Lineare Algebra
Vektorräume

Reinhold Hübl

Wintersemester 2020/21

DHBW
Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Mannheim

Vektorraum

Wir betrachten einen beliebigen Körper K.

Definition

Ein K–**Vektorraum** ist eine nichtleere Menge V zusammen mit einer Addition

$$'+' : V \times V \longrightarrow V, \quad (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \longmapsto \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$$

und einer Skalarmultiplikation

$$'\cdot' : K \times V \longrightarrow V, \quad (r, \overrightarrow{v}) \longmapsto r \cdot \overrightarrow{v}$$

so dass für $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{w}$ in V und Skalare r und s in K gilt:

Vektorraum

Wir betrachten einen beliebigen Körper K.

Definition

Ein K–**Vektorraum** ist eine nichtleere Menge V zusammen mit einer Addition

$$'+' : V \times V \longrightarrow V, \quad (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \longmapsto \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$$

und einer Skalarmultiplikation

$$'\cdot' : K \times V \longrightarrow V, \quad (r, \overrightarrow{v}) \longmapsto r \cdot \overrightarrow{v}$$

so dass für $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{w}$ in V und Skalare r und s in K gilt:

Vektorraum

Definition

$V1:$	$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$	(1. Assoziativgesetz)
$V2:$	$\vec{v}+\vec{w}=\vec{w}+\vec{v}$	(Kommutativgesetz)
$V3:$	Es existiert ein Element $\vec{0}\in V$ mit $\vec{v}+\vec{0}=\vec{v}$	(neutrales Element der Addition)
$V4:$	Zu jedem $\vec{v}\in V$ existiert ein $-\vec{v}\in V$ mit $\vec{v}+(-\vec{v})=\vec{0}$	(inverses Element der Addition)
$V5:$	$(r\cdot s)\cdot\vec{v}=r\cdot(s\cdot\vec{v})$	(2. Assoziativgesetz)
$V6:$	$r\cdot(\vec{v}+\vec{w})=r\cdot\vec{v}+r\cdot\vec{w}$	(1. Distributivgesetz)
$V7:$	$(r+s)\cdot\vec{v}=r\cdot\vec{v}+s\cdot\vec{v}$	(2. Distributivgesetz)
$V8:$	$1\cdot\vec{v}=\vec{v}$	(neutrales Element der Multiplikation)

Vektorraum

Die ersten vier Bedingungen besagen, dass $(V, +)$ eine kommutative Gruppe ist.

Die letzten vier Bedingungen sind Anforderungen an die Skalarmultiplikation.

Vektorraum

Die ersten vier Bedingungen besagen, dass $(V, +)$ eine kommutative Gruppe ist.

Die letzten vier Bedingungen sind Anforderungen an die Skalarmultiplikation.

Vektorraum

Beispiel

Wir betrachten $K = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^n$ zusammen mit der komponentenweisen Addition

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix}$$

und der komponentenweisen Skalarmultiplikation

Vektorraum

Beispiel

Wir betrachten $K = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^n$ zusammen mit der komponentenweisen Addition

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix}$$

und der komponentenweisen Skalarmultiplikation

$$r \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot v_1 \\ \vdots \\ r \cdot v_n \end{pmatrix}$$

Vektorraum

Beispiel

Wir betrachten $K = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^n$ zusammen mit der komponentenweisen Addition

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix}$$

und der komponentenweisen Skalarmultiplikation

$$r \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot v_1 \\ \vdots \\ r \cdot v_n \end{pmatrix}$$

Dann ist $\mathbb{R}^n$ ein $\mathbb{R}$–Vektorraum.

Vektorraum

Beispiel

Wir betrachten $K = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^n$ zusammen mit der komponentenweisen Addition

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix}$$

und der komponentenweisen Skalarmultiplikation

$$r \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot v_1 \\ \vdots \\ r \cdot v_n \end{pmatrix}$$

Dann ist $\mathbb{R}^n$ ein $\mathbb{R}$–Vektorraum.

Vektorraum

Beispiel

Der Nullvektor

$$\overrightarrow{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist dabei das neutrale Element der Addition.

Der negative Vektor $-\overrightarrow{v}$ zu einem n–dimensionalen reellen Vektor ist gegeben durch

$$-\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ \vdots \\ -v_n \end{pmatrix}$$

Vektorraum

Beispiel

Der Nullvektor

$$\overrightarrow{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist dabei das neutrale Element der Addition.
Der negative Vektor $-\overrightarrow{v}$ zu einem n–dimensionalen reellen Vektor ist gegeben durch

$$-\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ \vdots \\ -v_n \end{pmatrix}$$

Vektorraum

Beispiel

Das n–fache kartesische Produkt von $\mathbb{C}$, also die Menge

$$\mathbb{C}^n := \{ \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \mid z_i \in \mathbb{C} \}$$

zusammen mit der komponentenweisen Addition und der komponentenweisen Skalarmultiplikation

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + z_1 \\ \vdots \\ y_n + z_n \end{pmatrix}, \qquad a \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot z_1 \\ \vdots \\ a \cdot z_n \end{pmatrix}$$

$(a, y_i, z_i \in \mathbb{C})$ ist ein $\mathbb{C}$–Vektorraum.

Vektorraum

Übung

Bestimmen Sie

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vektorraum

Übung

Bestimmen Sie

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-3\\4\\2\end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-3\\4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-1\\7\\7\end{pmatrix}$$

Vektorraum

Übung

Bestimmen Sie

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-3\\4\\2\end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-3\\4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-1\\7\\7\end{pmatrix}$$

Vektorraum

Beispiel

Die Zahlenebene $\mathbb{R}^2$ ist ein $\mathbb{R}$–Vektorraum, der Vektorraum der ebenen Vektoren, die durch Pfeile in der Ebenen dargestellt werden.

Beispiel

Der Raum $\mathbb{R}^3$ ist ein $\mathbb{R}$–Vektorraum, der Vektorraum der räumlichen Vektoren, die durch Pfeile im Raum dargestellt werden.

Vektorraum

Beispiel

Die Zahlenebene $\mathbb{R}^2$ ist ein $\mathbb{R}$–Vektorraum, der Vektorraum der ebenen Vektoren, die durch Pfeile in der Ebenen dargestellt werden.

Beispiel

Der Raum $\mathbb{R}^3$ ist ein $\mathbb{R}$–Vektorraum, der Vektorraum der räumlichen Vektoren, die durch Pfeile im Raum dargestellt werden.

Vektorraum

Beispiel

Das n–fache kartesische Produkt von $\mathbb{F}_2$, also die Menge

$$\mathbb{F}_2^n := \{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_i \in \mathbb{C} \}$$

zusammen mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation ist ein $\mathbb{F}_2$–Vektorraum.

Bei $\mathbb{F}_2^n$ handelt es sich um die n–Tupel binärer Zahlen, die sich komplett auflisten lassen. So gilt etwa

$$\mathbb{F}_2^2 := \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

Vektorraum

Beispiel

Das n–fache kartesische Produkt von $\mathbb{F}_2$, also die Menge

$$\mathbb{F}_2^n := \{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_i \in \mathbb{C} \}$$

zusammen mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation ist ein $\mathbb{F}_2$–Vektorraum.
Bei $\mathbb{F}_2^n$ handelt es sich um die n–Tupel binärer Zahlen, die sich komplett auflisten lassen. So gilt etwa

$$\mathbb{F}_2^2 := \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

Insbesondere ist also $\mathbb{F}_2^n$ eine endliche Menge mit $|\mathbb{F}_2^n| = 2^n$.

Vektorraum

Beispiel

Das n–fache kartesische Produkt von $\mathbb{F}_2$, also die Menge

$$\mathbb{F}_2^n := \{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_i \in \mathbb{C} \}$$

zusammen mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation ist ein $\mathbb{F}_2$–Vektorraum.
Bei $\mathbb{F}_2^n$ handelt es sich um die n–Tupel binärer Zahlen, die sich komplett auflisten lassen. So gilt etwa

$$\mathbb{F}_2^2 := \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

Insbesondere ist also $\mathbb{F}_2^n$ eine endliche Menge mit $|\mathbb{F}_2^n| = 2^n$.

Vektorraum

Beispiel

Wir betrachten die Menge

$$V = \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ Abbildung } \}$$

aller Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$. Für $f, g \in V$ definieren wir $f + g$ durch

$$(f+g)(n) = f(n) + g(n) \qquad \text{für alle } n \in N$$

Vektorraum

Beispiel

Wir betrachten die Menge

$$V = \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \ \text{Abbildung} \ \}$$

aller Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$. Für $f, g \in V$ definieren wir $f + g$ durch

$$(f+g)(n) = f(n) + g(n) \qquad \text{für alle } n \in N$$

Für $f \in V$ und $r \in \mathbb{R}$ definieren wir $r \cdot f$ durch

$$(r \cdot f)(n) = r \cdot f(n) \qquad \text{für alle } n \in N$$

Dann ist V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum.

Vektorraum

Beispiel

Wir betrachten die Menge

$$V = \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \ \text{Abbildung} \ \}$$

aller Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$. Für $f, g \in V$ definieren wir $f + g$ durch

$$(f + g)(n) = f(n) + g(n) \qquad \text{für alle } n \in N$$

Für $f \in V$ und $r \in \mathbb{R}$ definieren wir $r \cdot f$ durch

$$(r \cdot f)(n) = r \cdot f(n) \qquad \text{für alle } n \in N$$

Dann ist V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum.

In dieser Situation schreibt man häufig f_n für $f(n)$ und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für f und nennt ein Element $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine **reelle Zahlenfolge**. Der Raum V heißt auch Vektorraum der Folgen.

Vektorraum

Beispiel

Wir betrachten die Menge

$$V = \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ Abbildung } \}$$

aller Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$. Für $f, g \in V$ definieren wir $f + g$ durch

$$(f + g)(n) = f(n) + g(n) \qquad \text{für alle } n \in N$$

Für $f \in V$ und $r \in \mathbb{R}$ definieren wir $r \cdot f$ durch

$$(r \cdot f)(n) = r \cdot f(n) \qquad \text{für alle } n \in N$$

Dann ist V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum.
In dieser Situation schreibt man häufig f_n für $f(n)$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für f und nennt ein Element $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine **reelle Zahlenfolge**. Der Raum V heißt auch Vektorraum der Folgen.

Vektorraum

Beispiel

Wir betrachten ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und die Menge

$$V = \mathrm{Abb}(I, \mathbb{R}) = \{f : I \longrightarrow \mathbb{R} \text{ Abbildung } \}$$

aller Abbildungen von I nach $\mathbb{R}$. Für $f, g \in V$ definieren wir $f + g$ durch

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{für alle } x \in I$$

Vektorraum

Beispiel

Wir betrachten ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und die Menge

$$V = \mathrm{Abb}(I, \mathbb{R}) = \{ f : I \longrightarrow \mathbb{R} \ \text{ Abbildung } \}$$

aller Abbildungen von I nach $\mathbb{R}$. Für $f, g \in V$ definieren wir $f + g$ durch

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{für alle } x \in I$$

Für $f \in V$ und $r \in \mathbb{R}$ definieren wir $r \cdot f$ durch

$$(r \cdot f)(x) = r \cdot f(x) \qquad \text{für alle } x \in I$$

Dann ist V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum, der Vektorraum der reellwertigen Abbildungen auf I.

Vektorraum

Beispiel

Wir betrachten ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und die Menge

$$V = \mathrm{Abb}(I, \mathbb{R}) = \{ f : I \longrightarrow \mathbb{R} \text{ Abbildung } \}$$

aller Abbildungen von I nach $\mathbb{R}$. Für $f, g \in V$ definieren wir $f + g$ durch

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{für alle } x \in I$$

Für $f \in V$ und $r \in \mathbb{R}$ definieren wir $r \cdot f$ durch

$$(r \cdot f)(x) = r \cdot f(x) \qquad \text{für alle } x \in I$$

Dann ist V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum, der Vektorraum der reellwertigen Abbildungen auf I.

Fordern wir zusätzlich, dass die Abbildungen stetig, differenzierbar, beliebig oft differenzierbar sind, so erhalten wir ebenfalls Vektorräume.

Vektorraum

Beispiel

Wir betrachten ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und die Menge

$$V = \mathrm{Abb}(I, \mathbb{R}) = \{f : I \longrightarrow \mathbb{R} \text{ Abbildung } \}$$

aller Abbildungen von I nach $\mathbb{R}$. Für $f, g \in V$ definieren wir $f + g$ durch

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{für alle } x \in I$$

Für $f \in V$ und $r \in \mathbb{R}$ definieren wir $r \cdot f$ durch

$$(r \cdot f)(x) = r \cdot f(x) \qquad \text{für alle } x \in I$$

Dann ist V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum, der Vektorraum der reellwertigen Abbildungen auf I.
Fordern wir zusätzlich, dass die Abbildungen stetig, differenzierbar, beliebig oft differenzierbar sind, so erhalten wir ebenfalls Vektorräume.

Untervektorraum

Definition

Ist V ein K–Vektorraum und ist $U \subseteq V$ eine Teilmenge, so heißt U **Untervektorraum** von V wenn gilt:

1. $U \neq \emptyset$.

Bemerkung

Ist $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, so ist der Nullvektor $\overrightarrow{0} \in U$.

Untervektorraum

Definition

Ist V ein K–Vektorraum und ist $U \subseteq V$ eine Teilmenge, so heißt U **Untervektorraum** von V wenn gilt:

1. $U \neq \emptyset$.
2. Sind $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in U$ so ist auch $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \in U$.

Bemerkung

Ist $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, so ist der Nullvektor $\overrightarrow{0} \in U$.

Untervektorraum

Definition

Ist V ein K–Vektorraum und ist $U \subseteq V$ eine Teilmenge, so heißt U **Untervektorraum** von V wenn gilt:

1. $U \neq \emptyset$.
2. Sind $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in U$ so ist auch $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \in U$.
3. Ist $\overrightarrow{v} \in U$ und ist $\kappa \in K$ ein Skalar, so ist auch $\kappa \cdot \overrightarrow{v} \in U$.

Bemerkung

Ist $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, so ist der Nullvektor $\overrightarrow{0} \in U$.

Untervektorraum

Definition

Ist V ein K–Vektorraum und ist $U \subseteq V$ eine Teilmenge, so heißt U **Untervektorraum** von V wenn gilt:

1. $U \neq \emptyset$.
2. Sind $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in U$ so ist auch $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \in U$.
3. Ist $\overrightarrow{v} \in U$ und ist $\kappa \in K$ ein Skalar, so ist auch $\kappa \cdot \overrightarrow{v} \in U$.

Bemerkung

Ist $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, so ist der Nullvektor $\overrightarrow{0} \in U$.

Untervektorraum

Beispiel

Die Menge

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.

Untervektorraum

Übung

Überprüfen Sie, ob die Menge

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} -2t \\ 2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$ ist.

Untervektorraum

Übung

Überprüfen Sie, ob die Menge

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} -2t \\ 2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$ ist.

Lösung:

U ist kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.

Untervektorraum

Übung

Überprüfen Sie, ob die Menge

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} -2t \\ 2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$ ist.

Lösung:

U ist kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.

Der $\mathbb{R}^n$

Der vielleicht wichtigste Vektorraum in der Anwendung ist der $\mathbb{R}^n$, der n–**dimensionale reelle Raum**. Die Vektorraumoperationen sind in diesem Fall sehr einfach zu beschreiben.

Der $\mathbb{R}^n$

Der vielleicht wichtigste Vektorraum in der Anwendung ist der $\mathbb{R}^n$, der n–**dimensionale reelle Raum**. Die Vektorraumoperationen sind in diesem Fall sehr einfach zu beschreiben.

Definition

Ein Vektor

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

heißt n–**dimensionaler reeller Vektor**, die Größe

$$|\overrightarrow{v}|| = \sqrt{v_1^2 + \cdots v_n^2}$$

heißt **Länge** des Vektors $\overrightarrow{v}$.

Der $\mathbb{R}^n$

Der vielleicht wichtigste Vektorraum in der Anwendung ist der $\mathbb{R}^n$, der n–**dimensionale reelle Raum**. Die Vektorraumoperationen sind in diesem Fall sehr einfach zu beschreiben.

Definition

Ein Vektor

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^n$$

heißt n–**dimensionaler reeller Vektor**, die Größe

$$|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{v_1^2 + \cdots v_n^2}$$

heißt **Länge** des Vektors $\overrightarrow{v}$.

linear unabhängig

Definition

Vektoren $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_m} \in \mathbb{R}^n$ heißen **linear abhängig**, wenn es reelle Zahlen $r_1, r_2, \ldots, r_m$ gibt, von denen mindestens eine von Null verschieden ist, mit

$$r_1 \cdot \overrightarrow{v_1} + r_2 \cdot \overrightarrow{v_2} + \cdots + r_m \cdot \overrightarrow{v_m} = \overrightarrow{0}$$

Andernfalls heißen sie **linear unabhängig**.

linear unabhängig

Definition

Vektoren $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_m} \in \mathbb{R}^n$ heißen **linear abhängig**, wenn es reelle Zahlen $r_1, r_2, \ldots, r_m$ gibt, von denen mindestens eine von Null verschieden ist, mit

$$r_1 \cdot \overrightarrow{v_1} + r_2 \cdot \overrightarrow{v_2} + \cdots + r_m \cdot \overrightarrow{v_m} = \overrightarrow{0}$$

Andernfalls heißen sie **linear unabhängig**.

Bemerkung

Die Bedingung für lineare Unabhängigkeit kann auch so formuliert werden:

linear unabhängig

Definition

Vektoren $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_m} \in \mathbb{R}^n$ heißen **linear abhängig**, wenn es reelle Zahlen $r_1, r_2, \ldots, r_m$ gibt, von denen mindestens eine von Null verschieden ist, mit

$$r_1 \cdot \overrightarrow{v_1} + r_2 \cdot \overrightarrow{v_2} + \cdots + r_m \cdot \overrightarrow{v_m} = \overrightarrow{0}$$

Andernfalls heißen sie **linear unabhängig**.

Bemerkung

Die Bedingung für lineare Unabhängigkeit kann auch so formuliert werden:

Sind $r_1, r_2, \ldots, r_m$ reelle Zahlen mit

$$r_1 \cdot \overrightarrow{v_1} + r_2 \cdot \overrightarrow{v_2} + \cdots + r_m \cdot \overrightarrow{v_m} = \overrightarrow{0}$$

so muss schon gelten: $r_1 = r_2 = \cdots = r_m = 0$.

linear unabhängig

Definition

Vektoren $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_m} \in \mathbb{R}^n$ heißen **linear abhängig**, wenn es reelle Zahlen $r_1, r_2, \ldots, r_m$ gibt, von denen mindestens eine von Null verschieden ist, mit

$$r_1 \cdot \overrightarrow{v_1} + r_2 \cdot \overrightarrow{v_2} + \cdots + r_m \cdot \overrightarrow{v_m} = \overrightarrow{0}$$

Andernfalls heißen sie **linear unabhängig**.

Bemerkung

Die Bedingung für lineare Unabhängigkeit kann auch so formuliert werden: Sind $r_1, r_2, \ldots, r_m$ reelle Zahlen mit

$$r_1 \cdot \overrightarrow{v_1} + r_2 \cdot \overrightarrow{v_2} + \cdots + r_m \cdot \overrightarrow{v_m} = \overrightarrow{0}$$

so muss schon gelten: $r_1 = r_2 = \cdots = r_m = 0$.

linear unabhängig

Beispiel

Die Vektoren

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

sind linear abhängig.

linear unabhängig

Beispiel

Die Vektoren

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sind linear unabhängig

linear unabhängig

Übung

Untersuchen Sie, ob die Vektoren

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind.

linear unabhängig

Übung

Untersuchen Sie, ob die Vektoren

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind.

Lösung:

Die Vektoren sind linear abhängig, denn

$$\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} - 5 \cdot \overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{0}$$

linear unabhängig

Übung

Untersuchen Sie, ob die Vektoren

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind.

Lösung:

Die Vektoren sind linear abhängig, denn

$$\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} - 5 \cdot \overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{0}$$

linear unabhängig

Regel

Vektoren $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_m}$ sind schon dann linear abhängig, wenn eine der foglenden Bedingungen erfüllt ist.

- $\overrightarrow{v_k} = \overrightarrow{0}$ *für ein* k.

linear unabhängig

Regel

Vektoren $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_m}$ sind schon dann linear abhängig, wenn eine der foglenden Bedingungen erfüllt ist.

- $\overrightarrow{v_k} = \overrightarrow{0}$ *für ein* k.
- $\overrightarrow{v_k} = \overrightarrow{v_l}$ *für ein* $k \neq l$.

linear unabhängig

Regel

Vektoren $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_m}$ sind schon dann linear abhängig, wenn eine der foglenden Bedingungen erfüllt ist.

- $\overrightarrow{v_k} = \overrightarrow{0}$ *für ein* k.
- $\overrightarrow{v_k} = \overrightarrow{v_l}$ *für ein* $k \neq l$.

Das sind aber nur hinreichende Bedingung. In der Regel kann lineare Abhängigkeit nicht so einfach erkannt werden.

linear unabhängig

Regel

Vektoren $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_m}$ sind schon dann linear abhängig, wenn eine der foglenden Bedingungen erfüllt ist.

- $\overrightarrow{v_k} = \overrightarrow{0}$ *für ein* k.
- $\overrightarrow{v_k} = \overrightarrow{v_l}$ *für ein* $k \neq l$.

Das sind aber nur hinreichende Bedingung. In der Regel kann lineare Abhängigkeit nicht so einfach erkannt werden.

linear unabhängig

Bemerkung

Ein einzelner Vektor $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann linear abhängig, wenn $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. Entsprechend ist er genau dann linear unabhängig, wenn $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$.

linear unabhängig

Bemerkung

Ein einzelner Vektor $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann linear abhängig, wenn $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. Entsprechend ist er genau dann linear unabhängig, wenn $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$.

Bemerkung

Zwei Vektoren $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{w}$ sind genau dann linear abhängig, wenn einer von beiden ein Vielfaches des anderen ist.

linear unabhängig

Bemerkung

Ein einzelner Vektor $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann linear abhängig, wenn $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. Entsprechend ist er genau dann linear unabhängig, wenn $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$.

Bemerkung

Zwei Vektoren $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{w}$ sind genau dann linear abhängig, wenn einer von beiden ein Vielfaches des anderen ist.

linear unabhängig

Beispiel

Die n–dimensionale Vektoren

$$\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \overrightarrow{e_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^n$ sind linear unabhängig.

Untervektorraum

Beispiel

Die Menge $V = \{\overrightarrow{0}\} \subseteq \mathbb{R}^4$ ist ein Untervektorraum.

Beispiel

Die Menge

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

ist ein Untervektorraum.

Untervektorraum

Beispiel

Die Menge $V = \{\overrightarrow{0}\} \subseteq \mathbb{R}^4$ ist ein Untervektorraum.

Beispiel

Die Menge

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

ist ein Untervektorraum.

Beispiel

Die Menge

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + y + z = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

ist ein Untervektorraum.

Untervektorraum

Beispiel

Die Menge $V = \{\overrightarrow{0}\} \subseteq \mathbb{R}^4$ ist ein Untervektorraum.

Beispiel

Die Menge

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

ist ein Untervektorraum.

Beispiel

Die Menge

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + y + z = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

ist ein Untervektorraum.

Untervektorraum

Übung

Überprüfen Sie, ob die Menge

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

ein Untervektorraum ist.

Untervektorraum

Übung

Überprüfen Sie, ob die Menge

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

ein Untervektorraum ist.

Lösung:

V ist kein Untervektroraum.

Untervektorraum

Übung

Überprüfen Sie, ob die Menge

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

ein Untervektorraum ist.

Lösung:

V ist kein Untervektroraum.

Untervektorraum

Betrachte eine Untervektorraum $V \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definition

Die Vektoren $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_m}$ heißen **Erzeugendensystem** von V, wenn gilt:

Untervektorraum

Betrachte eine Untervektorraum $V \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definition

Die Vektoren $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_m}$ heißen **Erzeugendensystem** von V, wenn gilt:

1. $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_m} \in V$.

Untervektorraum

Betrachte eine Untervektorraum $V \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definition

Die Vektoren $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_m}$ heißen **Erzeugendensystem** von V, wenn gilt:

1. $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_m} \in V$.
2. Zu jedem $\overrightarrow{w} \in V$ gibt es Skalare $r_1, r_2, \ldots, r_m$ mit

$$\overrightarrow{w} = r_1 \cdot \overrightarrow{v_1} + r_2 \cdot \overrightarrow{v_2} + \ldots + r_m \cdot \overrightarrow{v_m}$$

Wir sagen in diesem Fall auch, $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_m}$ erzeugen V.

Untervektorraum

Betrachte eine Untervektorraum $V \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definition

Die Vektoren $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_m}$ heißen **Erzeugendensystem** von V, wenn gilt:

1. $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_m} \in V$.
2. Zu jedem $\overrightarrow{w} \in V$ gibt es Skalare $r_1, r_2, \ldots, r_m$ mit

$$\overrightarrow{w} = r_1 \cdot \overrightarrow{v_1} + r_2 \cdot \overrightarrow{v_2} + \ldots + r_m \cdot \overrightarrow{v_m}$$

Wir sagen in diesem Fall auch, $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_m}$ erzeugen V.

Untervektorraum

Beispiel

Die Vektoren

$$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erzeugen $V = \mathbb{R}^3$

Untervektorraum

Beispiel

Die Vektoren

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, , \quad \vec{v_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erzeugen $V = \mathbb{R}^3$. Erzeugendensysteme sind also nicht eindeutig und können aus unterschiedlich vielen Vektoren bestehen.

Untervektorraum

Beispiel

Die Vektoren

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, , \quad \vec{v_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erzeugen $V = \mathbb{R}^3$. Erzeugendensysteme sind also nicht eindeutig und können aus unterschiedlich vielen Vektoren bestehen.

Untervektorraum

Beispiel

Die Untervektorraum

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + y + z = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

von $\mathbb{R}^3$ wird erzeugt von den Vektoren

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Untervektorraum

Übung

Untersuchen Sie, ob

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 2r + 3s \\ r - s \\ r + s \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

ein Untervektorraum ist und bestimmen Sie gegebenenfalls ein Erzeugendensystem von V.

Untervektorraum

Übung

Untersuchen Sie, ob

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 2r + 3s \\ r - s \\ r + s \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

ein Untervektorraum ist und bestimmen Sie gegebenenfalls ein Erzeugendensystem von V.

Lösung:

V ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ und wird erzeugt von

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Untervektorraum

Übung

Untersuchen Sie, ob

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 2r+3s \\ r-s \\ r+s \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

ein Untervektorraum ist und bestimmen Sie gegebenenfalls ein Erzeugendensystem von V.

Lösung:

V ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ und wird erzeugt von

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Untervektorraum

Für Vektoren $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_m} \in \mathbb{R}^n$ setze

$$U = \{\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n \mid \exists r_1, \ldots, r_m \in \mathbb{R} \text{ mit } \overrightarrow{v} = r_1 \cdot \overrightarrow{v_1} + \cdots + r_m \cdot \overrightarrow{v_m}\}$$

Satz

U ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$.

Untervektorraum

Für Vektoren $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_m} \in \mathbb{R}^n$ setze

$$U = \{\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n \mid \exists r_1, \ldots, r_m \in \mathbb{R} \text{ mit } \overrightarrow{v} = r_1 \cdot \overrightarrow{v_1} + \cdots + r_m \cdot \overrightarrow{v_m}\}$$

Satz

U ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$.

U heißt das **Erzeugnis** von $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_m}$ oder der von $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_m}$ **aufgespannte Unterraum** von $\mathbb{R}^n$

Untervektorraum

Für Vektoren $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_m} \in \mathbb{R}^n$ setze

$$U = \{\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n \mid \exists r_1, \ldots, r_m \in \mathbb{R} \text{ mit } \overrightarrow{v} = r_1 \cdot \overrightarrow{v_1} + \cdots + r_m \cdot \overrightarrow{v_m}\}$$

Satz

U ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$.

U heißt das **Erzeugnis** von $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_m}$ oder der von $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_m}$ **aufgespannte Unterraum** von $\mathbb{R}^n$

Basis eines Vektorraums

Wir betrachten wieder einen Untervektorraum $V \subseteq \mathbb{R}^n$

Definition

Die Vektoren $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_m} \in V$ heißen **Basis** von V, wenn sie ein Erzeugendensystem von V bilden, und wenn sie linear unabhängig sind.

Basis eines Vektorraums

Wir betrachten wieder einen Untervektorraum $V \subseteq \mathbb{R}^n$

Definition

Die Vektoren $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_m} \in V$ heißen **Basis** von V, wenn sie ein Erzeugendensystem von V bilden, und wenn sie linear unabhängig sind.

Beispiel

Die Vektoren

$$\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis von $V = \mathbb{R}^3$

Basis eines Vektorraums

Wir betrachten wieder einen Untervektorraum $V \subseteq \mathbb{R}^n$

Definition

Die Vektoren $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_m} \in V$ heißen **Basis** von V, wenn sie ein Erzeugendensystem von V bilden, und wenn sie linear unabhängig sind.

Beispiel

Die Vektoren

$$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis von $V = \mathbb{R}^3$

Basis eines Vektorraums

Beispiel

Wir betrachten den Untervektorraum

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 2r+3s \\ r-s \\ r+s \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

Dann bilden

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis von V.

Basis eines Vektorraums

Beispiel

Wir betrachten den Untervektorraum

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 2r+3s \\ r-s \\ r+s \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

Dann bilden

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis von V.

$$\vec{w_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w_3} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

erzeugen V, bilden aber keine Basis.

Basis eines Vektorraums

Beispiel

Wir betrachten den Untervektorraum

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 2r+3s \\ r-s \\ r+s \end{pmatrix} \mid r,s \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

Dann bilden

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis von V.

$$\overrightarrow{w_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{w_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{w_3} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

erzeugen V, bilden aber keine Basis.

Basis eines Vektorraums

Übung

Finden Sie eine Basis des Untervektorraums

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + y + z = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

Basis eines Vektorraums

Übung

Finden Sie eine Basis des Untervektorraums

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + y + z = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

Lösung:

Die Vektoren

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis von V.

Basis eines Vektorraums

Übung

Finden Sie eine Basis des Untervektorraums

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + y + z = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

Lösung:

Die Vektoren

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis von V.

Basis eines Vektorraums

Satz

Für einen Untervektorraume V von $\mathbb{R}^n$ gilt:

1. *Ist $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_m}\}$ ein Erzeugendensystem von V, so enthält $\{\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, ..., $\overrightarrow{v_m}\}$ eine Basis von V, d.h. es gibt $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_t \leq m$ so dass $\overrightarrow{v_{i_1}}, \overrightarrow{v_{i_2}}, \ldots, \overrightarrow{v_{i_t}}$ eine Basis von V ist.*

Basis eines Vektorraums

Satz

Für einen Untervektorraume V von $\mathbb{R}^n$ gilt:

1. *Ist $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_m}\}$ ein Erzeugendensystem von V, so enthält $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_m}\}$ eine Basis von V, d.h. es gibt $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_t \leq m$ so dass $\overrightarrow{v_{i_1}}, \overrightarrow{v_{i_2}}, \dots, \overrightarrow{v_{i_t}}$ eine Basis von V ist.*
2. *V hat eine Basis.*

Basis eines Vektorraums

Satz

Für einen Untervektorraume V von $\mathbb{R}^n$ gilt:

1. *Ist $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_m}\}$ ein Erzeugendensystem von V, so enthält $\{\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, ..., $\overrightarrow{v_m}\}$ eine Basis von V, d.h. es gibt $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_t \leq m$ so dass $\overrightarrow{v_{i_1}}, \overrightarrow{v_{i_2}}, \ldots, \overrightarrow{v_{i_t}}$ eine Basis von V ist.*
2. *V hat eine Basis.*
3. *Je zwei Basen von V sind gleich lang, dh. sind $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_m}\}$ und $\{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \ldots, \overrightarrow{w_t}\}$ Basen von V, so ist $m = t$.*

Basis eines Vektorraums

Satz

Für einen Untervektorraume V von $\mathbb{R}^n$ gilt:

1. *Ist $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_m}\}$ ein Erzeugendensystem von V, so enthält $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_m}\}$ eine Basis von V, d.h. es gibt $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_t \leq m$ so dass $\overrightarrow{v_{i_1}}, \overrightarrow{v_{i_2}}, \ldots, \overrightarrow{v_{i_t}}$ eine Basis von V ist.*
2. *V hat eine Basis.*
3. *Je zwei Basen von V sind gleich lang, dh. sind $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_m}\}$ und $\{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \ldots, \overrightarrow{w_t}\}$ Basen von V, so ist $m = t$.*

Basis eines Vektorraums

Definition

Die Länge einer Basis eines Untervektorraums V heißt die **Dimension** von V und wird mit $\dim(V)$ bezeichnet.

Beispiel

Der $\mathbb{R}^3$ hat die Dimension 3.

Basis eines Vektorraums

Definition

Die Länge einer Basis eines Untervektorraums V heißt die **Dimension** von V und wird mit $\dim(V)$ bezeichnet.

Beispiel

Der $\mathbb{R}^3$ hat die Dimension 3.

Beispiel

Der $\mathbb{R}^n$ hat die Dimension n.

Basis eines Vektorraums

Definition

Die Länge einer Basis eines Untervektorraums V heißt die **Dimension** von V und wird mit $\dim(V)$ bezeichnet.

Beispiel

Der $\mathbb{R}^3$ hat die Dimension 3.

Beispiel

Der $\mathbb{R}^n$ hat die Dimension n.

Basis eines Vektorraums

Beispiel

Der Untervektorraum

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 2r + 3s \\ r - s \\ r + s \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

hat die Dimension 2.

Beispiel

Der Untervektorraums

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + y + z = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

hat die Dimension 2.

Basis eines Vektorraums

Beispiel

Der Untervektorraum

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 2r + 3s \\ r - s \\ r + s \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

hat die Dimension 2.

Beispiel

Der Untervektorraums

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + y + z = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

hat die Dimension 2.