkung: ist $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, so kann f bei x_0 ein lokales Minimum , ein lokales Maximum oder auch keines von beidem besitzen. Beispiele dafür sind (in dieser Reihenfolge) :

$$f(x) = x^4,\ f(x) = -x^4,\ f(x) = x^3, \quad \text{jeweils an der Stelle} \quad x_0 = 0 .$$

Satz 10.6 : Sei f auf (a,b) zweimal differenzierbar , $x_0 \in (a,b)$. Hat das Schaubild von f bei $(x_0, f(x_0))$ einen Wendepunkt , so ist $f''(x_0) = 0$.

Satz 10.7 : Sei f auf (a,b) dreimal differenzierbar , $x_0 \in (a,b)$, $f''(x_0) = 0$. Ist $f'''(x_0) \neq 0$, so besitzt das Schaubild von f bei $(x_0,f(x_0))$ einen Wendepunkt. Dieser Wendepunkt ist an einem "Rechts - Links - Übergang", falls $f'''(x_0) > 0$, und an einem "Links - Rechts - Übergang", falls $f'''(x_0) < 0$.

§ 10.2 Grenzwerte unbestimmter Formen

Wir erläutern die Art der Fragestellung anhand folgender Beispiele:

1. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$, 2. $\lim\limits_{x \to \pi/4} \dfrac{1-\sin 2x}{1+\cos 4x}$, 3. $\lim\limits_{x \to 0+} x \cdot \ln x$.

Bei Beispielen 1 und 2 haben Zähler und Nenner einzeln den Grenzwert 0 . Daher nützt Satz 8.3 nichts bei der Untersuchung, ob der Grenzwert existiert. In Beispiel 3 strebt der Faktor x gegen 0, der Faktor ln x gegen $-\infty$. Auch hier nützt Satz 8.3 nichts. Bei der Untersuchung eines solchen Grenzwerts darf man nicht den gleichen Fehler machen wie der Patient, dem der Arzt geraten hat, statt weniger großer Mahlzeiten viele kleine Mahlzeiten einzunehmen, und der es besonders gut machen will und anstatt "öfter wenig" nun "immer nichts" isst.

Der Grenzwert in Beispiel 1 lässt sich durch Kürzen berechnen:

$$\frac{x-2}{x^2-3x+2} = \frac{x-2}{(x-1)(x-2)} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{(x-1)} = 1.$$

In Beispiel 2 ist eine Lösungsmöglichkeit auf diesem Wege (durch Kürzen) nicht so offensichtlich. Man müsste dazu etwa Umformungen mit Hilfe der Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen verwenden. Die Differentialrechnung liefert ein allgemein brauchbares Verfahren unter recht allgemeinen Voraussetzungen:

Satz 10.8 (Regel von de l'Hôpital) : Seien f , g in $0 < |x-x_0| < r$ differenzierbar und dort $g'(x) \neq 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$. Existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, so auch $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ und beide Grenzwerte sind gleich.

Beweis ? Wir nehmen o. B. d. A. $x_0 = 0$ an.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)} = \frac{(x-0)\cdot f'(\vartheta x)}{(x-0)\cdot g'(\delta x)} = \frac{f'(\vartheta x)}{g'(\delta x)} \quad ?$$

$$\vartheta \in (0,1)\,,\ \delta \in (0,1)$$

Die Funktionen in Zähler und Nenner haben verschiedene Argumente ϑx und δx. Diese Lücke, die der Beweis mit Hilfe des 1. Mittelwertsatzes lässt, wird durch den folgenden Satz geschlossen:

Satz 10.9 (2. Mittelwertsatz der Differentialrechnung) : Seien f(x) und g(x) auf [a,b] stetig und auf (a,b) differenzierbar , $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Dann gibt es eine Stelle $\xi \in (a,b)$ mit

$$f'(\xi)/g'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\ .$$

Beweis: wie Beweis zu Satz 10.3 , aber mit $h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot(g(x)-g(a))$.

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\,(g(x)-g(a))$$

$$h(a) = f(a)\ ,\quad h(b) = f(a)$$

Satz von Rolle $\Rightarrow$ es ex. $\xi \in (a,b)$: $h'(\xi) = 0$

$$0 = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\, g'(\xi)$$

$$\Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \checkmark$$

Beispiele, Bemerkungen:

1. noch einmal die einleitenden Beispiele ! Bei Beispiel 2 muss man Satz 10.8 zweimal anwenden.

Bsp. 1

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{2x-3} = \frac{1}{1} = 1$$

Bsp. 2

$$\lim_{x\to \pi/4} \frac{1-\sin 2x}{1+\cos 4x} = \lim_{x\to\pi/4} \frac{+2\cos 2x}{+4\sin 4x}$$

$$= \lim_{x\to\pi/4} \frac{-4\sin 2x}{16\cos 4x} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{-1} = \frac{1}{4}.$$

2. Beispiele 1 und 2 könnte man Grenzwerte vom Typ “0/0” nennen. Entsprechend wäre Beispiel 3 ein Grenzwert vom Typ “$0\cdot\infty$” . Ebenso kommen Probleme vom Typ “∞/∞”, “$\infty-\infty$” usw. vor.

3. Satz 10.8 gilt analog auch für einseitige Grenzwerte, Bewegungen $\to \infty$,$\to -\infty$ und den Typ “∞/∞”. (Beweise gehen ähnlich).

4. weitere Beispiele: xe^{-x} , $x^k e^{-x}$ für $x \to \infty$;

$$x\cdot e^{-x} = \frac{x}{e^x} \quad ; \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$x^k \cdot e^{-x}$; besser anhand der Reihe

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

5. $x \ln x$ für $x \to 0+$ (Beispiel 3 oben) . Umschreiben auf “0 / 0” hilft hier nichts, aber Umschreiben auf “∞/∞” .

$$x\cdot\ln x = \frac{x}{\frac{1}{\ln x}} \quad ; \quad \text{ableiten} : \frac{1}{-(\ln x)^{-2}\cdot\frac{1}{x}} = -x(\ln x)^2$$

?

$$x\cdot\ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \quad ; \quad \text{ableiten} : \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -x \xrightarrow[x\to 0+]{} 0$$

§ 10.3 Höhere Ableitungen bei Polynomen

Wir wissen aus § 10.2 , dass man mit Hilfe des Hornerschemas die Funktionswerte eines Polynoms bequem berechnen kann. Wir zeigen jetzt, dass man mit Hilfe des vollständigen Hornerschemas Ableitungen jeder Ordnung berechnen kann. Wir erläutern das Prinzip an einem Polynom vom Grad 4 :

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$,	$f(0) = e$,
$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$,	$f'(0) = d$,
$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$,	$f''(0) = 2c$,
$f'''(x) = 24ax + 6b$,	$f'''(0) = 6b$,
$f^{(4)}(x) = 24a$,	$f^{(4)}(0) = 24a$,
$f^{(n)}(x) = 0$ für alle $n \geq 5$.	$f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \geq 5$.

Der Funktionswert und die Ableitungen an der Stelle 0 lassen sich also durch die Koeffizienten a, b , ... , e ausdrücken. Umgekehrt kann man auch die Koeffizienten durch Funktionswert und Ableitungen ausdrücken:

$e = f(0)$, $d = f'(0)$, $c = \frac{1}{2} f''(0)$, $b = \frac{1}{6} f'''(0)$, $a = \frac{1}{24} f^{(4)}(0)$. Führen wir noch die Konvention

$f^{(0)}(x) = f(x)$ ein, können wir $f(x)$ schreiben als: $f(x) = \sum_{k=0}^{4} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k$.

Sei jetzt $f(x)$ ein Polynom vom Grad n , $x_0 \in \mathbb{R}$ eine feste Zahl. Aus § 10.2 wissen wir, dass man $f(x)$ mit Hilfe des vollständigen Hornerschemas in der Form $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$ schreiben kann.

Wie in der Beispielrechnung oben ergibt sich $f^{(k)}(x_0) = a_k \cdot k!$ für alle $k = 0, 1, \ldots, n$. Also muss man nur die Zahlen am Ende der Ergebniszeilen des Hornerschemas der Reihe nach mit 0!, 1! , ... , n! multiplizieren und erhält Funktionswert, erste , zweite Ableitung usw. des Polynoms an der Stelle x_0 , für die man das Hornerschema durchrechnet.

§ 10.4 Newton-Verfahren

Als letzte Anwendung des Begriffs Ableitung behandeln wir das sog. “Newton-Verfahren”, eine Methode zur näherungsweisen Bestimmung von Nullstellen von Funktionen. Die Idee hinter diesem Verfahren ist, dass man Näherungswerte für eine Nullstelle, deren Existenz man vorab weiß, schrittweise verbessert, indem man das Schaubild $(x , f(x))$ der Funktion f ersetzt durch die Tangente an diese Kurve und ersatzweise den Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse berechnet.

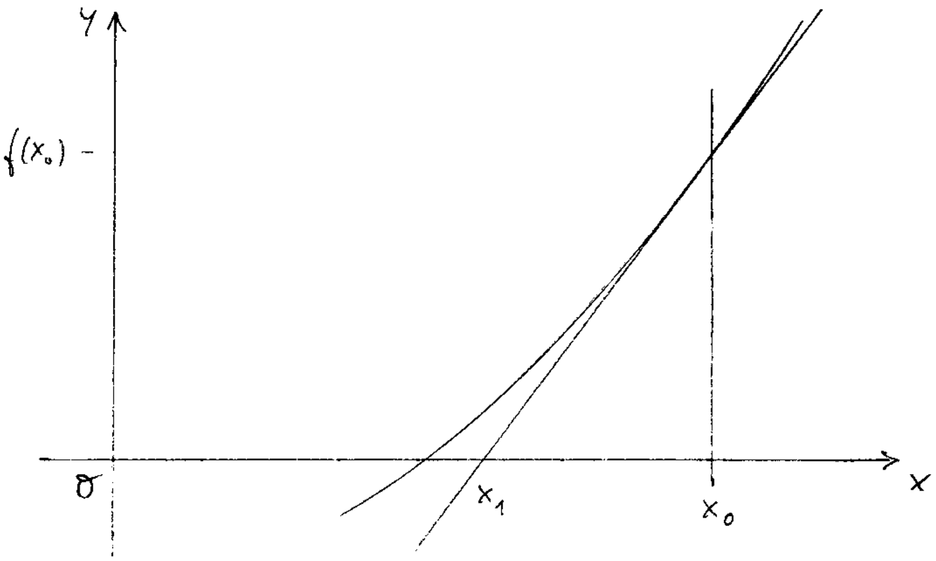


Abbildung 10.2 : Zum Newton-Verfahren

In Abbildung 10.2 ist x_0 der gegebene Näherungswert, x_1 der verbesserte Näherungswert. Diese Werte hängen zusammen über $\dfrac{f(x_0)}{x_0 - x_1} = f'(x_0)$. (Steigungsdreieck) . $\Rightarrow$

$x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. Verbessert man x_1 auf die gleiche Weise usw. , erhält man eine Folge (x_n) :

$$x_0 \ (= \text{Startwert}), \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots ,$$

von der man hofft, dass sie gegen die Nullstelle konvergiert.

Bemerkungen, Beispiele:

1. Bei der Hoffnung auf Konvergenz muss es nicht bleiben. Mit etwas Aufwand kann man unter geeigneten Voraussetzungen über die Funktion f und den Startwert x_0 die Konvergenz beweisen und Abschätzungen für die Abweichung der Näherungen von der Nullstelle herleiten. Das sparen wir uns bei dieser ersten Einführung. Für uns genügt die qualitative Aussage: ist f zweimal stetig differenzierbar, $f'(x_0) \neq 0$, und ist der Startwert "nahe genug" bei der Nullstelle, so konvergiert die oben konstruierte Folge (x_n) gegen die Nullstelle.

2. Ein Verfahren wie dieses, bei dem eine neue Näherung durch Einsetzen der alten Näherung in immer wieder die gleiche Formel bestimmt wird, heißt "**Iterationsverfahren**" .

3. Die Gleichung $\cos x = x$ besitzt eine Lösung zwischen $x = 0{,}7$ und $x = 0{,}8$. Wir können sie genauer berechnen, indem wir das Newton-Verfahren mit $f(x) = x - \cos x$ und $x_0 = 0{,}7$ anwenden.

   Die Iterationsformel : $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n - \cos x_n}{1 + \sin x_n}$ liefert mit zehnstelliger Taschenrechnergenauigkeit die Zahlenwerte $x_1 = 0{,}739436497$, $x_2 = 0{,}73908516$, $x_3 = 0{,}739085133$. Bei weiteren Iterationsschritten ändern sich der Wert nicht mehr.

4. Die Anwendung des Newton-Verfahrens auf die Funktion $f(x) = x^2 - a$, $a > 0$ führt auf die Iterationsformel $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \dfrac{a}{x_n})$ zur Berechnung der Quadratwurzel von a, die wir aus § 4 (Folgen) kennen.