DHBW Mannheim
Informatik

Mannheim, 16.11.2022
Mathematik II/1

Lösungen Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = 6x^4 - 8x^3y + y^3$$

auf lokale Extrema.

Lösung:
Notwendiges Kriterium für ein Extremum ist $\operatorname{grad}(f)(x,y) = (0,0)$. Es ist

$$\operatorname{grad}(f)(x,y) = (24x^3 - 24x^2y,\ -8x^3 + 3y^2)$$

Wir haben also die beiden Gleichungen

$$\begin{array}{rcrcl} 24x^3 & - & 24x^2y & = & 0 \\ -8x^3 & + & 3y^2 & = & 0 \end{array}$$

zu betrachten. Die erste Gleichung schreibt sich als

$$24x^2 \cdot (x-y) = 0$$

und daraus erhalten wir $x = 0$ oder $y = x$. Damit erhalten wir:

a) Falls wir $x = 0$ in die zweite Gleichung einsetzen, so wird diese zu $3y^2 = 0$, also ergibt sich $y = 0$.

b) Falls wir $y = x$ in die zweite Gleichung einsetzen, so wird diese zu $3x^2 = 8x^3$ mit den beiden Lösungen $x = 0$ (und damit auch $y = 0$) und $x = \frac{3}{8}$ (und damit auch $y = \frac{3}{8}$).

Damit erhalten wir die beiden Kandidaten $P_1 = (0,0)$ und $P_2 = \left(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}\right)$.
Die Hessematrix der Funktion ist

$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 72x^2 - 48xy & -24x^2 \\ -24x^2 & 6y \end{pmatrix}$$

Für P_1 ist die Hessematrix die Nullmatrix, liefert also keine Entscheidung. Da aber schon die Funktion $h(y) = f(0,y) = y^3$ kein Extremum im Punkt 0 hat, kann f in P_1 sicherlich kein Extremum haben.
Für P_2 erhalten wir

$$\det(H(f)(P_2)) = -\frac{243}{64}$$

und damit hat f in P_2 kein lokales Extremum sondern einen Sattelpunkt.

Aufgabe 2. Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y, z) = xy + xz + yz - x^2 - 2y^2 - 3z^2$$

auf lokale Extrema und Sattelpunkte.

Lösung:
Als Kandidaten für lokale Extrema kommen nur Nullstellen des Gradienten von f in Frage.

$$\operatorname{grad}(f)(x, y) = (-2x + y + z,\ x - 4y + z,\ x + y - 6z)$$

Wir haben also die drei Gleichungen

$$\begin{array}{rcrcrcl} -2x & - & y & - & z & = & 0 \\ x & - & 4y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & - & 6z & = & 0 \end{array}$$

Hierbei handelt es sich um ein lineares Gleichungssystem dessen Koeffizientenmatrix Determinante -34 hat. Daher hat dieses System nur die triviale Lösung $x = y = z = 0$ und $P = (0, 0, 0)$ ist der einzige Kandidat für ein lokales Extremum. Zur weiteren Untersuchung betrachten wir die Hessematrix

$$H(f)(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

und die drei Teilmatrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

so gilt hierfür

$$\det(A_1) = -2 < 0, \quad \det(A_2) = 7 > 0, \quad \det(A_3) = -34 < 0$$

Damit hat die Hessematrix (nach dem Hurwitz–Kriterium) nur negative Eigenwerte und folglich hat f ein lokales Maximum im Punkt $P = (0,\ 0,\ 0)$.

Aufgabe 3. Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \ln(x^4 + y^4 - 8x^2 - 18y^2 + 123)$$

auf lokale Extrema.

Lösung:
Notwendiges Kriterium für ein Extremum oder einen Sattelpunkt ist $\operatorname{grad}(f)(x,y) = (0,0)$. Es ist

$$\operatorname{grad}(f)(x,y) = \left(\frac{4x^3 - 16x}{x^4 + y^4 - 8x^2 - 18y^2 + 123}, \frac{4y^3 - 36y}{x^4 + y^4 - 8x^2 - 18y^2 + 123}\right)$$

Da die Nenner nirgends verschwinden, haben wir das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} 4x^3 & - & 16x & = & 0 \\ 4y^3 & - & 36y & = & 0 \end{array}$$

zu betrachten. Die erste Gleichung liefert $x = 0$ oder $x^2 = 4$ (also $x = \pm 2$), und die zweite Gleichung ergibt $y = 0$ oder $y^2 = 9$ (also $y = \pm 3$). Damit erhalten wir insgesamt 9 Kandidaten

$$\begin{array}{lcllcllcl} P_1 & = & (-2,-3) & P_2 & = & (-2,0) & P_3 & = & (-2,3) \\ P_4 & = & (0,-3) & P_5 & = & (0,0) & P_6 & = & (0,3) \\ P_7 & = & (2,-3) & P_8 & = & (2,0) & P_9 & = & (2,3) \end{array}$$

Die Hessematrix von f hat die Gestalt

$$H(f)(x,y) = \frac{1}{n(x,y)^2} \cdot \begin{pmatrix} (12x^2 - 16) \cdot n(x,y) - (4x^3 - 16x)^2 & (4x^3 - 16x) \cdot (4y^3 - 36y) \\ (4x^3 - 16x) \cdot (4y^3 - 36y) & (12y^2 - 36) \cdot n(x,y) - (4y^3 - 36y)^2 \end{pmatrix}$$

wobei $n(x,y) = x^4 + y^4 - 8x^2 - 18y^2 + 123$.
Damit ergeben sich folgende Werte:

1. $\det(H(P_1)) = \frac{576}{169} > 0$, also hat f in P_1 ein lokales Extremum. Wegen $f_{x,x}(P_1) = \frac{16}{13}$ ist es ein lokales Minimum.

2. $\det(H(P_2)) = -\frac{1152}{11449} < 0$, also hat f in P_2 einen Sattelpunkt.

3. $\det(H(P_3)) = \frac{576}{169} > 0$, also hat f in P_3 ein lokales Extremum. Wegen $f_{x,x}(P_3) = \frac{16}{13}$ ist es ein lokales Minimum.

4. $\det(H(P_4)) = -\frac{32}{49} < 0$, also hat f in P_4 einen Sattelpunkt.

5. $\det(H(P_5)) = \frac{576}{15129}$, also hat f in P_5 ein lokales Extremum. Wegen $f_{x,x}(P_5) = -\frac{16}{123}$ ist es ein lokales Maximum.

6. $\det(H(P_6)) = -\frac{32}{49} < 0$, also hat f in P_6 einen Sattelpunkt.

7. $\det(H(P_7)) = \frac{576}{169}$, also hat f in P_7 ein lokales Extremum. Wegen $f_{x,x}(P_7) = \frac{16}{13}$ ist es ein lokales Minimum.

8. $\det(H(P_8)) = -\frac{1152}{11449}$, also hat f in P_8 einen Sattelpunkt.

9. $\det(H(P_9)) = \frac{576}{169}$, also hat f in P_9 ein lokales Extremum. Wegen $f_{x,x}(P_9) = \frac{16}{13}$ ist es ein lokales Minimum.

Aufgabe 4. a) Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = e^{x^2+y^2}$$

auf lokale Extrema und Sattelpunkte.

Lösung:

Notwendiges Kriterium für ein Extremum oder einen Sattelpunkt ist $\operatorname{grad}(f)(x,y) = (0,0)$. Es ist

$$\operatorname{grad}(f)(x,y) = (2x \cdot e^{x^2+y^2},\ 2y \cdot e^{x^2+y^2})$$

die beiden partiellen Ableitungen sind also offensichtlich nur im Punkt $P = (0,0)$ beide Null. Die Hessematrix von f hat die Gestalt

$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 \cdot e^{x^2+y^2} + 4x^2 \cdot e^{x^2+y^2} & 4xy \cdot e^{x^2+y^2} \\ 4xy \cdot e^{x^2+y^2} & 2 \cdot e^{x^2-y^2} - 4y^2 \cdot e^{x^2-y^2} \end{pmatrix}$$

und damit ist

$$H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

eine Matrix mit zwei positiven Eigenwerten (die Matrix liegt bereits in Diagonalform vor). Also hat f einen lokales Extremum, und zwar ein Minimum in $P = (0,0)$

b) Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = e^{x \cdot y}$$

auf lokale Extrema und Sattelpunkte.

Lösung:

Notwendiges Kriterium für ein Extremum oder einen Sattelpunkt ist $\operatorname{grad}(f)(x,y) = (0,0)$. Es ist

$$\operatorname{grad}(f)(x,y) = (y \cdot e^{x \cdot y},\ x \cdot e^{x \cdot y})$$

Die beiden partiellen Ableitungen sind also offensichtlich beide genau dann 0, wenn $x = 0$ und $y = 0$. Also haben wir als einzigen Kandidaten wieder den Punkt $P = (0,\ 0)$. Die Hessematrix von f hat die Gestalt

$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 \cdot e^{x \cdot y} & e^{x \cdot y} + xy \cdot e^{x \cdot y} \\ e^{x \cdot y} + xy \cdot e^{x \cdot y} & x^2 \cdot e^{x \cdot y} \end{pmatrix}$$

Im Punkt $P = (0,0)$ wird das also zu

$$H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir

$$\det(H(f)(0,0)) = -1 < 0$$

also hat f in $(0,0)$ einen Sattelpunkt und kein Extremum.

Aufgabe 5. Bestimmen Sie die Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = 6x^2 - 48xy - 4y^2$$

unter der Nebenbedingung $x^2 + 4y^2 = 16$.

Lösung:
Mit $g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4$ suchen wir die Extrema von $f(x,y)$ unter der Nebenbedingung, dass $g(x,y) = 0$. Es gilt

$$\operatorname{grad}(g)(x,y) = (2x,\ 8y)$$

und speziell ist $\operatorname{grad}(g)(x,y) \neq (0,\ 0)$ für alle (x,y) mit $x^2 + 4y^2 = 16$. Daher ist der Satz von Lagrange anwendbar, und Kandidaten für Extrema unter dieser Nebenbedingung sind alle Punkte (x,y) mit

$$\operatorname{grad}(f)(x,y) = l \cdot \operatorname{grad}(g)(x,y)$$

also Lösungen von

$$\begin{array}{rcrcl} 12x & - & 48y & = & l \cdot 2 \cdot x \\ -48x & - & 8y & = & l \cdot 8 \cdot y \end{array}$$

bzw.

$$\begin{array}{rcrcl} 6x & - & 24y & = & l \cdot x \\ -6x & - & y & = & l \cdot y \end{array}$$

Das ist ein Eigenwertproblem: Jedes l, welches eine (nicht–triviale) Gleichung dieser Art löst, ist ein Eigenwert zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -24 \\ -6 & -1 \end{pmatrix}$$

und der zugehörige Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ der Lösungen ist ein Eigenvektor.
Es ist

$$P_A(x) = (x-6) \cdot (x+1) - 144 = x^2 - 5x - 150 = (x+10) \cdot (x-15)$$

und damit hat A die Eigenwerte $\lambda_1 = -10$ und $\lambda_2 = 15$.

Die Eigenvektoren zu $\lambda_1 = -10$ sind die nicht—trivialen Vielfachen von $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, d.h. alle Vektoren der Form $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit $y = \frac{2}{3} \cdot x$. Setzen wir das in die Nebenbedingung ein, so erhalten wir die Gleichung

$$x^2 + 4 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot x\right)^2 = 16$$

also

$$9x^2 + 16x^2 = 144$$

bzw.

$$x^2 = \frac{144}{25}$$

mit den Lösungen

$$x = \frac{12}{5},\ y = \frac{8}{5} \quad \text{bzw. } x = -\frac{12}{5},\ y = -\frac{8}{5}$$

Hierfür gilt in beiden Fällen $f(x, y) = -160$.

Die Eigenvektoren zu $\lambda_2 = 15$ sind die nicht—trivialen Vielfachen von $\begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Unter Berücksichtigung der Nebenbedingung erhalten wir (wie oben) als Kandidaten

$$x = \frac{16}{5}, y = -\frac{6}{5}, \quad \text{bzw. } x = -\frac{16}{5}, y = \frac{6}{5}$$

Hierfür gilt (in beiden Fällen) $f(x, y) = 240$.

Da unser Problem Lösungen haben muss und die Funktion $f(x, y)$ auf der Kreislinie sowohl Maxima als auch Minima annehmen muss, schließen wir, dass die beiden Punkte

$$P_1 = (1.2,\ 1.6)\,, \quad P_2 = (-1.2,\ -1.6)$$

Minimalpunkte von $f(x, y)$ unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ sind, und dass die beiden Punkte

$$Q_1 = (-1.6,\ 1.2)\,, \quad Q_2 = (1.6,\ 1.2)$$

Maximalpunkte von $f(x, y)$ unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ sind.

Aufgabe 6. Bestimmen Sie die Maxima der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y, z) = 8xyz$$

unter der Nebenbedingung $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$.

Lösung:
Mit $g(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 36$ suchen wir die Extrema von $f(x, y, z)$ unter der Nebenbedingung, dass $g(x, y, z) = 0$. Es gilt

$$\mathrm{grad}(g)(x, y, z) = (2x,\ 8y,\ 18z)$$

und speziell ist $\mathrm{grad}(g)(x, y, z) \neq (0,\ 0,\ 0)$ für alle (x, y, z) mit $x^2+4y^2+9z^2 = 36$. Daher ist der Satz von Lagrange anwendbar, und Kandidaten für Extrema unter dieser Nebenbedingung sind alle Punkte (x, y, z) mit

$$\mathrm{grad}(f)(x, y, z) = l \cdot \mathrm{grad}(g)(x, y, z)$$

also Lösungen von

$$\begin{array}{rcl} 8yz & = & l \cdot 2 \cdot x \\ 8xz & = & l \cdot 8 \cdot y \\ 8xy & = & l \cdot 18 \cdot z \end{array}$$

Wir können annehmen, dass $x \neq 0$, $y \neq 0$ und $z \neq 0$, denn sonst wäre $f(x, y, z) = 0$, und das maximiert die Funktion unter der Nebenbedingung offensichtlich nicht. Dann ist aber notwendig auch $l \neq 0$.
Aus der ersten Gleichung erhalten wir $l = 4 \cdot \frac{yz}{x}$. Setzen wir das in die zweite ein, so ergibt sich

$$xz = 4 \cdot \frac{y^2 z}{x}$$

also (wegen $z \neq 0$)

$$4y^2 = x^2$$

und ähnlich erhalten wir $9z^2 = x^2$. Setzen wir das in die Nebenbedingung ein, so erhalten wir

$$3x^2 = 36$$

also $x = \pm 2\sqrt{3}$. Daraus ergeben sich 8 Kandidaten

$$\begin{array}{ll} P_1 = \left(2\sqrt{3},\ \sqrt{3},\ \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right) & P_2 = \left(2\sqrt{3},\ -\sqrt{3},\ \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right) \\ P_3 = \left(2\sqrt{3},\ \sqrt{3},\ -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right) & P_4 = \left(2\sqrt{3},\ -\sqrt{3},\ -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right) \\ P_5 = \left(-2\sqrt{3},\ \sqrt{3},\ \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right) & P_6 = \left(-2\sqrt{3},\ -\sqrt{3},\ \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right) \\ P_7 = \left(-2\sqrt{3},\ \sqrt{3},\ -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right) & P_8 = \left(-2\sqrt{3},\ -\sqrt{3},\ -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right) \end{array}$$

Dabei gilt

$$f(P_1) = f(P_4) = f(P_6) = f(P_7) = 32\sqrt{3}$$

und

$$f(P_2) = f(P_3) = f(P_5) = f(P_8) = -32\sqrt{3}$$

Da die Funktion auf dieser Fläche ein Maximum und damit das Problem eine Lösung haben muss (und diese Lösung unter den Punkten $P_1, \ldots, P_8$ sein muss), sind P_1, P_4, P_6 und P_7 die Punkte, die die Funktion unter der Nebenbedingung maximieren (und der maximal erreichbare Wert ist $256\sqrt{3}$):