Lösungen zur Klausur „Analysis“ , TINF19AI1 , 18. 6. 2020

Aufgabe 1

a) $a_1 = 1$, $a_2 = 3$; $a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1}$, $n \geq 2$

$a_3 = 2a_2 + 3a_1 = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 9$

$a_4 = 2a_3 + 3a_2 = 2 \cdot 9 + 3 \cdot 3 = 27$

$a_5 = 2a_4 + 3a_3 = 2 \cdot 27 + 3 \cdot 9 = 81$

b) Vermutung: $a_n = 3^{n-1}$, $n \geq 1$

Induktionsanfang : s. a)

„$n \to n+1$“ , $n \geq 2$:

$a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1} + 3 \cdot 3^{n-2}$

$= 2 \cdot 3^{n-1} + 3^{n-1} = 3^n = 3^{(n+1)-1}$ ✓

Aufgabe 2

a) $a_k = \dfrac{x^k}{10^{k(k+1)}}$; $\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\dfrac{|x|^k}{10^{k(k+1)}}} = \dfrac{|x|}{10^{k+1}}$

Für beliebiges festes $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{|x|}{10^{k+1}} = 0 < 1$$

$\Rightarrow$ Reihe absolut konvergent für jedes $x \in \mathbb{R}$ (Wurzelkriterium)

b) Für $x = 1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^{k(k+1)}} = 1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^{12}} + \cdots$$

$$= 1{,}01000100000100000001\ldots$$

Der Dezimalbruch bricht nicht ab und ist nicht periodisch

$\Rightarrow$ keine rationale Zahl.

Aufgabe 3

a) $f(x) = x \cdot \ln x$;

$f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$

$f''(x) = \frac{1}{x}$, $f'''(x) = -\frac{1}{x^2}$

b) $g(x) = x^2 \cdot e^{-x}$;

$g'(x) = -x^2 e^{-x} + 2x\, e^{-x} = (2x - x^2)\, e^{-x}$

$g''(x) = -(2x - x^2)\, e^{-x} + (2 - 2x)\, e^{-x} = (x^2 - 4x + 2)\, e^{-x}$,

$g'''(x) = -(x^2 - 4x + 2)\, e^{-x} + (2x - 4)\, e^{-x} = (-x^2 + 6x - 6)\, e^{-x}$,

c) $h(x) = \arctan\left(\frac{x}{2}\right)$;

$$h'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{4 + x^2}$$

$$h''(x) = \frac{(4 + x^2) \cdot 0 - 2 \cdot 2x}{(4 + x^2)^2} = \frac{-4x}{(4 + x^2)^2}$$

$$h'''(x) = \frac{-(4 + x^2)^2 \cdot 4 + 4x \cdot 2(4 + x^2) \cdot 2x}{(4 + x^2)^4}$$

$$= \frac{-4(4 + x^2) + 16x^2}{(4 + x^2)^3} = \frac{12x^2 - 16}{(4 + x^2)^3}$$

Aufgabe 4

a) $$\int_1^e \underset{u'}{x^2} \cdot \underset{v}{\ln x}\, dx = \Big[\underset{u}{\tfrac{1}{3}x^3}\,\underset{v}{\ln x}\Big]_1^e - \int_1^e \underset{u}{\tfrac{1}{3}x^3} \cdot \underset{v'}{\tfrac{1}{x}}\, dx$$

$$= \frac{1}{3}e^3 \ln e - \frac{1}{3}\ln 1 - \int_1^e \frac{1}{3}x^2\, dx$$

$$= \frac{1}{3}e^3 - \Big[\frac{1}{9}x^3\Big]_1^e = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{9}e^3 + \frac{1}{9}$$

$$= \frac{1}{9}(2e^3 + 1)$$

b) $$\int_0^1 \frac{2x}{1+x^4}\, dx = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

$x^2 = t$, $x = \sqrt{t}$

$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2x}$

$2x\, dx = dt$

Aufgabe 5

a) $$\lim_{x \to 0} \frac{e^{mx} - e^{nx}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{me^{mx} - ne^{nx}}{1} = m - n.$$

de l'Hôpital

b) $$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+3}{x^2-3} = \frac{2^2+3}{2^2-3} = 7.$$

(Zähler und Nenner bei 2 stetig, Nenner $\neq 0$)