§ Eigenwerte & -vektoren

Def.: Sei $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ gegeben. Ein $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt "Eigenwert", wenn ein $\vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ existiert, sodass

$$A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}. \qquad (*)$$

Ein solches $\vec{v}$ heißt "Eigenvektor" von A.

(*) ist äquivalent: $(\lambda \cdot E_n - A) \cdot \vec{v} = \vec{0}$

$\vec{v} = (\lambda \cdot E_n - A)^{-1} \cdot \vec{0} = \vec{0}$ ↯

$\rightsquigarrow$ $\lambda \cdot E_n - A$ nicht inv.

$\Longrightarrow \det(\lambda \cdot E_n - A) = 0.$

D.h. die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen des sog. "charakteristischen Polynoms"

$$\chi_A(\lambda) := \det(A - \lambda \cdot E_n).$$

Bsp.:
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda+1 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & \lambda+2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \lambda-\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -1 & -1 & \lambda-\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda+1) \cdot \det \begin{pmatrix} \lambda+2 & 0 & 0 \\ 2 & \lambda-\frac{1}{2} & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-\frac{1}{2} \end{pmatrix} = (\lambda+1)\cdot(\lambda+2)\cdot \det \begin{pmatrix} \lambda-\frac{1}{2} & -1 \\ -1 & \lambda-\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda+1)(\lambda+2)\cdot\left[\left(\lambda-\tfrac{1}{2}\right)^2 - 1\right]$$

$\rightsquigarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$ sind EW, genauso wie die Lsg von

$$\left(\lambda-\tfrac{1}{2}\right)^2 - 1 = 0 \iff \left(\lambda-\tfrac{1}{2}\right)^2 = 1 \iff \lambda - \tfrac{1}{2} = \pm 1$$

$$\rightsquigarrow \lambda_3 = -\tfrac{1}{2},\ \lambda_4 = \tfrac{3}{2}.$$

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \chi_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 5 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)(-3-\lambda) + 10$

$$= \lambda^2 + 4\lambda + 13$$

$$\chi_A(\lambda) = 0 \iff 0 = \lambda^2 + 4\lambda + 13 = (\lambda+2)^2 + 9$$

$$\iff (3i)^2 = (\lambda+2)^2 \iff \lambda_1 = -2-3i$$

$$\lambda_2 = -2+3i$$

Für Eigenvektoren $\vec{v}_1$ zu λ_1 muss gelten: $\quad \lambda\cdot E_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

$$(A - \lambda_1 \cdot E_2)\cdot \vec{v}_1 = \vec{0}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1+3i & -2 \\ 5 & -1+3i \end{pmatrix}\cdot \vec{v}_1 = \vec{0} \qquad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix}$$

D.h. zu lösen ist

$$(1+3i)\cdot v_{11} - 2v_{12} = 0 \qquad (\mathrm{I})$$

$$5\cdot v_{11} + (-1+3i)v_{12} = 0 \qquad (\mathrm{II})$$

$$\overset{\mathrm{I} - \frac{1+3i}{5}\cdot \mathrm{II}}{\iff} \Big(\overbrace{-\tfrac{1+3i}{5}\cdot(-1+3i) - 2}^{=0}\Big)\cdot v_{12} = 0 \qquad \longleftarrow \text{verschwindet}$$

$$5v_{11} + (-1+3i)\cdot v_{12} = 0$$

$$\rightsquigarrow v_{12} = 5,\ v_{11} = 1-3i \rightsquigarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1-3i \\ 5 \end{pmatrix}.$$

2(c):

$$\chi_A(\lambda) = (2+\lambda)^2(1-\lambda)\cdot\left[\underbrace{\left(\frac{3}{4}-\lambda\right)\left(\frac{1}{4}-\lambda\right) - \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}_{=\lambda\cdot(\lambda-1)}\right]$$

$$= -\lambda\cdot(\lambda-1)^2\cdot(2+\lambda)^2$$

$$\leadsto \lambda_3 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_1 = -2$$

EV $\vec{b}_1$ von $\lambda_1 = -2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -3/2 & -3/2 & -3/2 \\ -6 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{4} & \frac{11}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{9}{4} \end{pmatrix} \cdot \vec{b}_1 = \vec{0}$$

Mögliche Lösung: $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Betrachte: $(A - \lambda_1 \cdot E_5)\cdot \vec{b}_2 = \vec{b}_1$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -3/2 & -3/2 & -3/2 \\ -6 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -3/2 & 0 & 3/4 & 11/4 & 3/4 \\ 3/2 & 0 & -3/4 & 1/4 & 9/4 \end{pmatrix} \cdot \vec{b}_2 \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (= \vec{b}_1)$$

$$\leadsto \left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & 0 & -3/2 & -3/2 & -3/2 & 1 \\ -6 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -3/2 & 0 & 3/4 & 11/4 & 3/4 & 0 \\ 3/2 & 0 & -3/4 & 1/4 & 9/4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 8 & 0 & -3 & -3 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 3 & 11 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & -3 & 1 & 9 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & -3 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 24 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -96 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 0 \end{array}\right) \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} b_{21} \\ \vdots \\ b_{25} \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow b_{25} = 0$$
$$b_{24} = 0$$

$$\rightsquigarrow b_{23} = 2$$
$$\rightsquigarrow -2b_{21} + b_{23} = 0$$
$$\Rightarrow b_{21} = 1$$

z.B. ist $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Lösung.

---

§ Diagonalisierung:

Unter bestimmten Vor. ex. zu einer Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine Matrix $S \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, sodass

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Vorteil dieser Zerlegung: Für alle $k \geq 1$ gilt:

$$A^k = S \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \cdot S^{-1}$$

$$\tilde{A}^k = S \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \cdot S^{-1}.$$

Wenn wir eine ONBasis $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ von $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren haben, können wir $S = (\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n)$ wählen.