Übungen zur linearen Algebra - Logik

1. (Aufgabe der Mathematik-Olympiade, Landesrunde, 6. Klasse) Rubin, Sarah, Omar und Viola malen im Kunstunterricht eine Wand mit gelber Farbe an. Plötzlich wird der Farbeimer (von einem der vier) umgestoßen und die Farbe breitet sich im ganzen Kunstraum aus. Wer war es nun?

   - Rubin sagt: "Sarah hat die Farbe verschüttet. Ich war es nicht!"
   - Daraufhin sagt Sarah: "Omar hat es getan; Rubin war es wirklich nicht."
   - Omar meint: "Sarah war es nicht; ich habe die Farbe umgestoßen."
   - Viola sagt: "Omar war es nicht; Rubin hat die Farbe umgekippt."

   Bei jedem Schüler ist eine der Aussagen wahr und eine falsch. Wer war es denn nun?

2. Alle Spielmarken eines Spiels haben auf der einen Seite einen Buchstaben, auf der anderen Seite eine Ziffer. „Wenn auf der einen Seite ein Konsonant ist, dann steht auf der anderen Seite eine gerade Ziffer ".
   E L 4 3
   Welche der vier Spielmarken muss man umdrehen, um die oben stehende Regel zu überprüfen? Was muss dann auf der anderen Seite stehen? Weshalb muss man die anderen Spielmarken nicht umdrehen?

3. Beweisen Sie die Distributivgesetze durch erstellen einer Wahrheitstafel :

   - $(\alpha \land \beta) \lor \gamma \iff (\alpha \lor \gamma) \land (\beta \lor \gamma)$.
   - $(\alpha \lor \beta) \land \gamma \iff (\alpha \land \gamma) \lor (\beta \land \gamma)$.

4. Sei M die Menge der Mathematikstudenten in diesem Kurs. Wir definieren die Aussagen :

   - $L(x)$: der Student x liest während der Vorlesung e-mails
   - $K(x)$: der Student x kann sich gut konzentrieren
   - $Z(x, y)$: die Studenten x und y können gut zusammen arbeiten

   Die folgenden Aussagen sollen

   (a) mit Quantoren dargestellt werden
   (b) die Quantorenaussagen negiert werden
   (c) wieder umgangssprachlich formuliert werden

   Die Aussagen lauten :

   - Alle Studenten lesen während der Vorlesung e-mails oder können sich nicht konzentrieren
   - Mindestens ein Student kann sich nicht konzentrieren, wenn er während der Vorlesung e-mails liest
   - Es gibt einen Studenten, der mit keinem anderen zusammen arbeiten kann

5. Es gilt $n^3 - n$ ist durch 3 teilbar für natürliches n.

   (a) Beweisen Sie dies direkt durch Fallunterscheidung

   (b) Beweisen Sie dies durch vollständige Induktion