Codierungstheorie, 12.10.2022

Mittwoch, 12. Oktober 2022 11:55

Beispiel:

$w = (0,0) \xrightarrow{\text{Anreicherung 1}} (0,0,0,0,0)$

$h = (0,1) \longrightarrow (0,1,0,0,0)$

$d = (1,0) \longrightarrow (1,0,0,0,0)$

$s = (1,1) \longrightarrow (1,1,0,0,0)$

$\rightarrow$ kein Gewinn an Zuverlässigkeit

$w = (0,0) \xrightarrow{\text{Anreicherung 2}} (0,0,0,0,0) = c_1$

$h = (0,1) \longrightarrow (0,1,0,1,1) = c_2$

$d = (1,0) \longrightarrow (1,0,1,0,1) = c_3$

$s = (1,1) \longrightarrow (1,1,1,1,0) = c_4$

$c = (0,1,0,1,1)$ wird geschickt

R empfängt $a = (1,1,0,1,1) \notin \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$

$\Longrightarrow$ Übertragung fehlerhaft

Anzahl der Unterscheidungen von a und

c_1 : 4

c_2 : 1 $\leftarrow$

c_3 : 3

c_4 : 2

a wird zu c_2 decodiert

Maximum-Likelihood-Decodierung

Bsp.: $m = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$

Bsp.: $m = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$

Prüfziffer a_6 so, dass

$$6a_1 + 5\cdot a_2 + 4\cdot a_3 + 3a_4 + 2a_5 + a_6 = 0 \mod 11$$

$m = (5, 2, 5, 2, 2)$

$$6\cdot 5 + 5\cdot 2 + 4\cdot 5 + 3\cdot 2 + 2\cdot 2 + a_6 = 0 \mod 11$$

$$70 + a_6 = 0 \mod 11$$

$$\Longrightarrow \quad a_6 = 7$$

$$c = (5, 2, 5, 2, 2, 7)$$

Empfangen

$$a = (5, 4, 5, 2, 2, 7)$$

Einsetzen:

$$6\cdot 5 + 5\cdot 4 + 4\cdot 5 + 3\cdot 2 + 2\cdot 2 + 7 = 87 = 10 \mod 11$$

$\Longrightarrow$ fehlerhafte Übertragung

Beispiel: ISBN-10

m: 3-528-07287

(1) $s = 1\cdot 3 + 2\cdot 5 + 3\cdot 2 + 4\cdot 8 + 5\cdot 0 + 6\cdot 7 + 7\cdot 2 + 8\cdot 8 + 9\cdot 7 = 234$

(2) $234 = 21\cdot 11 + 3$

(3) $a_{10} = 3$

ISBN-10: 3-528-07287-3

ISBN-10: 3-528-07287-3

Bsp.: ISBN 13: $m = 978-3-528-07287$

$$s = 9+3\cdot 7+8+3\cdot 3+5+3\cdot 2+8+3\cdot 0+7+3\cdot 2+8+3\cdot 7 = 108$$

$$\Longrightarrow \quad a_{13} = 2$$

ISBN 13-Kennung: 978-3-528-07287-2

Bsp.: Prüfzeichen a_6, a_7 so, dass

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 0 \mod 11$$
$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 + 6a_6 + 7a_7 = 0 \mod 11$$

$$m = (9, 8, 7, 5, 4)$$

$$9 + 8 + 7 + 5 + 4 + a_6 + a_7 = 0 \mod 11$$
$$9 + 2\cdot 8 + 3\cdot 7 + 4\cdot 5 + 5\cdot 4 + 6\cdot a_6 + 7a_7 = 0 \mod 11$$

$$\Longrightarrow \quad 33 + a_6 + a_7 = 0 \mod 11$$
$$86 + 6a_6 + 7a_7 = 0 \mod 11$$

$$\Longrightarrow \quad a_6 + a_7 = 0 \mod 11$$
$$9 + 6a_6 + 7a_7 = 0 \mod 11$$

$$\Longrightarrow \quad a_6 + a_7 = 0 \mod 11$$
$$6a_6 + 7a_7 = 2 \mod 11$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{II - 6\cdot I} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} a_6 + a_7 = 0 \\ a_7 = 2 \end{array} \mod 11$$

$$\Longrightarrow \quad a_7 = 2, \quad a_6 = 9$$

$c = (9, 8, 7, 5, 4, 9, 2)$

Empfänger erhält $a = (9, 6, 7, 5, 4, 9, 2)$

einsetzen:

$$9 + 6 + 7 + 5 + 4 + 9 + 2 = 42 = 9 \mod 11$$

$$9 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 9 + 7 \cdot 2 = 150 = 7 \mod 11$$

Bei einem Fehler an Stelle 1: $PS2 = PS1 \mod 11$

Stelle 2: $PS2 = 2 \cdot PS1 \mod 11$

Stelle 3: $PS2 = 3 \cdot PS1 \mod 11$

Stelle 4: $PS2 = 4 \cdot PS1 \mod 11$

Stelle 5: $PS2 = 5 \cdot PS1$ "

Stelle 6: $PS2 = 6 \cdot PS1$ "

Stelle 7: $PS2 = 7 \cdot PS1$ "

hier: $PS1 = 9$ $\quad PS2 = 7$

also: $PS2 = 2 \cdot PS1$

also: Fehler an Stelle 2

korrekt $(9, a_2, 7, 5, 4, 9, 2)$

$$9 + a_2 + 7 + 5 + 4 + 9 + 2 = 0 \mod 11$$

$$a_2 + 36 = 0 \mod 11$$

$$\Longrightarrow a_2 = 8$$

$\rightsquigarrow c = (9, 8, 7, 5, 4, 9, 2)$

Bsp.: Empfangen wird $a = (2, 5, 4, 6, 3, 8, 4)$

Bsp.: Empfangen wird $a = (2, 5, 4, 6, 3, 8, 4)$

Einsetzen: $2 + 5 + 4 + 6 + 3 + 8 + 4 = 32 = 10 \mod 11$

$2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 8 + 7 \cdot 4 = 139 = 7 \mod 11$

$\Rightarrow$ Übertragung fehlerhaft

gesucht: t mit $7 = t \cdot 10 \mod 11$

$\Rightarrow t = 4$ d.h. Fehler an Stelle 4

korrekt ist $(2, 5, 4, a_4, 3, 8, 4)$

einsetzen: $2 + 5 + 4 + a_4 + 3 + 8 + 4 = 0 \mod 11$

$a_4 + 26 = 0 \mod 11$

$\Rightarrow a_4 = 7$

also $c = (2, 5, 4, 7, 3, 8, 4)$