DHBW Mannheim
Informatik

Mannheim, 17.05.2023
Mathematik II/2

Lösungen zu Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Flugreisen werden von Veranstaltern häufig überbucht, denn eine gebuchte Reise wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 10 % nicht angetreten. Wir nehmen in dieser Aufgabe an, dass die Entscheidungen der einzelnen Bucher, die Reise anzutreten oder nicht, unabhängig voneinander sind.

a) Ein Veranstalter bucht bei einer Fluggesellschaft 56 Flüge und verkauft an seine Kunden 60 Flüge.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Plätze reichen?

b) Ein Veranstalter will 60 Plätze an seine Kunden verkaufen. Wie viele Plätze im Flugzeug muss er buchen, damit sie mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % reichen?

c) Ein Veranstalter bucht bei einer Fluggesellschaft 43 Plätze. Wie viele Plätze kann er an seine Kunden verkaufen, damit die Plätze mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % reichen?

Lösung:
Dieser Aufgabe liegt die Bernoulli–Variable Y: Kunde tritt die gebuchte Reise an, dh.

$$Y(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega = \text{Kunde tritt Reise an} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist Y eine Bernoulli–Variable mit Parameter $p = 0.90$.
Sind $Y_1, \ldots, Y_n$ unabhängige Wiederholungen von Y, so ist

$$X = X^{(n)} = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$$

binomialverteilt mit den Parametern n und 0.90, und $p(X = k)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genaue k von den n Personen die Reise antreten.

a) In diesem Fall ist $n = 60$ und gesucht ist $p(X^{(60)} \leq 56)$. Rechentechnisch einfacher zu ermitteln ist jedoch die Komplementärwahrscheinlichkeit, also

$$\begin{aligned} p(X \leq 56) &= 1 - p(X \geq 57) \\ &= 1 - p(X = 57) - p(X = 58) - p(X = 59) - p(X = 60) \\ &= 1 - \binom{60}{57} \cdot 0.9^{57} \cdot 0.1^3 - \binom{60}{58} \cdot 0.9^{58} \cdot 0.1^2 \\ &\quad - \binom{60}{59} \cdot 0.9^{59} \cdot 0.1^1 - \binom{60}{60} \cdot 0.9^{60} \cdot 0.1^0 \\ &= 0.8626 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Plätze reichen, liegt also bei 86.26 %.

b) Gesucht ist in diesem Fall das k, sodass (bei $n = 60$) $p(X^{(60)} \leq k) \geq 0.95$. In Teil a) haben wir schon gesehen, dass es auf jeden Fall $k > 56$ gelten muss, und wir probieren hier alle möglichen verbleibenden Kandidaten, wobei wir vorgehen wie folgt:

$$\begin{array}{lclcl}
p(X \leq 60) & & & = & 1 \\
p(X \leq 59) & = & p(X \leq 60) - p(X = 60) & = & 0.9982 \\
p(X \leq 58) & = & p(X \leq 59) - p(X = 59) & = & 0.9862 \\
p(X \leq 57) & = & p(X \leq 58) - p(X = 58) & = & 0.9470
\end{array}$$

Damit sind wir fertig, bei 58 Plätzen reichen diese noch mit einer Wahrscheinlichkeit von 98.62 %, bei 57 Plätzen liegt die Wahrscheinlichkeit mit 94.70 % jedoch schon unter den geforderten 95 %.

c) Gesucht ist in diesem Fall ein n , sodass $p(X^{(n)} \leq 43) \geq 0.95$. Die Aufgabeteile a) und b) lassen vermuten, dass n nicht sehr viel größer als 43 sein wird. Wir beginnen daher mit $n = 43$ und erhöhen n dann sukzessive um 1.

$$\begin{array}{lclcl}
p(X^{(43)} \leq 43) & & & = & 1 \\
p(X^{(44)} \leq 43) & = & 1 - p(X^{(44)} = 44) & = & 0.9903 \\
p(X^{(45)} \leq 43) & = & 1 - p(X^{(45)} = 45) - p(X^{(45)} = 44) & = & 0.9476
\end{array}$$

Damit sehen wir, dass mit 45 verkauften Flügen die angestrebte Wahrscheinlichkeit schon nicht mehr erreicht wird. Der Veranstalter kann also maximal 44 Flüge verkaufen.

Aufgabe 2. Wir betrachten eine geometrische verteilte Zufallsvariable X mit Parameter p, d.h. $p(X = n) = (1 - p)^{n-1} \cdot p$ für $n \geq 1$.
Zeigen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen $n, m \geq 1$ gilt:

$$p(X \geq n + m | X \geq n) = p(X \geq m + 1)$$

Lösung:
Für $k \in \mathbb{N}$ gilt nach der geometrischen Summenformel

$$\begin{array}{lcl}
p(X \leq k) & = & \sum\limits_{l=1}^{k} p \cdot (1-p)^{l-1} = p \cdot \frac{(1-p)^k - 1}{(1-p) - 1} = 1 - (1-p)^k \\
p(X < k) & = & \sum\limits_{l=1}^{k-1} p \cdot (1-p)^{l-1} = p \cdot \frac{(1-p)^{k-1} - 1}{(1-p) - 1} = 1 - (1-p)^{k-1}
\end{array}$$

also

$$p(X > k) = (1-p)^k, \qquad p(X \geq k+1) = (1-p)^k$$

und damit (da $\{X \geq n + m\} \cap \{X \geq n\} = \{X \geq n + m\}$)

$$\begin{array}{lcl}
p(X \geq n + m | X \geq n) & = & \dfrac{p(X \geq n + m)}{p(X \geq n)} \\
& = & \dfrac{(1-p)^{n+m-1}}{(1-p)^{n-1}} \\
& = & (1-p)^m \\
& = & p(X \geq m + 1)
\end{array}$$

Aufgabe 3. Bei einem Fußballspiel kommt es nach einem Unentschieden zum Elfmeterschießen. Zunächst werden von jeder Mannschaft fünf Elfmeter geschossen, wobei eine Mannschaft gewinnt, falls sie häufiger getroffen hat als die andere Mannschaft. Nehmen Sie an, dass die einzelnen Schüsse unabhängig voneinander sind und jeder Schütze mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,8 trifft. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es nach zehn Schüssen (fünf pro Mannschaft) zu einer Entscheidung kommt?

Lösung:
Seien X_1 = Anzahl von Treffern der Mannschaft A und X_2 = Anzahl von Treffern der Mannschaft B sowie Y = Anzahl von Schüssen bis zur Entscheidung. Nach $2 \cdot n$ Schüssen gilt $X_1 \sim B(n, 0,8)$ und $X_2 \sim B(n, 0,8)$. Insbesondere lautet die Verteilung nach fünf Schüssen pro Mannschaft in Tabellenform für $i = 1, 2$:

x	0	1	2	3	4	5
$P(X_i = x)$	$0,0003$	$0,0064$	$0,0512$	$0,2048$	$0,4096$	$0,3277$

Die Wahrscheinlichkeit für ein Unentschieden nach insgesamt zehn Schüssen beträgt somit

$$\begin{aligned} P(X_1 = X_2) &= 0,0003^2 + 0,0064^2 + 0,0512^2 \\ &\quad + 0,2048^2 + 0,4096^2 + 0,3277^2 \\ &= 0,3198 \end{aligned}$$

Also gilt $P(Y = 10) = 1 - 0,3198 = 0,6802$.

Aufgabe 4. Die Anzahl der pro Sekunde zerfallenden Teilchen in einem radioaktiven Material mit hoher Halbwertszeit (z.B. von mehreren Jahrtausenden) ist (in sehr guter Näherung) Poissson–verteilt.

a) Von einer radioaktiven Probe zerfallen im Mittel 20.00 Teilchen pro Sekunde. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Sekunde exakt 20 Teilchen zerfallen?

b) Von einer radioaktiven Probe zerfallen im Mittel 20.00 Teilchen pro Sekunde. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Sekunde mindestens 10 Teilchen zerfallen?

c) von einer radioaktiven Probe ist bekannt, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 1 % höchstens 3 Teilchen pro Sekunden zerfallen. Wie viele Teilchen in dieser Periode zerfallen im Mittel in einer Sekunde? Geben Sie Ihr Ergebnis auf drei Nachkommastellen genau an.

Lösung:
Mit X bezeichnen wir die Zufallsvariable, die die Anzahl der pro Sekunde zerfallenden Teilchen bezeichnet. Dann ist X eine Poisson–verteilte Zufallsvariable mit

Parameter λ wobei λ der Erwartungswert von X, also die Anzahl der im Mittel pro Sekunde zerfallenden Teilchen ist. Damit gilt

$$p(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \qquad \text{für alle } k \geq 0$$

also

a) In diesem Fall ist $\lambda = 20$ und damit

$$p(X=20) = \frac{20^{20}}{20!} \cdot e^{-20} = 0.0888$$

b) In diesem Fall ist $\lambda = 20$ und damit

$$\begin{aligned} p(X \geq 10) &= 1 - p(X \leq 9) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{9} \tfrac{20^k}{k!} \cdot e^{-20} \\ &= 1 - 0.0049954 \\ &= 0.9950046 \end{aligned}$$

c) In diesem Fall ist λ unbekannt. Wir wissen lediglich, dass

$$p(X \leq 3) = 0.03$$

also

$$\frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} + \frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} + \frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda} = 0.01$$

und damit

$$1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{6} = 0.01 \cdot e^{\lambda}$$

Wir suchen also eine Lösung der Gleichung

$$0.01 \cdot e^{\lambda} - 1 - \lambda - \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^3}{6} = 0$$

bzw. eine Nullstelle der Funktion

$$f(\lambda) = 0.01 \cdot e^{\lambda} - 1 - \lambda - \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^3}{6}$$

Diese Gleichung kann exakt nicht mehr gelöst werden. Durch Einsetzen und Ausprobieren erhält man aber

$$f(5) = -37.85, \quad f(10) = -7.40, \quad f(15) = 31\,999$$

Die Lösung befindet sich also zwischen 10 und 15. Weiteres Probieren ergibt

$$f(11) = 304.41$$

also liegt das gesuchte λ zwischen 10 und 11. Ein numerisches Verfahren unserer Wahl (z.B. Intervallschachtelung mit Start $[10, 11]$ oder das Newtonverfahren mit Startwert 11) liefern nun

$$\lambda = 10.045$$

Es zerfallen also ziemlich genau 10 Teilchen pro Sekunde.