Prof. Dr. H. Siebert , TH Mittelhessen , Fachbereich MND
Aufgaben Analysis, DHBW TINF AI **Blatt 9**

Aufgaben zu „Integrale“ , 1

1. Geben Sie Stammfunktionen an für die folgenden Funktionen der Veränderlichen x :

a) $x+2$, $(x+2)^2$, $(x+2)^3$, $(x+2)^4$, $3(x+2)^4$, $3(5x+2)^4$,

b) $3x^2$, $(3x)^2$, $(3x)^5$, $3(3x)^5$,

c) $\sin x$, $\sin(x+3)$, $\sin(4x)$, $\sin(4x+3)$,

d) $\sqrt{x}$, $x\sqrt{x}$, $x+\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x^2}$, $\sqrt[4]{3x}$, $\sqrt{3x+5}$,

e) $\cos x$, $\cosh x$, $\sinh(2x)$, $\frac{2x}{x^2+1}$, $\tan x$, $\cot x$.

Lösung :

a) $\frac{x^2}{2}+2x+c$, $\frac{1}{3}(x+2)^3+c$, $\frac{1}{4}(x+2)^4+c$, $\frac{1}{3}(x+2)^3+c$, $\frac{3}{5}(x+2)^5+c$, $\frac{3}{25}(5x+2)^5+c$.

b) x^3, $3x^3$, $\frac{1}{18}(3x)^6$, $\frac{1}{6}(3x)^6$.

c) $-\cos x$, $-\cos(x+3)$, $-\frac{1}{4}\cos(4x)$, $-\frac{1}{4}\cos(4x+3)$.

d) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}$, $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}$, $\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}$, $\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}=\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}$, $\frac{4}{15}(3x)^{\frac{5}{4}}$, $\frac{2}{9}(3x+5)^{\frac{3}{2}}$.

e) $\sin x$, $\sinh x$, $\frac{1}{2}\cosh(2x)$, $\ln(x^2+1)$, $-\ln|\cos x|$, $\ln|\sin x|$.

2. Geben Sie Stammfunktionen zu folgenden Funktionen an :

a) $f(x) = 1/(x(x-1))$, b) $g(x) = (x^2+1)/(x^2-1)$, c) $h(x) = 1/(4x^2+4x+5)$.

Lösung :

a) $\frac{1}{x(x-1)}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}$, also Stammfunktion = $\ln|x-1| - \ln|x| = \ln|(x-1)/x|$.

Bemerkung : die Stammfunktion von $1/x$ ist $\ln|x|$, nicht $\ln x$.

b) $\frac{x^2+1}{x^2-1}=1+\frac{2}{x^2+1}=1+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}$; Stammfunktion = $x+\ln|x-1|-\ln|x+1|$.

c) $4x^2+4x+5 = (2x+1)^2+4 = 4((x+1/2)^2+1)$.

$\Rightarrow$ Stammfunktion von $\frac{1}{4x^2+4x+5}$ ist $\frac{1}{4}\arctan(x+\frac{1}{2})$.

3. Berechnen Sie durch partielle Integration :

a) $\int_0^3 x\sin x\,dx$, b) $\int_0^e xe^{-x}dx$

Lösung :

a) $\int_0^3 x\sin x\,dx = [x(-\cos x)]_0^3 + \int_0^3 \cos x\,dx = [x(-\cos x)]_0^3 + [\sin x]_0^3 = 3,111$

b) $\int_0^e x e^{-x}\,dx = \left[-xe^{-x}\right]_0^e + \int_0^e e^{-x}\,dx = \left[-xe^{-x}\right]_0^e + \left[-e^{-x}\right]_0^e = 0{,}75463.$

4. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale :

a) $\int_0^2 \sqrt[4]{1+2x}\,dx$, b) $\int_1^2 \frac{e^{2x}}{1+3e^{2x}}dx$, c) $\int_{-e}^{e} x\sqrt{1+x^2}\,dx$, d) $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x^2-25}$

Lösung :

a) $\int_0^2 (1+2x)^{\frac{1}{4}}dx = \left[\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}(1+2x)^{\frac{5}{4}}\right]_0^2 = 2{,}59069,$

b) $\int_1^2 \frac{e^{2x}}{1+3e^{2x}}dx = \left[\frac{1}{6}\ln\left(1+3e^{2x}\right)\right]_1^2 = 0{,}32699,$

c) $\int_{-e}^{e} x\sqrt{x^2+1}\,dx = 0,$ da Integrand ungerade und Intervall symmetrisch zu 0 ,

d) $\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^2-25}dx = \int_{-1}^{2} \frac{1}{10}\left(\frac{1}{x-5} - \frac{1}{x+5}\right)dx = \left[\frac{1}{10}\ln\left|\frac{x-5}{x+5}\right|\right]_{-1}^{2} = -0{,}1252763.$

5. Ermitteln Sie Stammfunktionen zu

a) $f(x) = (1-2x)^2$, b) $g(x) = x\cdot(1+x^2)^2$, c) $h(x) = x\sin(x^2)$, d) $i(x) = (1+e^{-x}) / e^{2x}$.

Lösung :

Ergebnisse zum Vergleich :

a) $f(x) = (1-2x)^2$, Stammfunktion dazu : $F(x) = -\frac{1}{6}(1-2x)^3$,

b) $g(x) = x\cdot(1+x^2)^2$, Stammfunktion dazu : $G(x) = \frac{1}{6}(1+x^2)^3$,

c) $h(x) = x\sin(x^2)$, Stammfunktion dazu : $H(x) = -\frac{1}{2}\cos(x^2)$,

d) $i(x) = (1-e^{-x}) / e^{2x}$, Stammfunktion dazu : $I(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} - \frac{1}{3}e^{-3x}$.

Hinweise zum Vorgehen :
a) Kettenregel oder Ausmultiplizieren und gliedweis integrieren ,
b) wie bei a) ,
c) Kettenregel ,
d) den Bruch als Summe schreiben .

6. Skizzieren Sie das Schaubild der Funktion f über dem Intervall [a, b] und berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen dem Schaubild von f , der x - Achse und den Geraden $x = a$ und $x = b$:
a) $f(x) = 6x - x^2$, a = 1 , b = 5 ; b) $f(x) = 1 + x^{-2}$, a = ½ , b = 4 ;
c) $f(x) = x + \sin x$, a = 0 , b = π .

Lösung :

a) Flächeninhalt $= \int_1^5 (6x - x^2)dx = \left[3x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_1^5 = \frac{92}{3} = 30{,}66\ldots$,

b) Flächeninhalt $= \int_{\frac{1}{2}}^4 (1 + x^{-2})dx = \left[x - x^{-1}\right]_{\frac{1}{2}}^4 = \left(4 - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{2} - 2\right) = 5{,}25$,

c) Flächeninhalt $= \int_0^\pi (x + \sin x)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \cos x\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2} + 2 = 6{,}934\ldots$.

7. Berechnen Sie die Nullstellen von f , skizzieren Sie das Schaubild. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die das Schaubild mit der x - Achse einschließt :

a) $f(x) = 2x^2 - x^3$, b) $f(x) = - x^4 / 10 + 4x^2 / 5 + 9/10$, c) $f(x) = 40x - 13x^2 - 27x^{-2}$.

Lösung :

Kurze Kurvendiskussionen

a) Nullstellen: $f(x) = 2x^2 - x^3 = x^2 (2 - x)$, $f(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$,
Extrema, Wendepunkte: $f'(x) = 4x - 3x^2$: , $f'(x) = 0 \Rightarrow x_3 = 0, x_4 = 4/3$,
$f''(x) = 4 - 6x$, $f''(x) = 0 \Rightarrow x_5 = 2/3$,

b) Nullstellen : $f(x) = -\frac{x^4}{10} + \frac{4x^2}{5} + \frac{9}{10}$,

$f(x) = 0 \Rightarrow x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \pm \sqrt{16 + 9} = 4 \pm 5,\ x_1 = 3, x_2 = -3$,

Extrema : $f'(x) = \frac{1}{10}(-4x^3 + 16x)$: $f'(x) = 0 \Rightarrow x_3 = 0, x_4 = 2, x_5 = -2$.

c) Nullstellen : $f(x) = 40x - 13x^2 - \frac{27}{x^2} = \frac{40x^3 - 13x^4 - 27}{x^2}$, .

$f(x) = 0 \Rightarrow 40x^3 - 13x^2 - 27 = 0 \Rightarrow$ erraten : $x_1 = 1, x_2 = 3$

Horner - Schema $\Rightarrow 40x^3 - 13x^2 - 27 = (x - 1)(x - 3)(-13x^2 - 12x - 9)$

$(-13x^2 - 12x - 9) \neq 0$ für $x \in R$

Flächeninhalte

a) $F = \int_0^2 (2x^2 - x^3)dx = \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = \frac{4}{3} = 1{,}33\ldots$

b) $F = \int_{-3}^3 \left(-\frac{x^4}{10} + \frac{4x^2}{5} + \frac{9}{10}\right)dx = 2\left[-\frac{x^5}{50} + \frac{4}{15}x^3 + \frac{9}{10}x\right]_0^3 = \frac{252}{25} = 10{,}08$,

c) $F = \int_1^3 \left(40x^3 - 13x^2 - \frac{27}{x^2}\right)dx = \left[20x^2 - \frac{13}{3}x^3 + \frac{27}{x}\right]_1^3 = 29{,}33\ldots$

8. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche , die von den Schaubildern der Funktionen f und g sowie den Geraden x = a und x = b begrenzt wird :

a) $f(x) = -x$, $g(x) = 4x - x^2$, a = 0 , b = 4 ; b) $f(x) = x^{-2}$, $g(x) = - x^2$, a = 1 , b = 2 .

Lösung :

a) $F = \int_0^4 (4x - x^2 - (-x))dx = \int_0^4 (5x - x^2) = \left[\frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^4 = \frac{56}{3} = 18{,}66\ldots$

b) $F = \int_1^2 (x^{-2} + x^2)dx = \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \frac{17}{6} = 2{,}833\ldots$