$$\begin{aligned} 3x + 5y &= 8 \\ 6x + ay &= b \end{aligned}$$

mit $a=10$: $0 = b - 16 \rightsquigarrow b$ so, dass $b \neq 16$

$\rightsquigarrow (a-10)\cdot y = b - 16$

(i) finde $a, b$, sodass keine Lösung besitzt.

$a = 10,\ b = 9 \rightsquigarrow$ LGS:
$$\begin{aligned} 3x + 5y &= 8 \quad \mathrm{I} \\ 6x + 10y &= 9 \quad \mathrm{II} \end{aligned}$$
$$\underbrace{6x+10y}_{2\cdot(3x+5y)} \overset{\mathrm{I}}{=} 2\cdot 8 = 16 \neq 9$$

"Trick": finde $a, b$ so, dass (i) linke Seite von I ein Vielfaches von der linken Seite von II.
(ii) die rechten Seiten von I & II nicht zusammenpassen.

Hier: Vgl. der Koeffizienten von $x$ liefert:
linke Seite von II $= 2\cdot$ linke Seite von I
wegen $6 = 2\cdot 3$

$\Longrightarrow a = 2\cdot 5 = 10$

Rechte Seiten: Wähle $b$ so, dass $2\cdot 8 \neq b \rightsquigarrow$ z.B. $b = 9$.

(ii) Feststellung: LGS in $\underset{n}{2}$ Variablen & mit $\underset{n}{2}$ Gleichungen.

d.h. wenn es eine Lösung besitzt, dann gilt entweder

1.) die Lösung eindeutig & in diesem Fall bedeutet das, dass die zugehörige Matrix vollen Rang besitzt

2.) es gibt unendl. viele Lsg. und in diesem Fall hat die zugeh. Matrix nicht vollen Rang.

Zugeh. Matrix ist $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & a \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow$ wollen: $\operatorname{rang}(A) = 1$, d.h. die Zeilen von $A$ sind linear abhängig, d.h. (da $A$ aus 2 Zeilen hat), dass die Zeilen sind Vielfache voneinander.

$\rightsquigarrow a = 10.$

Wähle b so, dass die rechten Seiten des LGS dieselben Vielfachen voneinander sind, d.h.

$$2 \cdot 8 = b \rightsquigarrow b = 16.$$

---

$$4x + a \cdot y = 10$$
$$b \cdot x - 6y = -20$$

(i) keine Lösung: "Trick": Wähle a, b so, dass die linken Seiten von I & II gleich sind

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & a & 10 \\ b & -6 & -20 \end{array}\right)$$

$\rightsquigarrow b = 4, \ a = -6$

$\rightsquigarrow 10 \neq -20$

(ii) unendlich viele Lösungen:

multipliziere I mit (-2): $\begin{array}{rl} -8x - 2ay &= -20 \\ bx - 6y &= -20 \end{array}$

$\rightsquigarrow$ wähle a, b so, dass linken Seiten gleich, d.h.

$$b = -8, \ -2a = -6 \Leftrightarrow (a, b) = (3, -8).$$

---

# § Lineare Abb.

- **Def.:** Eine $\mathbb{R}$-lineare Abb. $f: V_1 \longrightarrow V_2$, wobei $V_1, V_2$ $\mathbb{R}$-Vektorräume, mit der Eigenschaft, dass

$$f(r_1 \cdot \vec{v}_1 + r_2 \cdot \vec{v}_2) = r_1 \cdot f(\vec{v}_1) + r_2 \cdot f(\vec{v}_2) \text{ für alle }$$
$$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V_1 \text{ und } r_1, r_2 \in \mathbb{R}.$$

• Darstellende Matrix: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Wähle eine Basis von $\mathbb{R}^n$, $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$.

Dann ergibt sich (bzgl. dieser Basis) die darstellende Matrix $A$ wie folgt:

$$A = (\underbrace{f(\vec{b}_1)}_{1.\,\text{Spalte}}, \dots, \underbrace{f(\vec{b}_n)}_{n\text{-te Spalte}}).$$

Sei nun $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Wollen: $f(\vec{v})$ bestimmen.

$\rightsquigarrow$ Schreibe $\vec{v} = c_1 \cdot \vec{b}_1 + \dots + c_n \cdot \vec{b}_n$, wobei $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.

Dann gilt: $f(\vec{v}) = A \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$. " $= c_1 \cdot (1.\text{Spalte von } A) + \dots$

$+ c_n \cdot (n\text{-te Spalte von } A)$

$= c_1 \cdot f(\vec{b}_1) + \dots + c_n \cdot f(\vec{b}_n)$ "

• Spezialfall: Standardbasis: $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, b_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(i) Bestimme $A = (f(\vec{b}_1), \dots, f(\vec{b}_n))$

(ii) Sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$:

$$\vec{v} = v_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + v_n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

d.h. $f(\vec{v}) = A \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = A \cdot \vec{v}$.

Bsp.: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear mit $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \overset{f \text{ linear}}{=} f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) - 2 \cdot f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$= (3 \quad - 2 \cdot (1 \quad = (1$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

---

- Rang eines Matrix : • die Dimension des Zeilenraums
  • — " — Spaltenraums

- Rang eines Matrix bzw. des Darstellungsmatrix eines linearen Abb.:
  • Dimension des Bildes.

Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineare Abb., sei $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$.

$$\hookrightarrow A = (f(\vec{b}_1), \dots, f(\vec{b}_n))$$

$$\hookrightarrow \operatorname{im}(f) = \langle f(\vec{b}_1), \dots, f(\vec{b}_n) \rangle_{\mathbb{R}}$$

$c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.

$\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ : $\vec{v} = c_1 \cdot \vec{b}_1 + \dots + c_n \cdot \vec{b}_n$ (weil $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ Basis von $\mathbb{R}^n$)

$$\Rightarrow f(\vec{v}) = f(c_1 \vec{b}_1 + \dots + c_n \cdot \vec{b}_n)$$

$$\overset{f \text{ linear}}{=} c_1 \cdot f(\vec{b}_1) + \dots + c_n \cdot f(\vec{b}_n)$$

$$\in \langle f(\vec{b}_1), \dots, f(\vec{b}_n) \rangle_{\mathbb{R}}$$

$$\rightsquigarrow \bullet \operatorname{im}(f) \subseteq \langle f(\vec{b}_1), \dots, f(\vec{b}_n) \rangle_{\mathbb{R}}$$

$\operatorname{im}(f) := \{ f(\vec{v}) \mid \vec{v} \in \mathbb{R}^n \}$

• "$\supseteq$" : Seien $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ beliebig.
Dann gilt:

$$\langle f(\vec{b}_1), \dots, f(\vec{b}_n) \rangle \ni c_1 f(\vec{b}_1) + \dots + c_n \cdot f(\vec{b}_n)$$

$$\overset{f \text{ lin.}}{=} f(\underline{c_1 \cdot \vec{b}_1 + \dots + c_n \cdot \vec{b}_n}) \in \operatorname{im}(f)$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\in \mathbb{R}^n}$

- Rang eines Matrix berechnen:

Normalform: $\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \\ 0 & & & \ddots \; 0 \end{pmatrix}$

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{3.\text{Zeile}-1.\text{Zeile}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2.\text{Zeile}\cdot(-1)} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1.Z.-2\cdot 3.Z.} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{1.Z. \& 3.Z.} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{3.Z.+2.Z.}{\xrightarrow{1.Z.-2.Z.,}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \operatorname{rang}(A) = 2.$

- Kern eines linearen Abb.: Geg.: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear.

$\ker(f) := \{ \vec{v} \in \mathbb{R}^n : f(\vec{v}) = \vec{0} \}.$

$\ker(f) = Z^\perp$, wenn $Z$ den Zeilenraum der darstellenden Matrix von $f$ bezeichne.

- $\dim \ker(f) + \dim \operatorname{im}(f) = \dim(\mathbb{R}^n) = n.$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$