Übungen zur linearen Algebra - lineare Abbildungen

1. Bestimmen Sie eine Basis des Kerns von
   $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

2. Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung mit
   $f(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $f(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

   (a) Bestimmen Sie $f(\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}), f(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix})$ sowie $f(\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix})$

   (b) Bestimmen Sie Kern und Bild von f

3. Geben Sie den Lösungsraum des linearen Gleichungssystem an

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 11 \\ -2x_1 + 3x_3 &= 1 \\ 8x_1 + 10x_2 + 3x_3 &= 21 \end{aligned}$$

4. Sei im Vektorraum $V = \mathbb{R}^{2x2}$ die Matrix B gegeben durch $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ und die lineare Abbildung $f : V \longrightarrow V$ durch $f(A) = A \cdot B$.

   (a) Bestimmen sie eine Matrixdarstellung von f bezüglich der Einheitsbasis der E_{kl} (nur das Element a_{kl} ist 1 die anderen 0) .

   (b) Bestimmen Sie eine Basis von $ker(f)$.

   (c) Stellen Sie $f(B)$ in der Einheitsbasis dar.

5. Sei $V = \mathbb{R}[X]^{\leq 3}$ der Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner gleich drei mit reellen Koeffizienten. Eine Basis von V ist gegeben durch die Polynome $\{1, x, x^2, x^3\}$. Wir untersuchen die lineare Abbildung $D : V \longrightarrow V$, die die Ableitung eines Polynoms beschreibt. Bestimmen Sie die darstellende Matrix von D bezüglich dieser Basis sowie $ker(D)$ und $Im(D)$ durch Angabe einer Basis.
   Anmerkung : Was gilt für D^n die n-fache Ableitung ?