so einfachen Problemstellungen wie der ungedämpften Schwingung gesehen. Auch bei der Transformation der Riccatischen Differentialgleichung sind wir auf eine Differentialgleichung der Ordnung 2 gestoßen. Wir wollen unsere Betrachtung allerdings auf sehr spezielle Typen beschränken.

Definition 4.3.1. Eine Differentialgleichung der Ordnung 2 heißt **linear**, wenn sie sich in der Form

$$y''(x) + a(x) \cdot y'(x) + b(x) \cdot y(x) = f(x)$$

mit stetigen Funktionen $a(x)$ und $b(x)$ schreiben läßt.
Eine lineare Differentialgleichung der Ordnung 2 heißt **homogen**, wenn $f(x) = 0$, also wenn sie von der Form

$$y''(x) + a(x) \cdot y'(x) + b(x) \cdot y(x) = 0$$

ist.
Eine lineare Differentialgleichung der Ordnung 2 heißt **lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten**, wenn $a(x) = a$ und $b(x) = b$ konstant sind, wenn sie also von der Form

$$y''(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) = f(x)$$

ist.

Beispiel 4.3.1. Die Schwingungsgleichung

$$y'' + \omega^2 \cdot y = 0$$

aus der Physik ist eine homogene lineare Differentialgleichung.

Beispiel 4.3.2. Die Gleichung der gedämpften Schwingung

$$y'' + by' + \omega^2 \cdot y = 0$$

(mit einer Dämpfungskonstante $b \neq 0$) ist eine homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.

Beispiel 4.3.3. Die Gleichung der erzwungenen (gedämpften oder ungedämpften) Schwingung

$$y'' + by' + \omega^2 \cdot y = F_0 \sin(\delta x)$$

ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.

Wir haben bereits in Satz 4.1.1 gesehen, dass für die von uns betrachteten Differentialgleichungen lokal ein Existenz– und Eindeutigkeitssatz gilt. Für lineare Differentialgleichungen ist die Situation sogar noch besser:

Satz 4.3.1. *Ist*

$$y''(x) + a(x) \cdot y'(x) + b(x) \cdot y(x) = f(x)$$

eine lineare Differentialgleichung mit stetig differenzierbaren Funktionen

$$a, b : I = (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}$$

so gibt es zu jedem $x_0 \in I$ und zu jedem Paar $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung

$$y : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

der Diffentialgleichung mit

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y_1$$

Wir wollen uns im Rest dieses Abschnitts ausschließlich mit linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschäftigen. Zunächst untersuchen wir den homogenen Fall

$$y''(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) = 0 \tag{4.6}$$

Mit L bezeichnen wir die Menge aller Lösungen dieser Differentialgleichung.

Satz 4.3.2. *Sind $y_1(x)$ und $y_2(x)$ zwei Lösungen von 4.6 über einen Intervall $I = (\alpha, \beta)$, und sind $\lambda, \nu \in \mathbb{R}$, so ist auch $\lambda \cdot y_1 + \nu \cdot y_2$ eine Lösung von 4.6. L ist also ein Vektorraum.*

Beweis: E s gilt

$$\begin{aligned} (\lambda \cdot y_1 + \nu \cdot y_2)' &= \lambda \cdot y_1' + \nu \cdot y_2' \\ (\lambda \cdot y_1 + \nu \cdot y_2)'' &= \lambda \cdot y_1'' + \nu \cdot y_2'' \end{aligned}$$

Setzt man das in die Differentialgleichung ein, so sieht man unmittelbar, dass $\lambda \cdot y_1 + \nu \cdot y_2$ eine Lösung von 4.6 ist.

Folgerung 4.3.3. *Für jedes $x_0 \in I$ ist*

$$\varphi : L \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

mit $\varphi(y) = \binom{y(x_0)}{y'(x_0)}$ *ist eine Bijektion von Vektorräumen Insbesondere gilt also*

$$dim(L) = 2.$$

Beweis: W ir wählen ein beliebiges $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Aus dem Existenz– und Eindeutigkeitssatz 4.3.1 folgt nun, dass es zu jedem $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ eine eindeutige Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung 4.6 mit $y(x_0) = v_1$ und $y'(x_0) = v_2$ gibt. Also ist die Abbildung

$$\varphi : L \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

mit $\varphi(y) = \binom{y(x_0)}{y'(x_0)}$ bijektiv. Gemäß Satz 4.3.2 erhält sie auch die Vektorraumstrukturen, und daraus folgt die Behauptung.
Wir wollen uns nun der Frage nach den Lösungen einer homogenen linearen Differentialgleichung

$$y''(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) = 0$$

mit konstanten Koeffizienten zuwenden.

Definition 4.3.2. Das Polynom

$$P_D(x) := x^2 + ax + b$$

heißt das **charakteristische Polynom** der Differentialgleichung 4.6.

Beispiel 4.3.4. Die Differentialgleichung

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

der ungedämpften Schwingung hat das charakteristische Polynom

$$P_D(x) = x^2 + \omega^2$$

Definition 4.3.3. Ein **Fundamentalsystem** von Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung 4.6 sind zwei linear unabhängige Lösungen $y, \widetilde{y}$ von 4.6.

Bemerkung 4.3.1. Bilden $y, \widetilde{y}$ ein Fundamentalsystem von 4.6, und ist y^* eine beliebige Lösung von 4.6, so gibt es $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit

$$y^*(x) = \lambda y(x) + \mu \widetilde{y}(x)$$

für alle $x \in (\alpha, \beta)$.

Bemerkung 4.3.2. Zwei Lösungen $y, \widetilde{y}$ von 4.6 bilden genau dann ein Fundamentalsystem von 4.6, wenn für ein $x_0 \in (\alpha, \beta)$ gilt

$$W_{y,\widetilde{y}}(x_0) := \det \begin{pmatrix} y(x_0) & y'(x_0) \\ \widetilde{y}(x_0) & \widetilde{y}'(x_0) \end{pmatrix} \neq 0$$

Die Determinante $W_{y,\widetilde{y}}(x_0)$ heißt **Wronski–Determinante** von $y, \widetilde{y}$.
Ist $W_{y,\widetilde{y}}(x_0) \neq 0$ für ein $x_0 \in (\alpha, \beta)$, so gilt schon $W_{y,\widetilde{y}}(x) \neq 0$ für alle $x \in (\alpha, \beta)$.
Aus Folgerung 4.3.3 folgt nämlich, dass zwei Lösungen $y(x), \widetilde{y}(x)$ genau dann eine Basis des Lösungsraumes L bilden, wenn $\begin{pmatrix} y(x_0) \\ y'(x_0) \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \widetilde{y}(x_0) \\ \widetilde{y}'(x_0) \end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ bilden, was äquivalent mit $W_{y,\widetilde{y}}(x_0) \neq 0$ ist. Sind aber dann $y(x), \widetilde{y}(x)$ eine Basis von L, so gilt, wieder nach Korollar 4.3.3, dass auch für jedes andere $x \in I$ die Vektoren $\begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \widetilde{y}(x) \\ \widetilde{y}'(x) \end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ bilden, was äquivalent mit $W_{y,\widetilde{y}}(x) \neq 0$ ist.

Die Lösungen der homogenen Differentialgleichung hängen ab von den Nullstellen des charakteristischen Polynoms, also von den Lösungen der Gleichung

$$x^2 + ax + b = 0 \tag{4.7}$$

und diese Wiederum hängen ab von der Diskriminante dieser Gleichung, also von dem Ausdruck $a^2 - 4b$.
1. Fall: $a^2 - 4b > 0$
In diesem Fall hat die Gleichung 4.7 zwei (verschiedene) reelle Lösungen

$$\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

Satz 4.3.4. *Die beiden Funktionen*

$$y(x) := e^{\lambda_1 x}, \qquad \widetilde{y}(x) = e^{\lambda_2 x}$$

bilden ein Fundamentalsystem von 4.6.

Beweis: W ir rechnen zunächst nach, dass es sich dabei tatsächlich um Lösungen handelt. Dazu beachten wir, dass

$$y'(x) = \lambda_1 y(x), \quad y''(x) = \lambda_1^2 y(x)$$

und genauso für $\widetilde{y}$. Damit gilt für alle x:

$$\begin{aligned} y''(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) &= \lambda_1^2 \cdot y(x) + a \cdot \lambda_1 \cdot y(x) + b \cdot y(x) \\ &= (\lambda_1^2 + a \cdot \lambda_1 + b) \cdot y(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also handelt es sich bei $y(x)$ um eine Lösung, und genauso zeigt man, dass $\widetilde{y}(x)$ eine Lösung ist. Ferner gilt für ein beliebiges x_0:

$$W_{y,\widetilde{y}}(x_0) = (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot e^{(\lambda_1+\lambda_2)x_0} \neq 0$$

und damit bilden gemäß Bemerkung 4.3.2 $y, \widetilde{y}$ ein Fundamentalsystem von 4.6.

Beispiel 4.3.5. Die lineare Differentialgleichung

$$y''(x) - 4 \cdot y'(x) + 3 \cdot y(x) = 0 \tag{4.8}$$

hat charakteristisches Polynom $x^2 - 4x + 3$ mit Nullstellen $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 3$. Damit bilden

$$y(x) = e^x, \qquad \widetilde{y}(x) = e^{3x}$$

ein Fundamentalsystem von 4.8.
Betrachten wir zu dieser Differentialgleichung das Anfangswertproblem

$$y(0) = 3, \qquad y'(0) = 7$$

so können wir dieses nun wie folgt lösen:
Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung 4.8 hat die Gestalt

$$y(x) = c \cdot e^x + d \cdot e^{3x}$$

mit beliebigen Konstanten c und d. Damit hat die Ableitung der allgemeinen Lösung die Gestalt

$$y'(x) = ce^x + 4de^{3x}$$

Setzen wir hier die Anfangsbedingungen ein, so erhalten wir ein Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccc} c & + & d & = & 3 \\ c & + & 3d & = & 7 \end{array}$$

für c und d. Dieses hat die eindeutige Lösung $c = 1$ und $d = 3$, und somit ist

$$y(x) = e^x + 3e^{3x}$$

die Lösung unseres Anfangswertproblems.

2. Fall: $a^2 - 4b = 0$
In diesem Fall ist $\lambda := -\frac{a}{2}$ eine doppelte Nullstelle von $P_D(x)$, es gilt also

$$P_D(x) = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2$$

Satz 4.3.5. *Die beiden Funktionen*

$$y(x) := e^{\lambda x}, \qquad \widetilde{y}(x) = x \cdot e^{\lambda x}$$

bilden ein Fundamentalsystem von 4.6.

Beweis: W ir zeigen zunächst wieder, dass $y(x)$ und $\widetilde{y}(x)$ Lösungen der Differentialgleichung sind. Für $y(x)$ sieht man das wie im Beweis von 4.3.4, für $\widetilde{y}(x)$ erhalten wir zunächst

$$\widetilde{y}'(x) = y(x) + \lambda\widetilde{y}(x), \quad \widetilde{y}''(x) = 2\lambda y(x) + \lambda^2\widetilde{y}(x)$$

und damit

$$\begin{aligned} \widetilde{y}''(x) + a\widetilde{y}'(x) + b\widetilde{y}(x) &= \lambda^2\widetilde{y}(x) + 2\lambda y(x) + a \cdot \lambda\widetilde{y}(x) + ay(x) + by(x) \\ &= (\lambda^2 + a \cdot \lambda + b) \cdot \widetilde{y}(x) + (2\lambda + a) \cdot y(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

wobei wir hier auch noch ausgenutzt haben, dass $\lambda = -\frac{a}{2}$. Ferner gilt für ein beliebiges x_0:

$$W_{y,\widetilde{y}}(x_0) = e^{2\lambda x_0} \neq 0$$

und damit bilden gemäß Bemerkung 4.3.2 $y, \widetilde{y}$ ein Fundamentalsystem von 4.6.

Beispiel 4.3.6. Die lineare Differentialgleichung

$$y''(x) - 4 \cdot y'(x) + 4 \cdot y(x) = 0 \tag{4.9}$$

hat charakteristisches Polynom $x^2 - 4x + 4$ mit doppelter Nullstellen $\lambda = 2$. Damit bilden

$$y(x) = e^{2x}, \qquad \widetilde{y}(x) = x \cdot e^{2x}$$

ein Fundamentalsystem von 4.9.

3. Fall: $a^2 - 4b < 0$ In diesem Fall hat die Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ keine reelle Lösung. Setzen wir jedoch

$$\lambda := -\frac{a}{2}, \quad \omega := \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2}$$

so sind $x_1 := \lambda + i\omega$ und $x_2 := \lambda - i\omega$ zwei komplexwertige Lösungen dieser Gleichung.

Satz 4.3.6. *Die beiden Funktionen*

$$y(x) := e^{\lambda x} \cdot \cos(\omega x), \qquad \widetilde{y}(x) = e^{\lambda x} \cdot \sin(\omega x)$$

bilden ein Fundamentalsystem von 4.6.

Beweis: W ir zeigen wieder zunächst, dass $y(x)$ und $\widetilde{y}(x)$ Lösungen der Differentialgleichung sind. Hierzu beachten wir, dass x_1 und x_2 Lösungen der Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ sind. Andererseits gilt aber

$$x_1^2 + ax_1 + b = \lambda^2 - \omega^2 + a\lambda + b + i \cdot (2\lambda\omega - a\omega)$$

Da eine komplexe Zahl genau dann verschwindet, wenn ihr Realteil und ihr Imaginärteil verschwinden, bedeutet dies

$$\begin{aligned} \lambda^2 - \omega^2 + a\lambda + b &= 0 \\ 2\lambda\omega - a &= 0 \end{aligned}$$

Nutzen wir jetzt noch aus, dass gilt

$$\begin{aligned} y'(x) &= \lambda e^{\lambda x} \cos(\omega x) - \omega e^{\lambda x} \sin(\omega x) \\ y''(x) &= \lambda^2 e^{\lambda x} \cos(\omega x) - 2\omega\lambda e^{\lambda x} \sin(\omega x) - \omega^2 e^{\lambda x} \cos(\omega x) \end{aligned}$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} y''(x) &+ ay'(x) + by(x) \\ &= e^{\lambda x} \cdot [\cos(\omega x) \cdot (\lambda^2 + a\lambda + b - \omega^2) - \sin(\omega x)\,(2\lambda\omega + a\omega)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

und genauso gehen wir für $\widetilde{y}(x)$ vor. Ferner gilt für ein beliebiges x_0:

$$W_{y,\widetilde{y}}(x_0) = e^{\lambda x_0} \neq 0$$

und damit bilden gemäß Bemerkung 4.3.2 $y, \widetilde{y}$ ein Fundamentalsystem von 4.6.

Beispiel 4.3.7. Die Differentialgleichung

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

der ungedämpften Schwingung hat charakteristisches Polynom

$$x^2 + \omega^2$$

mit den rein imaginären Nullstellen $x_1 = i\omega$ und $x_2 = -i\omega$. Damit bilden

$$y(x) = \cos(\omega x), \qquad \widetilde{y}(x) = \sin(\omega x)$$

ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung.

Beispiel 4.3.8. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

die zu einer gedämpften Schwingung gehört. Sie hat charakteristisches Polynom

$$x^2 + 2x + 2$$

mit den Nullstellen $x_1 = -1 + i$ und $x_2 = -1 - i$. Damit bilden

$$y(x) = e^{-x}\cos(x), \qquad \widetilde{y}(x) = e^{-x}\sin(x)$$

ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung.

Wir wollen uns jetzt wieder der inhomogenen Differentialgleichung

$$y''(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) = f(x) \tag{4.10}$$

mit konstanten Koeffizienten zuwenden. Das Finden der allgemeinen Lösung vereinfacht sich etwas aufgrund von

Satz 4.3.7. *Ist $y(x), \widetilde{y}(x)$ ein Fundamentalsystem der homogenen linearen Differentialgleichung*

$$y''(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) = 0$$

und ist $y_p(x)$ ein spezielle Lösung von 4.10, so ist jede weitere Lösung $y^*(x)$ von 4.10 von der Gestalt

$$y^*(x) = y_p(x) + \lambda y(x) + \mu \widetilde{y}(x)$$

mit geeigneten reellen Zahlen λ, μ. Umgekehrt ist auch jede Funktion der Gestalt

$$y^*(x) = y_p(x) + \lambda y(x) + \mu \widetilde{y}(x)$$

mit reellen Zahlen λ, μ eine Lösung von 4.10.

Beweis: I st $y^*(x)$ eine weitere Lösung von 4.10, so rechnen wir unmittelbar nach, dass $y^*(x) - y_p(x)$ eine Lösung der hommogenen Differentialgleichung

$$y''(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) = 0$$

ist. Damit gilt also

$$y^*(x) - y_p(x) = \lambda y(x) + \mu \widetilde{y}(x)$$

mit geeigneten reellen Zahlen λ, μ, und hieraus folgt der erste Teil.
Ist jetzt umgekehrt

$$y^*(x) = y_p(x) + \lambda y(x) + \mu \widetilde{y}(x)$$

und setzen wir der Einfachheit halber $y_h(x) = \lambda y(x) + \mu \widetilde{y}(x)$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} (y^*)''(x) + a\,(y^*)'(x) + by^*(x) &= y_p''(x) + y_h''(x) + ay_p'(x) + ay_h'(x) \\ &\qquad + by_p(x) + by_h(x) \\ &= \big(y_p''(x) + ay_p'(x) + by_p(x)\big) \\ &\qquad + (y_h''(x) + ay_h'(x) + by_h(x)) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

und der Satz ist bewiesen.

Wir wollen versuchen, eine spezielle Lösung durch einen geschickten Ansatz zu ermitteln. Dazu wollen wir uns aber auf einigen ausgewählte Funktionen $f(x)$ beschränken.

1. Fall: $f(x)$ ist eine Polynomfunktion vom Grad n

Beispiel 4.3.9. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 2x + 3$$

Die Inhomogenität $f(x)$ ist also ein Polynom vom Grad 1. Unser Ansatz ist es, die spezielle Lösung wieder unter den Polynomen vom Grad 1 zu suchen, so dass $y_p(x)$ also die Gestalt $y_p(x) = c_1x + c_0$ (mit noch zu bestimmenden Koeffizienten c_1, c_0) hat. Setzen wir diesen Ansatz in die Differentialgleichung ein, so erhalten wir die Gleichung

$$-3c_1 + 2c_1x + 2c_0 = 2x + 3$$

Vergleichen wir jetzt die Koeffizienten von x und die konstanten Terme auf beiden Seiten, so bekommmen wir ein Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} 2c_1 & & & = & 2 \\ -3c_1 & + & 2c_0 & = & 3 \end{array}$$

woraus sich die eindeutige Lösung $c_1 = 1, c_2 = 3$ ergibt. In der Tat ist

$$y_p(x) = x + 3$$

eine spezielle Lösung unserer Differentialgleichung.

Beispiel 4.3.10. Wir wollen nun die Differentialgleichung

$$y''(x) - 3y'(x) = 2x + 3$$

betrachten. Versuchen wir auch hier den Ansatz $y_p(x) = c_1x + c_0$ wie in Beispiel 4.3.9, so erhalten wir nach Einsetzen

$$3c_1 = 2x + 3$$

eine Gleichung, die ganz offensichtlich nicht durch ein $c_1 \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ lösbar ist. Das Problem hier ist, dass $x = 0$ eine Nullstelle des charakteristische Polynoms $x^2 - 3x$ ist. Deshalb ist hier der Ansatz

$$y_p(x) = x \cdot (c_1x + c_0)$$

zu wählen. In der Tat erhalten wir jetzt nach Einsetzen

$$2c_1 + 2c_1x + c_0 = 2x + 3$$

und daraus - wieder durch Koeffizientenvergleich - die Lösung $c_1 = 1, c_0 = 1$, also

$$y_p(x) = x^2 + x$$

was auch wieder eine spezielle Lösung unserer Differentialgleichung ist.

Diese beiden Beispiele liefern uns die Idee für den allgemeinen Ansatz in diesem Fall. Wir betrachten ein Polynom $f(x)$ vom Grad n und setzen zunächst

$$C(x) = c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1x + c_0$$

mit noch zu bestimmenden Koeffizienten c_i und machen den folgenden Ansatz:

i) Falls $b \neq 0$, also $x = 0$ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms unserer Differentialgleichung ist

$$y_p(x) = C(x)$$

ii) Falls $b = 0$ aber $a \neq 0$, also $x = 0$ eine einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms unserer Differentialgleichung ist

$$y_p(x) = x \cdot C(x)$$

iii) Falls $b = 0$ und $a = 0$, also $x = 0$ eine doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms unserer Differentialgleichung ist

$$y_p(x) = x^2 \cdot C(x)$$

Satz 4.3.8. *Es gibt Koeffizienten $c_0, \ldots, c_n$, so dass $y_p(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung 4.10 ist.*

Beweis: S etzen wir $y_p(x)$ in die Differentialgleichung ein, so erhalten wir stets ein lineares Gleichungssystem in $c_0, \ldots, c_n$, dass sich eindeutig auflösen lässt.

Bemerkung 4.3.3. Beachten Sie, dass eine Konstante ein Polynom vom Grad 0 ist. Unser Ansatz liefert also speziell auch für Differentialgleichungen

$$y'' + ay' + by = c$$

eine Lösung.

2. Fall: $f(x) = x^n e^{\lambda x}$
Wir betrachten wieder

$$C(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

mit noch zu bestimmenden Koeffizienten c_i und machen den folgenden Ansatz:

i) Falls $x = \lambda$ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms unserer Differentialgleichung ist

$$y_p(x) = C(x) \cdot e^{\lambda x}$$

ii) Falls $x = \lambda$ eine einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms unserer Differentialgleichung ist

$$y_p(x) = x \cdot C(x) \cdot e^{\lambda x}$$

iii) Falls $x = \lambda$ eine doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms unserer Differentialgleichung ist

$$y_p(x) = x^2 \cdot C(x) \cdot e^{\lambda x}$$

Satz 4.3.9. *Es gibt Koeffizienten $c_0, \ldots, c_n$, so dass $y_p(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung 4.10 ist.*

Beweis: W ie im Beweis von Satz 4.3.8 führt Einsetzen von $y_p(x)$ (nach Division durch $e^{\lambda x}$) zu einem linearen Gleichungssystem für $c_0, \ldots, c_n$ mit einer eindeutigen Lösung.

3. Fall: $f(x) = x^n e^{\lambda x} \cos(\omega x)$ **oder** $f(x) = x^n e^{\lambda x} \sin(\omega x)$ mit $\omega \neq 0$.
Wir betrachten in diesem Fall zwei Polynome

$$C(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

und

$$D(x) = d_n x^n + d_{n-1} x^{n-1} + \cdots + d_1 x + d_0$$

mit noch zu bestimmenden Koeffizienten c_i und d_i und machen den folgenden Ansatz:

i) Falls $x = \lambda + i\omega$ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms unserer Differentialgleichung ist

$$y_p(x) = C(x) \cdot e^{\lambda x} \cos(\omega x) + D(x) \cdot e^{\lambda x} \sin(\omega x)$$

ii) Falls $x = \lambda + i\omega$ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms unserer Differentialgleichung ist

$$y_p(x) = x \cdot \big(C(x) \cdot e^{\lambda x} \cos(\omega x) + D(x) \cdot e^{\lambda x} \sin(\omega x) \big)$$

Satz 4.3.10. *Es gibt Koeffizienten $c_0, \ldots, c_n$ und $d_0, \ldots, d_n$, so dass $y_p(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung 4.10 ist.*

Beweis: S etzen wir in diesem Fall $y_p(x)$ in die Differentialgleichung ein, so erhalten wir ein kompliziertes Gleichungssystem, dass sich zunächst nicht einfach behandeln lässt. Fassen wir aber die Terme mit $\cos(\omega x)$ und die mit $\sin(\omega x)$ jeweils in einem eigenen Gleichungssystem zusammen und teilen wir dieses jeweils durch $e^{\lambda x} \cos(\omega x)$ bzw. $e^{\lambda x} \sin(\omega x)$, wo erhalten wir wieder lineare Gleichungssysteme, die uns eindeutige Lösungen für die c_i und d_i liefern.

Bemerkung 4.3.4. In diesem Fall müssen wir nicht zwischen einfacher und doppelter Nullstelle unterscheiden. Mit $\lambda + i\omega$ ist nämlich auch $\lambda - i\omega$ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms, und daher sind die Nullstellen immer einfache Nullstellen.

Beispiel 4.3.11. Wir betrachten die inhomogene Differentialgleichung

$$y''(x) + 2y'(x) = 4\cos(2x)$$

Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung ist $x^2 + 2x$. Insbesondere ist i keine Nullstelle hiervon, und wir können den Ansatz

$$y_p(x) = c\cos(2x) + d\sin(2x)$$

machen. Als Ableitungen erhalten wir

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= -2c\sin(2x) + 2d\cos(2x) \\ y_p''(x) &= -4c\cos(2x) - 4d\sin(2x) \end{aligned}$$

Setzen wir das in unsere Differentialgleichung ein, so erhalten wir

$$-4c\cos(2x) - 4d\sin(2x) - 4c\sin(2x) + 4d\cos(2x) = 4\cos(2x)$$

also

$$(4d - 4c)\cos(2x) - (4d + 4c)\sin(2x) = 4\cos(2x)$$

Trennen wir nun nach sin und cos, so erhalten wir daraus zwei Gleichungen

$$\begin{array}{ccccc} 4d & + & 4c & = & 0 \\ 4d & - & 4c & = & 4 \end{array}$$

also $d = \frac{1}{2}$ und $c = -\frac{1}{2}$. Damit ist eine spezielle Lösung gefunden, nämlich

$$y_p(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x)$$

Die allgemeine Lösung unsere Differentialgleichung lautet damit

$$y(x) = c + d \cdot e^{-2x} - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x)$$

Wollen wir also für diese Differentialgleichung das Anfangswertproblem

$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = 1$$

lösen, so führt uns das zum linearen Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} c & + & d & - & \frac{1}{2} & = & 1 \\ & - & 2d & - & 1 & = & 1 \end{array}$$

also zu $d = -1$, $c = \frac{5}{2}$, und damit zur Lösung

$$y(x) = \frac{5}{2} - e^{-2x} - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x)$$

Bemerkung 4.3.5. Die Fälle 1 bis 3 können nicht nur isoliert behandelt werden, die Ergebniss lassen sich auch wie folgt kombinieren:
Ist $y_1(x)$ eine spezielle Lösung von

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x)$$

und ist $y_2(x)$ eine spezielle Lösung von

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = g(x)$$

(also jeweils mit derselben zugrundeliegenden homogenen Differentialgleichung $y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$), so ist $y_p(x) = y_1(x) + y_2(x)$ eine spezielle Lösung von

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x) + g(x)$$

und für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist $y_q(x) = c \cdot y_1(x)$ eine spezielle Lösung von

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = c \cdot f(x)$$

Beispiel 4.3.12. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y''(x) - 2y'(x) = 4 + x \cdot e^x + 2e^x + \sin(x)$$

In diesem Beispiel treten also alle drei Fälle auf. Wir betrachten jeden Fall für sich und behandeln zunächst die Differentialgleichung

$$y''(x) - 2y'(x) = 4$$

Das charakteristische Polynom ist $x^2 - 2x$, hat also $\lambda = 0$ als Nullstelle, und wir machen daher den Ansatz

$$y_1(x) = cx$$

Einsetzen führt zur Gleichung $-2c = 4$, also zur speziellen Lösung

$$y_1(x) = -\frac{1}{2}x.$$

Der Fall e^x tritt zweimal auf, einmal als $x \cdot e^x$ und einmal als $2e^x$. Wir können diese Fälle zusammenfassen und gleich die Differentialgleichung

$$y''(x) - 2y'(x) = x \cdot e^x + 2e^x = (x + 2) \cdot e^x$$

betrachten. Wir machen hierfür den Ansatz

$$y_2(x) = (cx + d) \cdot e^x$$

(ausgehend von der höchsten auftretenden x–Potenz). Setzen wir diesen Ansatz ein, kommen wir zur Beziehung

$$-(cx + d) \cdot e^x = (x + 2) \cdot e^x$$

also $-cx - d = x + 2$. Durch Koeffizientenvergleich kommen wir zur Lösung $c = -1$ und $d = -2$, und damit zu

$$y_2(x) = (-x - 2) \cdot e^x.$$

Für den letzen Fall schließlich machen wir den Ansatz

$$y_3(x) = c \sin(x) + d \cos(x)$$

Einsetzen führt hier zur Gleichung

$$(2d - c) \sin(x) + (-d - 2c) \cos(x) = \sin(x)$$

und damit zum Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} 2d & - & c & = & 1 \\ -d & - & 2c & = & 0 \end{array}$$

also zu $c = -\frac{1}{5}$ und $d = \frac{2}{5}$ und damit zu

$$y_3(x) = -\frac{1}{5} \sin(x) + \frac{2}{5} \cos(x)$$

Damit erhalten wir also eine spezielle Lösung unserer Differentialgleichung

$$y_p(x) = -\frac{1}{2}x - (x + 2) \cdot e^x - \frac{1}{5} \sin(x) + \frac{2}{5} \cos(x)$$

und als allgemeine Lösung

$$y_(x) = c + d \cdot e^{2x} - \frac{1}{2}x - (x + 2) \cdot e^x - \frac{1}{5} \sin(x) + \frac{2}{5} \cos(x)$$

Bemerkung 4.3.6. Wie im Fall einer inhomogenen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten der Ordnung 1 können wir auch im Fall zweiter Ordnung die Laplace–Transformation zur Ermittlung der Lösung heranziehen. Betrachten wir die Gleichung

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x), \quad y(0) = y_0, y'(0) = y_1$$

so wird diese durch Laplace–Transformation (unter Ausnutzung der Rechenregeln für die Laplacetransformation aus der Analysis in einer Variablen) in die algebraische Gleichung

$$Y(s) = \frac{F(s) + y_0 \cdot s + y_0 \cdot a + y_1}{s^2 + a \cdot s + b}$$

umgewandelt, wobei wieder Y die Laplace–Transformierte von y und F die Laplace–Transformierte von f ist. Durch Rücktransformation lässt sich hieraus in vielen Fällen die Lösung leicht ermitteln.

Beispiel 4.3.13. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' - 3y' - 4y = e^x$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} y(0) &= 2 \\ y'(0) &= 1 \end{aligned}$$

Bemerkung 4.3.6und unseren Tabellen aus der Analysis I entnehmen wir, dass die Laplace–Transformierte $Y(s)$ einer Lösung $y(x)$ folgende Gestalt hat

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{s-a} + 2(s-3) + 1}{s^2 - 3s - 4} = \frac{1}{(s-1)(s-4)(s+1)} + \frac{2s-5}{(s-4)(s+1)}$$

Führen wir Partialbruchzerlegung durch, so ergibt sich

$$Y(s) = -\frac{1}{6(s-1)} + \frac{2}{3(s-4)} + \frac{3}{2(s+1)}$$

Aus unseren Tabellen können wir zu jedem der Summanden als Bildfunktion wieder eine Originalfunktion bestimmen und erhalten als Lösung

$$y(x) = -\frac{1}{6}e^{-x} + \frac{2}{3}e^{4x} + \frac{3}{2}e^{-x}$$

Bemerkung 4.3.7. Die Fälle, die hier behandelt wurden, können auch miteinander gemischt werden. Ist nämlich $y_1(x)$ eine Lösung von

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

und ist $y_2(x)$ eine Lösung von

$$y'' + ay' + by = g(x)$$

so ist offensichtlich $y_1(x) + y_2(x)$ eine Lösung von

$$y'' + ay' + by = f(x) + g(x)$$

Beispiel 4.3.14. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' - 3y' + 2y = 4e^{3x} + 8x$$

Um diese zu lösen, untersuchen wir zunächst

$$y'' - 3y' + 2y = 4e^{3x}$$

Diese Differentialgleichung hat eine spezielle Lösung $y_1(x) = 2e^{3x}$. Nun analysieren wir

$$y'' - 3y' + 2y = 8x$$

und erhalten hier als eine spezielle Lösung $y_2(x) = 4x + 6$. Damit hat unsere Ausgangsgleichung eine spezielle Lösung $y(x) = 2e^{3x} + 4x + 6$ und die allgemeine Lösung ist

$$y(x) = ce^x + de^{2x} + 2e^{3x} + 4x + 6$$

mit c, d beliebig.

Aufgabe 61. Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

Aufgabe 62. Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung

$$y'' - 4y = 0$$

Aufgabe 63. Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung

$$y'' + 4y = 0$$

Aufgabe 64. Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

Aufgabe 65. Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung

$$y'' + y' + 2y = 0$$

Aufgabe 66. Bestimmen Sie eine spezielle Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 3x$$

Aufgabe 67. Bestimmen Sie eine spezielle Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 2e^x$$

Aufgabe 68. Bestimmen Sie eine spezielle Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) - y(x) = e^x + \cos(x)$$

Aufgabe 69. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 2y(x) = x \cdot e^x + 2e^x + 3$$

4.4 Lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten

Bis jetzt haben wir uns nur mit Differentialgleichungen befasst, die eine Funktion in einer Variablen und ihre Ableitungen betreffen. Oft treffen wir in der Praxis aber Beispiele, in denen mehrere Funktionen auftauchen, die sich gegenseitig beeinflussen. Diese führen zu mehreren Differentialgleichungen, die mehrere Funktionen miteinander verbinden, sogenannten Systemen von Differentialgleichungen.

Beispiel 4.4.1. Je mehr Gras vorhanden ist, desto schnelle wächst die Hasenpopulation, je mehr Hasen vorhanden sind, desto stärker nimmt der Grasbestand ab. Diese Beziehung kann beschrieben werden durch zwei Differentialgleichungen, die etwa wie folgt aussehen könnten:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_2(t) \\ y_2'(t) &= -y_1(t) \end{aligned}$$

Dabei ist $y_1(t)$ die Hasenpopulation zum Zeitpunkt t, und $y_2(t)$ ist der Grasbestand zum Zeitpunkt t. Jede Differentialgleichung für sich hat eine sehr einfache Gestalt. Das Problem liegt offensichtlich darin, dass keine Differentialgleichung unabhängig von der anderen gelöst werden kann.

Definition 4.4.1. Ein **lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten** ist eine Beziehung der Form

$$Y'(x) = A \cdot Y(x) + F(x)$$

wobei

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad Y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}, \quad F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

mit Funktionen $y_1(x), \dots, y_n(x)$ und $f_1(x), \dots, f_n(x)$, die auf einem Intervall $I = (a, b)$ definiert sind, und einer $n \times n$–Matrix A.
Das Differentialgleichungssystem heißt **homogen**, wenn

$$f_1(x) = \cdots = f_n(x) = 0.$$

Beispiel 4.4.2. Die Beziehungen aus Beispiel 4.4.1 definieren das homogene lineare Differentialgleichungssystem

$$Y'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot Y(x)$$

Die Behandlung linearer Differentialgleichungssysteme erfordert im allgemeinen Fall ein tiefergehendes Verständnis der Matrix A und ihrer Normalform. Wir wollen uns daher auf einige einfache Fälle homogener Differentialgleichungssysteme beschränken.

Satz 4.4.1. *Ist* $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ *ein Eigenwert der* $n \times n$*–Matrix* A*, und ist* $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ *ein zugehöriger Eigenvektor, so definiert*

$$y_1(x) = v_1 \cdot e^{\lambda_0 \cdot x}, \quad y_2(x) = v_2 \cdot e^{\lambda_0 \cdot x}, \ldots, y_n(x) = v_n \cdot e^{\lambda_0 \cdot x}$$

eine Lösung $Y(x)$ *des homogenen Differentialgleichungssystems*

$$Y'(x) = A \cdot Y(x)$$

Beweis: W ir berechnen beide Seiten explizit:

$$Y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 v_1 e^{\lambda_0 \cdot x} \\ \lambda_0 v_2 e^{\lambda_0 \cdot x} \\ \vdots \\ \lambda_0 v_n e^{\lambda_0 \cdot x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \cdot \lambda_0 e^{\lambda_0 \cdot x}$$

und

$$\begin{aligned} A \cdot \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} &= A \cdot \begin{pmatrix} v_1 \cdot e^{\lambda_0 \cdot x} \\ v_2 \cdot e^{\lambda_0 \cdot x} \\ \vdots \\ v_n \cdot e^{\lambda_0 \cdot x} \end{pmatrix} \\ &= e^{\lambda_0 \cdot x} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \\ &= e^{\lambda_0 \cdot x} \cdot \lambda_0 \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \cdot \lambda_0 e^{\lambda_0 \cdot x} \end{aligned}$$

Damit haben wir die Aussage bewiesen.

Beispiel 4.4.3. Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y_2(x) \\ y_2'(x) &= y_1(x) \end{aligned}$$

Hierzu gehört die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix A hat die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$. Ein Eigenvektor zu λ_1 ist $\overrightarrow{v} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ und ein Eigenvektor zu λ_2 ist $\overrightarrow{w} = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Damit erhalten wir eine Lösung

$$\overline{y_1}(x) = e^x, \quad \overline{y_2}(x) = e^x$$

also

$$Y_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^x$$

und eine weitere Lösung

$$\widetilde{y_1}(x) = -e^{-x}, \quad \widetilde{y_2}(x) = e^{-x}$$

also

$$Y_1(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-x}$$

Die allgemeine Lösung unseres homogenen Differentialgleichungssystems erhalten wir nun dadurch, dass wir zwei Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ auswählen und

$$\begin{aligned} y_1(x) &= a \cdot \overline{y_1}(x) + b \cdot \widetilde{y_1}(x) = ae^x - be^{-x} \\ y_2(x) &= a \cdot \overline{y_2}(x) + b \cdot \widetilde{y_2}(x) = ae^x + be^{-x} \end{aligned}$$

setzen, also als

$$Y(x) = aY_1(x) + bY_2(x)$$

Beispiel 4.4.4. Wir greifen wieder Beispiel 4.4.1 auf:

$$Y'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot Y(x)$$

Die zugehörige Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ hat keine reellen Eigenwerte. Ihr charakteristisches Polynom lautet

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda + i) \cdot (\lambda - i)$$

Unser Satz 4.4.1 greift also in dieser Situation nicht.

Ähnlich wie Aussage 4.4.1 erhalten wir jedoch in dieser Situation

Satz 4.4.2. *Ist* $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ *ein komplexer Eigenwert der* $n \times n$*–Matrix* A*, und ist* $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ *ein zugehöriger komplexer Eigenvektor, so schreiben wir*

$$\lambda_0 = \mu_0 + i\omega_0 \qquad \textit{mit } \mu, \omega \in \mathbb{R},\ \omega_0 \neq 0$$

und für jedes l*:*

$$v_l = u_l + iw_l \qquad \textit{mit } u_l, w_l \in \mathbb{R}$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} \overline{y_1}(x) &= (u_1 \cos(\omega_0 x) - w_1 \sin(\omega_0 x))\, e^{\mu_0 \cdot x}, \\ &\vdots \\ \overline{y_n}(x) &= (u_n \cos(\omega_0 x) - w_n \sin(\omega_0 x))\, e^{\mu_0 \cdot x} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \widetilde{y_1}(x) &= (u_1 \sin(\omega_0 x) + w_1 \cos(\omega_0 x))\, e^{\mu_0 \cdot x}, \\ &\vdots \\ \widetilde{y_n}(x) &= (u_n \sin(\omega_0 x) + w_n \cos(\omega_0 x))\, e^{\mu_0 \cdot x} \end{aligned}$$

Dann ist sowohl

$$Y_1(x) = \left(\overline{y_1}(x) \;\vdots\; \overline{y_n}(x) \right)$$

als auch

$$Y_2(x) = \left(\widetilde{y_1}(x) \;\vdots\; \widetilde{y_n}(x) \right)$$

eine Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems

$$Y'(x) = A \cdot Y(x)$$

Beispiel 4.4.5. Wir greifen noch einmal Beispiel 4.4.1 auf:

$$Y'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot Y(x)$$

Die zugehörige Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix} \right)$ hat die komplexen Eigenwerte $\lambda_1 = i$ und $\lambda_2 = -i$. Ein Eigenvektor zu λ_1 ist $\overrightarrow{v} = \left(\begin{smallmatrix} -i \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$ und ein Eigenvektor zu λ_2 ist $\overrightarrow{w} = \left(\begin{smallmatrix} i \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$. Damit erhalten wir eine Lösung

$$\overline{y_1}(x) = \sin(x), \quad \overline{y_2}(x) = \cos(x)$$

und eine weitere Lösung

$$\widetilde{y_1}(x) = -\cos(x), \quad \widetilde{y_2}(x) = \sin(x)$$

Dabei ist es (bis auf ein Vorzeichen bei der zweiten Lösung) egal, ob wir von λ_1 und $\overrightarrow{v}$ ausgehen, oder von λ_2 und $\overrightarrow{w}$.
Die allgemeine Lösung unseres homogenen Differentialgleichungssystems erhalten wir nun dadurch, dass wir zwei Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ auswählen und

$$\begin{aligned} y_1(x) &= a \cdot \overline{y_1}(x) + b \cdot \widetilde{y_1}(x) = a \cdot \sin(x) + b \cdot \cos(x), \\ y_2(x) &= a \cdot \overline{y_2}(x) + b \cdot \widetilde{y_2}(x) = -a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x) \end{aligned}$$

setzen. Für die allgemeine Lösung macht es also auch keinen Unterschied, ob wir von λ_1 und $\overrightarrow{v}$ ausgehen, oder von λ_2 und $\overrightarrow{w}$.
Aus den Lösungen können wir auch erkennen, dass unsere Beziehungen nicht sorgfältig genug formuliert waren, denn unsere Ergebnisse würden auch zu negativen Populationen oder Grasbeständen führen.

In der Regel interessieren wir uns nicht für allgemeine Lösungen von $Y' = A \cdot Y$ sondern nur für solche, die vorgegebenen Zusatzbedingungen erfüllen, und zwar üblicherweise solche, die sich in der Form

$$y_1(x_0) = c_1, y_2(x_0) = c_2, \ldots, y_n(x_0) = c_n$$

schreiben lassen (*Anfangswertprobleme*).

Beispiel 4.4.6. Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y_2(x) \\ y_2'(x) &= y_1(x) \end{aligned}$$

aus Beispiel 4.4.3 mit den Anfangsbedingungen

$$y_1(0) = 2, \quad y_2(0) = 4$$

In Beispiel 4.4.3 haben wir schon ermittelt, dass die allgemeine Lösung die Gestalt

$$y_1(x) = ae^x - be^{-x}, \quad y_2(x) = ae^x + be^{-x}$$

hat. Setzen wir hier unsere Anfangsbedingungen ein, so erhalten wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccc} a & - & b & = & 2 \\ a & + & b & = & 4 \end{array}$$

Dieses System hat genau eine Lösung, nämlich $a = 3$, $b = 1$, und damit ist die eindeutige Lösung unseres Anfangswertproblems gegeben durch

$$y_1(x) = 3e^x - e^{-x}, \quad y_2(x) = 3e^x + e^{-x}$$

Aufgabe 70. Bestimmen Sie die die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{array}{ccccc} y_1'(x) & = & 2y_1(x) & + & y_2(x) \\ y_2'(x) & = & y_1(x) & + & 2y_2(x) \end{array}$$

mit $y_1(0) = 0, y_2(0) = 4$.

Aufgabe 71. Bestimmen Sie die die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{array}{ccccc} y_1'(x) & = & y_1(x) & + & y_2(x) \\ y_2'(x) & = & y_1(x) & + & y_2(x) \end{array}$$

mit $y_1(0) = 1, y_2(0) = 5$.

Aufgabe 72. Bestimmen Sie die Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$y'(x) = A \cdot y(x)$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 73. Bestimmen Sie die Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$y'(x) = A \cdot y(x)$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Bemerkung 4.4.1. Im Fall $n = 2$ ist es in vielen Fällen auch möglich, lineare Differentialgleichungssysteme (sogar inhomogene) durch ein Eliminationsverfahren zu lösen. Dazu betrachten wir ein lineares Differentialgleichungssystem

$$\begin{array}{rcccccc} y_1'(x) & = & ay_1(x) & + & by_2(x) & + & f_1(x) \\ y_2'(x) & = & cy_1(x) & + & dy_2(x) & + & f_2(x) \end{array}$$

wobei wir annehmen, dass die Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ stetig differenzierbar (in I) sind.
Wir können auch annehmen, dass entweder $b \neq 0$ oder $c \neq 0$, denn andernfalls erhalten wir zwei Differentialgleichungen, die in keiner Beziehung zueinander stehen. Wir betrachten den Fall $b \neq 0$; der Fall $c \neq 0$ geht analog.
Wegen $b \neq 0$ können wir die erste Beziehung nach $y_2(x)$ auflösen und erhalten

$$y_2(x) = \frac{1}{b} \cdot (y_1'(x) - ay_1(x) - f_1(x))$$

und hieraus durch differenzieren

$$y_2'(x) = \frac{1}{b} \cdot (y_1''(x) - ay_1'(x) - f_1'(x))$$

Setzen wir diese beiden Beziehungen in die zweite Gleichung ein und multiplizieren diese auch noch mit b, so erhalten wir

$$y_1''(x) - ay_1'(x) - f_1'(x) = cby_1(x) + dy_1'(x) - day_1(x) - df_1(x) + bf_2(x)$$

oder äquivalent

$$y_1''(x) - (a + d)y_1'(x) + (ad - bc)y_1(x) = f_1'(x) - df_1(x) + bf_2(x)$$

Wir haben also für y_1 eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten vom Grad 2 erhalten. Diese können wir mit den uns bekannten Methoden bearbeiten (und hoffentlich auch lösen). Aus der Beziehung

$$y_2(x) = \frac{1}{b} \cdot (y_1'(x) - ay_1(x) - f_1(x))$$

erhalten wir dann auch b.

Beispiel 4.4.7. Wir untersuchen das Differentialgleichungssystem

$$\begin{array}{rcccccc} y_1'(x) & = & y_1(x) & + & 3y_2(x) & + & e^{2x} \\ y_2'(x) & = & 3y_1(x) & + & y_2(x) & & \end{array}$$

Zunächst haben wir die Differentialgleichung

$$y_1''(x) - 2y_1'(x) - 8y_1(x) = e^{2x}$$

zu betrachten. Diese kann mit den uns bekannten Methoden gelöst werden, und wir erhalten als allgemeine Lösung

$$y_1(x) = c_1e^{4x} + c_2e^{-2x} - \frac{1}{8}e^{2x}$$

mit beliebigen Konstanten c_1, c_2. Hieraus wiederum ergibt sich

$$y_2(x) = c_1e^{4x} - c_2e^{-2x} - \frac{1}{3}e^{2x}$$

Aufgabe 74. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcr} y_1'(x) & = & 2y_1(x) & + & 3y_2(x) & + & e^x \\ y_2'(x) & = & 3y_1(x) & + & 2y_2(x) & + & \sin(x) \end{array}$$

Aufgabe 75. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcr} y_1'(x) & = & 2y_1(x) & + & y_2(x) \\ y_2'(x) & = & & & 2y_2(x) \end{array}$$

Aufgabe 76. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcr} y_1'(x) & = & 2y_1(x) & - & y_2(x) & & \\ y_2'(x) & = & -y_1(x) & + & 2y_2(x) & + & e^x \end{array}$$

Wir wollen jetzt nochmal zurückkehren zu linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Definition 4.4.2. Eine Differentialgleichung der Form

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0 \tag{4.11}$$

mit $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ heißt **homogene lineare Differentialgleichung der Ordnung** n **mit konstanten Koeffizienten.**

Bemerkung 4.4.2. Der Lösungsraum einer homogenen linearen Differentialgleichung der Ordnung n konstanten Koeffizienten mit ist ein Vektorraum der Dimension n. Das erhalten wir genauso wie im Fall einer homogenen linearen Differentialgleichung der Ordnung 2 (vergleiche 4.3.3) aus dem Anfangswertisomorphismus.

Hier scheint es zunächst keinerlei Beziehung zu linearen Differentialgleichungssystemen mit konstanten Koeffizienten zu geben. Wir können jedoch die Daten von 4.11 benutzen, um daraus ein Differentialgleichungssystem zu erhalten:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y_2(x) \\ y_2'(x) &= y_3(x) \\ &\vdots \\ y_{n-1}'(x) &= y_n(x) \\ y_n'(x) &= -a_0 y_1(x) - a_1 y_2(x) - \cdots - a_{n-1} y_n(x) \end{aligned} \tag{4.12}$$

In Matrizenschreibweise mit

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_{n-1}(x) \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

formuliert sich dieses System als

$$Y'(x) = A \cdot Y(x) \tag{4.13}$$

Satz 4.4.3. *Ist* $Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$ *eine nicht–triviale Lösung von 4.12 bzw. 4.13 über* $\mathbb{R}$*, so ist* $y_1(x)$ *eine nicht–triviale Lösung von 4.11.*
Ist umgekehrt $y(x)$ *eine nicht–triviale Lösung von 4.11 über* $\mathbb{R}$*, und setzen wir*

$$y_1(x) = y(x), \quad y_2(x) = y_1'(x), \quad \ldots, y_n(x) = y_{n-1}'(x)$$

so ist $Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$ *eine nicht–triviale Lösung von 4.12 bzw. 4.13.*

Beweis: Z unächst zeigen wir, dass $y_1(x)$ nicht–trivial ist , wenn $Y(x)$ nicht–trivial ist. Das beweisen wir mit Widerspruch und nehmen an, dass $y_1(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann erhalten wir aber sukkzessive wegen Beziehung 4.12 für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{lllll} y_2(x) & = & y_1'(x) & = & 0 \\ y_3(x) & = & y_2'(x) & = & 0 \\ & \vdots & & & \\ y_{n-1}(x) & = & y_{n-2}'(x) & = & 0 \\ y_n(x) & = & y_{n-1}'(x) & = & 0 \end{array}$$

also ist auch $Y(x)$ trivial, ein Widerspruch zu unserer Annahme.
Den Rest des Satzes erhalten wir durch einfaches Nachrechnen.

Damit können wir jetzt die Ergebnisse dieses Abschnitts über lineare Differentialgleichungssysteme erster Ordnung auf lineare Differentialgleichungen n–ter Ordnung anwenden. Eine wesentliche Rolle dabei spielt das charakteristische Polynom der Matrix A des zugehörigen Systems. Dieses hat eine erfreulich einfache Gestalt.

Satz 4.4.4. *Ist*

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0 \tag{4.14}$$

eine homogene lineare Differentialgleichung n–ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, und ist

$$Y'(x) = A \cdot Y(x)$$

das zugehörige Differentialgleichungssystem, so gilt

$$P_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

Beweis: D ie Matrizen, die bei linearen Differentialgleichungen n–ter Ordnung auftreten, sind alle von sehr spezieller Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

mit $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Wir wollen die Aussage mit Induktion über n für alle Matrizen dieser Form zeigen ($n \geq 2$).

$n = 2$: Es ist

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 + \lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda \cdot (\lambda + a_1) - (-1) \cdot a_0 \\ &= \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 \end{aligned}$$

und das ist gerade die Behauptung in diesem Fall.

$n > 2$: Wir nehmen an, dass wir die Aussage für $n(-1) \times (n-1)$–Matrizen dieser Form schon gezeigt haben. Speziell gilt also für die $(n-1) \times (n-1)$–Matrix

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

schon

$$P_A(\lambda) = \lambda^{n-1} + a_{n-1}\lambda^{n-2} + \dots + a_2\lambda + a_1$$

Entwickeln wir jetzt die Determinante von $\lambda \cdot E_n - A$ nach der ersten Spalte, so erhalten wir damit

$$\begin{aligned}
P_A(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & \lambda + a_{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \lambda \cdot \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-2} & \lambda + a_{n-1} \end{pmatrix} \\
&\qquad + (-1)^{n+1} a_0 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & \lambda + a_{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \lambda \cdot P_{A'}(\lambda) + (-1)^{n+1} \cdot (-1)^{n-1} \\
&= \lambda \cdot (\lambda^{n-1} + a_{n-1}\lambda^{n-2} + \dots + a_2\lambda + a_1) + a_0 \\
&= \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0
\end{aligned}$$

wobei wir von der dritten zur vierten Zeile die Induktionsvoraussetzung ausgenutzt haben und die Tatsache, dass sich für untere Dreiecksmatrizen die Determinante als Produkt der Diagonalelemente berechnet.
Damit ist die Behauptung auch für n gezeigt und gilt somit allgemein.

Definition 4.4.3. Das Polynom

$$P_D(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

heißt **charakteristisches Polynom** der homogenen linearen Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

der Ordnung n mit konstanten Koeffizienten

Aus den Sätzen 4.4.3 und 4.4.4 erhalten wir nun (wegen Satz 4.4.1 bzw. 4.4.2) sofort, dass die Nullstellen des charakteristischen Polynoms eine besondere Rolle spielen. Genauer gilt

Satz 4.4.5. *Ist $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $P_D(\lambda)$ der Differentialgleichung 4.11, so ist*

$$y(x) = e^{\lambda_0 x}$$

eine (nicht–triviale) Lösung von 4.11.
Ist $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ eine komplexe Nullstelle des charakteristischen Polynoms $P_D(\lambda)$ der Differentialgleichung 4.11, und schreiben wir

$$\lambda_0 = \mu_0 + i \cdot \omega_0$$

mit reellen μ_0, ω_0 und mit $\omega_0 \neq 0$, so sind

$$y(x) = e^{\mu_0 x} \cdot \cos(\omega_0 x), \quad \widetilde{y}(x) = e^{\mu_0 x} \cdot \sin(\omega_0 x)$$

zwei linear unabhängige Lösungen von 4.11.

Beweis: W ir nehmen an, wir haben eine reelle Nullstelle λ von $P_D(\lambda)$, und wir betrachten das zugehörige lineare Differentialgleichungssystem

$$Y'(x) = A \cdot Y(x)$$

Da $P_D(\lambda) = P_A(\lambda)$, ist λ_0 ein Eigenwert von A. Ist

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

ein zugehöriger Eigenvektor, so wissen wir schon aus Satz 4.4.1, dass

$$Y(x) = \overrightarrow{v} \cdot e^{\lambda_0 x}$$

eine (nicht–triviale) Lösung dieses Systems ist, und daher ist nach Satz 4.4.3

$$y_1(x) = v_1 \cdot e^{\lambda_0 x}$$

eine nicht–triviale Lösung von Gleichung 4.11, insbesondere ist also $v_1 \neq 0$. Damit ist aber auch

$$y(x) = \frac{1}{v_1} \cdot y_1(x) = e^{\lambda_0 x}$$

eine Lösung von Differentialgleichung 4.11.
Den Fall einer komplexen Nullstelle behandeln wir analog unter Verwendung von Satz. 4.4.2.

Bemerkung 4.4.3. Denn Fall einer reellen Nullstelle λ_0 von $P_D(\lambda)$ können wir auch direkt verifizieren. Setzen wir nämlich $y(x) = e^{\lambda_0 x}$ in Differentialgleichung 4.11 ein, so erhalten wir

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = P_D(\lambda_0) \cdot y(x) = 0$$

Beispiel 4.4.8. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y^{(3)} - 3y'' - y' + 3y = 0$$

Ihr charakteristisches Polynom ist

$$P_D(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 3$$

Wir sehen, dass wir $\lambda - 3$ ausklammern können und erhalten

$$P_D(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda^2 - 1) = (\lambda - 3)(\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

Wir haben also drei Nullstellen, $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = -1$ und entsprechend drei (linear unabhängige) Lösungen

$$y_1(x) = e^{3x}, \quad y_2(x) = e^{x}, \quad y_3(x) = e^{-x}$$

Da der Lösungsraum einer linearen homogenen Differentialgleichung der Ordnung n mit konstanten Koeffizienten ein Vektorraum der Dimension n ist, gibt es keine weiteren Lösungen, und die allgemeine Lösung ist von der Form

$$y(x) = ae^{3x} + be^{x} + ce^{-x}$$

mit reellen Zahlen a, b und c.

Beispiel 4.4.9. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y^{(4)} + 3y'' - 4y = 0$$

Ihr charakteristisches Polynom ist

$$P_D(\lambda) = \lambda^4 + 3\lambda^2 - 4$$

Hierbei handelt es sich um ein biquadratisches Polynom mit den Nullstellen

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 2i, \quad \lambda_4 = -2i$$

Aus der Bertrachtung von λ_1, λ_2 und λ_3 erhalten wir gemäß Satz 4.4.5 die vier Lösungen

$$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = e^{-x}, \quad y_3(x) = cos(2x), \quad y_4(x) = \sin(2x)$$

Die beiden Lösungen $y_5(x) = \cos(-2x) = \cos(2x)$ und $y_6(x) = \sin(-2x) = -\sin(2x)$ sind schon linear abhängig von $y_3(x)$ und $y_4(x)$, liefern also keinen wesentliche neuen Betrag. Daher erhalten wir als allgemeine Lösung

$$y(x) = ae^x + be^{-x} + c\cos(2x) + d\sin(2x)$$

mit reellen Zahlen a, b, c und d.

Beispiel 4.4.10. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y^{(3)} - 2y' - 4y = 0$$

Ihr charakteristisches Polynom ist

$$P_D(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda - 4$$

Durch Raten und Ausprobieren erhalten wir die Nullstelle $\lambda_1 = 2$ und damit

$$P_D(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 2) = \lambda - 2)(\lambda - (1 + i))(\lambda - (1 - i))$$

also die weiteren Nullstellen $\lambda_2 = 1 + i$ und $\lambda_3 = 1 - i$.
Aus den Nullstellen λ_1 und λ_2 erhalten wir die drei Lösungen

$$y_1(x) = e^{2x}, \quad y_2(x = e^x \cdot \cos(x), \quad y_3(x) = e^x \cdot \sin(x)$$

die Nullstelle λ_3 liefert als komplex–konjugierte Nullstelle von λ_2 keinen Beitrag.

Aufgabe 77. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(3)} + 2y'' - y' - 2y = 0$$

Aufgabe 78. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$$

Aufgabe 79. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(4)} + y'' - 6y = 0$$

Bemerkung 4.4.4. Jede Nullstelle des charakteristischen Polynoms liefert uns nun eine Lösung der Differentialgleichung. Hat also das charakteristische Polynom eine Differentialgleichung der Ordnung n genau n verschiedene Nullstellen, so erhalten wir auf diese Art und Weise n linear unabhängige Lösungen, und damit gemäß Bemerkung 4.4.2 eine Basis der Lösungsraums. Falls Nullstellen mehrfach auftreten, bekommen wir auf diese Art jedoch nicht alle Lösungen. Trotzdem können wir auch die verbleibenden aus dem charakteristischen Polynom bestimmen.
Ist $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ eine k–fache Nullstelle von $P_D(\lambda)$, können wir also $P_D(\lambda)$ genau k–mal ohne Rest durch $(\lambda - \lambda_0)$ teilen (nicht aber $k+1$–mal), so sind

$$y_1(x) = e^{\lambda_0 x}, \quad y_2(x) = x \cdot e^{\lambda_0 x}, \quad \cdots y_k(x) = x^{k-1} e^{\lambda_0 x}$$

linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung. Ist $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ eine k–fache komplexe Nullstelle, und schreiben wir $\lambda_0 = \mu_0 + \omega_0 i$ mit $\omega_0 \neq 0$, so sind

$$\begin{array}{rcl} y_1(x) &=& e^{\mu_0 x}\cos(\omega_0 x), \qquad y_2(x) = x e^{\mu_0 x}\cos(\omega_0 x), \\ && \cdots \; y_k(x) = x^{k-1} e^{\mu_0 x}\cos(\omega_0 x) \\ \widetilde{y_1}(x) &=& e^{\mu_0 x}\sin(\omega_0 x), \qquad \widetilde{y_2}(x) = x e^{\mu_0 x}\sin(\omega_0 x), \\ && \cdots \; y_k(x) = x^{k-1} e^{\mu_0 x}\sin(\omega_0 x) \end{array}$$

linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung.

Aufgabe 80. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(3)} + y'' - y' - y = 0$$

Aufgabe 81. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(4)} + 4y'' + 4y = 0$$

Beispiel 4.4.11. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y^{(3)} - 3y'' + 4y = 0$$

Ihr charakteristisches Polynom ist

$$P_D(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$$

Durch Raten und Ausprobieren erhalten wir die Nullstelle $\lambda_1 = -1$ und damit

$$P_D(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = \lambda + 1)(\lambda - 2)^2$$

also die weitere doppelte Nullstellen $\lambda_2 = 2$. Damit bilden

$$y_1(x) = e^{-x}, \quad y_2(x) = e^{2x}, \quad y_3(x) = x \cdot e^{2x}$$

drei linear unabhängige Lösungen, also eine Basis des Lösungsraums.

Bemerkung 4.4.5. In der Praxis sind häufig inhomogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x)$$

von Interesse. Wie im Fall der Ordnung 2 genügt es auch hier, eine spezielle Lösung zu bestimmen, alle anderen Lösungen erhalten wir wieder über das homogene Differentialgleichungssystem. Wir wollen uns hier auf ausgewählte Spezialfälle beschränken.
Ist $f(x) = x^l$ und ist $\lambda_0 = 0$ keine Nullstelle von $P_D(\lambda)$, so machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = a_l x^l + a_{l-1}x^{l-1} + a_1 x + a_0$$

mit unbestimmten Koeffizienten $a_0, \ldots, a_l$ und bestimmen $a_0, \ldots, a_l$, indem wir y_p in die Differentialgleichung einsetzen und Koeffizientenvergleich durchführen. Ist $\lambda_0 = 0$ eine k–fache Nullstelle von $P_D(\lambda)$, so machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = x^k \cdot \big(a_l x^l + a_{l-1}x^{l-1} + a_1 x + a_0\big)$$

Ist $f(x) = x^l \cdot e^{\lambda_0 x}$ und ist λ_0 keine Nullstelle von $P_D(\lambda)$, so machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = \big(a_l x^l + a_{l-1} x^{l-1} + a_1 x + a_0\big) \cdot e^{\lambda_0 x}$$

mit unbestimmten Koeffizienten $a_0, \ldots, a_l$ und bestimmen $a_0, \ldots, a_l$, indem wir y_p in die Differentialgleichung einsetzen und Koeffizientenvergleich durchführen. Ist λ_0 eine k–fache Nullstelle von $P_D(\lambda)$, so machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = x^k \cdot \big(a_l x^l + a_{l-1} x^{l-1} + a_1 x + a_0\big) \cdot e^{\lambda_0 x}$$

Ist $f(x) = x^l \cdot e^{\mu_0 x} \cdot \cos(\omega_0 x)$ oder $(x) = x^l \cdot e^{\mu_0 x} \cdot \sin(\omega_0 x)$ und ist $\lambda_0 = \mu_0 + i\omega_0$ keine Nullstelle von $P_D(\lambda)$, so machen wir den Ansatz

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \big(a_l x^l + a_{l-1} x^{l-1} + a_1 x + a_0\big) \cdot e^{\mu_0 x} \cos(\omega_0 x) \\ &\qquad + \big(b_l x^l + b_{l-1} x^{l-1} + b_1 x + b_0\big) \cdot e^{\mu_0 x} \cos(\omega_0 x) \end{aligned}$$

mit unbestimmten Koeffizienten $a_0, \ldots, a_l, b_0, \ldots, b_l$ und bestimmen $a_0, \ldots, a_l$, $b_0, \ldots, b_l$, indem wir y_p in die Differentialgleichung einsetzen und Koeffizientenvergleich durchführen. Ist $\lambda_0 = \mu_0 + i\omega_0$ eine k–fache Nullstelle von $P_D(\lambda)$, so machen wir den Ansatz

$$\begin{aligned} y_p(x) &= x^k \cdot \Big[\big(a_l x^l + a_{l-1} x^{l-1} + a_1 x + a_0\big) \cdot e^{\mu_0 x} \cos(\omega_0 x) \\ &\qquad + \big(b_l x^l + b_{l-1} x^{l-1} + b_1 x + b_0\big) \cdot e^{\mu_0 x} \cos(\omega_0 x)\Big] \end{aligned}$$

mit unbestimmten Koeffizienten $a_0, \ldots, a_l, b_0, \ldots, b_l$ und bestimmen $a_0, \ldots, a_l$, $b_0, \ldots, b_l$, indem wir y_p in die Differentialgleichung einsetzen und Koeffizientenvergleich durchführen.

Beispiel 4.4.12. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y^{(3)} - 3y'' - y' + 3y = 2x + 3$$

Da 0 keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms der Differentialgleichung ist, machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = ax + b$$

Einsetzen liefert

$$-a + 3(ax + b) = 2x + 3$$

als

$$3ax + 3b - a = 2x + 3$$

Koeffizientenvergleich liefert die beiden Gleichungen

$$\begin{array}{rcrcl} 3a & & & = & 2 \\ -a & + & 3b & = & 3 \end{array}$$

also $a = \frac{2}{3}$ und $b = \frac{11}{9}$. Damit haben wir die spezielle Lösung

$$y_p(x) = \frac{2}{3}x + \frac{11}{9}$$

Mit den Ergebnissen aus Beispiel 4.4.8 ergibt sich als allgemeine Lösung

$$y(x) = ae^{3x} + be^{x} + ce^{-x} + \frac{2}{3}x + \frac{11}{9}$$

Aufgabe 82. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(3)} - 2y'' - y' + 2y = e^{2x}$$

Aufgabe 83. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(3)} + 2y'' - y' - 2y = 4xe^{x}$$

Aufgabe 84. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(4)} + 3y'' - 4y = xe^{-2x}$$

Aufgabe 85. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(4)} + 8y'' + 16y = 3\cos(2x)$$