Lineare Algebra
Eigenwerte und Diagonalisierbarkeit

Reinhold Hübl

Wintersemester 2020/21

Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Mannheim

orthogonale Matrizen

Definition

Eine $n \times n$–Matrix A heißt **orthogonal**, wenn die Spalten von A eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ bilden.

Beispiel

Die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

sind orthogonal.

orthogonale Matrizen

Definition

Eine $n \times n$–Matrix A heißt **orthogonal**, wenn die Spalten von A eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ bilden.

Beispiel

Die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

sind orthogonal.

orthogonale Matrizen

Regel

Für eine $n \times n$–Matrix A sind äquivalent

- *A ist orthogonal.*

orthogonale Matrizen

Regel

Für eine $n \times n$–Matrix A sind äquivalent

- *A ist orthogonal.*
- *A ist invertierbar und $A^{-1} = A^\top$*

orthogonale Matrizen

Regel

Für eine $n \times n$–Matrix A sind äquivalent

- *A ist orthogonal.*
- *A ist invertierbar und $A^{-1} = A^{\top}$*
- $\langle A \cdot \overrightarrow{x}, A \cdot \overrightarrow{x} \rangle = \langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{x} \rangle$ *für alle $x \in \mathbb{R}^n$.*

orthogonale Matrizen

Regel

Für eine $n \times n$–Matrix A sind äquivalent

- *A ist orthogonal.*
- *A ist invertierbar und $A^{-1} = A^\top$*
- $\langle A \cdot \overrightarrow{x}, A \cdot \overrightarrow{x} \rangle = \langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{x} \rangle$ *für alle $x \in \mathbb{R}^n$.*

Beispiel

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

orthogonale Matrizen

Regel

Für eine $n \times n$–Matrix A sind äquivalent

- *A ist orthogonal.*
- *A ist invertierbar und $A^{-1} = A^\top$*
- $\langle A \cdot \overrightarrow{x}, A \cdot \overrightarrow{x} \rangle = \langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{x} \rangle$ *für alle $x \in \mathbb{R}^n$.*

Beispiel

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

orthogonale Matrizen

Regel

Ist A eine orthogonale 2×2–Matrix, so gibt es ein $\alpha \in [0, 2\pi[$ mit

$$A = D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

oder

$$A = S_{\frac{\alpha}{2}} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Bemerkung

Die Matrix D_α beschreibt eine Drehung um den Winkel α, die Matrix $S_{\frac{\alpha}{2}}$ beschreibt eine Spiegelung an der Ursprungsgerade mit Winkel $\frac{\alpha}{2}$ zur x–Achse.

orthogonale Matrizen

Regel

Ist A eine orthogonale 2×2–Matrix, so gibt es ein $\alpha \in [0, 2\pi[$ mit

$$A = D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

oder

$$A = S_{\frac{\alpha}{2}} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Bemerkung

Die Matrix D_α beschreibt eine Drehung um den Winkel α, die Matrix $S_{\frac{\alpha}{2}}$ beschreibt eine Spiegelung an der Ursprungsgerade mit Winkel $\frac{\alpha}{2}$ zur x–Achse.

Eigenwert und Eigenvektor

Wir betrachten eine $n \times n$–Matrix A.

Definition

Ein $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt **Eigenwert** von A, wenn es einen Vektor $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$, $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ gibt mit

$$A \cdot \overrightarrow{v} = \lambda \cdot \overrightarrow{v}$$

In diesem Fall heißt der Vektor $\overrightarrow{v}$ **Eigenvektor** von A zum Eigenwert λ.

Eigenwert und Eigenvektor

Wir betrachten eine $n \times n$–Matrix A.

Definition

Ein $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt **Eigenwert** von A, wenn es einen Vektor $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$, $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ gibt mit

$$A \cdot \overrightarrow{v} = \lambda \cdot \overrightarrow{v}$$

In diesem Fall heißt der Vektor $\overrightarrow{v}$ **Eigenvektor** von A zum Eigenwert λ.

Eigenwert und Eigenvektor

Beispiel

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

hat den Eigenwert $\lambda_1 = 3$. Eigenvektor dazu ist

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix A hat auch noch den Eigenwert $\lambda_2 = -1$. Eine passender Eigenvektor dazu ist

$$\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenwert und Eigenvektor

Beispiel

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

hat den Eigenwert $\lambda_1 = 3$. Eigenvektor dazu ist

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix A hat auch noch den Eigenwert $\lambda_2 = -1$. Eine passender Eigenvektor dazu ist

$$\vec{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenwert und Eigenvektor

Regel

Genau dann ist ein Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A, wenn $\det(\lambda \cdot E_n - A) = 0$.

In diesem Fall ist jeder nicht–triviale Vektor $\overrightarrow{v} \in \mathrm{Ker}(\lambda \cdot E_n - A)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ.

Eigenwert und Eigenvektor

Regel

Genau dann ist ein Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A, wenn $\det(\lambda \cdot E_n - A) = 0$.
In diesem Fall ist jeder nicht–triviale Vektor $\overrightarrow{v} \in \operatorname{Ker}(\lambda \cdot E_n - A)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ.

Definition

Der Ausdruck $P_A(\lambda) = \det(\lambda \cdot E_n - A)$ heißt das **charakteristische Polynom** der Matrix A.

Eigenwert und Eigenvektor

Regel

Genau dann ist ein Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A, wenn $\det(\lambda \cdot E_n - A) = 0$.
In diesem Fall ist jeder nicht–triviale Vektor $\overrightarrow{v} \in \operatorname{Ker}(\lambda \cdot E_n - A)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ.

Definition

Der Ausdruck $P_A(\lambda) = \det(\lambda \cdot E_n - A)$ heißt das **charakteristische Polynom** der Matrix A.

Regel

Genau dann ist λ_0 ein Eigenwert von A, wenn $P(\lambda_0) = 0$.

Eigenwert und Eigenvektor

Regel

Genau dann ist ein Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A, wenn $\det(\lambda \cdot E_n - A) = 0$.
In diesem Fall ist jeder nicht–triviale Vektor $\overrightarrow{v} \in \operatorname{Ker}(\lambda \cdot E_n - A)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ.

Definition

Der Ausdruck $P_A(\lambda) = \det(\lambda \cdot E_n - A)$ heißt das **charakteristische Polynom** der Matrix A.

Regel

Genau dann ist λ_0 ein Eigenwert von A, wenn $P(\lambda_0) = 0$.

Regel

Ist A eine $n \times n$–Matrix, so ist $P_A(\lambda)$ ein normiertes Polynom vom Grad n in λ.

Eigenwert und Eigenvektor

Regel

Genau dann ist ein Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A, wenn $\det(\lambda \cdot E_n - A) = 0$.
In diesem Fall ist jeder nicht–triviale Vektor $\vec{v} \in \operatorname{Ker}(\lambda \cdot E_n - A)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ.

Definition

Der Ausdruck $P_A(\lambda) = \det(\lambda \cdot E_n - A)$ heißt das **charakteristische Polynom** der Matrix A.

Regel

Genau dann ist λ_0 ein Eigenwert von A, wenn $P(\lambda_0) = 0$.

Regel

Ist A eine $n \times n$–Matrix, so ist $P_A(\lambda)$ ein normiertes Polynom vom Grad n in λ. Damit hat A höchstens n verschiedene Eigenwerte.

Eigenwert und Eigenvektor

Regel

Genau dann ist ein Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A, wenn $\det(\lambda \cdot E_n - A) = 0$.
In diesem Fall ist jeder nicht–triviale Vektor $\vec{v} \in \operatorname{Ker}(\lambda \cdot E_n - A)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ.

Definition

Der Ausdruck $P_A(\lambda) = \det(\lambda \cdot E_n - A)$ heißt das **charakteristische Polynom** der Matrix A.

Regel

Genau dann ist λ_0 ein Eigenwert von A, wenn $P(\lambda_0) = 0$.

Regel

Ist A eine $n \times n$–Matrix, so ist $P_A(\lambda)$ ein normiertes Polynom vom Grad n in λ. Damit hat A höchstens n verschiedene Eigenwerte.

Eigenwert und Eigenvektor

Beispiel

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

hat das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det\left(\begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= (\lambda - 1) \cdot (\lambda - 1) - (-2) \cdot (-2) \\ &= \lambda^2 - 2 \cdot \lambda - 3 \end{aligned}$$

Damit hat A die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -1$ (und keine weiteren).

Eigenwert und Eigenvektor

Beispiel

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

hat das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det\left(\begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= (\lambda - 1) \cdot (\lambda - 1) - (-2) \cdot (-2) \\ &= \lambda^2 - 2 \cdot \lambda - 3 \end{aligned}$$

Damit hat A die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -1$ (und keine weiteren).

Eigenwert und Eigenvektor

Beispiel (fortgesetzt)

Zur Bestimmung der Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 3$ betrachte das homogene Gleichungssystem $(3 \cdot E_2 - A) \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ mit Koeffizentenmatrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

mit augmentierte Matrix und Normalform

$$(A|\overrightarrow{0}) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{array} \right), \qquad (A'|\overrightarrow{0}) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Eigenvektoren von A zu $\lambda_1 = 3$ sind die nichttrivialen Vielfachen von

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenwert und Eigenvektor

Beispiel (fortgesetzt)

Zur Bestimmung der Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 3$ betrachte das homogene Gleichungssystem $(3 \cdot E_2 - A) \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ mit Koeffizentenmatrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

mit augmentierte Matrix und Normalform

$$(A|\overrightarrow{0}) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{array} \right), \qquad (A'|\overrightarrow{0}) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Eigenvektoren von A zu $\lambda_1 = 3$ sind die nichttrivialen Vielfachen von

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenwert und Eigenvektor

Beispiel (fortgesetzt)

Zur Bestimmung der Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda_2 = -1$ betrachte das homogene Gleichungssystem $((-1) \cdot E_2 - A) \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ mit Koeffizentenmatrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & --2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

mit augmentierte Matrix und Normalform

$$(A|\overrightarrow{0}) = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{array}\right), \qquad (A'|\overrightarrow{0}) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Eigenvektoren von A zu $\lambda_2 = -1$ sind die nichttrivialen Vielfachen von

$$\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenwert und Eigenvektor

Beispiel (fortgesetzt)

Zur Bestimmung der Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda_2 = -1$ betrachte das homogene Gleichungssystem $((-1) \cdot E_2 - A) \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ mit Koeffizentenmatrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & --2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

mit augmentierte Matrix und Normalform

$$(A|\overrightarrow{0}) = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{array} \right), \qquad (A'|\overrightarrow{0}) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Eigenvektoren von A zu $\lambda_2 = -1$ sind die nichttrivialen Vielfachen von

$$\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenwert und Eigenvektor

Übung

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Eigenwert und Eigenvektor

Übung

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$P_A(\lambda) = (\lambda - 3) \cdot (\lambda + 2) - 14 = \lambda_2 - \lambda - 20 = (\lambda + 4) \cdot (lambda - 5)$$

Eigenwert und Eigenvektor

Übung

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$P_A(\lambda) = (\lambda - 3) \cdot (\lambda + 2) - 14 = \lambda_2 - \lambda - 20 = (\lambda + 4) \cdot (lambda - 5)$$

Eigenwerte sind $\lambda_1 = -4$ bzw. $\lambda_2 = 5$ und Eigenvektoren dazu sind die nichttrivialen Vielfachen von

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Eigenwert und Eigenvektor

Übung

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$P_A(\lambda) = (\lambda - 3) \cdot (\lambda + 2) - 14 = \lambda_2 - \lambda - 20 = (\lambda + 4) \cdot (lambda - 5)$$

Eigenwerte sind $\lambda_1 = -4$ bzw. $\lambda_2 = 5$ und Eigenvektoren dazu sind die nichttrivialen Vielfachen von

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Eigenwert und Eigenvektor

Beispiel

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

hat charakteristisches Polynom

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda + 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 2 & -2 \\ 3 & 6 & \lambda + 6 \end{pmatrix} = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 6\lambda$$

und damit die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$ und $\lambda_3 = -3$.

Eigenwert und Eigenvektor

Beispiel (fortgesetzt)

Für die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = 0$ betrachten wir das homogene Gleichungssystem $(0 \cdot E_3 - A) \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ (äquivalent zu $A \cdot \overrightarrow{x} = 0$) mit augmentierte Basis und Normalform

$$(A|\overrightarrow{0} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & 6 & 0 \end{array}\right), \quad (A'|\overrightarrow{0} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Eigenvektoren von A zu $\lambda_1 = 0$ sind die nichttrivialen Vielfachen von

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenwert und Eigenvektor

Beispiel (fortgesetzt)

Für die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_2 = -2$ betrachten wir das homogene Gleichungssystem $((-2) \cdot E_3 - A) \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ mit augmentierte Basis und Normalform

$$(A|\overrightarrow{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & 4 & 0 \end{array}\right), \quad (A'|\overrightarrow{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Eigenvektoren von A zu $\lambda_2 = -2$ sind die nichttrivialen Vielfachen von

$$\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eigenwert und Eigenvektor

Beispiel (fortgesetzt)

Für die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_3 = -3$ betrachten wir das homogene Gleichungssystem $((-3) \cdot E_3 - A) \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ mit augmentierte Basis und Normalform

$$(A|\overrightarrow{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -5 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & 0 \end{array}\right), \quad (A'|\overrightarrow{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Eigenvektoren von A zu $\lambda_1 = 0$ sind die nichttrivialen Vielfachen von

$$\overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenwert und Eigenvektor

Übung

Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Eigenwert und Eigenvektor

Übung

Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Die Matrix A hat das charakteristische Polynom

$$P_A(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2$$

Damit hat A die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -1$$

Eigenwert und Eigenvektor

Übung

Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Die Matrix A hat das charakteristische Polynom

$$P_A(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2$$

Damit hat A die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -1$$

Eigenwert und Eigenvektor

Übung

Bestimmen Sie die Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$

Eigenwert und Eigenvektor

Lösung:

Die Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$ sind die nichttrivialen Vielfachen von

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Eigenvektoren zu $\lambda_2 = -2$ bzw. $\lambda_3 = -3$ sind die nichttrivialen Vielfachen von

$$\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

komplexe Eigenwerte und Eigenvektoren

Manchmal ist es für die Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren notwendig, mit komplexen Zahlen zu rechnen (auch bei reellen Matrizen).

Beispiel

Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

gilt

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 13$$

und hat daher die Eigenwerte $\lambda_1 = -2 + 3 \cdot \mathrm{i}$ bzw. $\lambda_2 = -2 - 3 \cdot \mathrm{i}$ mit zugehörigen Eigenvektoren

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 + 3 \cdot \mathrm{i} \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 - 3 \cdot \mathrm{i} \\ 5 \end{pmatrix}$$

komplexe Eigenwerte und Eigenvektoren

Übung

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

komplexe Eigenwerte und Eigenvektoren

Übung

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Es ist $P_A(\lambda) = \lambda^2 - 6 \cdot \lambda + 10.$

komplexe Eigenwerte und Eigenvektoren

Übung

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Es ist $P_A(\lambda) = \lambda^2 - 6 \cdot \lambda + 10$. Damit hat A die Eigenwerte $\lambda_1 = 3 + \mathrm{i}$ bzw. $\lambda_2 = 3 - \mathrm{i}$ mit zugehörigen Eigenvektoren

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 - \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 + \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$$

komplexe Eigenwerte und Eigenvektoren

Übung

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Es ist $P_A(\lambda) = \lambda^2 - 6 \cdot \lambda + 10$. Damit hat A die Eigenwerte $\lambda_1 = 3 + \mathrm{i}$ bzw. $\lambda_2 = 3 - \mathrm{i}$ mit zugehörigen Eigenvektoren

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 - \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 + \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalisierbarkeit

Definition

Eine quadratische Matrix A heißt **diagonalisierbar**, wenn es eine invertierbare Matrix S gibt, so dass $S^{-1} \cdot A \cdot S$ eine Diagonalmatrix ist.

Beispiel

Für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalisierbarkeit

Definition

Eine quadratische Matrix A heißt **diagonalisierbar**, wenn es eine invertierbare Matrix S gibt, so dass $S^{-1} \cdot A \cdot S$ eine Diagonalmatrix ist.

Beispiel

Für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalisierbarkeit

Satz

Genau dann ist eine $n \times n$–Matrix A diagonalisierbar, wenn es n linear unabhängige Eigenvektoren von A gibt.

Sind $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ linear unabhängige Eigenvektoren von A, so ist die Matrix

$$S = (\overrightarrow{v_1}\ \overrightarrow{v_2}\ \cdots\ \overrightarrow{v_n})$$

mit den $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ als Spalten eine Transformationsmatrix, die A diagonalisiert,

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = D$$

ist eine Diagonalmatrix.

Diagonalisierbarkeit

Satz

Genau dann ist eine $n \times n$–Matrix A diagonalisierbar, wenn es n linear unabhängige Eigenvektoren von A gibt.
Sind $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ linear unabhängige Eigenvektoren von A, so ist die Matrix

$$S = (\overrightarrow{v_1}\ \overrightarrow{v_2}\ \cdots\ \overrightarrow{v_n})$$

mit den $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ als Spalten eine Transformationsmatrix, die A diagonalisiert,

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = D$$

ist eine Diagonalmatrix.

Diagonalisierbarkeit

Beispiel

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

hat die beiden linear unabhängigen Eigenvektoren

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

und dafür

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Diagonalisierbarkeit

Beispiel

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

hat die beiden linear unabhängigen Eigenvektoren

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

und dafür

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Diagonalisierbarkeit

Übung

Untersuchen Sie, ob die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar ist und bestimmen Sie gegebenenfalls eine Transformationsmatrix S und S^{-1}.

Diagonalisierbarkeit

Lösung:

Die Matrix A ist diagonalisierbar mit Transformationsmatrizen

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hierfür gilt

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Diagonalisierbarkeit

Auch bei der Diagonalisierbarkeit (reeller Matrizen) ist es manchmal notwendig, auf komplexe Zahlen auszuweichen.

Beispiel

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

wird durch die Matrizen

$$S = \begin{pmatrix} 1 + 3 \cdot \mathrm{i} & 1 - 3 \cdot \mathrm{i} \\ 5 & 5 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{30} \cdot \begin{pmatrix} -5 \cdot \mathrm{i} & 3 + \mathrm{i} \\ 5 \cdot \mathrm{i} & 3 - \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

diagonalisiert,

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} -2 + 3 \cdot \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -2 - 3 \cdot \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Diagonalisierbarkeit

Auch bei der Diagonalisierbarkeit (reeller Matrizen) ist es manchmal notwendig, auf komplexe Zahlen auszuweichen.

Beispiel

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

wird durch die Matrizen

$$S = \begin{pmatrix} 1 + 3 \cdot \mathrm{i} & 1 - 3 \cdot \mathrm{i} \\ 5 & 5 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{30} \cdot \begin{pmatrix} -5 \cdot \mathrm{i} & 3 + \mathrm{i} \\ 5 \cdot \mathrm{i} & 3 - \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

diagonalisiert,

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} -2 + 3 \cdot \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -2 - 3 \cdot \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Diagonalisierbarkeit

Beispiel

Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ist $P_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 9$. Damit ist $\lambda_1 = 3$ der einzige Eigenwert. Alle Eigenvektoren dazu sind Vielfache von

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalisierbarkeit

Beispiel

Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ist $P_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 9$. Damit ist $\lambda_1 = 3$ der einzige Eigenwert. Alle Eigenvektoren dazu sind Vielfache von

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit ist A nicht diagonalisierbar.

Diagonalisierbarkeit

Beispiel

Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ist $P_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 9$. Damit ist $\lambda_1 = 3$ der einzige Eigenwert. Alle Eigenvektoren dazu sind Vielfache von

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit ist A nicht diagonalisierbar.

symmetrische Matrizen

Regel

Ist A eine symmetrische $n \times n$–Matrix mit reellen Koeffizienten, so hat A nur reelle Eigenwerte und ist diagonalisierbar.

Genauer gilt: Es gibt eine orthogonale Matrix U, sodass

$$U^\top \cdot A \cdot U = D$$

eine Diagonalmatrix ist.

symmetrische Matrizen

Regel

Ist A eine symmetrische $n \times n$–Matrix mit reellen Koeffizienten, so hat A nur reelle Eigenwerte und ist diagonalisierbar.
Genauer gilt: Es gibt eine orthogonale Matrix U, sodass

$$U^\top \cdot A \cdot U = D$$

eine Diagonalmatrix ist.

symmetrische Matrizen

Beispiel

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

wird durch die orthogonale Matrizen

$$U = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \qquad U^\top = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

diagonalisiert,

$$U^\top \cdot A \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

symmetrische Matrizen

Übung

Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix U, die

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

diagonalisiert.

symmetrische Matrizen

Übung

Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix U, die

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

diagonalisiert.

Lösung:

Für

$$U = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

gilt

$$U^\top \cdot A \cdot U = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

symmetrische Matrizen

Übung

Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix U, die

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

diagonalisiert.

Lösung:

Für

$$U = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

gilt

$$U^\top \cdot A \cdot U = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$