DHBW Mannheim
Informatik

Mannheim, 02.11.2022
Mathematik II/1

Lösungen zu Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3-3x^2+3y^2+3(x+y)}{x^2+y^2-2(x-y)+2} & \text{für } (x,y) \neq (1,-1) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (1,-1) \end{cases}$$

auf partielle Differenzierbarkeit nach x und nach y im Punkt $(1,-1)$ und berechnen Sie die partiellen Ableitungen dort, falls sie existieren.

Lösung:
Zunächst schreiben wir $f(x,y)$ für $(x,y) \neq (1,-1)$ um und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{x^3+y^3-3x^2+3y^2+3(x+y)}{x^2+y^2-2(x-y)+2} &= \frac{x^3-3x^2+3x-1+y^3+3y^2+3y+1}{x^2-2x+1+y^2+2y+1} \\ &= \frac{(x-1)^3+(y+1)^3}{(x-1)^2+(y+1)^2} \end{aligned}$$

Zur Untersuchung der partiellen Differenziebarkeit nach x betrachten wir die partielle Funktion $g(x) = f(x,-1)$. Für $x \neq 1$ gilt

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x,-1) \\ &= \frac{(x-1)^3}{(x-1)^2} \\ &= x-1 \end{aligned}$$

Wegen $g(1) = f(1,-1) = 0 = 1-1$ ist also $g(x) = x-1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit ist $g(x)$ differenzierbar in $x = 1$, also ist $f(x,y)$ partiell nach x differenzierbar in $(1,0)$ und

$$f_x(1,-1) = g'(1) = 1$$

Zur Untersuchung der partiellen Differenziebarkeit nach y betrachten wir die partielle Funktion $h(y) = f(1,y)$. Für $y \neq -1$ gilt

$$\begin{aligned} h(y) &= f(1,y) \\ &= \frac{(y+1)^3}{(y+1)^2} \\ &= y+1 \end{aligned}$$

und wegen $h(-1) = f(1,-1) = -1+1 = 0$ ist also $h(y) = y+1$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Damit ist $h(y)$ differenzierbar in $y=-1$, also auch $f(x,y)$ partiell nach y differenzierbar in $(1,-1)$ und

$$f_y(1,-1) = h'(-1) = 1$$

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\cdot y\cdot(x+y)\cdot(x-y)}{(x^2+y^2)^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

im Punkt $(0,0)$ partiell differenzierbar nach x und nach y aber nicht stetig ist.

Lösung:
Wie in der Vorlesung betrachten wir die Funktion

$$g(x) = f(x,0) = \begin{cases} \frac{x^3\cdot 0}{x^4} = 0 & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Also gilt $g(x) = 0$ für alle x und damit ist g differenzierbar in 0. Daher existiert $f_x(0,0)$ und

$$f_x(0,0) = g'(0) = 0$$

Alternativ ergibt auch die Betrachtung des Differentialquotienten

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{0}{x^4}-0}{x} = 0$$

Analog betrachten wir

$$h(y) = f(0,y) = \begin{cases} \frac{0\cdot(-y^3)}{y^4} = 0 & \text{für } y \neq 0 \\ 0 & \text{für } y = 0 \end{cases}$$

Also ist $h(y) = 0$ für alle y und damit ist h differenzierbar in 0. Daher existiert $f_y(0,0)$ und

$$f_y(0,0) = h'(0) = 0$$

Alternativ ergibt auch hier die Betrachtung des Differenzenquotienten

$$\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \frac{\frac{0}{y^4}-0}{y} = 0$$

so dass also der Differentialquotient existiert.
Aber $f(x,y)$ ist nicht stetig in $(0,0)$. Allerdings greifen hier die üblichen Testfolgen nicht. Betrachten wir jedoch $y = 2x$ $(x \neq 0)$, so gilt

$$f(x,2x) = \frac{x\cdot(2x)\cdot(3x)\cdot(-x)}{(x^2+(2x)^2)^2} = \frac{-6x^4}{25x^4} = -\frac{6}{25}$$

und hierfür existiert zwar Grenzwert für $x \to 0$, aber es gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{-6}{25} = \frac{-6}{25} \neq 0 = f(0,0)$$

Alternativ können wir etwa die Folge $a_n = (\frac{1}{n}, \frac{2}{n})$ betrachten, die gegen $(0,0)$ konvergiert, und erhalten

$$f(a_n) = \frac{\frac{-3}{8n^4}}{\frac{25}{16n^4}} = \frac{-6}{25}$$

so dass $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \frac{-6}{25} \neq 0 = f(0,0)$.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie alle Punkte an denen die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x \cdot y \cdot \sqrt{x^2+y^2}$ partiell nach x bzw. y differenzierbar ist und bestimmen Sie dort die partiellen Ableitungen.

Lösung:
Wir wenden zunächst die Kettenregel auf $F(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ an: $g(x,y) = x^2+y^2$ ist überall partiell differenzierbar (Vorlesung) und nicht negativ, $g(x,y) = 0$ genau dann, wenn $x = y = 0$, und $h(t) = \sqrt{t}$ ist differenzierbar für $t > 0$. Damit ist $F(x,y)$ partiell differenzierbar an allen Stellen $(x,y) \neq (0,0)$ und es gilt dort nach der Kettenregel

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) &= \tfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \tfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) &= \tfrac{y}{\sqrt{x^2+y^4}} \end{aligned}$$

Nun wenden wir die Produktregel auf $f(x,y) = x \cdot y \cdot F(x,y)$ an und erhalten

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= y \cdot \sqrt{x^2+y^2} + \tfrac{x^2 \cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \tfrac{2x^2y+y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x \cdot \sqrt{x^2+y^2} + \tfrac{x \cdot y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \tfrac{x^3+2x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}$$

Der Punkt $(0,0)$ muss separat untersucht werden. Hier wenden wir die Definition an und erhalten

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot 0 \cdot \sqrt{x^2}}{x} = 0$$

also ist $f(x,y)$ in $(0,0)$ partiell nach x differenzierbar mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

Ferner berechnen wir

$$\lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{0 \cdot y \cdot \sqrt{y^2}}{y} = 0$$

also ist $f(x,y)$ in $(0,0)$ partiell nach y differenzierbar mit

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Aufgabe 4. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung der Funktion $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sqrt{1 + \ln\left(1 + \sqrt{2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}\right)}$.

Lösung:
Zunächst ist f überall nach allen Variablen differenzierbar (Summen–, Produkt– und Kettenregel). Wir betrachten zuerst die Funktion $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sqrt{2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$$

Da der Ausdruck unter der Wurzel (als Polynomfunktion) partiell differenzierbar nach allen Variablen ist und nur positive Werte annnimmt, gilt hierfür nach der Kettenregel (für alle i)

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1, x_2, x_3, x_3, x_4) = \frac{x_i}{\sqrt{2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}}$$

und die Funktion $h(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1 + g(x_1, x_2, x_3, x_4)$ hat die gleichen Ableitungen (Addition einer Konstanten) und außerdem ebenfalls nur positive Werte. Damit ist (erneut nach der Kettenregel) die Funktion $k : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$k(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1 + \ln\left(1 + \sqrt{2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}\right) = 1 + \ln\left(h(x_1, x_2, x_3, x_4)\right)$$

(auch hier ist die Addition der Konstanten 1 irrelevant für die partielle Differenzierbarkeit) partiell differenzierbar nach allen Variablen mit partiellen Ableitungen (für alle i):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial k}{\partial x_i}(x_1, x_2, x_3, x_3, x_4) &= \frac{1}{h(x_1, x_2, x_3, x_4)} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_i}(x_1, x_2, x_3, x_4) \\
&= \frac{1}{1 + \sqrt{2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} \cdot \frac{x_i}{\sqrt{2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} \\
&= \frac{x_i}{\left(1 + \sqrt{2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}\right) \cdot \sqrt{2 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4}}
\end{aligned}$$

Außerdem hat auch k nur positive Werte.
Die Funktion $l :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ mit $l(t) = \sqrt{t}$ ist bekanntlich (Analysis I) differenzierbar mit $l'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$, und damit erhalten wir für $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = l(k((x_1, x_2, x_3, x_4))$ (wieder nach der Kettenregel) für alle $i \in \{1, 2, 3, 4\}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, x_3, x_3, x_4) &= \frac{1}{2\sqrt{k(x_1, x_2, x_3, x_4)}} \cdot \frac{\partial k}{\partial x_i}(x_1, x_2, x_3, x_4) \\
&= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1 + \ln\left(1 + \sqrt{2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}\right)}} \\
&\quad \cdot \frac{x_i}{\left(1 + \sqrt{2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}\right) \cdot \sqrt{2 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 5. Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}^4$ der Funktion, die gegeben ist durch

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$$

Zeigen Sie dass die Funktion in ihrem Definitionsbereicht zweimal stetig partiell differenzierbar ist, und dass sie eine Lösung der Laplacegleichung

$$\Delta f = 0$$

ist, wobei

$$\Delta(f)(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{k=1}^{4} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

Lösung:
Der maximale Definitionsbereich dieser Funktion ist $\mathbb{R}^4 \setminus \{(0,0,0)\}$, und dort ist sie auch überall zweimal stetig partiell differenzierbar nach allen Variablen (nach der Summen–, Produkt–, Quotienten– und Kettenregel). Nach diesen Regeln (speziell der Quotientenregel) gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= -\frac{2x_1}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= -\frac{2}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)^2} + \frac{8x_1^2}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4)^3} \\
&= \frac{8x_1^2 - 2\cdot \sum\limits_{k=1}^{4} x_k^2}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4)^3}
\end{aligned}$$

und aus Symmetriegründen gilt analog für $i = 2, 3, 4$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= -\frac{2x_i}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= -\frac{2}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)^2} + \frac{8x_i^2}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4)^3} \\
&= \frac{8x_i^2 - 2\cdot \sum\limits_{k=1}^{4} x_k^2}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4)^3}
\end{aligned}$$

Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned}
\Delta(f)(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{4}\left(8x_i^2 - 2\cdot \sum\limits_{k=1}^{4} x_k^2\right)}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4)^3} \\
&= \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{4} 8x_i^2\right) - 8\cdot\left(\sum\limits_{k=1}^{4} x_k^2\right)}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4)^3} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Aufgabe 6. Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}^2$ der durch die Vorschrift $f(x,y) = \frac{x \cdot y}{x-y}$ gegebenen Funktion und bestimmen Sie dort alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung 3.

Lösung:
Die Funktion f hat maximalen Definitionsbereich $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \, x \neq y\}$. Dort ist sie auch überall beliebig oft stetig partiell differenzierbar (wiederholtes Anwenden der Quotientenregel). Die Quotientenregel ergibt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{-y^2}{(x-y)^2} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{x^2}{(x-y)^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{2y^2}{(x-y)^3} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{-2xy}{(x-y)^3} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{2x^2}{(x-y)^3} \\
\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y) &= -\frac{6y^2}{(x-y)^4} \\
\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x,y) &= \frac{4xy+2y^2}{(x-y)^4} \\
\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x,y) &= -\frac{4x^2+2xy}{(x-y)^4} \\
\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y) &= \frac{6x^2}{(x-y)^4}
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir schon ausgenutzt, dass die Differentiationsreihenfolge bei stetiger partieller Differenzierbarkeit keine Rolle spielt. Damit sind alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung 3 bestimmt.