Übungsblatt 5

Aufgabe 1

$\mathbb{F}_8$ mit $\alpha^3 = \alpha + 1$ $\rightsquigarrow$ $\alpha^4 = \alpha^2 + \alpha$, $\alpha^5 = \alpha^2 + \alpha + 1$, $\alpha^6 = \alpha^2 + 1$, $\alpha^7 = 1$

Lin. $[6,3]_8$-Code

$$(H|0) = \left(\begin{array}{cccccc|c} \alpha & \alpha^3 & \alpha^2 & \alpha & \alpha^3 & \alpha^2 & 0 \\ \alpha^2 & \alpha & \alpha & \alpha^2 & \alpha & \alpha & 0 \\ \alpha^3 & \alpha^4 & \alpha & \alpha^5 & \alpha & \alpha^3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{\mathrm{II} - \alpha \mathrm{I} \\ \mathrm{III} - \alpha^2 \mathrm{I}}]{\alpha^6 \mathrm{I}} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & \alpha^2 & \alpha & 1 & \alpha^2 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 1 & 0 & \alpha^2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha^2 & \alpha^2 & \alpha^6 & \alpha^6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\mathrm{III} - \alpha^5 \mathrm{II}]{\substack{\mathrm{I} - \mathrm{II} \\ \alpha^5 \mathrm{II}}} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & \alpha^3 & 1 & 0 & \alpha^3 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha^5 & 0 & 1 & \alpha^5 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^3 & \alpha^2 & \alpha^2 & \alpha & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\mathrm{III} \cdot \alpha^4]{\substack{\mathrm{I} - \mathrm{III} \\ \mathrm{II} - \alpha^2 \mathrm{III}}} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & \alpha^3 & \alpha^2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha^4 & \alpha^5 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha^6 & \alpha^6 & \alpha^5 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow x_4, x_5, x_6 \text{ frei}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{G = \begin{pmatrix} \alpha+1 & \alpha^2+\alpha & \alpha^2+1 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha^2 & \alpha^2+\alpha+1 & \alpha^2+1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^2+\alpha+1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}}$$

$\rightarrow$ ges.: $d(C)$ $\rightsquigarrow$ Singleton-Schranke: $d \leq n+1-k$, $d \leq 7-3$, $\underline{d \leq 4}$

$\rightsquigarrow$ keine Nullspalte in der PPM

$\rightsquigarrow$ keine Spalten sind Vielfache von einander

viel zu ausführlich: alle Kombis ausprobieren

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} \alpha & \alpha^3 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & \alpha & \alpha \\ \alpha^3 & \alpha^4 & \alpha \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\mathrm{II} - \alpha \mathrm{I} \\ \mathrm{III} - \alpha^2 \mathrm{I}}]{\alpha^6 \mathrm{I}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 0 & \alpha^2 & 1 \\ 0 & \alpha^3 & \alpha^2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha^5 \\ 0 & 1 & \alpha^6 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Spalten 1–3 sind lin. unabhängig

$$\left(\begin{array}{cc|c} \alpha & \alpha^3 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & \alpha & \alpha \\ \alpha^5 & \alpha & \alpha^3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\mathrm{II} - \alpha \mathrm{I} \\ \mathrm{III} - \alpha^4 \mathrm{I}}]{\alpha^6 \mathrm{I}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 0 & \alpha^2 & 1 \\ 0 & \alpha^3 & \alpha^4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha^6 \\ 0 & 1 & \alpha \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Spalten 4–6 sind lin. unabhängig

$$\left(\begin{array}{cc|c} \alpha & \alpha^3 & \alpha \\ \alpha^2 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha^3 & \alpha^4 & \alpha^5 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\mathrm{II} - \alpha \mathrm{I} \\ \mathrm{III} - \alpha^2 \mathrm{I}}]{\mathrm{I} \cdot \alpha^6} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \alpha^2 & 1 \\ 0 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha^3 \end{array}\right) \Rightarrow \text{Spalten } 1,2,4 \text{ sind lin. unabhängig}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \alpha & \alpha^3 & \alpha^3 \\ \alpha^2 & \alpha & \alpha \\ \alpha^3 & \alpha^4 & \alpha \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}-\alpha^2\text{I}]{\cdot\alpha^6,\ \text{II}-\alpha\text{I}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \alpha^2 & \alpha^2 \\ 0 & \alpha^2 & \alpha^2 \\ 0 & 1 & \alpha^6 \end{array}\right) \Rightarrow x_2 = \alpha^6 \wedge x_2 = 1 \ \lightning$$

$\Rightarrow$ Spalten 1, 2, 5 sind lin. unabhängig

$$\left(\begin{array}{cc|c} \alpha & \alpha^3 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & \alpha & \alpha \\ \alpha^3 & \alpha^4 & \alpha^3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 0 & \alpha^2 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha^6 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha^5 \\ 0 & 1 & \alpha^6 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Spalten 1, 2, 6 sind lin. unabhängig

$$\left(\begin{array}{cc|c} \alpha & \alpha^2 & \alpha \\ \alpha^2 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha^3 & \alpha & \alpha^5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & \alpha^4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Spalten 1, 3, 4 sind lin. unabhängig

$$\left(\begin{array}{cc|c} \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \\ \alpha^2 & \alpha & \alpha \\ \alpha^3 & \alpha & \alpha \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 0 & 1 & \alpha^2 \\ 0 & \alpha^2 & \alpha^6 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 0 & 1 & \alpha^2 \\ 0 & 1 & \alpha^4 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Spalten 1, 3, 5 sind lin. unabhängig

$$\left(\begin{array}{cc|c} \alpha & \alpha^2 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & \alpha & \alpha \\ \alpha^3 & \alpha & \alpha^3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \alpha & \alpha \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha^2 & \alpha^6 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \alpha & \alpha \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha^4 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Spalten 1, 3, 6 sind lin unabhängig.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \alpha & \alpha & \alpha^3 \\ \alpha^2 & \alpha^2 & \alpha \\ \alpha^3 & \alpha^5 & \alpha \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \alpha^2 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \\ 0 & \alpha^2 & \alpha^6 \end{array}\right) \Rightarrow \text{Spalten 1, 4, 5 sind lin. unabhängig}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \alpha & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha^2 & \alpha^2 & \alpha \\ \alpha^3 & \alpha^5 & \alpha^3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha^2 & \alpha^4 \end{array}\right) \Rightarrow \text{Spalten 1, 4, 6 sind lin. unabhängig}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \alpha & \alpha^3 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & \alpha & \alpha \\ \alpha^3 & \alpha & \alpha^3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 0 & \alpha^2 & 1 \\ 0 & \alpha^6 & \alpha^6 \end{array}\right) \Rightarrow \text{Spalten 1, 5, 6 sind lin. unabhängig}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \alpha^3 & \alpha^2 & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha^4 & \alpha & \alpha^5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \alpha^6 & \alpha^5 \\ 0 & \alpha^3 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha^3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \alpha^6 & \alpha^5 \\ 0 & 1 & \alpha^4 \\ 0 & 1 & \alpha^3 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Spalten 2, 3, 4 sind lin. unabhängig

$$\left(\begin{array}{cc|c} \alpha^3 & \alpha^2 & \alpha^3 \\ \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha^4 & \alpha & \alpha \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \alpha^6 & 1 \\ 0 & \alpha^3 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha^2 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Spalten 2, 3, 5 sind lin. unabhängig.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \alpha^3 & \alpha^2 & \alpha^2 \\ \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha^4 & \alpha & \alpha^3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \alpha^6 & \alpha^6 \\ 0 & \alpha^3 & \alpha^3 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \text{Spalten 2, 3, 6 sind lin. unabhängig}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \alpha^2 & \alpha & \alpha^3 \\ \alpha & \alpha^2 & \alpha \\ \alpha & \alpha^5 & \alpha \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \alpha^6 & \alpha \\ 0 & \alpha^6 & \alpha^4 \\ 0 & \alpha^4 & \alpha^4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \alpha^6 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha^5 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Spalten 3, 4, 5 sind lin. unabhängig

$$\left(\begin{array}{cc|c} \alpha^2 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha & \alpha^2 & \alpha \\ \alpha & \alpha^5 & \alpha^3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \alpha^6 & \alpha \\ 0 & \alpha^6 & 0 \\ 0 & \alpha^4 & 1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Spalten 3, 4, 6 sind lin. unabhängig

$$\left(\begin{array}{cc|c} \alpha^2 & \alpha^3 & \alpha^2 \\ \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha^3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha^4 & 0 \\ 0 & \alpha^4 & 1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Spalten 3, 5, 6 sind lin. unabhängig

$$\left(\begin{array}{cc|c} \alpha^3 & \alpha & \alpha^3 \\ \alpha & \alpha^2 & \alpha \\ \alpha^4 & \alpha^5 & \alpha \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \alpha^5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha^3 & \alpha^4 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Spalten 2, 4, 5 sind lin. unabhängig

$$\left(\begin{array}{cc|c} \alpha^3 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha & \alpha^2 & \alpha \\ \alpha^4 & \alpha^5 & \alpha^3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \alpha^5 & \alpha^6 \\ 0 & 1 & \alpha^3 \\ 0 & \alpha^3 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Spalten 2, 4, 6 sind lin. unabhängig

$$\left(\begin{array}{cc|c} \alpha^3 & \alpha^3 & \alpha^2 \\ \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha^4 & \alpha & \alpha^3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \alpha^6 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha^2 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Spalten 2, 5, 6 sind lin. unabhängig.

$\Longrightarrow$ keine 3 Spalten lin. abhängig $\Rightarrow$ $\underline{\underline{d(C) = 4}}$

Aufgabe 2

lin. $[6,4]_{13}$-Code mit $G = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 & 7 & 11 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 7 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

$\mathbb{F}_{13}$: $\frac{1}{2} = 7$; $\frac{1}{3} = 9$; $\frac{1}{4} = 10$; $\frac{1}{5} = 8$;

$\frac{1}{6} = 11$; $\frac{1}{7} = 2$, $\frac{1}{8} = 5$; $\frac{1}{9} = 3$; $\frac{1}{10} = 4$

$\frac{1}{11} = 6$; $\frac{1}{12} = 12$

$$(G|0) = \left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & 4 & 6 & 2 & 4 & 6 & 0 \\ 4 & 8 & 12 & 7 & 11 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 0 \\ 3 & 7 & 7 & 3 & 8 & 7 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \frac{1}{2}\mathrm{I} \\ \frac{1}{4}\mathrm{II} \\ \frac{1}{2}\mathrm{III} \\ \frac{1}{3}\mathrm{IV} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 7 & 0 \\ 1 & 8 & 2 & 9 & 3 & 10 & 0 \\ 1 & 11 & 11 & 1 & 7 & 11 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (\mathrm{II} - \mathrm{I}) \cdot \frac{1}{4} \\ \mathrm{III} - \mathrm{I} \\ \mathrm{IV} - \mathrm{I} \end{array} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 12 & 8 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 9 & 8 & 0 & 5 & 8 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \frac{1}{9} \cdot \mathrm{IV} \\ \frac{1}{6}\mathrm{III} \\ \mathrm{II} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 11 & 0 & 2 & 11 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 10 & 11 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{I} - 2\mathrm{II} \\ (\mathrm{III} - \mathrm{II}) \cdot \frac{1}{4} \end{array} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 7 & 1 & 11 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 11 & 0 & 2 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 12 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{I} - 7\mathrm{III} \\ \mathrm{II} - 11\mathrm{III} \\ \mathrm{III} - 9\mathrm{IV} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{I} - 3\mathrm{IV} \\ \mathrm{II} - 5\mathrm{IV} \end{array} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 12 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$\leadsto$ 2 freie Variablen

$\Rightarrow x_5 = 1, x_6 = 0$: $x_4 = 12, x_3 = 10, x_2 = 5, x_1 = 11$

$\Rightarrow x_5 = 0, x_6 = 1$: $x_4 = 12, x_3 = 12, x_2 = 0, x_1 = 1$

$$\Rightarrow \underline{\underline{H = \begin{pmatrix} 11 & 5 & 10 & 12 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 12 & 12 & 0 & 1 \end{pmatrix}}}$$

ges.: $d(C)$: $\leadsto$ keine Nullspalte in $H \Rightarrow d(C) \geq 2$

$\leadsto$ 2. und 5. Spalte sind lin. abhängig

$\Rightarrow \underline{\underline{d(C) = 2}}$

Notiz zur Aufgabe 1:

Durch die Singleton-Schranke war klar, dass $d(C) \leq 4$. Im Kopf ließ sich außerdem schnell überprüfen, dass weder 1 noch 2 Spalten lin. abhängig waren. Um sicher zugehen, dass auch keine 3 Spalten lin. abhängig waren, bin ich alle Kombinationen (insgesamt $\binom{6}{3} = 20$) durchgegangen. Für jede Kombination an Spaltenvektoren, habe ich das LGS $a\vec{v_1} + b\vec{v_2} = \vec{v_3}$ versucht zu lösen und da es für keine Kombination an Spaltenvektoren eine Lösung gab, war klar, dass es keine 3 lin. abhängigen Spaltenvektoren in H gab. Also galt $d(C) \geq 4$ und da auch $d(C) \leq 4$ galt, muss $d(C) = 4$ gelten.

Aufgabe 3

$G_1(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 1$ lin. $[7,4]_7$-Code im $\mathbb{F}_7$

Falls $G_1(x)$ Erzeugerpolynom ist, muss es ein Polynom $H(x)$ geben, sodass

$$G(x) \cdot H(x) = x^7 - 1 \quad | : G(x)$$

$$(x^7 - 1) : (x^3 + 3x^2 + 4x + 1) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 3x + 2$$

Rest: $5x^2 + 3x + 4$

$$
\begin{array}{l}
-(x^7 + 3x^6 + 4x^5 + x^4) \\
\quad 4x^6 + 3x^5 + 6x^4 + 6 \\
\quad -(4x^6 + 5x^5 + 2x^4 + 4x^3) \\
\qquad 5x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 6 \\
\qquad -(5x^5 + x^4 + 6x^3 + 5x^2) \\
\qquad\quad 3x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 6 \\
\qquad\quad -(3x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 3x) \\
\qquad\qquad 2x^3 + 4x^2 + 4x + 6 \\
\qquad\qquad -(2x^3 + 6x^2 + x + 2) \\
\qquad\qquad\quad 5x^2 + 3x + 4
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ Es gibt keinen natürlichen Teiler von $(x^7 - 1) : G_1(x)$, also gibt es so ein Paritätspolynom $H(x)$ nicht und damit ist $G_1(x)$ kein Erzeugerpolynoms eines lin. $[7,4]_7$-Codes.

$G_2(x) = x^3 + 4x^2 + 3x + 6$

$(x^7 - 1) : (x^3 + 4x^2 + 3x + 6) = x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 3x + 1$

Rest: 0

$$
\begin{aligned}
&-(x^7 + 4x^6 + 3x^5 + 6x^4) \\
&\quad 3x^6 + 4x^5 + x^4 + 6 \\
&\quad -(3x^6 + 5x^5 + 2x^4 + 4x^3) \\
&\qquad 6x^5 + 6x^4 + 3x^3 + 6 \\
&\qquad -(6x^5 + 3x^4 + 4x^3 + x^2) \\
&\qquad\quad 3x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 6 \\
&\qquad\quad -(3x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 4x) \\
&\qquad\qquad x^3 + 4x^2 + 3x + 6 \\
&\qquad\qquad -(x^3 + 4x^2 + 3x + 6) \\
&\qquad\qquad\qquad 0
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow H(x) := x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 3x + 1$

$\Rightarrow G_2(x)$ ist Erzeugerpolynom eines lin. $[7,4]_7$-Codes mit Paritätspolynom $H(x)$.

Aufgabe 4

$\mathbb{F}_8$ mit $\alpha^3 = \alpha + 1 \rightsquigarrow \alpha^4 = \alpha^2 + \alpha, \quad \alpha^5 = \alpha^2 + \alpha + 1, \quad \alpha^6 = \alpha^2 + 1$

$G_1(x) = x^4 + (\alpha^2+\alpha)x^3 + \alpha^2 x^2 + (\alpha^2+\alpha)x + 1$; lin. $[7,3]_8$-Code

$(x^7 - 1) : (x^4 + (\alpha^2+\alpha)x^3 + \alpha^2x^2 + (\alpha^2+\alpha)x + 1) = x^3 + \alpha^4x^2 + \alpha^4x + 1$

Rest: 0

$$
\begin{aligned}
&-(x^7 + \alpha^4x^6 + \alpha^2x^5 + \alpha^4x^4 + x^3) \\
&\quad \alpha^4x^6 + \alpha^2x^5 + \alpha^4x^4 + x^3 + 1 \\
&-(\alpha^4x^6 + \alpha x^5 + \alpha^6x^4 + \alpha x^3 + \alpha^4x^2) \\
&\qquad \alpha^4x^5 + \alpha^3x^4 + \alpha^3x^3 + \alpha^4x^2 + 1 \\
&\quad -(\alpha^4x^5 + \alpha x^4 + \alpha^6x^3 + \alpha x^2 + \alpha^4x) \\
&\qquad\quad x^4 + \alpha^4x^3 + \alpha^2x^2 + \alpha^4x + 1 \\
&\qquad -(x^4 + \alpha^4x^3 + \alpha^2x^2 + \alpha^4x + 1) \\
&\qquad\qquad\qquad 0
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow H_1(x) := x^3 + (\alpha^2+\alpha)x^2 + (\alpha^2+\alpha)x + 1$

$\Rightarrow G_1(x)$ ist Erzeugerpolynom eines lin. $[7,3]_7$-Codes mit Paritätspolynom $H_1(x)$.

$G_2(x) = x^4 + (\alpha^2+\alpha)x^2 + \alpha^2 x + 1 = x^4 + \alpha^4 x^2 + \alpha^2 x + 1$

$$
\begin{aligned}
&(x^7 - 1) : (x^4 + \alpha^4 x^2 + \alpha^2 x + 1) = x^3 + \alpha^4 x + \alpha^2 \qquad \text{Rest: } \alpha^3 x^3 + \alpha^6 \\
&-(x^7 + \alpha^4 x^5 + \alpha^2 x^4 + x^3) \\
&\quad \alpha^4 x^5 + \alpha^2 x^4 + x^3 + 1 \\
&-(\alpha^4 x^5 + \alpha x^3 + \alpha^6 x^2 + \alpha^4 x) \\
&\quad \alpha^2 x^4 + \alpha^3 x^3 + \alpha^6 x^2 + \alpha^4 x + 1 \\
&-(\alpha^2 x^4 + \alpha^6 x^2 + \alpha^4 x + \alpha^2) \\
&\quad \alpha^3 x^3 + \alpha^6
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ Es gibt keinen echten Teiler

$\Rightarrow$ $G_2(x)$ ist <u>kein</u> Erzeugerpolynom für ein lin. $[7,3]_8$-Code.