Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre[1].

Von

David Hilbert in Göttingen.

Wenn wir die beiden Quellen unserer Erkenntnis, die Erfahrung und das reine Denken, im mathematischen Bereiche untersuchen, so treffen wir eine Reihe von Gesichtspunkten an, die vielleicht auch von philosophischem Interesse sind. Und zwar weisen diese Gesichtspunkte sämtlich auf Gemeinsames dieser beiden an sich so verschieden gearteten Erkenntnisquellen hin. Z. B. beobachten wir die Einheit des Stoffes in der Materie; andererseits tritt doch gewiß in unserem Denken die Einheit der Grundlagen als eine Forderung auf, die wir zu erfüllen suchen und vielmals auch erreichen. Die Einheit der Naturgesetze, die wir oft in so überraschender Weise antreffen, kann als Beispiel für beide Erkenntnisquellen gelten. Aber noch auffallender als dieser Gesichtspunkt der Einheit ist eine Erscheinung, die wir die prästabilierte Harmonie nennen und die einen Zusammenhang zwischen Natur und Denken deutlich bezeugt. Das großartigste und wunderbarste Beispiel für die prästabilierte Harmonie ist die berühmte Einsteinsche Relativitätstheorie. Hier werden allein durch die allgemeine Forderung der Invarianz die recht komplizierten Differentialgleichungen für die Gravitationspotentiale eindeutig aufgestellt; und diese Aufstellung wäre unmöglich gewesen ohne die tiefgehenden und schwierigen mathematischen Untersuchungen von Riemann, die lange vorher da waren. Es ist sogar ein in der mathematischen Analysis vereinzelter Fall, daß ein so kompliziertes spezielles Formelsystem mit numerischen Koeffizienten aus einem allgemeinen Gedanken entspringt. Auch meine nachher hier zu erörternde Beweistheorie ist ein Beispiel für die prästabilierte Harmonie. Denn sie bedient sich des sogenannten Logikkalküls, der seinerseits vorher und zu ganz anderen Zwecken, nämlich lediglich zur Abkürzung und Mitteilung von Aussagen, ersonnen war.

Indes die aufmerksame Betrachtung führt uns dazu, daß außer Erfahrung und Denken noch eine dritte Erkenntnisquelle da ist. Wenn wir

[1]) Vortrag, gehalten im Dezember 1930 auf Einladung der Philosophischen Gesellschaft in Hamburg.

auch im einzelnen Kant heute nicht mehr zustimmen können, so behält doch der allgemeinste Grundgedanke der Kantschen Erkenntnistheorie seine Bedeutung: jene anschauliche Einstellung a priori festzustellen und damit die Bedingung der Möglichkeit jeder Erkenntnis zu untersuchen. Ich meine, daß dies im wesentlichen in meinen Untersuchungen über die Prinzipien der Mathematik geschehen ist. Das Apriori ist dabei nichts mehr und nichts weniger als eine Grundeinstellung, die ich auch als die finite Einstellung bezeichnen möchte: es ist uns eben schon im voraus etwas in der Vorstellung gegeben: gewisse, außer-logische konkrete Objekte, die anschaulich als unmittelbares Erlebnis vor allem Denken da sind. Soll das logische Schließen sicher sein, so müssen sich diese Objekte vollkommen in allen Teilen überblicken lassen und ihre Aufweisung, ihre Unterscheidung, ihr Aufeinanderfolgen oder Nebeneinandergereihtsein ist mit den Objekten zugleich unmittelbar anschaulich gegeben als etwas, das sich nicht noch auf etwas anderes reduzieren läßt oder einer Reduktion bedarf. Dies ist die Grundeinstellung, die ich für die Mathematik wie überhaupt zu allem wissenschaftlichen Denken, Verstehen und Mitteilen für erforderlich halte, und ohne die eine geistige Betätigung gar nicht möglich ist.

Damit glaube ich die dritte Erkenntnisquelle, die zu Erfahrung und Logik noch hinzutritt, erkannt und charakterisiert zu haben.

Die Einsichten a priori sind diejenigen anschaulichen sowie die logischen Einsichten, die im Rahmen jener finiten Einstellung gewonnen werden. Wir werden dabei im besonderen gewahr:

Es gibt Sätze, die Kant als a priori angesehen hat, und die wir der Erfahrung zuweisen. Z. B. die gesamten Grundtatsachen der Geometrie, sowie die elementaren Eigenschaften von Raum und Materie. Aber es gibt andererseits auch Sätze, die wohl meist für a priori gehalten worden sind, die aber nicht im Rahmen der finiten Einstellung gewonnen werden können, z. B. das Prinzip des Tertium non datur sowie überhaupt die sogenannten transfiniten Aussagen.

Die nächstliegende Anwendung und das erste Auftreten der transfiniten Aussagen findet in der Zahlenlehre statt, und damit kommen wir zu dem hauptsächlichen Gegenstande des heutigen Vortrages. Es ist schon an sich merkwürdig und philosophisch bedeutsam, daß die ersten und einfachsten Fragen über die Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ so tiefliegende Schwierigkeiten bieten. Diese Schwierigkeiten müssen überwunden werden; denn wie sollte sonst überhaupt Wissen möglich sein, wenn nicht einmal die Zahlenlehre sich begründen ließe und wenn da nicht volle Einigkeit und absolute Richtigkeit erzwungen werden könnte!

Es wäre viel zu weitschweifig und auch überflüssig, alle die mannigfaltigen und verschiedenen Irrwege anzuführen, die als solche heute erkannt worden sind: Man hat versucht, die Zahlen rein logisch zu definieren; andere nahmen die übliche Schlußweise der Zahlentheorie einfach als selbstverständlich an. Auf beiden Wegen gelangte man zu Einwendungen, die nicht widerlegt werden konnten. Ein Weg war noch nicht betreten worden, der dem Mathematiker gerade am nächsten lag. Bevor ich diesen Weg beschreibe, der tatsächlich ans Ziel führt, möchte ich einige Bemerkungen machen über die wichtigsten Daten aus der Vorgeschichte des Problems.

Im Jahre 1888 machte ich als junger Privatdozent von Königsberg aus eine Rundreise an die deutschen Universitäten. Auf meiner ersten Station, in Berlin, hörte ich in allen mathematischen Kreisen bei jung und alt von der damals eben erschienenen Arbeit Dedekinds „Was sind und was sollen die Zahlen?" sprechen — meist in gegnerischem Sinne. Die Abhandlung ist neben der Untersuchung von Frege der wichtigste erste tiefgreifende Versuch einer Begründung der elementaren Zahlenlehre. Etwa zu gleicher Zeit, also schon vor mehr als einem Menschenalter, hat Kronecker eine Auffassung klar ausgesprochen und durch zahlreiche Beispiele erläutert, die heute im wesentlichen mit unserer finiten Einstellung zusammenfällt.

Damals haben wir jungen Mathematiker, Privatdozenten und Studierende, den Sport getrieben, auf transfinitem Wege geführte Beweise mathematischer Sätze nach Kroneckers Muster ins Finite zu übertragen. Kronecker machte nur den Fehler, die transfinite Schlußweise für unzulässig zu erklären. Er erließ Verbote gegen die transfinite Schlußweise, insbesondere sollte man nach ihm nicht schließen dürfen, daß, wenn eine Aussage $\mathfrak{A}(n)$ nicht für jede ganze Zahl n zutrifft, es eine ganze Zahl n geben müsse, für die jene Aussage falsch ist. Damals lehnte die ganze Mathematik einmütig seine Verbote ab und ging über sie zur Tagesordnung über.

Wie verhält es sich nun tatsächlich mit dem Gebrauch der transfiniten Schlußweisen?

Die Zahlkörpertheorie z. B. ist ein feingegliedertes, himmelhoch errichtetes Gebäude, verbunden mit den weitest entwickelten Theorien der Analysis, das alle anderen Geistesprodukte der Menschheit an Schönheit und Vollkommenheit weit überragt, und in ihr wird auf Schritt und Tritt das Tertium non datur und überhaupt die transfinite Schlußweise der von Kronecker verbotenen Art angewandt. Alle die Geistesheroen vor Gauß und ebenso die nach Gauß, Hermite, Jacobi bis zu Poincaré, haben die transfinite Schlußweise in mannigfaltigster und kühnster Weise gebraucht, und niemals hat sich auch nur die geringste Unstimmigkeit gezeigt. Endlich, wenn wir erst an alle Anwendungen denken und uns klarmachen, was für eine Fülle von transfiniten Schlüssen der schwierigsten und mühsamsten Art z. B. in der Relativitätstheorie und Quantentheorie steckt, und wie sich doch die Natur genau nach diesen Ergebnissen richtet: der Fixsternstrahl, der

Merkur und die kompliziertesten Spektren hier auf Erden und in der Ferne von hunderttausenden Lichtjahren; sollten wir bei dieser Sachlage wegen der schönen Augen Kroneckers und einiger als Mathematiker verkleideter Philosophen aus Gründen, die noch dazu völlig willkürlich und gar nicht einmal präzise formulierbar sind, auch nur einen Augenblick an der Berechtigung der Anwendung des Tertium non datur zweifeln?

Es beruht ja überhaupt jede wissenschaftliche Erkenntnis auf einer vernünftigen Abschätzung der Wahrscheinlichkeit durch Heranziehung der Übereinstimmung und des gegenseitigen Verhaltens: Denken wir an die Theorien in der Physik oder Astronomie, z. B. den Aufbau der Sternenwelt, oder in der Biologie an die Vererbungsgesetze und den Entwicklungsgedanken, alles Ergebnisse, die wir heute als festgestellte sichere Wahrheiten ansehen. Es wäre ja der Tod aller Wissenschaft und die Unmöglichkeit irgendeines Fortschrittes, wenn wir nicht einmal solche Gesetze wie die der elementaren Arithmetik als Wahrheit gelten lassen wollten. Trotzdem gibt es auch heute noch Anhänger Kroneckers, die an die Statthaftigkeit des Tertium non datur nicht glauben: Es ist das wohl der krasseste Unglaube, den wir in der Geschichte der Menschheit antreffen.

Aber andererseits: Eine Wissenschaft wie die Mathematik, hat sich nicht auf Glauben zu stützen, so stark dieser auch sei, sondern die Pflicht einer restlosen Aufklärung. Da nun die Anwendbarkeit des Tertium non datur bei endlich vielen Aussagen eine Selbstverständlichkeit ist, so wendet sich unsere ganze Aufmerksamkeit sofort dem Begriff „unendlich" zu, und ich habe über das Unendliche eine ausführliche Untersuchung angestellt, kann aber hier nur das Fazit dieser Untersuchung mitteilen.

Die Physik lehrt, daß ein homogenes Kontinuum, welches die fortgesetzte Teilbarkeit zuließe und somit das Unendliche im Kleinen realisieren würde, in der Wirklichkeit nirgends angetroffen wird. Die unendliche Teilbarkeit eines Kontinuums ist nur eine in Gedanken vorhandene Operation, nur eine Idee, die durch unsere Beobachtungen der Natur und die Erfahrungen der Physik und Chemie widerlegt wird. Andererseits stellen sich in der Astronomie schwerwiegende Bedenken gegen das Vorhandensein des unendlichen Raumes, also der Unendlichkeit im Großen, ein. Auch all unser Handeln ist finit, und das Unendliche findet darin keinen Platz. Das Unendliche findet sich nirgends realisiert; es ist weder in der Natur vorhanden, noch als Grundlage in unserem verstandesmäßigen Denken zulässig. Die bedingungslose Anwendung des Tertium non datur und der Negation können wir aber nicht entbehren, da sonst der lückenlose und einheitliche Aufbau unserer Wissenschaft unmöglich wäre. Das Operieren mit dem Unendlichen muß also durch das Endliche gesichert werden, und das geschieht eben durch meine Beweistheorie.

Mit dieser Neubegründung der Mathematik verfolge ich ein bedeutsames Ziel: Ich möchte nämlich die Grundlagenfrage in der Mathematik als solche endgültig aus der Welt schaffen, indem ich jede mathematische Aussage zu einer konkret aufweisbaren und streng ableitbaren Formel mache und dadurch die mathematischen Begriffsbildungen und Schlüsse in eine solche Fassung bringe, daß sie unwiderleglich sind und doch ein Bild der gesamten Wissenschaft liefern.

Der Grundgedanke meiner Beweistheorie ist nun folgender:

Alles, was im bisherigen Sinne die Mathematik ausmacht, wird streng formalisiert, so daß die eigentliche Mathematik oder die Mathematik in engerem Sinne zu einem Bestande an Formeln wird. Diese unterscheiden sich von den gewöhnlichen Formeln der Mathematik nur dadurch, daß außer den gewöhnlichen Zeichen noch die logischen Zeichen, insbesondere die für „folgt" ($\rightarrow$) und für „nicht" ($\overline{}$), darin vorkommen. Gewisse Formeln, die als Fundament des formalen Gebäudes der Mathematik dienen, werden Axiome genannt. Ein Beweis ist eine Figur, die uns als solche anschaulich vorliegen muß; er besteht aus Schlüssen, wo jede der Prämissen entweder Axiom ist oder mit der Endformel eines Schlusses übereinstimmt, der vorher im Beweise vorkommt, bzw. durch Einsetzung aus einer solchen Endformel entsteht. An Stelle des inhaltlichen Schließens tritt in der Beweistheorie ein äußeres Handeln nach Regeln, nämlich der Gebrauch des Schlußschemas und der Einsetzung. Eine Formel soll beweisbar heißen, wenn sie entweder ein Axiom oder die Endformel eines Beweises ist.

Zu der eigentlichen so formalisierten Mathematik kommt eine gewissermaßen neue Mathematik, eine Metamathematik, die zur Sicherung jener notwendig ist, in der — im Gegensatz zu den rein formalen Schlußweisen der eigentlichen Mathematik — das inhaltliche Schließen zur Anwendung kommt, aber lediglich zum Nachweis der Widerspruchsfreiheit der Axiome.

Die Axiome und beweisbaren Sätze, d. h. die Formeln, die in diesem Wechselspiel entstehen, sind die Abbilder der Gedanken, die das übliche Verfahren der bisherigen Mathematik ausmachen.

Durch dieses Programm ist die Wahl der Axiome für unsere Beweistheorie schon vorgezeichnet. Was die Auswahl der Axiome betrifft, so unterscheiden wir analog wie in der Geometrie qualitativ einzelne getrennte Gruppen.

I. Axiome der Folge:

$$A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

(Zufügen einer Voraussetzung);

$$(A \rightarrow B) \rightarrow \{(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)\}$$

(Elimination einer Aussage);

$$\{A \rightarrow (A \rightarrow B)\} \rightarrow (A \rightarrow B).$$

II. Axiome über „und" (&) sowie „oder" ($\vee$).

III. Axiome der Negation:

$$\{A \rightarrow (B \,\&\, \overline{B})\} \rightarrow \overline{A}$$

(Satz vom Widerspruch);

$$\overline{\overline{A}} \rightarrow A$$

(Satz von der doppelten Verneinung).

Diese Axiome der Gruppen I, II, III sind keine anderen als die Axiome des Aussagenkalküls.

IV. Transfinite Axiome:

$$(x)\, A(x) \rightarrow A(b)$$

(Schluß vom Allgemeinen aufs Besondere, Aristotelisches Axiom);

Umkehrung durch das Schema:

$$\frac{\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}(a)}{\mathfrak{A} \rightarrow (x)\, \mathfrak{B}(x)};$$

$$A(a) \rightarrow (Ex)\, A(x)$$

Umkehrung wiederum durch Schema. Weitere Formeln sind ableitbar, z. B.

$$\overline{(x)}\, A(x) \rightleftarrows (Ex)\, \overline{A}(x)$$

(wenn ein Prädikat nicht für alle Argumente gilt, so gibt es ein Gegenbeispiel, und umgekehrt);

$$\overline{(Ex)}\, A(x) \rightleftarrows (x)\, \overline{A}(x)$$

(wenn es kein Beispiel für eine Aussage gibt, so ist die Aussage für alle Argumente falsch, und umgekehrt).

Die Axiome dieser Gruppe IV sind die des Prädikatenkalküls.

Dazu kommen die speziell mathematischen Axiome:

V. Axiome der Gleichheit:

$$a = a;$$

$$a = b \rightarrow (A(a) \rightarrow A(b))$$

und

VI. Axiome der Zahl:

$$a + 1 \neq 0;$$

sowie das Axiom der vollständigen Induktion und das Schema der Rekursion.

Der Beweis der Widerspruchsfreiheit ist zuletzt von Ackermann und v. Neumann so weit durchgeführt worden, daß in der elementaren Zahlenlehre die Widerspruchsfreiheit für die eben aufgezählten Axiome folgt und mithin für den Bereich der elementaren Zahlenlehre die transfiniten Schlußweisen, insbesondere die Schlußweise des Tertium non datur, als zulässig erkannt worden sind. Unsere wichtigste weitere Aufgabe besteht darin, folgendes zu zeigen (vgl. Math. Annalen **102**, S. 6):

1. Wenn eine Aussage als widerspruchsfrei erwiesen werden kann, so ist sie auch beweisbar; und ferner

2. Wenn für einen Satz $\mathfrak{S}$ die Widerspruchsfreiheit mit den Axiomen der Zahlentheorie nachgewiesen werden kann, so kann nicht auch für $\overline{\mathfrak{S}}$ die Widerspruchsfreiheit mit jenen Axiomen nachgewiesen werden.

Es ist mir nun gelungen, diese Sätze wenigstens für gewisse einfache Fälle zu beweisen. Dieser Fortschritt wird erreicht, indem ich zu den bereits zugelassenen Schlußregeln (Einsetzung und Schlußfigur) noch folgende ebenfalls finite neue Schlußregel hinzufüge:

Falls nachgewiesen ist, daß die Formel

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$$

allemal, wenn $\mathfrak{z}$ eine vorgelegte Ziffer ist, eine richtige numerische Formel wird, so darf die Formel

$$(x)\,\mathfrak{A}(x)$$

als Ausgangsformel angesetzt werden.

Es sei hier daran erinnert, daß die Aussage $(x)\,\mathfrak{A}(x)$ viel weiter reicht als die Formel $\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$, wo $\mathfrak{z}$ eine beliebig vorgelegte Ziffer ist. Denn im ersteren Falle darf in $\mathfrak{A}(x)$ für x nicht bloß eine Ziffer, sondern auch ein jeder in unserem Formalismus gebildete Ausdruck vom Zahlcharakter eingesetzt werden, und außerdem ist die Bildung der Negation nach dem Logikkalkül ausführbar.

Zunächst erkennen wir, daß das Axiomensystem auch bei Hinzunahme der neuen Regel widerspruchsfrei bleibt.

Es sei nämlich eine Beweisfigur vorgelegt, die in einen Widerspruch mündet.

Der bisherige Beweis der Widerspruchsfreiheit besteht nun darin, daß man nach einem bestimmten Verfahren alle Formeln des vorgelegten Beweises in numerische verwandelt; alsdann kommt es darauf an, festzustellen, daß alle Ausgangsformeln richtig sind. Nun werden bei unserem Verfahren auch aus denjenigen Formeln, die gemäß der neuen Regel hingeschrieben worden sind, numerische Formeln, und zwar wird aus $(x)\,\mathfrak{A}(x)$ eine Formel $\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$, wo $\mathfrak{z}$ eine bestimmte Ziffer ist. Diese Formel ist aber nach der Voraussetzung der neuen Regel ebenfalls richtig. Unser Verfahren führt also nach wie vor alle Ausgangsformeln der Beweisfigur in richtige Formeln über. Der Beweis der Widerspruchsfreiheit ist damit geführt.

Sei nun eine Formel $\mathfrak{S}$ der Gestalt

$$(x)\mathfrak{A}(x),$$

die außer x keine weiteren Variablen enthält, zu den Axiomen widerspruchsfrei. Dann ist $\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$ sicher richtig, sobald für $\mathfrak{z}$ eine Ziffer eingesetzt wird; denn sonst wäre $\overline{\mathfrak{A}}(\mathfrak{z})$ richtig und daher beweisbar und würde somit einen Widerspruch zu $(x)\mathfrak{A}(x)$ geben, entgegen unserer Voraussetzung.

Also ist nach der neuen Schlußregel unsere Formel $\mathfrak{S}$ bewiesen. Satz 1 gilt also für jede Aussage $\mathfrak{S}$ von der Gestalt $(x)\mathfrak{A}(x)$, die außer x keine weitere Variable enthält. Für eben diese Aussagen von der Art $\mathfrak{S}$ folgt aus dem eben bewiesenen Satz 1 auch die Gültigkeit von Satz 2.

Gehen wir nun von einer Aussage $\mathfrak{T}$ der Gestalt

$$\mathfrak{T}:(Ex)\mathfrak{A}(x)$$

aus, so ist offenbar die Negation dieser Aussage

$$\overline{\mathfrak{T}}:(x)\overline{\mathfrak{A}}(x)$$

von der vorhin betrachteten Gestalt $\mathfrak{S}$. Nach Satz 2 ist es daher nicht möglich, für jede der beiden Aussagen $\mathfrak{T}$ und $\overline{\mathfrak{T}}$ den Beweis der Widerspruchsfreiheit zu führen. Setzen wir also voraus, daß für $\mathfrak{T}$ der Beweis der Widerspruchsfreiheit geführt sei, so folgt, daß für $\overline{\mathfrak{T}}$ nicht auch der Beweis der Widerspruchsfreiheit geführt werden kann, und damit ist Satz 2 auch noch für jede Aussage von der Gestalt $\mathfrak{T}$ bewiesen. Freilich darf daraus noch nicht geschlossen werden, daß $\mathfrak{T}$ beweisbar ist. —

Gegen meine Beweistheorie sind verschiedenartige Einwendungen erhoben worden; sie sind sämtlich unberechtigt. Es sei hierzu folgendes bemerkt:

1. Der Beurteiler meiner Theorie möge genau die Stelle in meinem Beweis angeben, wo mein vermeintlicher Fehler liegen soll. Andernfalls lehne ich es ab, seinen Gedankengang zu prüfen.

2. Es wird meiner Theorie zum Vorwurf gemacht, daß die Sätze zwar widerspruchsfrei seien, aber damit noch nicht bewiesen wären. Freilich sind sie beweisbar, wie ich hier in einfachen Fällen gezeigt habe. Es stellt sich auch allgemein heraus, wie es von Anfang an meine Überzeugung war, daß die Erzielung der Widerspruchsfreiheit das Wesentliche in der Beweistheorie ist und die Frage der Beweisbarkeit bei eventueller sachgemäßer Ausdehnung der Festsetzungen unter Wahrung des finiten Charakters sich dann ebenfalls mit erledigt. Doch kann in einer Theorie nicht gleich verlangt werden, daß darin alle einschlägigen Fragen zur vollen Lösung kommen; es genügt, wenn der Weg dazu gezeigt wird.

3. Begriffe, wie z. B. „widerspruchsfrei“, hat der Beurteiler meiner Theorie so zu verstehen, wie ich sie gebrauche, nicht wie andere Autoren

sie sich definiert denken. Meine Deutung ist deshalb hier die maßgebende, weil sie so für meine Theorie allein in Betracht kommt.

4. Die Einwendungen gegen meine Theorie beziehen sich mitunter auf nebensächliche und für den Erfolg völlig gleichgültige Dinge, wie z. B. wenn sie sich gegen die Bezeichnungsweise „ideal“ richten, die ich gebrauche, und allerdings trotz der gegnerischen Erwägungen für äußerst zutreffend und das Verständnis fördernd halte. Auch sonst werden einseitige Vorurteile und Schlagworte gerne ins Feld geführt. Über den Vorwurf des Formalismus habe ich mich in früheren Abhandlungen ausgesprochen. Die Formel ist ein notwendiges Hilfsmittel der logischen Untersuchung. Freilich erfordert ihr Gebrauch präzise Gedankenarbeit und macht leeres Geschwätz unmöglich.

5. Es gibt bisher keine andere Theorie, ja es ist meiner Meinung nach gar keine andere Theorie mit gleichem Erfolge denkbar, denn meine Beweistheorie tut nichts anderes als die intime Tätigkeit unseres Verstandes nachzubilden und ein Protokoll über die Regeln aufzunehmen, nach denen unser Denken tatsächlich verfährt. Das Denken geschieht eben parallel dem Sprechen und Schreiben: durch Bildung und Aneinanderreihung von Sätzen. Und zur Begründung brauche ich weder den lieben Gott wie Kronecker, noch die Annahme einer besonderen auf das Prinzip der vollständigen Induktion abgestimmten Fähigkeit unseres Verstandes wie Poincaré, noch die Urintuition wie Brouwer, endlich auch nicht wie Russell und Whitehead das Axiom der Unendlichkeit und Reduzierbarkeit, die ja wirkliche inhaltliche und durch Beweise der Widerspruchsfreiheit nicht kompensierbare Voraussetzungen sind, von denen die letztere nicht einmal plausibel ist.

In einem neueren philosophischen Vortrage finde ich den Satz:

„Das Nichts ist die schlechthinnige Verneinung der Allheit des Seienden.“

Dieser Satz ist deshalb lehrreich, weil er trotz seiner Kürze alle hauptsächlichen Verstöße gegen die in meiner Beweistheorie aufgestellten Grundsätze illustriert. Begriffe wie „Allheit des Seienden“ enthalten einen Widerspruch in sich und gefährden schon allein den Sinn einer jeden Behauptung. Aber hiervon abgesehen wird nun auf den problematischen Begriff Allheit des Seienden die Negation angewendet. Es ist gerade eine der wichtigsten Aufgaben der Beweistheorie, Sinn und Zulässigkeit der Negation klarzustellen: die Negation ist ein formaler Prozeß, durch den aus einer Aussage $\mathfrak{S}$ eine andere hervorgeht, die mit $\mathfrak{S}$ durch die vorhin genannten Axiome der Negation (also wesentlich principium contradictionis und tertium non datur) verbunden ist. Der Prozeß der Negation ist ein notwendiges theoretisches Forschungsmittel; seine unbedingte Anwendung ermöglicht erst die Vollständigkeit und Abgeschlossenheit der Logik. Aber im allgemeinen ist die durch Negation entstehende Aussage eine ideale, und es hieße Natur und Wesen des Denkens verkennen, wenn man diese ideale Aussage selbst an sich als real nehmen wollte. —

Ich glaube, das, was ich wollte und versprach, durch die Beweistheorie vollständig erreicht zu haben: Die mathematische Grundlagenfrage als solche ist dadurch, wie ich glaube, endgültig aus der Welt geschafft.

Den Philosophen wird es schon interessieren, daß es eine Wissenschaft wie die Mathematik überhaupt gibt. Für uns Mathematiker ist es die Aufgabe, sie wie ein Heiligtum zu hüten, damit einst *alles* menschliche Wissen überhaupt der gleichen Präzision und Klarheit teilhaftig wird. Daß dies kommen muß und geschehen wird, ist meine feste Überzeugung.

(Eingegangen am 21. 12. 1930.)