Aufgaben zu „Integrale“ , Anwendungen

1. Beweisen Sie, dass für das bestimmte Integral $I(m) = \int_1^e (\ln x)^m \, dx$ die Beziehung $I(m) = e - m \cdot I(m-1)$, $m \in \mathbb{N}$, gilt. Berechnen Sie I(m) für m = 1, 2 und 3.

Lösung :
(mit Substitution)

$u = \ln x, x = e^u$,

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}, dx = e^u du$

$\Rightarrow \int_1^e (\ln x)^m dx = \int_0^1 u^m e^u du$

$I_0 = \int_0^1 e^u du = e - 1$

$m \geq 1 : I_m = \int_0^1 u^m e^u du = \left[u^m e^u\right]_0^1 - \int_0^1 m u^{m-1} e^u du = e - m I_{m-1}$

$I_1 = e - I_o = e - (e-1) = 1$

$I_2 = e - 2I_1 = e - 2$

$I_3 = e - 3I_2 = e - 3(e-2) = 6 - 2e$

2. Berechnen Sie das Volumen der Drehkörper, die durch Drehung der Fläche $0 \leq x \leq \pi / 2$, $\sin x \leq y \leq 1$ um die x - Achse bzw. die y - Achse entstehen .

Lösung :

Rotation um x - Achse

$V_x = \pi \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 x) \, dx = \pi \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx$

$= \pi \left[\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin x \cos x \right]_0^{\pi/2} = \pi \left[\frac{\pi}{4} - 0 \right] = \frac{\pi^2}{4} = 2,4674$

Rotation um y - Achse

$V_y = 2\pi \int_0^{\pi/2} x(1 - \sin x) \, dx = 2\pi \int_0^{\pi/2} x \, dx - 2\pi \int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx$

$= 2\pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi/2} - 2\pi \left[\sin x - x \cos x \right]_0^{\pi/2}$

$= \frac{\pi^3}{4} - 2\pi = 1,46838$

Alternativlösung: Vertauschen $x \leftrightarrow y$, dann Rotation um x-Achse

$$V = \pi \int_0^1 (\arcsin x)^2 dx \overset{x = \sin u}{=} \pi \int_0^{\pi/2} u^2 \cos u \, du \quad \text{usw.}$$

3. Berechnen Sie die Bogenlänge des Schaubilds der Funktion $f(x) = \ln x$ in den Grenzen $3/4 \le x \le 12/5$.

Lösung :

$$f(x) = \ln x, f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$s = \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{12}{5}} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx = \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{12}{5}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx = \int_{\frac{5}{4}}^{\frac{13}{5}} \frac{u}{\sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{udu}{\sqrt{u^2-1}} =$$

$$(\text{Substituiere}: 1+x^2 = u^2, x = \sqrt{u^2-1}, dx = \frac{udu}{\sqrt{u^2-1}})$$

$$= \int_{\frac{5}{4}}^{\frac{13}{5}} \frac{u^2}{u^2-1}du = \int_{\frac{5}{4}}^{\frac{13}{5}} (1+\frac{1}{u^2-1})du = \int_{\frac{5}{4}}^{\frac{13}{5}} (1+\frac{1}{2}(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}))du =$$

$$= \left[u+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\right]_{\frac{5}{4}}^{\frac{13}{5}} = 1{,}35+\ln 2 = 2{,}043$$

4. Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve $y^2 = x^3$ für $0 \le x \le 4/3$. Skizzieren Sie die Kurve.

Lösung :

$$f(x) = x^{\frac{3}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

(aus Symmetriegründen $\cdot 2$)

$$s = 2\int_0^{\frac{4}{3}} \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\, dx = 2\left[\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{4}{3}} = 4{,}\overline{148}$$

5. Berechnen Sie die Bogenlänge der Kettenlinie $y(x) = \cosh x$ im Intervall $-a \le x \le a$. $(a > 0$, fest$)$.

$$s = \int_{-a}^{a} \sqrt{1+y'^2(x)}\, dx \quad , \quad y'(x) = \sinh x \, ,$$

$$= \int_{-a}^{a} \sqrt{1+\sinh^2 x}\, dx$$

$$= \int_{-a}^{a} \cosh x \, dx$$

$$= 2\left[\sinh x\right]_0^a = 2 \sinh a$$

6. Bestimmen Sie das Volumen des Ellipsoids , das durch Drehung der Ellipse mit der Gleichung $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ um die x-Achse entsteht. Kontrollieren Sie, ob sich als Spezialfall $a = b = r$ das (bekannte) Kugelvolumen ergibt.

Lösung :

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

auflösen nach y^2: $\quad y^2 = b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) \qquad (= f^2(x))$

$$V = \pi\int_{-a}^{a} f^2(x)dx = \pi\int_{-a}^{a} b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = 2\pi\cdot b^2\left[x-\frac{x^3}{3a^2}\right]_0^a = 2\pi\cdot b\left(a-\frac{a^3}{3a^2}\right) = \frac{4}{3}\pi\cdot b^2 a$$

Spezialfall $a = b = r$: $\quad V = \frac{4}{3}\pi\cdot r^3$

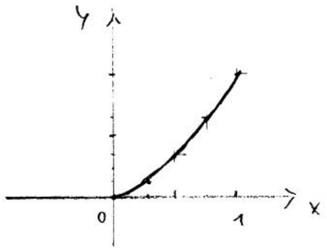
7. Sei $f(x) = x\sqrt{x}$.
   a) Skizzieren Sie die Kurve $(x,f(x))$, $0 \le x \le 1$.

   Berechnen Sie

   b) die Länge der Kurve in a) .
   c) den Inhalt der Fläche $\{(x,y) , 0 \le x \le 1 , 0 \le y \le f(x) \}$.
   d) das Volumen des Drehkörpers , der durch Rotation der Fläche in c) um die x-Achse entsteht .

---

a)



b) $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$, $\quad (f'(x))^2 = \frac{9}{4}x$

$$s = \int_0^1 \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx = \int_0^1\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx = \left[\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}\right]_0^1$$

$$= \left[\frac{8}{27}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{8}{27}\left(\left(1+\frac{9}{4}\right)^{3/2}-1\right)$$

$$= \frac{8}{27}\left(\left(\frac{13}{4}\right)^{3/2}-1\right) = \underline{\underline{1{,}439..}}$$

c) $F = \int_0^1 x^{3/2}\,dx = \left[\frac{2}{5}x^{5/2}\right]_0^1 = \frac{2}{5} = \underline{\underline{0{,}4}}$

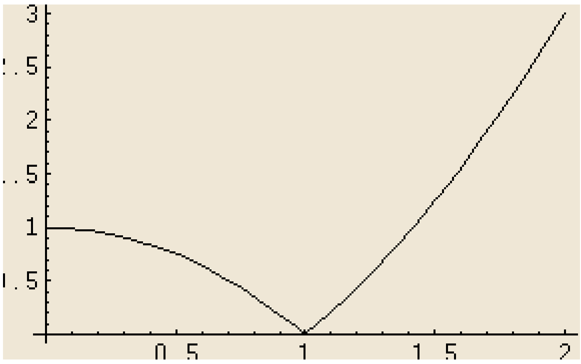
d) $V = \pi\int_0^1 x^3\,dx = \pi\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} = \underline{0{,}785\,.}$

8. Berechnen Sie das bestimmte Integral $\int_0^2 \left|x^2 - 1\right| dx$.

Lösung :

$$F = \int_0^1 (1 - x^2)dx + \int_1^2 (x^2 - 1)dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^2 =$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{8}{3} - 2 - \left(\frac{1}{3} - 1\right) = 2\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{8}{3} - 2 = \frac{4}{3} + \frac{8}{3} - 2 = 2$$



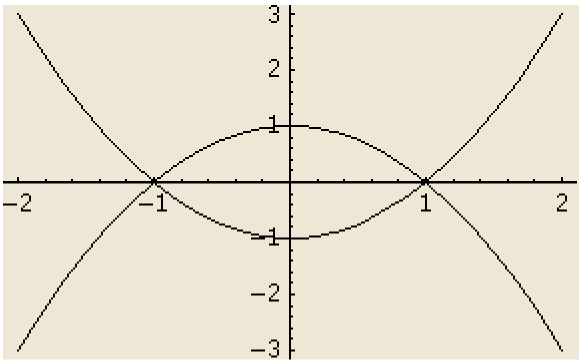
9. Sei $f(x) = x^2 - 1$ und $g(x) = 1 - x^2$. Berechnen Sie die Fläche, die von den Graphen dieser Funktionen eingeschlossen wird, und die Volumina der Körper , die durch Rotation dieser Fläche um die x- bzw. y-Achse entstehen.

Lösung :

a) Flächeninhalt

$$F = \int_{-1}^1 \left((1 - x^2) - (x^2 - 1)\right)dx = 2\int_{-1}^1 (1 - x^2)dx = 4\int_0^1 (1 - x^2)dx =$$

$$= 4\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{8}{3}$$



b) Volumen bei Drehung um x-Achse:

$$V_x = \pi\int_{-1}^1 (1 - x^2)^2 dx = 2\pi\int_0^1 \left(1 - 2x^2 + x^4\right)dx = 2\pi\left[x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 =$$

$$= \frac{16}{15}\pi$$

c) Volumen bei Drehung um y-Achse:

1. Möglichkeit: Vertauschen von x und y und Drehen um x-Achse

$$V_y = 2\pi \int_0^1 \left(\sqrt{1-x}\right)^2 dx = 2\pi \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \pi \ .$$

2. Möglichkeit: Formel für Drehung um y-Achse

$$V_y = 2\pi \int_a^b x f(x) dx \Rightarrow \text{aus Symmetriegründen:}$$

$$V_y = 2 \cdot 2\pi \int_0^1 x \cdot \left(1 - x^2\right) dx = 4\pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \pi$$

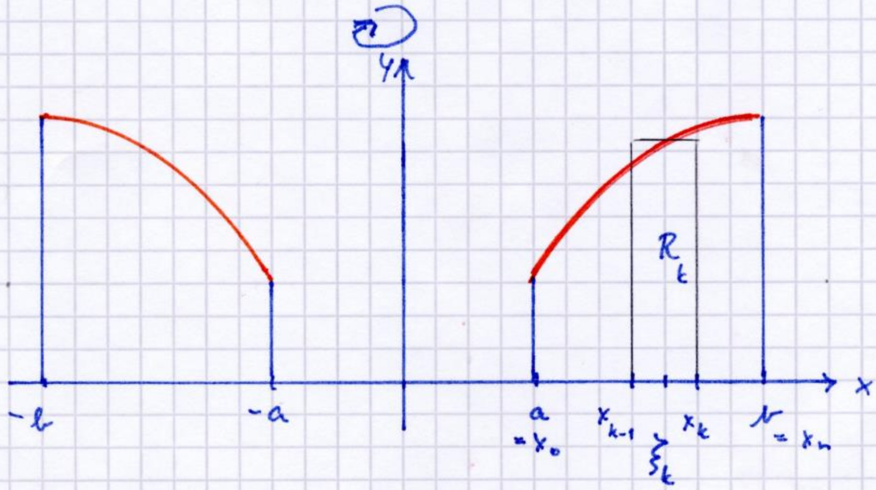
10. Für das Volumen des Drehkörpers $\{ (x,y,z) \ , \ a \le x \le b \ , \ y^2 + z^2 \le f^2(x) \}$ wurde die Formel

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$ durch Zerlegung in zylindrische Scheiben hergeleitet.

Begründen Sie in ähnlicher Weise $V = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$ für das Volumen des Körpers, der durch Drehung der Fläche $\{ (x,y) \ , \ 0 \le a \le x \le b \ , \ 0 \le y \le f(x) \}$ um die y-Achse entsteht .

Lösung :

Beweisidee : Zerlegung des Integrationsintervalls wie üblich; Annäherung des Volumens durch eine Summe von Zylinderschalen.



Bezeichnungen wie üblich.

Der Beitrag V_k des Rechtecks R_k zum Gesamtvolumen ist die Differenz zweier Zylinder.

$$V_k = f(\xi_k)\cdot\pi x_k^2 - f(\xi_k)\cdot\pi x_{k-1}^2$$
$$= f(\xi_k)\pi\cdot\left(x_k^2 - x_{k-1}^2\right)$$

Näherungsvolumen V_Z zur Zerlegung $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ ist

$$V_Z = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot\pi\cdot\left(x_k^2 - x_{k-1}^2\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot\pi\left(x_k + x_{k-1}\right)\cdot\left(x_k - x_{k-1}\right)$$
$$= 2\pi\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\frac{x_k + x_{k-1}}{2}\left(x_k - x_{k-1}\right)$$
$$= 2\pi\sum_{k=1}^{n} \xi_k f(\xi_k)\left(x_k - x_{k-1}\right)$$
$$\left(\text{mit } \xi_k = \tfrac{1}{2}\left(x_k + x_{k-1}\right)\right)$$

V_Z ist Riemann-Summe zu

$$2\pi\int_a^b x\, f(x)\,dx\,.$$