3.2 Das totale Differential

Wir haben bis jetzt versucht, die Frage der Differenzierbarkeit von Abbildungen $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ dadurch zu behandeln, dass wir die Frage auf Bekanntes zurückgeführt haben und durch Festhalten von allen Komponenten bis auf eine aus f eine Funktion gemacht haben, die nur von einer Veränderlichen abhängt. Geometrisch gesprochen haben wir also den Graphen von f, gegeben durch

$$\Gamma_f := \{(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)| \, (x_1, \ldots, x_n) \in D\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

mit einer geeigneten Ebene der Form

$$E = \{(a_1, \ldots a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots a_n, y)| \, x, y \in \mathbb{R}\}$$

geschnitten und das Problem auf die Betrachtung einer einfachen Kurve zurückgeführt haben.
In diesem Abschnitt wollen wir aber auch eine globale Betrachtungsweise einnehmen und f ganzheitlich sehen. Im Eindimensionalen wurde durch die Ableitung von f an einer Stelle x_0 die Tangente an f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ (oder kurz in x_0) beschrieben. Im Höherdimensionalen gibt es - selbst in schönen und einfachen Fällen - keine eindeutige Tangente mehr. Jede partielle Ableitung bestimmt eine Tangentengerade an einen sehr speziellen Ausschnitt des Graphen Γ_f. Ganz offensichtlich sind also Geraden nicht mehr das richtige Mittel, um Funktionen in n Variablen zu approximieren.
Wir wollen zunächst wieder Funktionen $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ in zwei Variablen (also mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen) betrachten.

Definition 3.2.1. Ist $\overrightarrow{v} = \binom{v_1}{v_2}$ ein zweidimensionaler nicht–trivialer Vektor, so ist die Tangente $T_{\overrightarrow{v}}$ an f im Punkt (a, b) in Richtung $\overrightarrow{v}$ wie folgt definiert: Zu f betrachte die Funktion

$$f_{\overrightarrow{v}}(t) := f(a + tv_1, b + tv_2)$$

in einer Veränderlichen t. Die Tangente $T_{\overrightarrow{v}}$ an f in (a, b) in Richtung $\overrightarrow{v}$ existiert, wenn $f_{\overrightarrow{v}}$ in $t = 0$ differenzierbar ist und ist dann gegeben durch die Gleichung

$$T_{\overrightarrow{v}} = (a, b, f(a, b)) + t \cdot (v_1, v_2, f'_{\overrightarrow{v}}(0))$$

In diesem Fall heißt $f'_{\overrightarrow{v}}(0)$ die Ableitung von f in Richtung $\overrightarrow{v}$ oder die **Richtungsableitung** von f nach $\overrightarrow{v}$.

Beispiel 3.2.1. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^2 + y^3 + xy$, den Punkt $(1,0)$ und die Richtung $\overrightarrow{v} = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f_{\overrightarrow{v}}(t) &= f(1+3t, 0+2t) \\ &= (1+3t)^2 + (2t)^3 + (1+3t)2t \\ &= 1 + 6t + 9t^2 + 8t^3 + 2t + 6t^2 \\ &= 8t^3 + 15t^2 + 8t + 1 \end{aligned}$$

Hier ist $f_{\overrightarrow{v}}$ differenzierbar (nicht nur in $t = 0$ sondern sogar überall) und

$$f'_{\overrightarrow{v}}(t) = 24t^2 + 30t + 8$$

also

$$f'_{\overrightarrow{v}}(0) = 8$$

Damit existiert die Tangente an f in $(1,0)$ in Richtung $\overrightarrow{v}$, und es ist

$$T_{\overrightarrow{v}} = (1,0,1) + t \cdot (3,2,8)$$

Wählen wir statt $\overrightarrow{v}$ den Vektor

$$\overrightarrow{u} = 2 \cdot \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} f_{\overrightarrow{v}}(t) &= f(1+6t, 0+4t) \\ &= (1+6t)^2 + (4t)^3 + (1+6t)4t \\ &= 1 + 12t + 36t^2 + 64t^3 + 4t + 24t^2 \\ &= 64t^3 + 60t^2 + 16t + 1 \end{aligned}$$

also

$$f'_{\overrightarrow{u}}(0) = 16 = 2 \cdot f'_{\overrightarrow{v}}(0)$$

Damit existiert auch die Tangente an f in $(1,0)$ in Richtung $\overrightarrow{u}$, und es ist

$$T_{\overrightarrow{u}} = (1,0,1) + t \cdot (6,4,16)$$

Wir erhalten also wieder dieselbe Gerade wie im Fall $\overrightarrow{v}$. Das ist auch nicht verwunderlich, denn $\overrightarrow{u}$ und $\overrightarrow{v}$ bestimmen dieselbe Richtung.
Ähnlich erhalten wir im Fall

$$\overrightarrow{w} = -\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

als Richtungsableitung

$$f'_{\overrightarrow{w}}(0) = -8 = -f'_{\overrightarrow{v}}(0)$$

und als Tangente

$$T_{\overrightarrow{w}} = (1, 0, 1) + t \cdot (-3, -2, -8)$$

also wieder dieselbe Gerade.
Das ist in der Tat ganz allgemein so: Sind $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{w}$ zwei kollineare nicht–triviale Vektoren, so gilt

$$T_{\overrightarrow{w}} = T_{\overrightarrow{v}}$$

Dazu nehmen wir an, dass $\overrightarrow{w} = \lambda \cdot \overrightarrow{v}$ mit einem $\lambda \neq 0$, also $w_1 = \lambda \cdot v_1$ und $w_2 = \lambda \cdot v_2$. Damit erhalten wir für die Differnezenquotienten

$$\begin{array}{rcl} \frac{f_{\overrightarrow{w}}(t)-f_{\overrightarrow{w}}(0)}{t} & = & \frac{f(a+t\cdot\lambda\cdot v_1, b+t\cdot\lambda\cdot v_2)-f(a,b)}{t} \\ & = & \lambda \cdot \frac{f(a+\lambda\cdot t\cdot v_1, b+\lambda\cdot t\cdot v_2)-f(a,b)}{\lambda\cdot t} \\ & = & \lambda \cdot \frac{f(a+r\cdot v_1, b+r\cdot v_2)-f(a,b)}{r} \end{array}$$

mit $r = \lambda \cdot t$. Lassen wir nun t, oder (was das gleiche bedeutet) r gegen Null gehen, so erhalten wir

$$f'_{\overrightarrow{w}}(0) = \lambda \cdot f'_{\overrightarrow{v}}(0)$$

und das bedeutet für die Tangenten

$$\begin{array}{rcl} T_{\overrightarrow{w}} & = & (a, b, f(a, b)) + t \cdot (w_1, w_2, f'_{\overrightarrow{w}}(0)) \\ & = & (a, b, f(a, b)) + t \cdot (\lambda \cdot v_1, \lambda \cdot v_2, \lambda \cdot f'_{\overrightarrow{v}}(0)) \\ & = & (a, b, f(a, b)) + r \cdot (v_1, v_2, f'_{\overrightarrow{v}}(0)) \\ & = & T_{\overrightarrow{v}} \end{array}$$

Bemerkung 3.2.1. Wir betrachten zu einer beliebigen Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ speziell den Vektor

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und einen beliebigen Punkt $(a,b) \in D$. Dann gilt

$$f_{\overrightarrow{v}}(t) = f(a+t,b)$$

wir halten also die y–Komponente fest und bekommen (mit $x = t + a$ bzw. $t = x - a$)

$$\begin{aligned} f'_{\overrightarrow{v}}(0) &= \lim_{t\to 0} \tfrac{f(a+t,b)-f(a)}{t} \\ &= \lim_{x\to a} \tfrac{f(x,b)-f(a)}{x-a} \\ &= f_x(a,b) \end{aligned}$$

also

$$f'_{\overrightarrow{v}}(0) = f_x(a,b)$$

ist die partielle Ableitung von f nach x an der Stelle (a,b), und

$$T_{\overrightarrow{e_1}} = (a,b,f(a,b)) + t \cdot (1,0,f_x(a,b))$$

Entsprechend erhalten wir für $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{e_2}$:

$$f'_{\overrightarrow{v}}(0) = f_y(a,b)$$

und

$$T_{\overrightarrow{e_2}} = (a,b,f(a,b)) + t \cdot (0,1,f_y(a,b))$$

Die partiellen Ableitungen sind also spezielle Richtungsableitungen.

Definition 3.2.2. Es sei $(a,b) \in D$. Eine Ebene $E \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt **Tangentialebene** an f im Punkt (a,b), wenn gilt

- $(a,b,f(a,b)) \in E$.
- Ist $\overrightarrow{v} = \binom{v_1}{v_2}$ ein beliebiger zweidimensionaler Vektor, so existiert die Tangente $T_{\overrightarrow{v}}$ an f im Punkt (a,b) in Richtung $\overrightarrow{v}$ und ist in E enthalten

Bemerkung 3.2.2. Es kann höchstens eine Tangentialebene E an f in einem Punkt (a,b) geben. Neben dem Punkt $(a,b,f(a,b))$ muss E nämlich auch noch die beiden linear unabhängigen Richtungsvektoren $(1,0,f_x(a,b))$ und $(0,1,f_y(a,b))$ ernthalten, wodurch E schon eindeutig bestimmt ist.

Beispiel 3.2.2. Wir betrachten die Funktioni $f(x, y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{3}{2}$ und $a = (1, 1)$.

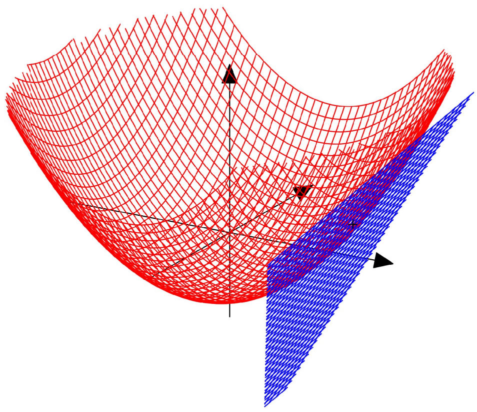

Abbildung 3.7: Tangentialebene

Dann existiert die Tangentialebene an f in a und hat die Ebenengleichung

$$z = 2x + y - 3$$

Satz 3.2.1. *Es sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine Funktion in zwei Variablen. Existiert die Tangentialebene E an f im Punkt $(a, b) \in D$ und ist f in a partiell differenzierbar, so wird E gegeben durch die Gleichung*

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

Beweis: W ir betrachten wieder die Funktion

$$g(x) = g_b(x) = f(x, b)$$

in einer Variablen und die Ebene $H_b = (y = b) = \{(x, b, z) \in \mathbb{R}^3\}$. Dann ist g_b eine Funktion in einer Variablen und der Graph von g_b ist gegeben durch $\Gamma_f \cap H_b$. Da f stetig partiell nach x differenzierbar ist, existiert die Tangente an den Graphen Γ_{g_b} (in der Ebene H_b) von g_b im Punkt $(a, g_b(a))$ und ist gegeben durch die Gleichung

$$z = g_b(a) + g_b'(a)(x - a) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a)$$

Da die Tangentialebene E an f in (a,b) existiert, ist diese Tangente in E enthalten, so dass also E den Richtungsvektor $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \end{pmatrix}$ enthält. Analog können wir auch den Schnitt mit der Ebene $H_a = \{(a,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$ betrachten und erhalten für mit der gleichen Argumetnation, dass die Tangente der Funktion $h(y) = h_a(y) = f(a,y)$ im Punkt b, gegeben durch die Gleichung

$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

in E enthalten ist. Damit enthält E den Aufsetzpunkt $(a,b,f(a,b))$ und die beiden Richtungsvektoren

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \end{pmatrix}$$

Dadurch ist aber E schon eindeutig festgelegt und hat die Gleichung

$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

wie gewünscht.

Beispiel 3.2.3. Eine Funktion kann partiell differenzierbar in (a,b) sein, ohne dass die Tangentialebene an f im Punkt (a,b) existiert. Sei dazu

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

die Funktion aus Aufgabe 35. Dann ist $f(x,y)$ in $(0,0)$ partiell differenzierbar, aber es gibt keine Tangentialebene an f in $(0,0)$. Betrachten wir nämlich $\overrightarrow{v} = \binom{1}{1}$, so gilt hierfür

$$f_{\overrightarrow{v}}(t) = \begin{cases} \frac{1}{4t^2} & \text{falls } t \neq 0 \\ 0 & \text{falls } t = 0 \end{cases}$$

Damit existiert die Richtungsableitung in Richtung $\overrightarrow{v}$ nicht und folglich existiert auch keine Tangentialebene in $(0,0)$. Die partiellen Ableitungen in $(0,0)$ dagegen existieren, und es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Beispiel 3.2.4. Aus der Existenz einer Tangentialebene folgt bei unserer Definition die Existenz der partiellen Ableitungen. Das entspricht nicht immer der Intuition. Wir betrachten dazu $f(x,y) = \sqrt{x^2(1+x^2y^4)}$ und $a = (0,0)$.

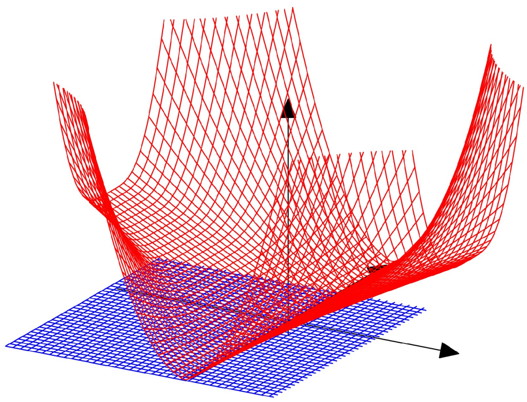

Abbildung 3.8: keine Tangentialebene

Dann ist f in $(0,0)$ nicht partiell nach x ableitbar, aber die Ebene $E : z = 0$ entspricht anschaulich einer Tagentialebene.

Der Zusammenhang zwischen Tangentialebene und partiellen Ableitungen wird klarer durch die folgende Aussage

Satz 3.2.2. *Ist $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ stetig partiell differenzierbar in $(a,b) \in D$, so existiert in (a,b) die Tangentialebene E an f und ist gegeben durch die Gleichung*

$$E : z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

Beweis: D urch die Gleichung wird sicherlich eine Ebene definiert, die durch die Tangenten an f in die Richtungen $\binom{1}{0}$ und $\binom{0}{1}$ bestimmt ist.
Es reicht daher, zu zeigen, dass für jede Richtung $\overrightarrow{v} = \binom{v_1}{v_2}$ die Tangente $T_{\overrightarrow{v}}$ in Richtung $\overrightarrow{v}$ gegeben ist durch

$$T_{\overrightarrow{v}} : z = f(a,b) + v_1 \cdot t \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + v_2 \cdot t \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

also dass gilt

$$f'_{\vec{v}}(0) = v_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + v_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

Wir nehmen zunächst an, dass $v_1 \neq 0$ und $v_2 \neq 0$ und betrachten den Differenzenquotienten

$$\begin{aligned}\tfrac{f(a+tv_1,b+tv_2)-f(a,b)}{t} &= v_1 \cdot \tfrac{f(a+tv_1,b+tv_2)-f(a,b+tv_2)}{tv_1} \\ &\quad + v_2 \cdot \tfrac{f(a,b+tv_2)-f(a,b)}{tv_2}\end{aligned}$$

Dann gilt schon mal

$$\lim_{t\to 0} v_2 \cdot \frac{f(a,b+tv_2)-f(a,b)}{tv_2} = v_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

Ferner finden wir nach dem Mittelwertsatz ein τ mit $|\tau| \leq t$, so dass

$$\begin{aligned}v_1 \cdot \tfrac{f(a+tv_1,b+tv_2)-f(a,b+tv_2)}{tv_1} &= v_1 \cdot \tfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(a+\tau v_1,b)\cdot tv_1}{tv_1} \\ &= v_1 \cdot \tfrac{\partial f}{\partial x}(a+\tau v_1, b)\end{aligned}$$

und damit folgt aus der Stetigkeit der partiellen Ableitung

$$\lim_{t\to 0} v_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(a+\tau v_1,b) = v_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$$

da mit $t \to 0$ auch $\tau \to 0$.
Den (einfacheren) Fall, dass $v_1 = 0$ oder $v_2 = 0$ überlassen wir dem Leser als Übungsaufgabe.

Dieser Satz motiviert die folgende

Definition 3.2.3. Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt **total stetig differenzierbar** in einem Punkt (a,b), wenn f in (a,b) stetig partiell nach x und nach y differenzierbar ist. In diesem Fall heißt

$$D(f)(a,b) := \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$$

das **totale Differential** von f an der Stelle (a,b).

Bezeichnung::
Für das totale Differential an der Stelle (a,b) verwenden wir auch die Bezeichnung

$$f_x(a,b)\cdot dx + f_y(a,b)\cdot dy \qquad \text{oder } \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\cdot dy$$

und für das totale Differential (ohne Bezug auf (a, b)) schreiben wir gelegentlich

$$f_x dx + f_y dy \qquad \text{oder} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy$$

Diese Definition überträgt sich auf den allgemeinen Fall:

Definition 3.2.4. Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und es sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung mit Komponentenfunktionen $f_1, \ldots, f_m$. Ferner sei $a \in D$. Die Abbildung f heißt total stetig differenzierbar in a, wenn f stetig partiell differenzierbar in a ist. In diesem Fall heißt

$$D(f)(a) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

das totale Differential von f an der Stelle a.

Bemerkung 3.2.3. In der Mathematik wird die totale Differenzierbarkeit anders eingeführt. Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt total differenzierbar in $p = (p_1, \ldots, p_n) \in D$, wenn es eine $1 \times n$–Matrix $A = A(p) = (a_1, \ldots, a_n)$ gibt und eine Funktion $\varepsilon(x)$, so dass in der Nähe von p gilt:

$$f(x) = f(p) + A \cdot \begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ \vdots \\ x_n - p_n \end{pmatrix} + \varepsilon(x)$$

wobei $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ \vdots \\ x_n - p_n \end{pmatrix}$ das Matrizenprodukt von A mit dem Vektor $\begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ \vdots \\ x_n - p_n \end{pmatrix}$ bezeichnet, also

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ \vdots \\ x_n - p_n \end{pmatrix} = a_1 \cdot (x_1 - p_1) + \cdots + a_n \cdot (x_n - p_n)$$

und wobei

$$\lim_{x \to p} \frac{\varepsilon(x)}{d(x, p)} = 0$$

In diesem Fall heißt $A(p)$ das totale Differential von f an der Stelle p.

Analog heißt eine Abbildung $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ total differenzierbar in p, wenn es eine $m \times n$–Matrix $A = A(p)$ gibt und Funktionen $\varepsilon_1(x), \dots, \varepsilon_n(x)$, so dass in der Nähe von p gilt:

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(p) \\ \vdots \\ f_n(p) \end{pmatrix} + A \cdot \begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ \vdots \\ x_n - p_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1(x) \\ \vdots \\ \varepsilon_n(x) \end{pmatrix}$$

wobei auch hier $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ \vdots \\ x_n - p_n \end{pmatrix}$ das Matrizenprodukt von A mit dem Vektor $\begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ \vdots \\ x_n - p_n \end{pmatrix}$ bezeichnet und wobei für $i = 1, \dots, n$ gilt

$$\lim_{x \to p} \frac{\varepsilon_i(x)}{d(x,p)} = 0$$

In diesem Fall heißt $A(p)$ das totale Differential von f an der Stelle p und f heißt (total) differenzierbar in p. Existiert das totale Differential $A(q)$ in einer ganzen Umgebung von p und ist $A(q)$ stetig im Punkt p, so heißt f stetig differenzierbar in p.
Die Existenz von Richtungsableitungen (die der Tangentialebene zugrunde liegen) reicht nicht aus für die totale Differenzierbarkeit in diesem Sinn. Ist jedoch f in p stetig differenzierbar in diesem Sinne, so ist f auch total stetig differenzierbar in p in unserem Sinn und umgekehrt, und in diesem Fall können wir für $A(p)$ die Matrix $D(f)(p)$ wählen, wie man leicht verifiziert.
Durch $D(f)(p)$ wird also auch eine lineare Näherung der Funktion f bei p gegeben: Die Funktion

$$L_{f,p}(x) = L(x) = \begin{pmatrix} f_1(p) \\ \vdots \\ f_n(p) \end{pmatrix} + D(f)(p) \cdot \begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ \vdots \\ x_n - p_n \end{pmatrix}$$

ist eine erste Approximation an f bei p. Wir nennen $L(x)$ **lineare Approximation** an f in p.

Bezeichnung::
Wir schreiben kurz "stetig differenzierbar" anstelle von "total stetig differenzierbar".

Ist f stetig differenzierbar in allen Punkten $a \in D$, so ist das totale Differential $D(f)$ wieder eine Abbildung, für die wir auch $D(f)(x)$ schreiben.

Beispiel 3.2.5. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \cos(xy) + x^2 + y^3 + xy$$

ist stetig differenzierbar in jedem Punkt $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ mit totalem Differential

$$D(f)(a,b) = \big(-b\sin(ab) + 2a + b, -a\sin(ab) + 3b^2 + a\big)$$

Die lineare Approximation an f bei (a,b) ist gegeben durch

$$\begin{aligned} L(x,y) &= \cos(ab) + a^2 + b^3 + ab + (-b\sin(ab) + 2a + b)(x-a) \\ &\quad +(-a\sin(ab) + 3b^2 + a)(y-b) \end{aligned}$$

Beispiel 3.2.6. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = x^3\sqrt{1+y^2}$$

ist stetig differenzierbar in jedem Punkt $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ mit totalem Differential

$$D(f)(a,b) = \left(3a^2\sqrt{1+b^2}, \frac{ba^3}{\sqrt{1+b^2}}\right)$$

Die lineare Approximation an f bei $(1,0)$ ist gegeben durch

$$L(x,y) = 1 + 3(x-1)$$

Beispiel 3.2.7. Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x,y) = \big(\cos(xy), x^2 + y^3 + xy\big)$$

ist stetig differenzierbar in jedem Punt $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ mit totalem Differential

$$D(f)(a,b) = \begin{pmatrix} -b\sin(ab) & 2a+b \\ -a\sin(ab) & 3b^2+a \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.2.8. Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x,y) = (x^2 - y^2, xy)$$

ist stetig differenzierbar mit Differential

$$D(f)(a,b) = \begin{pmatrix} 2a & -2b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.2.9. Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $f(x) = x$ ist stetig differenzierbar in jedem Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ mit

$$D(f)(a) = E_n \qquad \text{für alle } a \in \mathbb{R}^n$$

wobei

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

die $n \times n$–Einheitsmatrix bezeichnet.
Wir schreiben für f auch $\mathrm{id} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$.

Beispiel 3.2.10. Es sei A eine $m \times n$–Matrix und $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ die Abbildung mit

$$f(x_1, \dots, x_n) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Dann ist f stetig differenzierbar in jedem Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ mit

$$D(f)(a) = A \qquad \text{für alle } a \in \mathbb{R}^n$$

Wie wir in Aufgabe 35 gesehen haben, folgt aus der partiellen Differenzierbarkeit noch nicht die Stetigkeit. Mit der stetigen Differenzierbarkeit sind wir in einer besseren Situation.

Satz 3.2.3. *Ist f im Punkt a stetig differenzierbar, so ist f im Punkt a stetig.*

Beweis: I n der Nähe von p können wir schreiben

$$f(x) = f(p) + D(f)(p) \cdot (x - p) + \varepsilon(x)$$

mit $\lim\limits_{x \to p} \frac{\varepsilon(x)}{d(x,p)} = 0$ (siehe Bemerkung 3.2.3). Da die lineare Abbildung $D(f)(a) \cdot (x - a)$ stetig in a ist, folgt daraus

$$\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$$

wie gewünscht.

Viele Regeln und Aussagen aus der Differentialrechnung in einer Variablen haben Entsprechungen im Höherdimensionalen. Ein Beispiel hiervon ist die Kettenregel. In einer Variable besagt sie

$$(g \circ f)(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Für die höherdimensionale Version wollen wir zunächst eine spezielle, besonders einfache Situation betrachten.
Es sei $I = (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

eine stetig differenzierbare Abbildung, $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$, und es sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen mit $f(I) \subseteq D$ und

$$g : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

sei stetig differenzierbar.

Satz 3.2.4. *Die Komposition $g \circ f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig differenzierbar mit*

$$(g \circ f)'(a) = \frac{\partial g}{\partial x}(f(a)) \cdot f_1'(a) + \frac{\partial g}{\partial y}(f(a)) \cdot f_2'(a)$$

für jedes $a \in I$.

Beweis: W ir betrachten dazu den Differenzenquotienten

$$\begin{aligned} \tfrac{g(f_1(t),f_2(t))-g(f_1(a),f_2(a))}{t-a} &= \tfrac{g(f_1(t),f_2(t))-g(f_1(t),f_2(a))}{t-a} \\ &\quad + \tfrac{g(f_1(t),f_2(a))-g(f_1(a),f_2(a))}{t-a} \end{aligned}$$

und können beide Terme separat behandeln. Für den zweiten Term gilt

$$\frac{g(f_1(t), f_2(a)) - g(f_1(a), f_2(a))}{t-a} = \frac{g(f_1(t), f_2(a)) - g(f_1(a), f_2(a))}{f_1(t) - f_1(a)} \cdot \frac{f_1(t) - f_1(a)}{t-a}$$

so dass also nach den allgemeinen Regeln für Grenzwerte gilt

$$\lim_{t \to a} \frac{g(f_1(t), f_2(a)) - g(f_1(a), f_2(a))}{t-a} = \frac{\partial g}{\partial x}(f(a)) \cdot f_1'(a)$$

wobei wir hier die Stetigkeit von f in a ausnutzen (die eigentlich notwendige Fallunterscheidung $f(t) = f(a)$ und $f(t) \neq f(a)$ überlassen wir dem Leser).

Für den ersten Summanden fixieren wir auch t und betrachten die Funktion

$$h_t(\tau) = g(f_1(t), f_2(\tau) - g(f_1(t), f_2(a))$$

Diese Funktion ist stetig differenzierbar in a mit $h_t(a) = 0$. Nach dem Mittelwertsatz gilt also

$$h_t(t) = h_t'(\tau) \cdot (t-a)$$

für eine geeignetes τ zwischen a und t. Berechnen wir nun $h_t'(\tau)$ direkt mit Hilfe des Differenzenquotienten, so erhalten wir mittels Überlegungen, wie wir sie für den zweiten Term angestellt haben

$$h_t'(\tau) = \frac{\partial g}{\partial x}(f_1(t), f_2(\tau)) \cdot f_2'(\tau)$$

und damit schreibt sich der erste Summand als

$$\begin{aligned} \tfrac{g(f_1(t),f_2(t)) - g(f_1(t),f_2(a))}{t-a} &= \tfrac{h_t'(\tau)\cdot(t-a)}{t-a} \\ &= \tfrac{\partial g}{\partial x}(f_1(t), f_2(\tau)) \cdot f_2'(\tau) \end{aligned}$$

Übergang zum Grenzwert $t \to a$ liefert die Behauptung.

Bemerkung 3.2.4. Für die Kettenregel in dieser Situation findet man oft auch folgende Darstellung:
Es ist $z = f(x, y)$ eine äußere Funktion mit Variablen x, y, die wiederum von einem Parameter t abhängen,

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

Dann wird die Kettenregel auch geschrieben als

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Beispiel 3.2.11. Wir betrachten $f(t) = (t^2, t^3)$ und $g(x, y) = x^4 + y^3$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial z}{\partial x} &= 4x^3 & \tfrac{\partial z}{\partial y} &= 3y^2 \\ \tfrac{dx}{dt} &= 2t & \tfrac{dy}{dt} &= 3t^2 \end{aligned}$$

und damit

$$\frac{dz}{dt} = 4\left(t^2\right)^3 \cdot 2t + 3\left(t^3\right)^2 \cdot 3t^2 = 8t^7 + 9t^8$$

Berechnen wir alternativ

$$F(t) = ((g \circ f)(t) = t^8 + t^9$$

so erhalten wir daraus auch direkt

$$F'(t) = 8t^7 + 9t^8$$

Beispiel 3.2.12. Wir betrachten $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ und die Parameter

$$x(t) = \cos(t), \quad y(t) = \sin(t)$$

Dann gilt hierfür

$$\begin{array}{rclrcl} \frac{\partial z}{\partial x} & = & 2x & \frac{\partial z}{\partial y} & = & 2y \\ \frac{dx}{dt} & = & -\sin(t) & \frac{dy}{dt} & = & \cos(t) \end{array}$$

und damit

$$\frac{dz}{dt} = 2\cos(t) \cdot (-\sin(t)) + 2\sin(t) \cdot \cos(t) = 0$$

Das hätten wir natürlich alternativ auch aus der Beschreibung

$$F(t) = ((g \circ f)(t) = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$$

erhalten.

Beispiel 3.2.13. Wir betrachten $z = f(x, y) = (x + y)^2$ und die Parameter

$$x(t) = 2\cos(t), \quad y(t) = 2\sin(t)$$

Dann gilt hierfür

$$\begin{array}{rclrcl} \frac{\partial z}{\partial x} & = & 2(x + y) & \frac{\partial z}{\partial y} & = & 2(x + y) \\ \frac{dx}{dt} & = & -2\sin(t) & \frac{dy}{dt} & = & 2\cos(t) \end{array}$$

und damit

$$\begin{array}{rcl} \frac{dz}{dt} & = & 2(2\cos(t) + 2\sin(t)) \cdot (-2\sin(t)) + 2(2\cos(t) + 2\sin(t)) \cdot 2\cos(t) \\ & = & 8\left(\cos^2(t) - \sin^2(t)\right) \end{array}$$

Beispiel 3.2.14. Wir betrachten $z = f(x, y) = cos(x-y)$ und die Parameter

$$x(t) = t^2, \quad y(t) = t$$

Dann gilt hierfür

$$\begin{array}{rclcrcl} \frac{\partial z}{\partial x} & = & -\sin(x-y) & \quad & \frac{\partial z}{\partial y} & = & \sin(x-y) \\ \frac{dx}{dt} & = & 2t & & \frac{dy}{dt} & = & 1 \end{array}$$

und damit

$$\frac{dz}{dt} = -\sin(t^2 - t) \cdot 2t + \sin(t^2 - t) = \sin(t^2 - t) \cdot (1 - 2t)$$

Die Kettenregel hat auch eine Entsprechung für beliebige Abbildungen. Dazu sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

eine stetig differenzierbare Abbildung mit Komponenten $f_1(x), \ldots, f_m(x)$), und es sei $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen mit $f(U) \subseteq D$ und

$$g : D \longrightarrow \mathbb{R}^l$$

sei stetig differenzierbar mit Komponenten $g_1(y), \ldots, g_l(y)$.

Satz 3.2.5. *Die Komposition $g \circ f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig differenzierbar mit*

$$D(g \circ f)(a) = D(g)(f(a)) \cdot D(f)(a)$$

wobei $D(g)(f(a)) \cdot D(f)(a)$ das Produkt der beiden Matrizen $D(g)(f(a)) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(f(a))\right)$ und $D(f)(a) = \left(\frac{\partial f_k}{\partial y_l}(a)\right)$ bezeichnet.

Beweis: W ir können jede Komponenten von g einzeln betrachten, also annehmen, dass $l = 1$ gilt. In dieser Situation betrachten wir wieder Differenzenquotienten

$$\frac{g(f(a_1, \ldots a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n)) - g(f(a_1, \ldots, a_n))}{x - a_i}$$

Da wir hier nur noch eine Veränderliche x zu betrachten haben, können wir die Überlegungen aus dem Beweis von Satz 3.2.4 anwenden. Die Details überlassen wir dem Leser.

Beispiel 3.2.15. Es sei $f(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2^2, x_1^2 + x_2^2)$ und $g(y_1, y_2) = \sin(y_1 - y_2)$. Dann gilt hierfür

$$D(f)(a) = \begin{pmatrix} 2a_1 & -2a_2 \\ 2a_1 & 2a_2 \end{pmatrix}, \quad D(g)(b) = \begin{pmatrix} \cos(b_1 - b_2) & -\cos(b_1 - b_2) \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{aligned} D(g \circ f)(a) &= \begin{pmatrix} \cos((a_1^2 - a_2^2) - (a_1^2 + a_2^2)) & -\cos((a_1^2 - a_2^2) - (a_1^2 + a_2^2)) \end{pmatrix} \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} 2a_1 & -2a_2 \\ 2a_1 & 2a_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos((-2a_2^2) & -\cos((-2a_2^2)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2a_1 & -2a_2 \\ 2a_1 & 2a_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -4a_2 \cdot \cos(-2a_2^2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Hieraus lesen wir sofort ab, dass etwa

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_1}(a) = 0$$

Beispiel 3.2.16. Es sei $f(x_1, x_2) = (x_1 x_2, x_1 - x_2)$ und $g(y_1, y_2) = (y_1^2 + y_2^2, y_1 y_2)$. Dann gilt hierfür

$$D(f)(a) = \begin{pmatrix} a_2 & a_1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D(g)(b) = \begin{pmatrix} 2b_1 & 2b_2 \\ b_2 & b_1 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{aligned} D(g \circ f)(a) &= \begin{pmatrix} 2a_1 a_2 & 2(a_1 - a_2) \\ a_1 - a_2 & a_1 a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & a_1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\left(a_1 a_2^2 + a_1 - a_2\right) & 2\left(a_1^2 a_2 + a_2 - a_1\right) \\ 2a_1 a_2 - a_2^2 & a_1^2 - 2a_1 a_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Hieraus lesen wir sofort ab, dasss etwa

$$\partial(g \circ f)_1 \partial x_1(a) = a_1 a_2^2 + a_1 - a_2$$

Bemerkung 3.2.5. Im Fall $n = m = 2$ und $l = 1$ findet man häufig eine Parameterdarstellung der Kettenregel in folgender Form:

Es sei $z = f(x, y)$ eine Funktion in zwei Variablen x und y die von Parametern u und v abhängen,

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

so dass also

$$z = f(x(u, v), y(u, v)) = F(u, v)$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}\end{aligned}$$

Aufgabe 39. Bestimmen Sie die Tangentialebene an die Funktion

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

im Punkt $(1, 1)$.

Aufgabe 40. Bestimmen Sie die Tangentialebene an die Funktion

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2}{y^2 + 1}} + \cos(\pi \cdot x \cdot y)$$

im Punkt $(1, 1)$.

Aufgabe 41. Berechnen Sie die Richtungsableitung von

$$f(x, y) = \cos(x + y) \cdot \sin(x - y)$$

im Punkt $(0, 0)$ in Richtung $\overrightarrow{v} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Aufgabe 42. Untersuchen Sie die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x_1, x_2, x_3) = \left(\cos(x_1 x_2) + x_3^2, e^{x_1^2 x_2^2 x_3^2}\right)$$

auf stetige Differenzierbarkeit und bestimmen Sie das totale Differential von f an den Stellen, an denen es definiert ist.

Aufgabe 43. Bestimmen Sie die lineare Approximation an die Funktion

$$f(x, y) = 3x^2 \cos(xy)$$

im Punkt $(1, \pi)$.

Aufgabe 44. Bestimmen sie die lineare Approximation an die Abbildung

$$f(x,y) = \left(\frac{x^2 - y}{1 + x^2 + y^2}, x^2 y^3 \right)$$

im Punkt $P = (1,2)$.

Aufgabe 45. Bestimmen Sie das totale Differential der Abbildung

$$f(x,y) = \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 + 1}, \ln(\sqrt{x^2 + y^2 + 1}) \right)$$

Aufgabe 46. Bestimmen Sie das totale Differential von $g \circ f$ an der Stelle $(1,2)$ für

$$f(x_1, x_2) = \left(x_1^2 x_2^2, \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + 1} \right), \quad g(y_1, y_2) = \left(y_1^4 + y_2^4, y_1 \cdot y_2 \cdot \cos(y_1 y_2) \right)$$

Aufgabe 47. Bestimmen Sie das Differential der parameterabhängigen Funktion

$$z = f(x,y) = x^2 y^4, \qquad x = x(t) = \cos(t), \quad y = y(t) = e^t$$

nach der Kettenregel.

Aufgabe 48. Bestimmen sie das Differential der parameterabhängigen Funktion

$$z = f(x,y) = \cos(x^2 y^3), \qquad x = x(u,v) = u \cdot v^2, \quad y = y(u,v) = u^2 + v^2$$

nach der Kettenregel.