Es gilt zu zeigen:

$$||x - a|| < \delta \implies ||f(x) - f(a)|| < \epsilon$$

Wir zeigen dies für alle $\epsilon \in \mathbb{R}$ indem wir δ basierend auf ϵ konstruieren, sodass die zu zeigende Folgerung gilt.

Wir setzen nun $\delta := \epsilon$. Damit gilt also:

$$
\begin{align}
& ||x - a|| < \delta \tag{1} \\
\implies & ||x - a|| < \epsilon \tag{2} \\
\implies & \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} < \epsilon \tag{3} \\
\implies & \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 - (2 \cdot |x_1 - a_1| \cdot |x_2 - a_2|)} < \epsilon \tag{4} \\
\implies & \sqrt{((x_1 - a_1) + (x_2 - a_2))^2} < \epsilon \tag{5} \\
\implies & ||x_1 - a_1 + x_2 - a_2|| < \epsilon \tag{6} \\
\implies & ||f(x) - f(a)|| < \epsilon \tag{7}
\end{align}
$$