DHBW Mannheim
Informatik

Mannheim, 07.06.2023
Mathematik II/2

Lösungen zu Übungsblatt 9

Aufgabe 1. Die Grundgesamtheit besitze den Mittelwert μ und die Varianz σ^2. Die Stichproben $X_1, ..., X_5$ seinen unabhängige Ziehungen aus dieser Grundgesamtheit. Man betrachte als Schätzfunktion für μ die Stichprobenfunktion

$$\begin{aligned}
T_1 &= \overline{X} = \tfrac{1}{5}(X_1 + X_2 + ... + X_5),\\
T_2 &= \tfrac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3),\\
T_3 &= \tfrac{1}{8}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) + \tfrac{1}{2}X_5,\\
T_4 &= X_1 + X_2,\\
T_5 &= X_1.
\end{aligned}$$

a) Welche Schätzfunktionen sind erwartungstreu für μ?

Lösung:

$$\begin{aligned}
E(T_1) &= \mu,\\
E(T_2) &= \mu,\\
E(T_3) &= \tfrac{1}{8}4\mu + \tfrac{1}{2}\mu = \mu,\\
E(T_4) &= \mu + \mu = 2\mu,\\
E(T_5) &= \mu.
\end{aligned}$$

Mit Ausnahme der Schätzfunktion T_4 sind also alle Schätzfunktionen erwartungstreu für μ.

b) Welche Schätzfunktion ist die wirksamste, wenn alle Verteilungen mit existierender Varianz zur Konkurrenz zugelassen werden?

Lösung:

Zunächst berechnet man den jeweiligen MSE, der bei den erwartungstreuen Schätzern mit der Varianz übereinstimmt:

$$\begin{aligned}
MSE(T_1) &= Var(T_1) = \tfrac{1}{25}5\sigma^2 = \tfrac{1}{5}\sigma^2,\\
MSE(T_2) &= Var(T_2) = \tfrac{1}{9}3\sigma^2 = \tfrac{1}{3}\sigma^2,\\
MSE(T_3) &= Var(T_3) = \tfrac{1}{64}4\sigma^2 + \tfrac{1}{4}\sigma^2 = \tfrac{5}{16}\sigma^2,\\
MSE(T_5) &= Var(T_5) = \sigma^2.
\end{aligned}$$

Damit besitzt die Schätzfunktion T_1 für alle σ^2 den kleinsten MSE und ist somit unter den angegebenen Funktionen T_1 bis T_5 am wirksamsten.

Aufgabe 2. Die Suchzeiten von n Projektteams, die in verschiedenen Unternehmen dasselbe Problem lösen sollen, können als unabhängig und identisch exponentialverteilt angenommen werden. Aufgrund der vorliegenden Daten soll nun der Parameter λ der Exponentialverteilung mit der Maximum-Likelihood-Methode geschätzt werden. Es ergab sich eine durchschnittliche Suchzeit von $\overline{x} = 98$.
Stellen Sie die Likelihoodfunktion auf und bestimmen Sie die ML-Schätzfunktion für λ und berechnen Sie den ML-Schätzwert von λ.

Lösung:
Sei X_i die Suchzeit des i-ten Teams. Für $x = (x_1, ..., x_n)$ ergibt sich die Likelihoodfunktion

$$f(x|\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum x_i}.$$

Zur Bestimmung des ML-Schätzers wird diese nach λ differenziert und gleich null gesetzt:

$$n\lambda^{n-1} e^{-\lambda \sum x_i} - \lambda^n e^{-\lambda \sum x_i} \sum x_i = 0$$

$$\Leftrightarrow n - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{\overline{x}}.$$

Man erhält also allgemein $\hat{\lambda} = \frac{1}{\overline{x}}$ als ML-Schätzer für λ. Im vorliegenden Beispiel gilt

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{98} = 0.01.$$