Übungen zur linearen Algebra - Vektorräume

1. U und V seien zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume mit $dim(U) = m$ und $dim(V) = n$. Wir definieren das kartesische Produkt $W = U \times V$ mit den Verknüpfungen $(u_1, v_1) + (u_2, v_2) := (u_1 + u_2, v_1 + v_2) \quad r \cdot (u, v) := (r \cdot u, r \cdot v)$ W ist ebenfalls $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zeigen Sie : $dim(W) = m + n$

2. Bestimmen sie zum Untervektoraum U des $\mathbb{R}^3$ jeweils den orthogonalen Untervektorraum $U^\perp$ durch Angabe einer Basis

   (a) $U = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | x + y - z = 0 \}$

   (b) $U = \{ \begin{pmatrix} 2r + s \\ r - s \\ r \end{pmatrix} | r, s \in \mathbb{R} \}$

3. Benutzen sie das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren, um eine ONB aus den Vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu erzeugen.

4. (für Spezialisten) Im Vekktorraum der Polynome höchstens dritten Grades definieren wir das Sklarprodukt (ohne Beweis) $< f, g > := \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Geben sie zum Polynom $f(x) = 2x - 1$ ein orthogonales an.