Analysis in mehreren Variablen

II Grenzwerte und Stetigkeit

Silke Bott

Wintersemester 2022/2023

Topologie des $\mathbb{R}^n$

Noch mehr als bei den klassischen Funktionen in einer Variable ist es bei Funktionen in mehreren Variablen wichtig, ihr Verhalten in allgemeinen Kategorien zu studieren, da sie sich einer konkreten Beschreibung und einem anschaulichen Zugang in viel stärkerem Maß verschließen als den Funktionen in einer Veränderlichen. Im Eindimensionalen war dabei der Begriff der Stetigkeit von grundlegender Bedeutung, denn dadurch wurde sichergestellt, dass für x–Werte "nahe" bei einem vorgegebenen x_0 auch die y–Werte $f(x)$ "nahe" bei $f(x_0)$ liegen. Der Begriff "nahe" wurde dabei von uns mit Hilfe des Absolutbetrags der reellen Zahlen präzisiert und mathematisch exakt gefasst.
Auch im $\mathbb{R}^2$ und im $\mathbb{R}^3$ sind uns Begriffe wie "Nähe" und "Abstand" anschaulich klar, und in der allgemeinen Situation hilft uns dabei die Notation von der Länge eines Ortsvektors, den wir im Rahmen der linearen Algebra kennengelernt haben.

Topologie des $\mathbb{R}^n$

Definition

Ist $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, so heißt

$$\|x\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdot + x_n^2}$$

die **Norm** von x.

Bemerkung

Die Norm von $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ist also die Länge des Ortsvektors $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, also der Abstand des Punktes $x = (x_1, \ldots, x_n)$ vom Nullpunkt $0 = (0, \ldots, 0)$ im $\mathbb{R}^n$.

Bemerkung

Ist $n = 1$, so gilt $\|x\| = |x| \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$

Topologie des $\mathbb{R}^n$

Aus der linearen Algebra und dem Rechnen mit Längen von Vektoren kennen wir schon den folgenden

Satz

Die Norm ist eine Abbildung

$$\|\ \ \| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

i) $\|x\| \geq 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^n$ *und* $\|x\| = 0$ *genau dann, wenn* $x = (0, \ldots, 0)$.

ii) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^n$ *und alle* $\lambda \in \mathbb{R}$.

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *für alle* $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Topologie des $\mathbb{R}^n$

Definition

Sind $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_n)$ zwei Punkte im $\mathbb{R}^n$, so definieren wir den **Abstand** x und y durch als $\|x - y\|$.

Bemerkung

Wir schreiben gelegentlich auch $d(x, y)$ für den Abstand von x und y, also

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

(wobei d für Distanz oder distance steht) und nennen d die **Abstandsfunktion**.

Bemerkung

Der Abstand von x und y ist die Länge des Ortsvektors mit Endpunkt $(x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n)$ bzw. die Länge des Verbindungsvektors der Punkte x und y.

Topologie des $\mathbb{R}^n$

Unmittelbar aus der Definition erhalten wir

Satz

Die Abstandsfunktion d hat die folgenden Eigenschaften.

i) $d(x, y) \geq 0$ *für alle* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *und* $d(x, y) = 0$ *genau dann, wenn* $x = y$.

ii) $d(x, y) = d(y, x)$ *für alle* $x, y \in \mathbb{R}^n$.

iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *für alle* $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ *(Dreiecksungleichung).*

Definition

Für ein $a \in \mathbb{R}^n$ und ein $r > 0$ heißt

$$U_r(a) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\}$$

die offene Kugel um a mit Radius r.

Topologie des $\mathbb{R}^n$

Beispiel

In $\mathbb{R}$ ist $U_r(a)$ das offene Intervalle $(a-r, a+r)$.

Beispiel

In $\mathbb{R}^2$ ist $U_1(0) = \{(x,y) : \sqrt{x^2+y^2} < 1\}$ die Einheitskreisscheibe ohne Rand.

Beispiel

In $\mathbb{R}^3$ ist $U_1(0) = \{(x,y,z) : \sqrt{x^2+y^2+z^2} < 1\}$ die Einheitskugel ohne ihre Oberfläche.

Definition

Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt offen, wenn es zu jedem $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $U_\varepsilon(x) \subseteq U$.
Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt abgeschlossen, wenn $\mathbb{R}^n \setminus A$ offen ist.

Topologie des $\mathbb{R}^n$

Bemerkung

Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist also genau dann abgeschlossen, wenn gilt: Ist $b \in \mathbb{R}^n \setminus A$ ein beliebiges Element, so gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$U_\varepsilon(b) \cap A = \emptyset$$

Beispiel

In $\mathbb{R}$ sind alle offenen Intervalle auch offene Mengen. Ist nämlich $I = (a, b)$ mit $a < b$ und ist $x \in I$, so setze $r := \min\{b - x, x - a\}$ Dann ist $r > 0$ und $U_r(x) = (x - r, x + r) \subseteq (a, b)$. Auch unbeschränkte offene Intervalle (a, ∞) oder $(-\infty, a)$ sind offene Teilmengen von $\mathbb{R}$. Umgekehrt ist in $\mathbb{R}$ jede offene Teilmenge die disjunkte Vereinigung von offenen Intervallen.

Topologie des $\mathbb{R}^n$

Beispiel

Für jedes $a \in \mathbb{R}^n$ und jedes $r > 0$ ist $U_r(a)$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Ist nämlich $x \in U_r(a)$, so ist $\|x - a\| < r$, also

$$\varepsilon := r - \|x - a\| > 0$$

Ferner gilt für $y \in U_\varepsilon(x)$ wegen der Dreiecksungleichung:

$$\|y - a\| \leq \|x - a\| + \|y - x\| < \|x - a\| + \varepsilon = r$$

und damit folgt $U_\varepsilon(x) \subseteq U_r(a)$.

Beispiel

Jedes abgeschlossene Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ist eine abgeschlossene Teilmenge in $\mathbb{R}$. In der Tat ist $\mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$ offen als Vereinigung von zwei offenen Intervallen.

Topologie des $\mathbb{R}^n$

Beispiel

Für jedes $a \in \mathbb{R}^n$ und jedes $r > 0$ ist

$$K_r(a) := \{x \in \mathbb{R} \mid \|x - a\| \leq r\}$$

(der sogenannte topologische Abschluß von $U_r(a)$) eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Ist nämlich $y \notin K_r(a)$ so ist $\|y - a\| > r$. Wir setzen $\varepsilon = \|y - a\| - r > 0$, so dass also

$$r + \varepsilon = \|y - a\|$$

und zeigen, dass $U_\varepsilon(y) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus K_r(a)$ (so dass also $\mathbb{R}^n \setminus K_r(a)$ offen in $\mathbb{R}^n$ ist und damit $K_r(a)$ abgeschlossen).

Topologie des $\mathbb{R}^n$

Beispiel

Dazu wählen wir ein beliebiges $z \in U_\varepsilon(y)$. Dann gilt nach der Dreiecksungleichung

$$\|y - a\| \leq \|z - a\| + \|y - z\|$$

also

$$\|z - a\| \geq \|y - a\| - \|z - y\| = r + \varepsilon - \|z - y\| > r + \varepsilon - \varepsilon = r$$

und damit $z \notin K_r(a)$. Da $z \in U_\varepsilon(y)$ beliebig war, folgt daraus, das

$$U_\varepsilon(y) \cap K_r(a) = \emptyset$$

und damit ist $K_r(a)$ abgeschlossen.

Topologie des $\mathbb{R}^n$

Beispiel

In $\mathbb{R}^n$ sind die Teilmengen $M = \emptyset$ und $N = \mathbb{R}^n$ sowohl offen als auch abgeschlossen.

Aufgabe

Zeigen Sie, dass die Menge $U = \{(x, y) | 3x^2 + 2x^2 < 1\}$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe

Zeigen Sie, dass die Menge $[0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ weder offen noch abgeschlossen ist.

Topologie des $\mathbb{R}^n$

Aufgabe

Zeigen Sie: Sind $\{U_i\}_{i\in I}$ offene Teilmengen in $\mathbb{R}^n$ (eventuell unendlich viele) so ist auch ihre Vereinigung $\bigcup\limits_{i\in I} U_i$ offen.

Aufgabe

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Teilmenge, und es sei $(a,b) \in U$. Dann sind die Mengen

$$U_1 := \{x \in \mathbb{R} | \, (x,b) \in U\}, \quad U_2 := \{x \in \mathbb{R} | \, (a,x) \in U\}$$

offene Teilmengen von $\mathbb{R}$.
Verallgemeinern Sie diese Aussage auch auf offene Teilmengen $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

Folgen im $\mathbb{R}^n$

In Analogie zum eindimensionalen Fall können wir auch im $\mathbb{R}^n$ Folgen betrachten.

Definition

Unter einer **Folge** im $\mathbb{R}^n$ versteht man eine geordnete Auflistung von endlich oder abzählbar unendlich vielen Elementen des $\mathbb{R}^n$, die fortlaufend durchnummeriert sind, also eine Menge (a_m) mit $a_m \in \mathbb{R}^n$.
Die Elemente a_m heißen **Glieder** der Folge (a_m).

Beispiel

Die einfachsten Folgen sind die konstanten Folgen

$$(c, c, c, c, \ldots) \qquad \text{für ein } c \in \mathbb{R}^n$$

Folgen im $\mathbb{R}^n$

Beispiel

Durch die Formel $a_m = \left(\frac{1}{m}, \frac{m^2}{m^2+1}\right)$ wird eine Folge (a_m) in $\mathbb{R}^2$ definiert.

Beispiel

Durch die Formel $a_m = \left(\frac{1}{m}, m\right)$ wird eine Folge (a_m) in $\mathbb{R}^2$ definiert.

Beispiel

Durch die Formel $a_m = (m, (-1)^m)$ wird eine Folge (a_m) in $\mathbb{R}^2$ definiert.

Folgen im $\mathbb{R}^n$

Definition

Ein $g \in \mathbb{R}^n$ heißt **Grenzwert** der Folge $(a_m)_{m\geq 1}$ wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $M_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$\|a_m - g\| < \varepsilon \qquad \text{für alle } m \geq M_0$$

Eine Folge $(a_m)_{m\geq 1}$ heißt **Cauchyfolge**, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $M_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$\|a_{m'} - a_m\| < \varepsilon \qquad \text{für alle } m', m \geq M_0$$

Folgen im $\mathbb{R}^n$

Bemerkung

Ist g der Grenzwert der Folge (a_m), so sagen wir auch, die Folge (a_m) konvergiert gegen g und schreiben hierfür kurz

$$\lim_{m \to \infty} a_m = g$$

Bemerkung

Die Definition von Grenzwert besagt, dass für jedes vorgegebene $\varepsilon > 0$ höchstens endlich viele Folgenglieder nicht in der offenen Kugel $U_\varepsilon(g)$ liegen können.

Folgen im $\mathbb{R}^n$

Beispiel

Wir betrachten die Folge $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ mit $a_m = \left(\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m+1}\right)$ und $g = (0, 0)$. Die Berechnung einiger Folgenglieder deutet darauf hin, dass g der Grenzwert der Folge sein könnte. Das ist in der Tat der Fall. Dazu berechnen wir zunächst ganz allgemein den Abstand $d(a_m, g)$ und erhalten:

$$\begin{aligned} \|a_m - g\| &= \sqrt{\left(\frac{1}{m+1} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{m+1} - 0\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{m+1} \end{aligned}$$

Geben wir uns nun ein $\varepsilon > 0$ beliebig vor, so finden wir sicherlich ein $M \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{\sqrt{2}}{m+1} < \varepsilon \qquad \text{für alle } m \geq M$$

da ja $\left(\frac{\sqrt{2}}{m+1}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Folgen im $\mathbb{R}^n$

Beispiel

Das bedeutet aber gerade, dass für $m \geq M$ gilt

$$\|a_m - g\| < \varepsilon$$

und damit ist gezeigt, dass $g = (0, 0)$ tatsächlich der Grenzwert der Folge $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ist.

Dieses Beispiel deutet schon an, dass die direkte Untersuchung von Folgen in $\mathbb{R}^n$ sehr schnell sehr kompliziert werden kann. Erfreulicherweise lässt sich das Studium der Folgen im $\mathbb{R}^n$ auf das Studium der Folgen in $\mathbb{R}$ zurückführen: Ist (a_m) eine Folge in $\mathbb{R}^n$, so schreibe

$$a_m = (a_{m,1}, a_{m,2}, \ldots, a_{m,n}) \qquad \text{mit } a_{m,i} \in \mathbb{R}$$

Dadurch erhalten wir Komponentenfolgen $\left(a_m^{(i)}\right) = (a_{1,i}, a_{2,i}, a_{3,i}, \ldots)$ reeller Zahlen, wie wir sie schon in der Analysis in einer Variablen untersucht haben.

Folgen im $\mathbb{R}^n$

Satz

Sei $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n) \in \mathbb{R}^n$. Genau dann konvergiert die Folge (a_m) in $\mathbb{R}^n$ gegen g, wenn jede Komponentenfolge $\left(a_m^{(i)}\right)$ gegen g_i konvergiert. Genau dann ist (a_m) eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}^n$, wenn jede Komponentenfolge $\left(a_m^{(i)}\right)$ eine Cauchyfolge ist.

Folgen im $\mathbb{R}^n$

Beispiel

Für unsere Beispiele ergibt sich aus dem Satz

1. Die konstante Folge $(c, c, c, \dots)$ ist konvergent und konvergiert gegen c. Das hätten wir vermutlich auch noch ohne den Satz gesehen.
2. Die Folge $\left(\left(\frac{1}{m}, \frac{m^2}{m^2+1}\right)\right)$ ist konvergent mit Grenzwert $(0, 1)$, denn
$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} &= 0 \\ \lim_{m\to\infty} \frac{m^2}{m^2+1} &= 1 \end{aligned}$$
3. Die Folge $\left(\left(\frac{1}{m}, m\right)\right)$ ist nicht konvergent, denn die zweite Komponentenfolge $(m)_{m\geq 1}$ ist nicht konvergent.
4. Die Folge $((m, (-1)^m))$ ist nicht konvergent. In diesem Fall ist weder die erste noch die zweite Komponentenfolge konvergent.

Folgen im $\mathbb{R}^n$

Satz

Ist $(a_m)_{m\geq 1}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}^n$, so hat $(a_m)_{m\geq 1}$ einen Grenzwert.

Satz

Sind $(a_m)_{m\geq 1}$ und $(b_m)_{m\geq 1}$ zwei Folgen in $\mathbb{R}^n$, die konvergieren,

$$\lim_{m\to\infty} a_m = a, \qquad \lim_{m\to\infty} b_m = b$$

so konvergieren auch die Folgen $(a_m + b_m)_{m\geq 1}$ und $(a_m - b_m)_{m\geq 1}$ und

$$\lim_{m\to\infty} (a_m + b_m) = a + b, \qquad \lim_{m\to\infty} (a_m - b_m) = a - b$$

Ist $c \in \mathbb{R}$, so ist auch $(c \cdot a_m)_{m\geq 1}$ konvergent mit

$$\lim_{m\to\infty} c \cdot a_m = c \cdot a$$

Folgen im $\mathbb{R}^n$

Die Konvergenz von Folgen lässt sich auch mit offenen Mengen beschreiben:

Satz

Genau dann konvergiert die Folge $(a_m)_{m\geq 1}$ gegen g wenn gilt: Für jede offene Menge U mit $g \in U$ existiert ein $M_0 \geq 1$ mit $a_m \in U$ für alle $m \geq M_0$.

Definition

Eine Folge $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ heißt **beschränkt**, wenn es ein $K > 0$ gibt mit

$$\|a_m\| \leq K \qquad \text{für alle } m \in \mathbb{N}$$

Satz

Jede beschränkte Folge $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge, d.h. es gibt $m_0 < m_1 < m_2 < \cdots$ so dass die Folge $(a_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Folgen im $\mathbb{R}^n$

Folgen liefern ein sehr nützliches und hilfreiches Kriterium für abgeschlossene Mengen:

Satz

Genau dann ist eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, wenn gilt:
Ist (a_m) eine konvergente Folge mit Grenzwert g und mit $a_m \in A$ für alle $m \in \mathbb{N}$, so gilt schon $g \in A$.

Aufgabe

Untersuchen Sie die Folge

$$(a_m)_{m\geq 1} = \left(\frac{m+2}{m^2+2m+4}, \frac{m2+4m+1}{m^2+17}\right)_{m\geq 1}$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie ihren Grenzwert, falls er existiert.

Folgen im $\mathbb{R}^n$

Aufgabe

Untersuchen Sie die Folge

$$(a_m)_{m\geq 1} = \left(\sqrt{m+10} - \sqrt{m}, \sqrt{m+\sqrt{m}} - \sqrt{m}\right)_{m\geq 1}$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie ihren Grenzwert, falls er existiert.

Aufgabe

Untersuchen Sie die Folge

$$(a_m)_{m\geq 1} = \left(\sqrt{m+\sqrt{m}} - \sqrt{m}, \sqrt{m+\frac{m}{100}} - \sqrt{m}\right)_{m\geq 1}$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie ihren Grenzwert, falls er existiert.

Stetige Funktionen

Wir wollen uns jetzt wieder Funktionen und Abbildungen zuwenden.
Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge und sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung

Definition

Die Abbildung f heißt stetig in $a \in D$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit folgender Eigenschaft gibt:
Für alle $x \in D$ mit $\|x - a\| < \delta$ gilt $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$.
Die Abbildung f heißt stetig, wenn sie in jedem Punkt $a \in D$ stetig ist.

Beispiel

Die konstante Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x_1, x_2, x_3) \longmapsto (1, \pi)$$

ist stetig. Allgemein ist jede konstante Funktion stetig. Das ist klar, denn hier gilt immer

$$\|f(x) - f(a)\| = 0$$

Stetige Funktionen

Beispiel

Die Identität $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x_1, x_2) \longmapsto (x_1, x_2)$ ist stetig (denn $\|(f(x) - f(a))\| = \|x - a\|$, also können wir zu einem gegebenen $\varepsilon > 0$ immer $\delta = \varepsilon$ wählen).

Beispiel

Die Vertauschung der Komponenten $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x_1, x_2) \longmapsto (x_2, x_1)$ ist stetig, denn auch hier gilt für jedes $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ die Gleichheit

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(a)\| &= \sqrt{(x_2 - a_2)^2 + (x_1 - a_1)^2} \\ &= \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} \\ &= \|x - a\| \end{aligned}$$

also können wir hier zu einen $\varepsilon > 0$ ebenfalls $\delta = \varepsilon$ wählen.

Stetige Funktionen

Aufgabe

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$'+' \;:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2) \longmapsto x_1 + x_2$$

stetig ist.

Aufgabe

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f \;:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2) \longmapsto x_1^2$$

stetig ist.

Stetige Funktionen

Wie im Fall von Funktionen in einer Variablen kann auch im allgemeinen Fall die Stetigkeit mit Folgen überprüft werden.

Satz

Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ist genau dann stetig in einem Punkt $a \in D$, wenn gilt:
Für jede konvergente Folge $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ in D (also jede Folge $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^n$ mit $x_l \in D$ für alle l) mit $\lim\limits_{l\to\infty} x_l = a$ ist auch $(f(x_l))_{l\in\mathbb{N}}$ konvergent und es gilt

$$\lim_{l\to\infty} f(x_l) = f(a).$$

Stetige Funktionen

Beispiel

Die Koordinatenprojektion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2) \longmapsto x_1$$

ist stetig im Punkt $a = (3, 5)$. In diesem Beispiel können wir leicht einen Punkt $x = (x_1, x_2)$ finden mit $\|f(x) - f(y)\| \neq \|x - a\|$, die Vorgehensweise der beiden vorangegangenen Beispiele scheidet also aus. Um ein Gefühl für diese Situation zu bekommen, untersuchen wir sie zunächst anhand einer Testfolge, d.h. wir wählen uns eine spezielle Folge (x_m), die gegen a konvergiert und untersuchen die Folge $(f(x_m))$ auf Konvergenz. Eine typische Testfolge ist etwa gegeben durch

$$x_m = \left(3 + \frac{1}{m}, 5 + \frac{1}{m}\right) \qquad (m \geq 1)$$

Stetige Funktionen

Beispiel

Hierfür gilt $f(x_m) = 3 + \frac{1}{m}$, und aus den Regeln der Analysis in einer Variablen erhalten wir, dass diese Folge offensichtlich gegen $3 = f(a)$ konvergiert. Die Untersuchung einer Testfolge reicht aber nicht aus, um die Stetigkeit von f in a nachzuweisen. Hätten wir erhalten, dass die Folge $(f(x_m))$ nicht gegen $f(a)$ konvergiert, so wäre das ausreichend gewesen, um zu zeigen, dass f nicht stetig in a ist. Die Tatsache, dass in unserem Fall $(f(x_m))$ gegen $f(a)$ konvergiert, liefert also ein Indiz dafür, dass f in (3, 5) stetig sein könnte, reicht aber als Beweis noch nicht aus. Dazu geben wir uns eine beliebige Folge (x_m) vor, die gegen (3, 5) konvergiert, und wir schreiben $x_m = \left(x_m^{(1)}, x_m^{(2)}\right)$. Dann erhalten wir aus Satz 20 für die Komponentenfolgen

$$\lim_{m\to\infty} x_m^{(1)} = 3, \qquad \lim_{m\to\infty} x_m^{(2)} = 5$$

Stetige Funktionen

Beispiel

Also ergibt sich speziell, dass $(f(x_m))$ konvergiert mit

$$\lim_{m\to\infty} f(x_m) = \lim_{m\to\infty} x_m^{(1)} = 3 = f(a)$$

und damit ist f stetig in $(3, 5)$.
Die Argumente, die wir hier verwendet haben, übertragen sich ohne große Änderung auf den Fall eines allgemeinen Punktes $a = (a_1, a_2)$: Ist (x_m) eine beliebige Folge, die gegen a konvergiert, so schreiben wir wieder $x_m = \left(x_m^{(1)}, x_m^{(2)}\right)$. Dann erhalten wir aus Satz 20 für die Komponentenfolgen $\lim\limits_{m\to\infty} x_m^{(1)} = a_1$, $\lim\limits_{m\to\infty} x_m^{(2)} = a_2$ woraus wieder folgt, dass $(f(x_m))$ konvergiert mit

$$\lim_{m\to\infty} f(x_m) = \lim_{m\to\infty} x_m^{(1)} = a_1 = f(a)$$

Stetige Funktionen

Beispiel

und damit ist f stetig in a. Also ist f stetig (in ganz $\mathbb{R}^2$).
In diesem Fall können wir die Behauptung auch noch relativ einfach mit dem ε–δ–Kriterium nachrechnen: Hier gilt für jedes $a \in \mathbb{R}^2$ die Beziehung

$$\|f(x) - f(a)\| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2} \leq \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} = \|x - a\|$$

und daher können wir auch in diesem Fall zu einen $\varepsilon > 0$ immer $\delta = \varepsilon$ wählen.

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2) \longmapsto x_2$$

stetig.

Stetige Funktionen

Beispiel

Wir zeigen, dass die Multiplikationsfunktion
$m : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2) \longmapsto x_1 \cdot x_2$ stetig ist. Auch hier bietet sich das Folgenkriterium aus Satz 29 an:
Ist $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ein beliebiger Punkt und $(a_l, b_l)_{l\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge, die gegen (a, b) konvergiert, so gilt notwendig

$$\lim_{l\to\infty} a_l = a, \quad \lim_{l\to\infty} b_l = b$$

Daher erhalten wir aus dem Produktsatz für konvergente Folgen, dass auch die Folge $(a_l \cdot b_l)_{l\in\mathbb{N}}$ konvergent ist mit Grenzwert $a \cdot b$, und damit existiert und gilt $\lim\limits_{l\to\infty} m(a_l, b_l) = \lim\limits_{l\to\infty} a_l \cdot b_l = a \cdot b = m(a, b)$ und die Stetigkeit ist bewiesen.

Stetige Funktionen

Aufgabe

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2) \longmapsto x_1^2 + x_2^2$$

stetig ist.

Aufgabe

Wir setzen $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R} | \, x_2 \neq 0\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass die Divisionsfunktion

$$d \ : D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2) \longmapsto \frac{x_1}{x_2}$$

stetig ist.

Stetige Funktionen

Ist $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung, so können wir für jedes $x \in D$ den Wert $f(x)$ in Komponentendarstellung schreiben, also

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$$

Dadurch erhalten wir m neue Abbildungen

$$f_i : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

die jetzt allerdings nur noch Werte in $\mathbb{R}$ haben. Die f_i heißen die **Komponenten** von f.

Satz

Genau dann ist $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ stetig in a, wenn jede Komponente $f_i : D \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, m)$ von f stetig in a ist.
Genau dann ist f stetig, wenn jede Komponente f_i von f stetig ist.

Stetige Funktionen

Aufgrund dieses Satzes 36 zur komponentenweisen Stetigkeit reicht es aus, Funktionen $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ zu betrachten.

Beispiel

Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad x \longmapsto (2\cos(x), 2\sin(x), x)$$

ist stetig, da sie komponentenweise stetig ist. Ihr Bild ist ein **Schraubenlinie**.

Stetige Funktionen

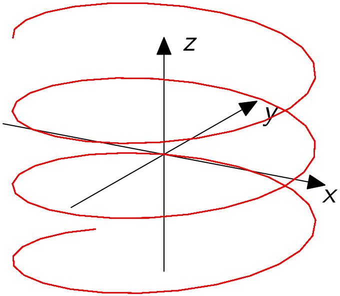

Abbildung: Schraubenlinie

Stetige Funktionen

Beispiel

Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad x \longmapsto (x^2, x^3)$$

ist stetig, da sie komponentenweise stetig ist. Ihr Bild ist eine **Neilsche Parabel**.

Stetige Funktionen

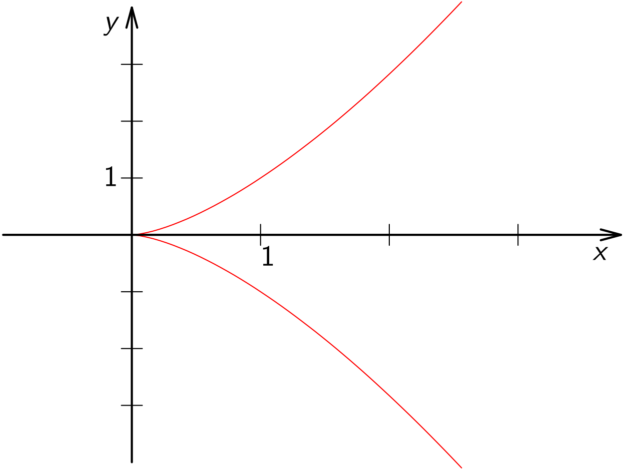

Abbildung: Neilsche Parabel

Stetige Funktionen

Definition

Eine stetige Abbildung

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

heißt **Kurve** im $\mathbb{R}^n$.

Bemerkung

Die Komponenten einer Kurve $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sind Funktionen $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ in einer Variablen.

Ähnlich wie in der Analysis einer Variablen gibt es auch für Funktionen und Abbildungen in mehreren Variablen Regeln, die die Untersuchung auf Stetigkeit vereinfachen:

Stetige Funktionen

Satz

Sind $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ Abbildungen mit einem gemeinsamen Definitionsbereich D, die stetig in $a \in D$ sind, und ist $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Konstante, so gilt:

1. *Die Abbildung $f + g : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ist stetig in a.*
2. *Die Abbildung $f - g : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ist stetig in a.*
3. *Die Abbildung $\lambda \cdot f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ist stetig in a.*

Ist speziell $n = 1$, sind also $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}$, so gilt auch

1. *Die Abbildung $f \cdot g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig in a.*
2. *Ist $g(a) \neq 0$, und ist $D' = \{x \in D | \, g(x) \neq 0\}$ so ist die Abbildung $\frac{f}{g} : D' \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig in a.*

Stetige Funktionen

Beispiel

Die beiden Koordinatenprojektionen

$$f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit $f(x_1, x_2) = x_1$ und $f(x_1, x_2) = x_2$ sind stetig, wie wir schon in Beispiel 30 gesehen haben. Damit sind auch die Funktionen

$$h, k, l : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit $h(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, $k(x_1, x_2) = x_1 - x_2$ und $l(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$ stetig.

Stetige Funktionen

Definition

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt **Monomfunktion** in n Variablen, wenn es $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{N}$ gibt mit $f(x_1, \dots, x_n) = x_1^{\mu_1} \cdot x_2^{\mu_2} \cdots x_n^{\mu_n}$ für alle $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt **Polynomfunktion** in n Variablen, wenn es Monomfunktionen $M_1, \dots, M_t$ und reelle Zahlen $a_1, \dots, a_t$ gibt mit $f(x) = a_1 \cdot M_1(x) + \dots + a_t \cdot M_t(x)$ für alle $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **rationale Funktion** in n Variablen, wenn es zwei Polynomfunktionen p und q in n Variablen gibt, so dass $q(x) \neq 0$ für alle $x \in D$ und $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ für alle $x = (x_1, \dots, x_n) \in D$.

Stetige Funktionen

Regel

Jede Polynomfunktion in n Variablen ist stetig in ganz $\mathbb{R}^n$, jede rationale Funktion in n Variablen ist stetig in ihrem Definitionsbereich.

Beispiel

Die Funktion $p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $p(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 x_2^4 + x_1^3 x_2 + x_2^7 + 517}{x_1^2 + x_2^2 + x_1^4 x_2^4 + 3017}$ ist stetig.

Beispiel

Setzen wir $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | \, x_1 \neq x_2 \text{ und } x_1 \neq -x_2\}$, so ist die Funktion $r : D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $r(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + 2x_1 x_2^3 - x_2^4}{x_1^2 - x_2^2}$ stetig.

Stetige Funktionen

Beispiel

Die beiden Abbildungen

$$f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

mit $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$ und $g(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$ sind stetig, wie wir schon in den Beispielen 27 und 27 gesehen haben. Damit sind auch

$$f \pm g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

mit $(f + g)(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 + x_2)$ und $(f - g)(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_2 - x_1)$ stetig.

Stetige Funktionen

Beispiel

Die beiden Abbildungen $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_2 - x_1)$ und $g(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$ sind stetig, wie man sehr leicht sieht (siehe auch Beispiel 46). Damit sind auch $f \pm g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $(f + g)(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$ und $(f - g)(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2, x_2 - 2x_1)$ stetig.

Beispiel

Die beiden Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$ und $g(x_1, x_2) = 1 + x_1^2 + x_2^2$ sind stetig, wie sofort aus Beispiel 45 folgt, und es gilt $g(x_1, x_2) \neq 0$ für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Damit sind auch $f \cdot g, \frac{f}{g} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $(f \cdot g)(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 \cdot (1 + x_1^2 + x_2^2)$ und $\frac{f}{g}(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2}$ stetig.

Stetige Funktionen

Satz

Ist $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung mit Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}^m$, ist $g : D' \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung mit Definitionsbereich $D' \subseteq \mathbb{R}^{m'}$ und so, dass $g(D') \subseteq D$ und ist $a \in D'$, so gilt:
Ist g stetig in a und ist f stetig in $g(a)$, so ist die Komposition $f \circ g$ stetig in a.

Beispiel

Die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2} \quad \text{und} \quad g(x) = cos(x)$$

sind stetig. Damit ist auch die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit
$h(x_1, x_2) = \cos\left(\frac{x_1 x_2}{1+x_1^2+x_2^2}\right)$ stetig (also Komposition $g \circ f$ von g und f).

Stetige Funktionen

Wir haben nun gesehen, dass sich die Stetigkeit einer Abbildung $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ komponentenweise untersuchen lässt. In vorherigen Abschnitthaben wir darüber hinaus aus f Funktionen in einer Variable weniger durch Festhalten einer Variable definiert, indem wir etwa für ein $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ und einen Punkt $(a, b) \in D$ die Funktionen

$$g(x_1) = g_b(x_1) = f(x_1, b), \qquad h(x_2) = h_a(x_2) = f(a, x_2)$$

betrachtet haben. Es ist daher naheliegend, zu fragen, ob die Stetigkeit von f in (a, b) durch die Stetigkeit von g_a in b und h_b in a überprüft werden kann. Das ist leider nicht der Fall, wie folgendes Beispiel zeigt:

Stetige Funktionen

Beispiel

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x_1 = 0 \text{ oder } x_2 = 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

und den Punkt $(a, b) = (0, 0)$. Natürlich sind $g_0(x_1) = f(x_1, 0) = 0$ und $h_0(x_2) = h(0, x_2) = 0$ stetig im Punkt 0, aber f ist nicht stetig in $(0, 0)$. Betrachten wir nämlich die Folge $(a_l)_{l \geq 1}$ mit $a_l = \left(\frac{1}{l}, \frac{1}{l}\right)$, so ist die Folge konvergent mit

$$\lim_{l \to \infty} a_l = 0$$

aber

$$\lim_{l \to \infty} f(a_l) = \lim_{l \to \infty} 1 = 1 \neq f(0, 0)$$

Stetige Funktionen

Die Stetigkeit einer Funktion ist eine sehr wünschenswerte Eigenschaft, denn stetige Funktionen verhalten sich in der Regel besser als unstetige. Ein Beispiel hierfür ist die folgende Aussage:

Satz

Ist $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene, nicht–leere und beschränkte Teilmenge (gibt es also ein $C > 0$, so dass $\|a\| \leq C$ für alle $a \in A$), so gibt es eine Konstante K mit $|f(a)| \leq K$ für alle $a \in A$ (d.h. f ist beschränkt auf A). Ferner gibt es Elemente $\alpha, \beta \in A$ mit

$$f(\alpha) \leq f(a) \leq f(\beta) \qquad \textit{für alle } a \in A$$

Die Funktion f nimmt also auf A Maximum und Minimum an.

Stetige Funktionen

Aufgabe

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^4 - x_2^4}{x_1^2 + x_2^2} & \text{für } (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$$

auf Stetigkeit im Punkt $(0,0)$.

Aufgabe

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^2 + x_2^2} & \text{für } (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$$

auf Stetigkeit im Punkt $(0,0)$.

Stetige Funktionen

Aufgabe

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(x_1, x_2) = \sin\left(\frac{x_1^3 x_2^2 + x_1 + x_2^3}{x_1^4 + 7}\right) + \ln(x_1^2 + x_2^4 + 2) + e^{x_1^2 + x_1 x_2 - x_2^3}$$

stetig ist.