1. (6 Punkte) Zeige durch vollständige Induktion
   Ist λ Eigenwert der Matrix A mit Eigenvektor $\vec{v}$, so ist λ^n Eigenwert zur Matrix A^n mit dem gleichen Eigenvektor $\vec{v}$.

2. (6 Punkte) Modulorechnung
   (a) Bestimme im Körper $\mathbb{F}_{41}$ das multiplikative Inverse zu 19.
   (b) Berechne $17^{46} \quad mod(23)$

3. (4 Punkte) Eine falsche Antwort gibt einen Minuspunkt eine richtige einen Pluspunkt unbeantwortete Fragen keinen Punkt. Man kann in Summe keine negativen Punkte bekommen. Eine Begründung ist nicht nötig.

   (a) Jeder nichtriviale Vektorraum hat mindestens zwei Untervektorräume. ☐ Wahr ☐ Falsch

   (b) Welche Gleichung stimmt ?

   ◯ $det(A - B) = det(A) - det(B)$

   ◯ $\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n} : det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot det(A)$

   ◯ $det(A \cdot A^T) = 1$

   (c) Für drei unterschiedliche Vektoren des $\mathbb{R}^2$ gilt immer :

   ◯ zwei davon bilden eine Basis

   ◯ sie sind linear abhängig

   ◯ es gibt ein Paar, das orthogonal zueinander ist

   (d) Wenn für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt $rang(A) = n$, so ist $det(A) \neq 0$. ☐ Wahr ☐ Falsch

4. (6 Punkte) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des Untervektorraums U des $\mathbb{R}^3$

   $U = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \quad x - 2 \cdot y + z = 0\}$

5. (9 Punkte) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 9 \\ -1 & -4 & 2 & 11 \\ -2 & -8 & 0 & 6 \\ -3 & -12 & 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

6. (10 Punkte) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechne A^{13} mit Hilfe der Darstellung $A = T \cdot D \cdot T^{-1}$ unter Verwendung der Eigenwerte und Eigenvektoren (3^{13} kann als Term stehen bleiben)

7. (9 Punkte) Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren der Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$