Übungen zur linearen Algebra - Vektorräume

1. Ist der Polynomring $\mathbb{R}[X]$ mit der Addition ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ?

2. Gegeben seien die folgenden Vektoren in $\mathbb{C}^2$
$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}$
Zeigen Sie, daß die Vektoren über $K = \mathbb{C}$ linear abhängig sind aber über $K = \mathbb{R}$ linear unabhängig.

3. Ist $U$ ein Untervektoraum von $V$ ? Warum oder warum nicht.
   (a) $U = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x + 2y - z = 0\}, \quad V = \mathbb{R}^3$
   (b) $U = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 | x + y^2 = 0\}, \quad V = \mathbb{R}^2$
   (c) $U = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V | a_i \neq 0, \text{für höchstens endlich viele} \quad i \in \mathbb{N}\}$
   $V = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} | a_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \mathbb{N}\}$
   (d) $U = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f(x) = f(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}\}, \quad V = Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

4. Gegeben sind die Vektoren in $V = \mathbb{R}^4$ ( Achtung geändert !!!)
$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
Zeigen Sie , daß $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ eine Basis von $V$ ist.
Stellen Sie den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ in dieser Basis dar.