Musterlösungen zur Klausur lineare Algebra 1

1. Zeige durch vollständige Induktion

   Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dann ist $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \cdot a \\ 0 & 1 & n \cdot b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   Induktionsanfang : $n = 1 : A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \cdot a \\ 0 & 1 & 1 \cdot b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$ ist erfüllt.

   Induktionsschritt : $n \to n+1$

   $A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \cdot a \\ 0 & 1 & n \cdot b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

   $\begin{pmatrix} 1 & 0 & n \cdot a + a \\ 0 & 1 & n \cdot b + b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & (n+1) \cdot a \\ 0 & 1 & (n+1) \cdot b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Modulorechnung

   (a) Gaußalgorithmus mit 29 und 31 :

   $$\begin{aligned} 31 &= 1 \cdot 29 + 2 \\ 29 &= 14 \cdot 2 + 1 \\ 1 &= 29 - 14 \cdot 2 \\ 1 &= 29 - 14 \cdot (31 - 1 \cdot 29) \\ 1 &= 15 \cdot 29 - 14 \cdot 33 \end{aligned}$$

   und modulo 31 gilt $1 = 15 \cdot 29$ und das Inverse lautet 15.

   (b) $11^{33} \quad mod(17) = 11 \cdot 11^{2 \cdot 16} = 11 \cdot (11^{16})^2 = 11 \quad mod(17)$
   $a^{17-1} = 1 \quad mod(17)$ gilt für alle teilerfremden a.

3. Multiple Choice

   (a) Ein Vektoraum ist immer eine abelsche Gruppe ist wahr.

   (b) Es stimmt $det(A \cdot B \cdot C) = det(A) \cdot det(B) \cdot det(C)$

   (c) Wieviele Untervektorräume hat der $\mathbb{R}^2$? Unendlich viele.

   (d) Wenn im Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ eine Spalte der Matrix A gleich $\vec{b}$ ist, hat das LGS immer eine Lösung ist wahr.

4. $U = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | x + y + z = 0\}$ hat Basis $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

   $\vec{b_1} = \frac{\vec{u_1}}{||\vec{u_1}||} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   $\vec{b_2^*} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

   $\vec{b_2} = \frac{\vec{b_2^*}}{||\vec{b_2^*}||} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

5. Die augmentierte Matrix wird auf Normalform gebracht
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
Damit ist x_3 freie Variable und eine spezielle Lösung x_s ist $\vec{x_s} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die Lösung des homogenen Gleichungssystems mit $x_3 = 1$ ergibt den erzeugenden Vektor $\vec{x_k}$ des Kerns von $f : \vec{x_k} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Der Lösungsraum besteht aus den Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

6. Mit $dim(\mathbb{R}^{3x3}) = 9$ und $rg(f) = 3$ gilt $nul(f) = 9 - 3 = 6$. Gesucht sind 6 Basiselemente für $ker(f)$

für $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ ist $f(A) = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{22} + a_{33} \\ a_{12} + a_{23} + a_{31} \\ a_{13} + a_{21} + a_{32} \end{pmatrix}$

Eine Basis sind die Matrizen, die jeweils eine der Zeilen von f erfüllen und in deren andere Elemente 0 sind :

Für $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$ ergibt sich

$b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$a_{12} + a_{23} + a_{31} = 0 \quad :$

$b_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad b_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$a_{13} + a_{21} + a_{32} = 0 \quad :$

$b_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad b_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

7. $det(A - \lambda \cdot I_3) = det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -10 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$

$(1-\lambda) \cdot det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} - 10 \cdot det \begin{pmatrix} 2 & 1-\lambda \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =$

$(1-\lambda) \cdot (\lambda^2 - \lambda - 2) - 10 \cdot (1-\lambda) = (1-\lambda) \cdot (\lambda^2 - \lambda - 12) = (1-\lambda) \cdot (\lambda - 4) \cdot (\lambda + 3)$

und damit sind die Eigenwerte -3, 1 und 4.

$\lambda = -3 : A + 3 \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -10 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_{-3} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 1 : A - 1 \cdot I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -10 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\lambda = 4 : A - 4 \cdot I_3 = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -10 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$