Dimension:

Def: Dimension eines VR = Anzahl der Elemente einer Basis

D.h. die Dimension gibt an, wie viele verschiedene Vektoren (u.l.d.) notwendig sind, um den gesamten Raum aufzuspannen.
⇝ "Dim. gibt einem ein Gefühl für die Größe / Struktur eines VRs".

Untervektorräume:

Def.: Geg.: K-VR V mit $+_V : V \times V \to V$, $\cdot_V : K \times V \to V$

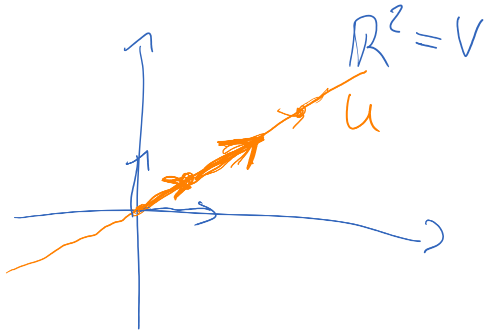
Dann ist U ein Untervektorraum von V per Def. genau dann wenn

$U \subseteq V$, U selbst ist VR mit den gleichen Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ wie V.

⇝ formal: $+_U = +_V|_{U \times U}$, $\cdot_U = \cdot_V|_{K \times U}$.

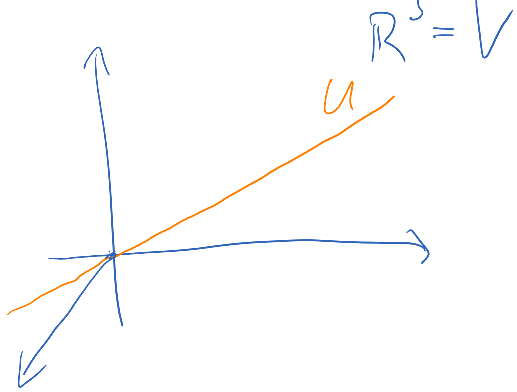
Allgemein gilt: $\dim_K(U) \leq \dim_K(V)$, wenn U ein UVR von V ist.

Bsp.:



$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2) = 2$
$\dim_{\mathbb{R}}(U) = 1$

Bsp.:



$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) = 3$
$\dim_{\mathbb{R}}(U) = 1$

Bsp.: $\dim(U) = \dim(V) \Longrightarrow U = V$. (gilt zumindest im endlich-dimensionalen)
und U UVR von V

$\# \mathbb{N} = \infty$ (Aleph$_0$)

$\# \mathbb{R} = \infty$ (Aleph$_1$)

Erzeugendensystem $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$

? Ist das minimal (d.h. eine Basis)?

$\rightsquigarrow$ Wenn das EZS linear unabhängig ist, dann ja,
sonst: nein !

$$\lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \dots + \lambda_m \cdot \vec{v}_m = \vec{0} \quad \text{mit } \lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$$

$\hookrightarrow$ Wenn $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$ <u>die einzige Lösung</u> ist, dann sind $v_1, \dots, v_m$ lin. unabh.,
wenn nicht, dann sind sie linear abh.

Zahlenfolgen:

$$V := \{(a_0, a_1, \dots) \mid a_i \in \mathbb{R} \ \forall i \in \mathbb{N}\}$$

$$+ : V \times V \longrightarrow V$$
$$((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) \longmapsto (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

$(a_0, a_1, \dots)$
$+ (b_0, b_1, \dots)$
$\overset{\text{Def.}}{=} (a_0+b_0, a_1+b_1, \dots)$

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$$
$$(r, (a_n)_{n\in\mathbb{N}}) \longmapsto (r \cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

$U := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V \mid a_i \neq 0$ für höchstens endlich viele $i \in \mathbb{N}\}$.

__Beh.1:__ U ist abg. unter $+$:

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in U$. zz: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in U$.

__Dazu:__ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in U$

__Begr.:__ • Per Def. ex. $i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}$ mit (k endlich!)

$$a_{i_1}, \dots, a_{i_k} \neq 0$$

und $a_j = 0$ für alle $j \in \mathbb{N} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$

• Per Def. ex. $j_1, \dots, j_\ell \in \mathbb{N}$ (ℓ endlich) mit

$$b_{j_1}, \dots, b_{j_\ell} \neq 0$$

und $b_j = 0$ für alle $j \in \mathbb{N} \setminus \{j_1, \dots, j_\ell\}$.

$\Longrightarrow$ $a_n + b_n = 0 + 0 = 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_\ell\}$

$\Longrightarrow$ $a_n + b_n \neq 0$ __höchstens__ für $n \in \{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_\ell\}$

$\rightsquigarrow$ Beh. folgt, da endlich (hat max. $k+\ell$ Elemente).

$\square$

__Beh.2:__ U ist abg. unter $\cdot$:

zz: Für alle $r \in \mathbb{R}$ und alle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in U$ gilt: $r \cdot (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in U$

__Bew.:__ Seien also $r \in \mathbb{R}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in U$ beliebig.

Dann wissen wir: Per Def. ex. $i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}$, s.d.

und $a_{i_1}, \dots, a_{i_k} \neq 0$
$a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$.

$\rightsquigarrow r \cdot (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \overset{\text{Def.}}{=} (r \cdot a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$\rightsquigarrow$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$ gilt:

$$r \cdot a_n = r \cdot 0 = 0$$

$\rightsquigarrow$ alle bis auf endlich viele Folgenglieder von $r \cdot (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind $\neq 0$, d.h. per Def. von U:

$$r \cdot (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in U.$$

$\square$

$\mathbb{R}[X]$ ist ein $\mathbb{R}$-VR mit üblichen Addition und skalaren Multiplikation von Polynomen.

$$\mathbb{R}[X] \overset{1:1}{\longleftrightarrow} U$$

$$\boxed{2 \cdot (X^2 - 2) = 2X^2 - 4}$$

Identifikation geht via: Schreibe ein Polynom

$\longrightarrow P(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot X^n$ mit $a_n \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$ für höchstens endlich viele $n \in \mathbb{N}$.

z.B. $1 \cdot X^2 - 2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot X^n$ mit $a_0 = -2$, $a_2 = 1$, $a_n = 0$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 2\}$.

$$-2 \cdot X^0 + 0 \cdot X^1 + 1 \cdot X^2 + \underbrace{0 \cdot X^3 + 0 \cdot X^4 + 0 \cdot X^5 + \dots}_{= 0}$$
$$= -2 + X^2$$

$\mathbb{R}[X] \hookrightarrow \mathcal{U}$

$P(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot X^n \overset{1:1}{\longleftrightarrow} (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

"Isomorphismus von VR".