DHBW Mannheim
Informatik

Mannheim, 19.10.2022
Mathematik II/1

Lösungen zu Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y+3xy+xy^2}{x^2+2y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

auf Stetigkeit im Punkt $(0,0)$.

Lösung:
$a_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, die gegen $(0,0)$ konvergiert. Hierfür gilt

$$\begin{aligned} f(a_n) &= \frac{\frac{1}{n^3} + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2}} \\ &= \frac{\frac{2+3n}{n^3}}{\frac{3}{n^2}} \\ &= \frac{2+3n}{3n} \end{aligned}$$

und damit gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 1 \neq 0 = f(0,0)$$

also ist f nicht stetig.

Aufgabe 2. Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^4-4y^3+6y^2-4y+1-x^4}{x^2+(y-1)^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,1) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,1) \end{cases}$$

auf Stetigkeit im Punkt $(0,1)$.

Lösung: Siehe Lösungsblatt 2 Für $(x,y) \neq (0,0)$ können wir $f(x,y)$ auch wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{y^4-4y^3+6y^2-4y+1-x^4}{x^2+(y-1)^2} &= \frac{(y-1)^4-x^4}{(y-1)^2+x^2} \\ &= \frac{\big((x-1)^2+y^2\big)\cdot\big((y-1)^2-x^2\big)}{(y-1)^2+x^2} \\ &= (y-1)^2 - x^2 \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck $(y-1)^2 - x^2$ konvergiert offensichtlich (nach unseren Regeln aus der Vorlesung) gegen 0, wenn $(x,y) \to (0,1)$. Damit ist f stetig in $(0,1)$.

Aufgabe 3. Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{y^3x^3+y^3z^3+x^3z^6}{x^2+y^6+z^6} & \text{für } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

auf Stetigkeit im Punkt $(0,0,0)$.

Lösung:
Wir betrachten hier die Testfolge $a_n = \left(0,\, \frac{1}{n},\, \frac{1}{n}\right)$ $(n > 0)$. Offensichtlich gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = (0,0,0)$$

Einsetzen von a_n in f ergibt

$$f(a_n) = \frac{\frac{1}{n^6}}{\frac{2}{n^6}} = \frac{1}{2}$$

und damit ist $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0,0)$. Also ist f nicht stetig in $(0,0,0)$.

Aufgabe 4. Wir betrachten zwei stetige Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$h(x,y) = \min\{f(x,y), g(x,y)\}$$

stetig ist.

Lösung:
Wir zeigen zunächst, dass für zwei reelle Zahlen a, b stets gilt

$$\min\{a,b\} = \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2}$$

Ist nämlich $a \geq b$, so gilt

$$\frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2} = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} = b = \min\{a,b\}$$

und ist $a < b$, so gilt

$$\frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2} = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} = a = \min\{a,b\}$$

Auf unsere Situation angewendet ergibt das

$$h(x,y) = \frac{f(x,y)+g(x,y)}{2} + \frac{|f(x,y)-g(x,y)|}{2}$$

Nach der Summenregel sind $f+g$ und $f-g$ stetig. Da die Funktion $\text{abs} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\text{abs}(t) = |t|$ stetig ist, ist nach der Kompositionsregel auch $|f-g|$ stetig, und nochmalige Anwendung der Summen- (bzw. Differenzen-)regel liefert die Stetigkeit von h.

Aufgabe 5. Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 \cdot y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

auf Stetigkeit im Punkt $(0,0)$.

Lösung:
Die Funktion kann offensichtlich nicht (durch Kürzen) vereinfacht werden. Die Standardtestfolgen

$$a_l = \left(\frac{1}{l}, 0\right), \quad b_l = \left(0, \frac{1}{l}\right), \quad c_l = \left(\frac{1}{l}, \frac{1}{l}\right), \quad d_l = \left(\frac{1}{l}, -\frac{1}{l}\right)$$

liefern

$$\begin{aligned} f(a_l) &= \frac{0}{\frac{1}{l^2}} &= 0 &\longrightarrow 0 \\ f(b_l) &= \frac{0}{\frac{1}{l^2}} &= 0 &\longrightarrow 0 \\ f(c_l) &= \frac{\frac{1}{l^4}}{\frac{1}{l^2}+\frac{1}{l^2}} &= \frac{1}{2l^2} &\longrightarrow 0 \\ f(d_l) &= \frac{\frac{1}{l^4}}{\frac{1}{l^2}+\frac{1}{l^2}} &= \frac{1}{2l^2} &\longrightarrow 0 \end{aligned}$$

(und ein ähnliches Ergebnis erhalten wir, wenn wir die Vorzeichen variieren). Die Testfolgen sprechen also eher für die Stetigkeit, reichen aber natürlich nicht aus, um die Stetigkeit zu beweisen. Bei den Testfolgen zeigt sich aber, dass in allen Fällen der Zähler schneller gegen 0 geht als der Nenner. Das können wir auch allgemein herleiten:
Um zu zeigen, dass f stetig in $(0,0)$ ist, ist zu zeigen, dass

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \cdot y^2}{x^2+y^2} = 0$$

Zur Untersuchung dieses Ausdrucks schreiben wir, falls $x \neq 0$:

$$\left|\frac{x^2 \cdot y^2}{x^2+y^2} - 0\right| \leq \left|\frac{x^2 \cdot y^2}{x^2}\right| = |y^2|$$

Ist $x = 0$, so gilt

$$\left|\frac{x^2 \cdot y^2}{x^2+y^2} - 0\right| = 0 \leq |y^2|$$

so dass wir also stets $|\frac{x^2 \cdot y^2}{x^2+y^2} - 0| \leq |y^2|$ haben. Nun gilt aber offensichtlich

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |y^2| = 0$$

und daher auch

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{x^2 \cdot y^2}{x^2+y^2} - 0\right| = 0$$

und daraus folgt, dass f im Punkt $(0,0)$ stetig ist.
Natürlich kann das auch mit dem Folgenkriterium gezeigt werden.

Aufgabe 6. Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{x-y} \cdot \cos(y-x) & \text{für } (x,y) \text{ mit } x \geq y \\ \ln(e + (x-y)^2) + x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 & \text{für } (x,y) \text{ mit } x < y \end{cases}$$

auf Stetigkeit.

Lösung:
Die Funktion f setzt sich zusammen aus den beiden Funktionen

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit $g(x, y) = e^{x-y} \cdot \cos(y - x)$ und $h(x, y) = \ln(e + (x - y)^2) + x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$. Beide Funktionen sind offensichtlich auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert und dort (nach den Regeln aus der Vorlesung) auch stetig. Damit ist f sicherlich außerhalb der „Klebelinie“ $x = y$, also für $x > y$ und für $x < y$ stetig. Um zu zeigen, dass sie auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig ist, reicht es daher (wieder nach Vorlesung) zu zeigen, dass $g(x, y) = h(x, y)$ für alle (x, y) mit $x = y$. Dazu beachte, dass $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = (x - y)^3$. Damit gilt für alle (x, y) mit $x = y$, also mit $x - y = 0$:

$$g(x, y) = e^{x-y} \cdot \cos(x - y) = e^0 \cdot \cos(0) = 1$$

und

$$h(x, y) = \ln(e + (x - y)^2) + (x - y)^3 = \ln(e) + 0 = 1$$

und damit ist f auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig.