Automatisches Differenzieren

Berechnungsgraph ist eine Liste von Berechnungsknoten.

1. Variablen-Knoten $(x,)$ wobei $x \in \{x_1, \ldots, x_n\}$
2. Konstanten-Knoten (n, r) interpretiert als $n := r$ wobei n der Name und r der reele wert ist
3. unärer Knoten (n, f, a) interpretiert als $n := f(a)$ wobei n ein Name ist, f eine Fkt. ist und a ein weiterer Berechnungsknoten ist.
4. binärer Knoten (n, f, a, b) interpretiert als $n := f(a, b)$ wobei " und a, b Berechnungsknoten sind.

Beispiel: $3.14 \cdot sin(x)$

Der Berechnungsgraph (BG) sieht dabei wie folgt aus:

$[(x,), (v_1, 3.14), (v_2, sin, x), (y, \cdot, v_1, v_2)]$

BG ist zulässig g.d.w. für jeden binären Knoten (n, f, a, b) und für jeden unären Knoten (n, f, c) der im BG vorkommt, kommen a, b, c vorher im BG vor.

Elternknoten: Falls ein BG zulässig ist, dann gilt für die Knoten a, b, dass der Knoten (n, f, a, b) dessen Elternknoten ist und dass für den Knoten c der Knoten (n, f, c) dessen Elternknoten ist.

Bemerkung: y ist bei uns immer der letzte Knoten eines BGs und damit der Ausgabeknoten.

Das Adjungierte von einem Knoten v ist $\bar{v} = \frac{\partial y}{\partial v}$

Angenommen $p_1, \ldots, p_k$ sind die Elternknoten von v, dann gilt:

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial y}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial v} = \sum_{i=1}^{k} \bar{p}_i \cdot \frac{\partial p_i}{\partial v}$$

Beispiel: $y = sin(x_1 + x_2) + cos(x_1 - x_2) \cdot (x_1 + x_2)$

BG =
$[(x_1,), (x_2,), (v_1, +, x_1, x_2), (v_2, -, x_1, x_2), (v_3, sin, v_1), (v_4, cos, v_2), (v_5, \cdot, v_4, v_1), (y, +, v_3, v_5)]$

Gegeben $x_1 = \frac{\pi}{2}, x_2 = \frac{\pi}{4}$ dann gilt:

- $v_1 = \frac{3\pi}{4}$
- $v_2 = \frac{\pi}{4}$
- $v_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $v_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

- $v_5 = \frac{3\pi\sqrt{2}}{8}$
- $y = \frac{(4+3\pi)\sqrt{2}}{8}$

Damit können wir jetzt alle Adjungierten berechnen:

- $\bar{y} = \frac{\partial y}{\partial y} = 1$
- $\bar{v}_5 = \bar{y} \cdot \frac{\partial y}{v_5} = \bar{y} \cdot (\frac{\partial v_3}{\partial v_5} + \frac{\partial v_5}{\partial v_5}) = 1 \cdot (0+1) = 1$
- $\bar{v}_4 = \bar{v}_5 \cdot \frac{\partial v_5}{\partial v_4} = v_1 = \frac{3\pi}{4}$
- $\bar{v}_3 = \bar{y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v_3} = 1 \cdot (1+0) = 1$
- $\bar{v}_2 = \bar{v}_4 \cdot \frac{\partial v_4}{\partial v_2} = \bar{v}_4 \cdot (-sin(v_2)) = \frac{3\pi}{4} \cdot (-sin(\frac{\pi}{4})) = \frac{3\pi-2\sqrt{2}}{4}$
- $\bar{v}_1 = \bar{v}_3 \cdot \frac{\partial v_3}{\partial v_1} + \bar{v}_5 \cdot \frac{\partial v_5}{\partial v_1} = cos(v_1) + v_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$
- $\bar{x}_2 = \bar{v}_1 \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \bar{v}_2 \cdot \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \bar{v}_1 - \bar{v}_2 = \sqrt{2} - \frac{3\pi-2\sqrt{2}}{4}$
- $\bar{x}_1 = \bar{v}_1 \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \bar{v}_2 \cdot \frac{\partial v_2}{\partial x_1} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 = \sqrt{2} + \frac{3\pi-2\sqrt{2}}{4}$