Prof. Dr. H. Siebert , TH Mittelhessen , Fachbereich MND
Aufgaben Analysis, DHBW TINF AI **Blatt 8**

Aufgaben zu „Differentialrechnung , Anwendungen“

1. a) Leiten Sie aus dem Newton - Verfahren eine Iterationsformel zur Berechnung der dritten Wurzel her.

   b) Berechnen Sie $3^{1/3}$ und $7^{1/3}$ auf 6 Dezimalen .

   Lösung

   a) $f(x) = x^3 - a$, $f'(x) = 3x^2$; Newton:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - a}{3x_n^2} = \frac{3x_n^3 - x_n^3 + a}{3x_n^2}$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{a}{x_n^2}\right)$$

   b) Iteration :

$\sqrt[3]{3}$	$\sqrt[3]{7}$
$x_0 = 1$	$x_0 = 1$
$x_1 = 1{,}66666$	$x_1 = 3$
$x_2 = 1{,}4711112$	$x_2 = 2{,}2592592$
$x_3 = 1{,}4428121$	$x_3 = 1{,}963308$
$x_4 = 1{,}4422498$	$x_4 = 1{,}9142127$
$x_5 = 1{,}4422497$	$x_5 = 1{,}912932$
$x_6 = x_5$	$x_6 = 1{,}9129311$
	$x_7 = x_6$

2. Die Gleichung $x^3 + 3x^2 - 5x + 7 = 0$ hat eine reelle Lösung. Bestimmen Sie diese auf vier Stellen hinter dem Komma.

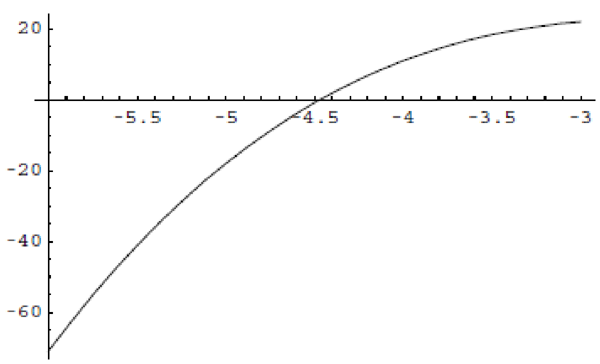
   Lösung

   Zunächst ist eine Kurvendiskussion hilfreich!

   Wertetabelle:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	...	0,6	-2,6
f(x)	-18	11	22	21	14	7	6	17	46		5,2	22,.

   Schaubild :



Ableitungen : $f'(x) = 3x^2 + 6x - 5$, $f''(x) = 6x + 6$.

Extrema: $x_1 = 0{,}633$ und $x_2 = -2{,}633$

Wendepunkt: $X_w = -1$

Newton-Verfahren: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

wähle $x_0 = -4$, $\Rightarrow x_1 = -4{,}578947$ $\Rightarrow x_2 = -4{,}473423$ $\Rightarrow x_3 = -4{,}469223$
$\Rightarrow x_4 = -4{,}469218$ $\Rightarrow x_5 = -4{,}469217$.

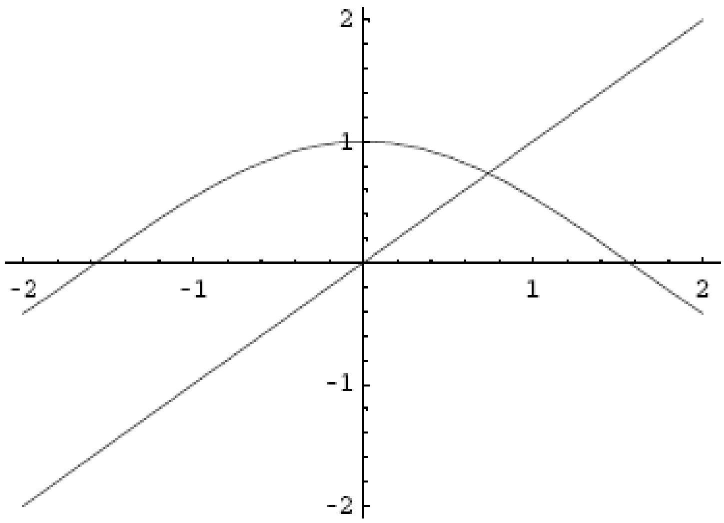
3. Berechnen Sie alle Lösungen von

a) $\cos x = x$, b) $\tan x = x$ mit $-\pi/2 < x < 3\pi/2$

so genau, wie es Ihr Taschenrechner erlaubt.

Lösung

a) $\cos x = x$. Da $|\cos x| \le 1$, muss auch $|x| \le 1$ sein.



In diesem Bereich kann es nur eine Lösung geben. Sie liegt zwischen 0,6 und 0,8. Um die Lösung genauer zu berechnen, wenden wir das Newton – Verfahren auf $f(x) = x - \cos x$ mit dem Startwert $x_0 = 0{,}6$ an. Iterationsformel :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n - \cos x_n}{1 + \sin x_n} .$$

$x_0 = 0{,}6$; $x_1 = 0{,}744017$; $x_2 = 0{,}73909$; $x_3 = 0{,}739085$;
$x_4 = x_5 = x_6 = \ldots = 0{,}739085$.

b) $\tan x = x$.

Eine Lösung ist $x = 0$; bei 0 ist $y = x$ Wendetangente von $y = \tan x$. Daher gibt es im Intervall $(-\pi/2\ ,\ \pi/2)$ keine weitere Lösung.

Im Intervall $(\pi/2\ ,\ 3\pi/2)$ gibt es genau eine Lösung , etwa bei 4,5 . Das Newton – Verfahren liefert 4,49341 .

4. Berechnen Sie folgende Grenzwerte :

a) $\lim\limits_{x \to \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\cos 2x}$, b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{\sin x}$.

Lösung :

a) Die Voraussetzungen für die Anwendung der Regel von de l´Hôpital sind erfüllt :

$$\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}=0 \quad , \cos 2\cdot\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{2}=0 \ .$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x+\sin x}{-2\sin 2x}=\frac{\sqrt{2}}{-2\cdot 1}=-\frac{1}{2}\sqrt{2}\ .$$

b) auch hier liegt ein Grenzwert vom Typ „ 0 / 0 “ vor .

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{a\cdot e^{ax}-b\cdot e^{bx}}{\cos x}=\frac{a-b}{1}=a-b$$

5. Berechnen Sie die Grenzwerte

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$, b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+1}{2x+1}$.

Lösung :

a) Der Grenzwert ist von der Form $\frac{0}{0}$ $\Rightarrow$ Lösung mit der Regel von de l’Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{1+3x}}\cdot 3}=\frac{2}{3}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}=\frac{2}{3} \quad ,$$

b) Der Grenzwert existiert, da Zähler und Nenner einzeln einen Grenzwert haben und der Grenzwert im Nenner nicht gleich Null ist:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-4x+1}{2x+1}=-\frac{3}{5} \quad .$$

6. Berechnen Sie für reelles a die Grenzwerte

$$\lim_{x\to\infty}(x\sin(a/x)) \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty}(x(1-\cos(a/x))\ .$$

Lösung

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\sin\frac{a}{x}\right)\underset{u=\frac{1}{x}}{\overset{\uparrow}{=}}\lim_{u\to 0+}\frac{\sin au}{u}=a\lim_{u\to 0+}\frac{\sin au}{au}=a$$

$$\lim_{x\to\infty}x\left(1-\cos\frac{a}{x}\right)=\lim_{u\to 0+}\frac{1-\cos au}{u}=\lim_{u\to 0+}\frac{a\sin au}{1}=0$$

(de l'Hôpital)

7. Bestimmen Sie die Grenzwerte

a) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-b)^n-(a-b)^n}{x-a}$, b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-nx+n-1}{(x-1)^2}$, c) $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{(x-c)^2}{x(\ln x-2)-c(\ln c-2)}$.

Lösung

a) $$\lim_{x\to a}\frac{\left((x-b)^n-(a-b)^n\right)}{x-a}=\underbrace{\lim_{x\to a}\frac{n(x+b)^{n-1}-0}{1}}_{\text{Regel von de l'Hôpital}}=n(a-b)^{n-1}$$

b) (Für $n \geq 2$ wird zweimal die Regel von de l'Hôpital angewandt. Für $n = 1$ ist $x^{n-1} - 1 = 1 - 1 = 0$, also auch das Endergebnis $= ½\,(1 - 1) = 0$.)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^n-nx+n-1\right)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(nx^{n-1}-n\right)}{2(x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{n}{2}\cdot\frac{x^{n-1}-1}{x-1}\right)=\frac{n}{2}\lim_{x\to 1}\left(\frac{(n-1)x^{n-2}}{1}\right)=\frac{n}{2}(n-1)$$

c) $$\lim_{x\to c}\frac{(x-c)^2}{\left(x(\ln x-2)-c(\ln c-2)\right)}=\lim_{x\to c}\frac{2(x-c)}{x\cdot\frac{1}{x}+1(\ln x-2)}=\lim_{x\to c}\frac{2(x-c)}{\ln x-1}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}0 \text{ falls } c\neq e\\ 2e \text{ falls } c=e\end{array}\right.$$

8. Untersuchen Sie folgende Funktionen bzw. deren Schaubilder auf D(f) , W(f) , Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte :

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, b) $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{9-x^2}}$.

Lösung :

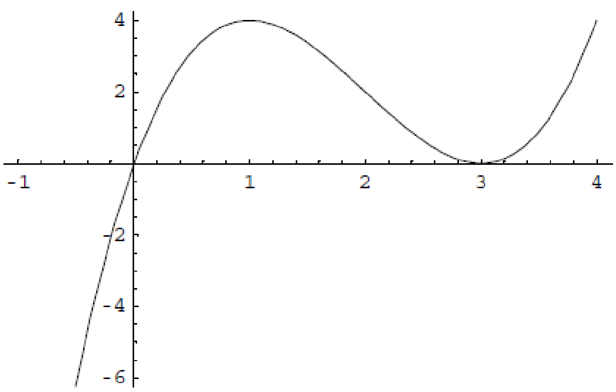
a) Definitions- und Wertebereich: D(f) = R, W(f) = R,

Nullstellen: $x_1 = 0$; $x_{2/3} = 3$,

Ableitungen: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$, $f''(x) = 6x - 12$, $f'''(x) = 6$,

Extrema: $f'(x) = 0 \Rightarrow x_4 = 3$, $x_5 = 1$, $f''(x_4) > 0 \Rightarrow$ Minimum , $f''(x_5) < 0 \Rightarrow$ Maximum

Wendepunkte: $f''(x) = 0 \Rightarrow x_6 = 2$, $f'''(x_6) = 6 \neq 0 \Rightarrow$ wirklich ein Wendepunkt



b) $g(x)=\dfrac{3}{\sqrt{9-x^2}}$,

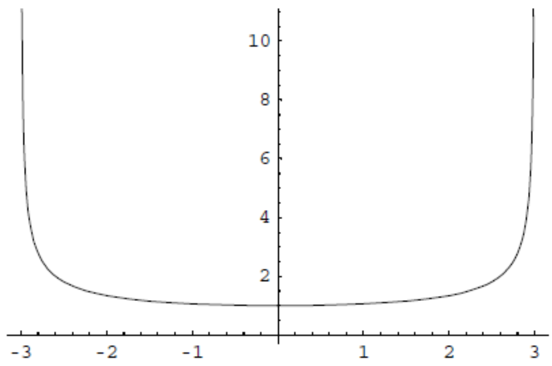
Definitions- und Wertebereich: D(f) = (-3, 3), W(f) = R ,

Nullstellen: keine ,

Ableitungen : $g'(x) = \frac{3x}{(9-x^2)^{\frac{3}{2}}}$, $g''(x) = \frac{27+6x^2}{(9-x^2)^{\frac{5}{2}}}$

Extrema: $g'(x) = 0 \Rightarrow x_7 = 0$, $g'(x_7) < 0$ für $x < 0$, $g'(x_7) > 0$ für $x > 0 \Rightarrow$ Minimum

Wendepunkte: $g''(x) > 0 \Rightarrow$ keine Wendepunkte



9. Diskutieren Sie die Kurve $y = f(x)$, $f(x) = \frac{x^4 - 6x^2 - 3}{x}$, insbesondere : D(f) , W(f) , Nullstellen, Extrema , Wendepunkte , Verhalten für $x \to \infty$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $W(f) = \mathbb{R}$,

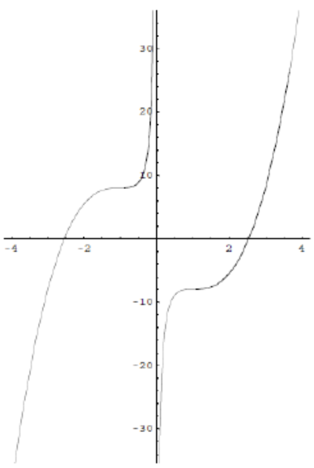
Nullstellen : $x_{1,2} = \pm\sqrt{3+2\sqrt{3}} = \pm 2{,}54$

Ableitungen : $f'(x) = \frac{3x^4 - 6x^2 + 3}{x^2}$, $f''(x) = \frac{6(x^4-1)}{x^3}$, $f'''(x) = \frac{6(x^4+3)}{x^4}$

Extremwerte : keine

Wendepunkte : bei (1, -8) und (-1, 8) , beide mit waagerechter Tangente

Verhalten für $x \to \infty$: $f(x) = x^3$.



10. Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = x^2 e^{-x}$ bzw. deren Schaubild auf D (f) , W (f) , Nullstellen , Extrema und Wendepunkte .

Lösung

a) Definitions- und Wertebereich: D(f) = R
Nullstellen $x = 0$

Ableitungen: $f'(x) = -x^2e^{-x} + 2xe^{-x} = (2x - x^2)\,e^{-x} = x\,(2 - x)\,e^{-x}$
$f''(x) = -(2x - x^2)\,e^{-x} + (2 - 2x)\,e^{-x} = (x^2 - 4x + 2)\,e^{-x}$
Extrema: $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 2$
$f''(0) = 2 > 0 \Rightarrow$ Minimum (0, 0)
$f''(2) = -2\,e^{-2} < 0 \Rightarrow$ Maximum $(0, 4/e^2) = (2, 0{,}5413...$
Wendepunkte: $f''(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-2} = 2 \pm \sqrt{2}$
$x_1 = 3{,}4142...,\ x_2 = 0{,}5878...$
Da x_1, x_2 einfache Nullstellen von $x^2 - 4x + 2$ und $e^{-x} \neq 0 \Rightarrow$ f" wechselt dort das Vorzeichen $\Rightarrow$ Wendepunkte

$$(x_1; f(x_1); f'(x_1)) = (3{,}4142; 0{,}3835; -0{,}1588)$$
$$(x_2; f(x_2); f'(x_2)) = (0{,}5878; 0{,}1910; 0{,}4611) \quad ,$$

$$W(f) = [0, \infty) \qquad \begin{pmatrix} f \text{ stetig}, f \underset{x\to\infty}{\to} 0 \\ f > 0, f \underset{x\to-\infty}{\to} \infty \end{pmatrix} \qquad .$$