Codierungstheorie
Signale und Signalverarbeitung

Reinhold Hübl

Herbst 2022 / 1. Vorlesung

DHBW
Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Mannheim

Allgemeines

Moodle–Raum zu dieser Vorlesung:

Codierungstheorie für die angewandte Informatik

Kurztitel

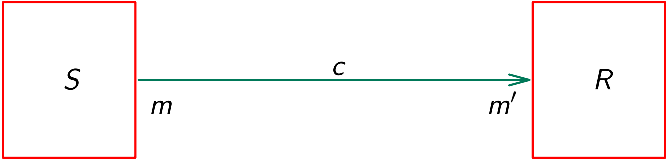
TINFAI_CODE

Einschreibeschlüssel

tinfai-code

Problemstellung

Codierungstheorie ist eine Teilgebiet der Informationstheorie. Grundsätzlich geht es dabei um die Frage, wie die Übertragung von Daten und Nachrichten m von einen Sender S an einen Empfänger R zuverlässig gestaltet werden kann. c gegeben ist, und das damit zu rechnen ist, dass bei der Übertragung über diesen Kanal Fehler auftreten.



Codierungstheorie beschäftigt sich mit der Frage, wie aus m' der *Inhalt* von m rekonstruiert werden kann.

analoge Signale

Unter einem **Signal** (Zeitsignal) x versteht man einen physikalische Größe (ohne Einheit) die sich als Funktion der Zeit darstellen lässt, also $x = x(t)$. Schallwellen, Temperatur etc. Sie liegen in der Regel in Form eines analogen Spannungsverlaufes vor, also als zeit– und wertkontinuierliche Funktion.

Ein zeitkontinuierliches Signal ist also aus mathematischer Sicht nichts anderes als eine Funktion

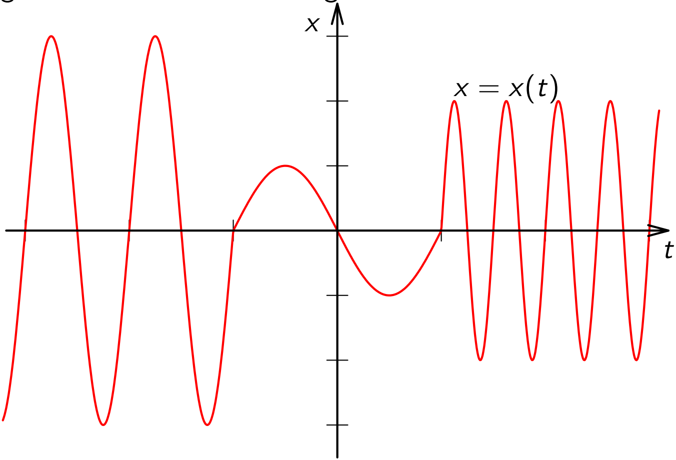
$$x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

Ein zeit- und wertkontinuierliches Signal ist eine stetige Funktion

$$x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

Analoge Signale

Ein Zeitsignal kann also etwa die folgende Gestalt haben

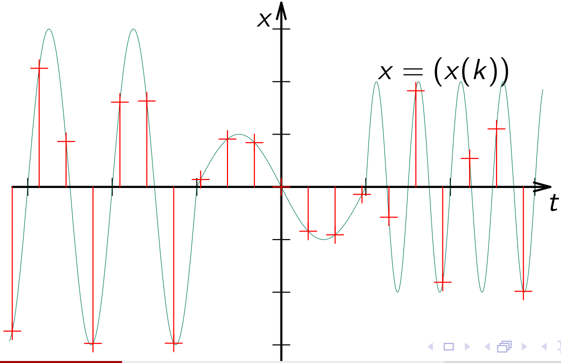


Diskretisierung

Für die Speicherung werden analoge Signale diskretisiert, dh. zu diversen Zeitpunkten t_k gemessen („abgetastet“). Zeitabstände, so dass also $t_{k+1} = t_k + \Delta_t$ mit einem festen Zeitwert Δ_t, und wir schreiben auch

$$x(k) = x(t_k) = x(t_0 + k \cdot \Delta_t) \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Dadurch entsteht aus dem analogen Signal $x(t)$ ein diskretes Signal $x(k), k \in \mathbb{Z}$.



diskrete und analoge Signale

Problem

Unter welchen Voraussetzungen (an das Signal und an die Abtaststellen) kann das Signal $x(t)$ vollständig (also ohne Informationsverlust) aus seiner Diskretisierung $x(k), k \in \mathbb{Z}$ wiederhergestellt werden.

Das ist ganz offensichtlich eine Fragestellung, die von der Art des Signales $x(t)$ und von der Häufigkeit der Abtastung, also von Δ_t abhängt.

Die Fouriertransformation

Betrachte ein analoges Signal $x(t)$.

Definition

Die Funktion

$$\widehat{x}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \cos(\omega t) dt \; - \; \mathrm{i} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \sin(\omega t) dt$$

heißt die **Fouriertransformierte** oder das **Spektrum** von $x(t)$ (falls dieser Ausdruck existiert).
Wir schreiben auch $X(\omega)$ oder $\mathscr{F}(x)(\omega)$ für $\widehat{x}(\omega)$.

Es gilt:

$$\widehat{x}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-\mathrm{i}\omega t} dt$$

Fouriertransformation

Bemerkung

1. Ist $x(t)$ (reell) und gerade, so ist $\widehat{x}(\omega)$ gerade und

$$\widehat{x}(\omega) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^\infty x(t) \cdot \cos(\omega t) dt.$$

2. Ist $x(t)$ (reell) und ungerade, so ist $\widehat{x}(\omega)$ ungerade und

$$\widehat{x}(\omega) = -\frac{2 \cdot \mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^\infty x(t) \cdot \sin(\omega t) dt.$$

3. Ist $\tau_a x(t)$ die Verschiebung des Signals $x(t)$ um a, also $\tau_a x(t) = x(t-a)$, so ist

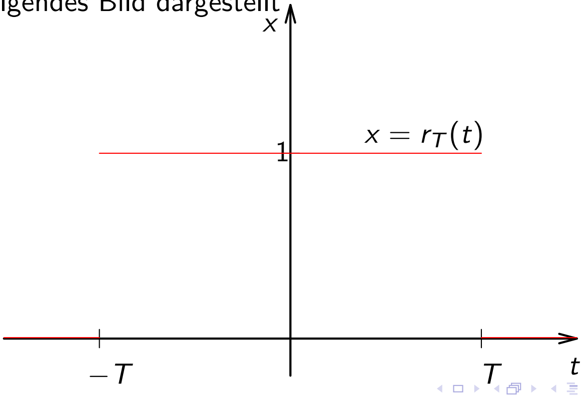
$$\widehat{\tau_a x}(\omega) = \widehat{x}(\omega) \cdot e^{-\mathrm{i}\, a\, \omega}.$$

Rechtecksimpuls

Der Rechtecksimpuls $r_T(t)$ mit

$$r_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \in [-T, T] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wird durch folgendes Bild dargestellt

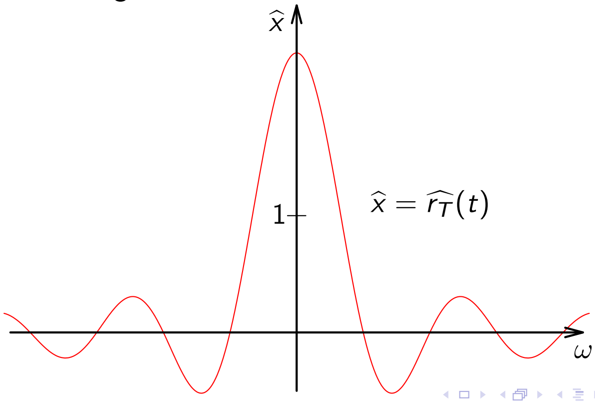


Rechtecksimpuls

Seine Fouriertransformierte ist

$$\widehat{r_T}(\omega) = \frac{2T}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(\omega T)}{\omega T}$$

Sie wird graphisch dargestellt durch

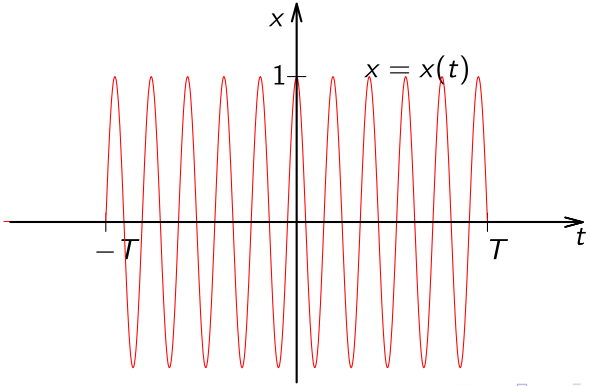


Kosinusmodulation

Die Modulation $f(t)$ des Kosinus durch eine Rechtecksfunktion, gegeben durch

$$f(t) = r_T(t) \cdot \cos(\omega_0 t)$$

wird durch folgendes Bild dargestellt

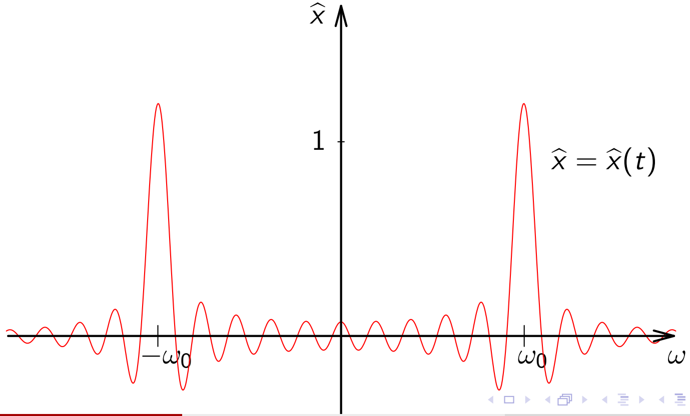


Kosinusmodulation

Seine Fouriertransformierte

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin\left(T(\omega+\omega_0)\right)}{\omega+\omega_0} + \frac{\sin\left(T(\omega-\omega_0)\right)}{\omega-\omega_0} \right)$$

wird graphisch dargestellt durch

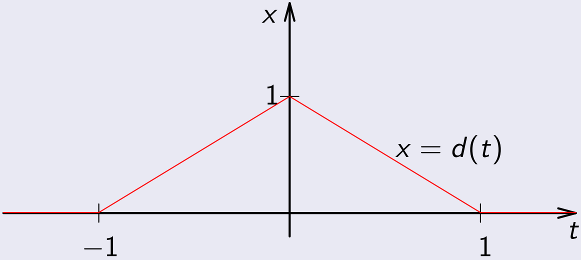


Dreiecksimpuls

Übung

Berechnen Sie die Fouriertransformierte des Dreiecksimpulses d mit

$$d_T(t) = \begin{cases} 1+t & \text{für } t \in [-1,0] \\ 1-t & \text{für } t \in [0,\,1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Fouriertransformation

Satz (Umkehrformel)

Ist $x(t)$ ein stückweise stetiges Signal mit $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt < \infty$, so existiert die Fouriertransformierte $\widehat{x}(\omega)$ und es gilt

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{x}(\omega) \cos(\omega t) d\omega + \mathrm{i} \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{x}(\omega) \sin(\omega t) d\omega \right)$$

an allen Stetigkeitsstellen von $x(t)$.

Bemerkung

Die Gleichheit gilt im Allgemeinen nicht punktweise sondern nur fast überall, also bis auf eine Nullmenge. Ist das Signal stetig, so gilt sie auch punktweise.

Fourierreihen

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt bekanntlich **periodisch** mit Periode $p > 0$, wenn

$$f(x+p) = f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

Beispiel

Die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \cos(x), \quad g(x) = \sin(x)$ sind periodisch mit Periode 2π.

Beispiel

Wir betrachten ein $\omega > 0$ und Konstanten $A, b \in \mathbb{R}$ mit $A \neq 0$. Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = A \cdot \cos(\omega \cdot x + b)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist periodisch mit Periode $\frac{2\pi}{\omega}$.

Fourierreihen

Bemerkung

Ist f periodisch von der Periode $2T_0 > 0$, so ist g mit

$$g(x) = f\left(\frac{T_0 \cdot x}{\pi}\right) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

periodisch mit der Periode 2π.
Ist umgekehrt $g(x)$ eine 2π–periodische Funktion, so ist f mit

$$f(x) = g\left(\frac{\pi \cdot x}{T_0}\right) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

eine $2T_0$–periodische Funktion. Über diese Transformation entsprechen sich die $2T_0$–periodischen und die 2π–periodischen Funktionen auf eindeutige Weise.
Es reicht also, periodische Funktionen der Periode 2π zu betrachten.

Fourierreihen

Betrachte eine 2π–periodische Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ für die $\int\limits_0^{2\pi} f(x)dx$ existiert.

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi} \cdot \int\limits_0^{2\pi} f(x)\,dx \\
a_n &= \frac{1}{\pi} \cdot \int\limits_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx)\,dx \qquad (n \geq 1) \\
b_n &= \frac{1}{\pi} \cdot \int\limits_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(nx)\,dx \qquad (n \geq 1)
\end{aligned}
$$

heißen die **Fourierkoeffizienten** der Funktion f,

$$\mathscr{F}_f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx))$$

heißt die **Fourierreihe** von f.

Fourierreihen

Für numerische Zwecke betrachten wir auch oft die Fourierpolynome

$$\mathscr{F}_{f,N}(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx))$$

Satz

Ist $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare 2π–periodische Funktion, so gilt

$$f(x) = \mathscr{F}_f(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

und die Fourier–Reihe konvergiert gleichmäßig gegen f, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $N \geq N_0$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$|f(x) - \mathscr{F}_{f,N}(x)| < \varepsilon$$

Etwas schwächere Konvergenzaussagen gelten für allgemeine integrierbare Funktionen.

Fourierreihen

Fourierreihen können auch für allgemeine $2T_0$–periodische Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, für die $\int\limits_0^{2T_0} f(x)dx$ existiert, betrachtet werden.

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T_0} \cdot \int\limits_0^{2T_0} f(x)\, dx \\
a_n &= \frac{1}{T_0} \cdot \int\limits_0^{2T_0} f(x) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{T_0} \cdot nx\right)\, dx \qquad (n \geq 1) \\
b_n &= \frac{1}{T_0} \cdot \int\limits_0^{2T_0} f(x) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{T_0} \cdot nx\right)\, dx \qquad (n \geq 1)
\end{aligned}
$$

sind in diesem Fall die **Fourierkoeffizienten** der Funktion f, und

$$
\mathscr{F}_f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos\left(\frac{\pi}{T_0} \cdot nx\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{T_0} \cdot nx\right)\right)
$$

ist hier die **Fourierreihe** von f. Konvergenzaussagen gelten entsprechend.

Fourierreihen

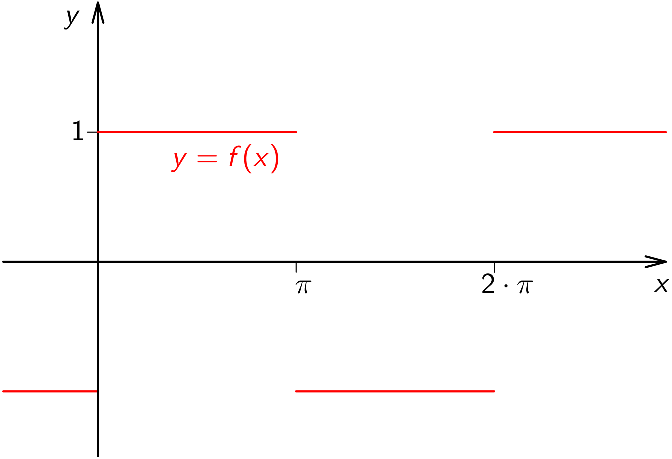
Wir betrachten die Rechtecksschwingung $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, die auf jedem Intervall $[\,2n\pi,\, 2(n+1)\pi\,[$ $(n \in \mathbb{Z})$ definiert ist durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 2n\pi \leq x < (2n+1)\pi \\ -1 & \text{für } (2n+1)\pi \leq x < 2(n+1)\pi \end{cases}$$

Beachten Sie, dass dadurch $f(x)$ schon
Diese Funktion ist offensichtlich 2π–periodisch.

Fourierreihen

Die Rechtecksschwingung selbst hat den folgenden Graphen



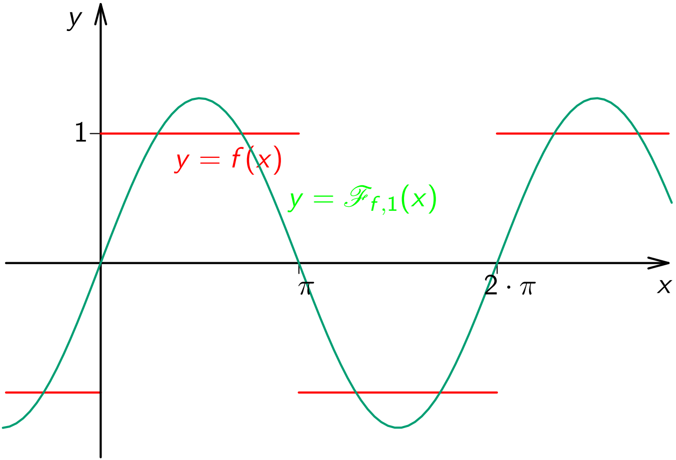
Fourierreihen

Die Fourierreihe ist in diesem Fall

$$\mathscr{F}_f(x) = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1) \cdot x)}{2n+1}$$

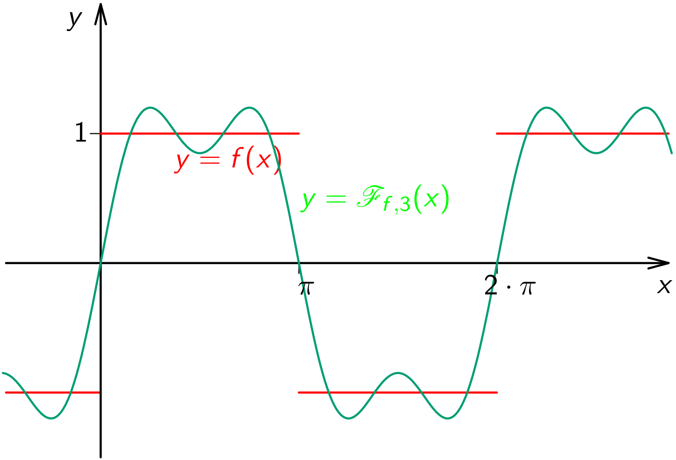
Fourierreihen

Wir erhalten also als erste Näherung durch das erste Fourierpolynom $\mathscr{F}_{f,1}(x) = \frac{4}{\pi} \cdot \sin(x)$:



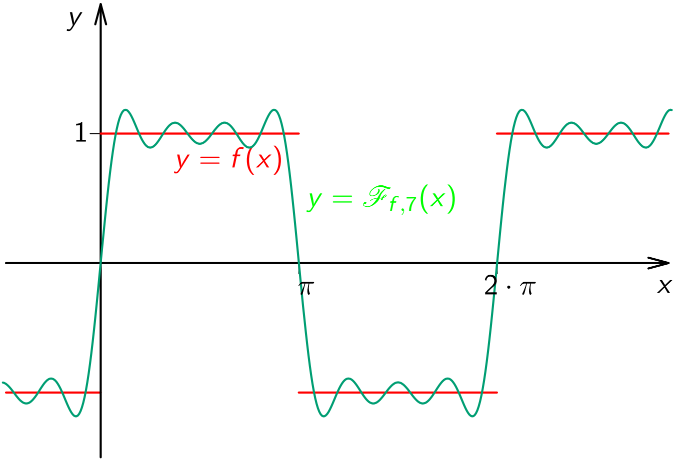
Fourierreihen

durch $\mathscr{F}_{f,3}$, also mit Koeffizienten bis zum Grad 3:



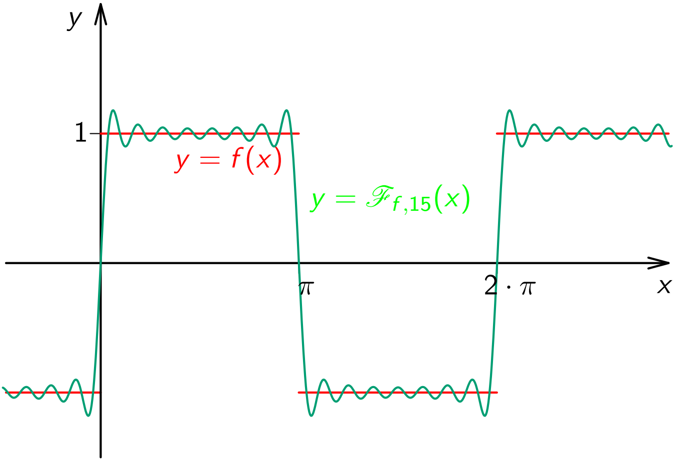
Fourierreihen

durch $\mathscr{F}_{f,7}$, also mit Koeffizienten bis zum Grad 7:



Fourierreihen

und durch $\mathscr{F}_{f,15}$, also mit Koeffizienten bis zum Grad 15:



Fourierreihen

Regel

Ist f eine ungerade 2π–periodische Funktion (gilt also $f(-x) = -f(x)$ für alle x), so gilt

$$a_n = 0 \qquad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}$$

Ist f eine gerade 2π–periodische Funktion (gilt also $f(-x) = f(x)$ für alle x), so gilt

$$b_n = 0 \qquad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}$$

Regel

Die Fourierkoeffizienten können über jedem Intervall der Länge $2 \cdot \pi$ berechnet werden, also z.B. auch über $[-\pi, \pi]$.

Fourierreihen

Wir betrachten die Sägezahnfunktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, die für $n \in \mathbb{Z}$ auf dem Intervall $[(2n-1)\pi, (2n+1)\pi[$ definiert ist durch

$$f(x) = x - 2n\pi \quad \text{für } (2n-1)\pi \leq x < (2n+1)\pi$$

Auch hier handelt es sich um eine 2π–periodische Funktion, die ungerade ist.

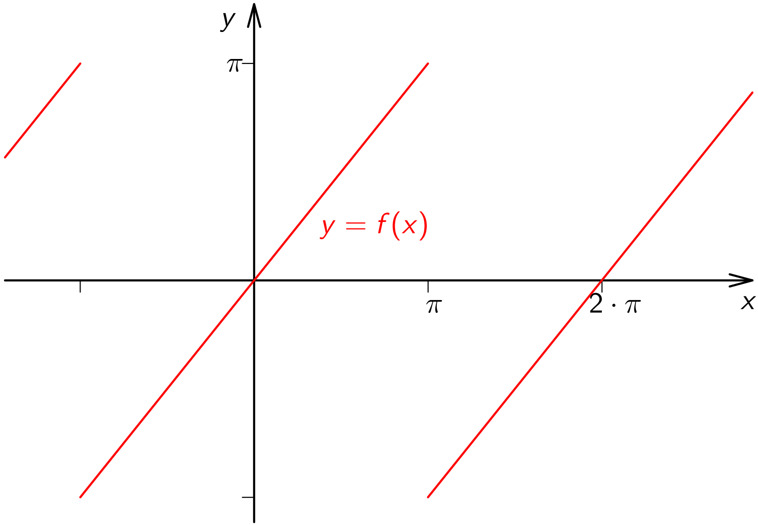
Fourierreihen

Die Fourierreihe ist in diesem Fall

$$\mathscr{F}_f(x) = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot \sin(n \cdot x)}{n}$$

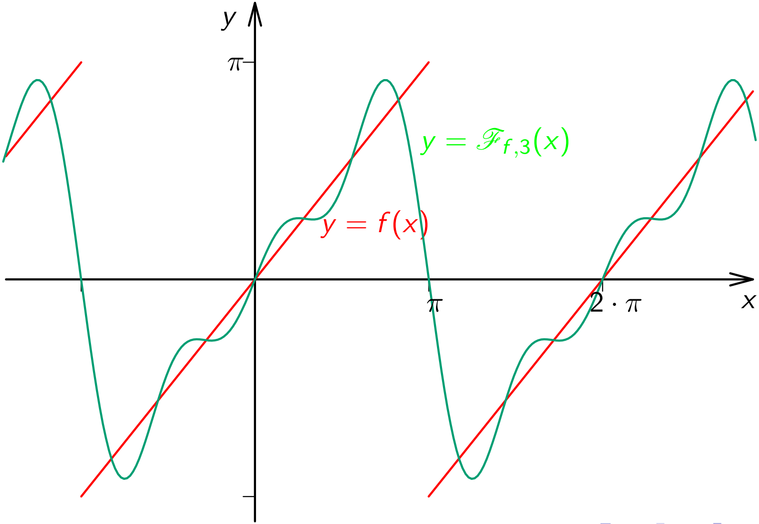
Fourierreihen

Wir erhalten als Funktion



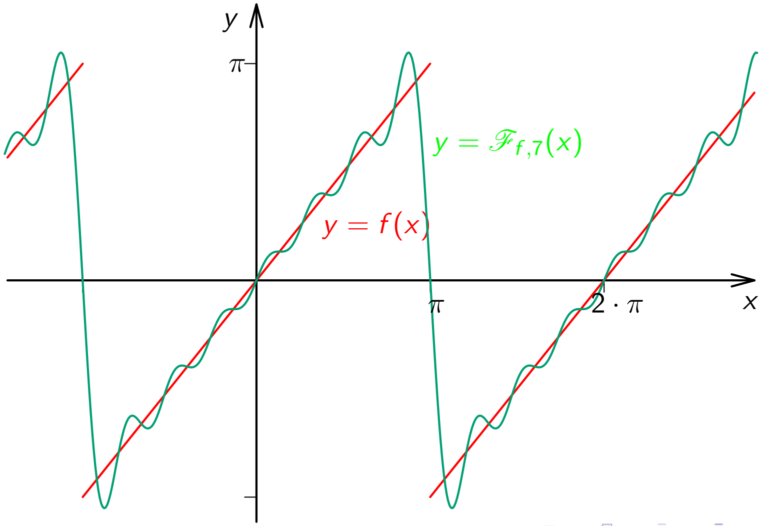
Fourierreihen

Wir erhalten als Näherung $\mathscr{F}_{f,3}$, also mit Koeffizienten bis zum Grad 3:



Fourierreihen

und als Näherung $\mathscr{F}_{f,7}$, also mit Koeffizienten bis zum Grad 7:



Fourierreihen

Um eine $2T_0$–periodische Funktion zu definieren, reicht es, diese auf einem Intervall der Länge $2T_0$ zu beschreiben. Durch die Periodizität ist sie dann bereits vollständig festgelegt.

Die Sägezahnfunktion ist als 2π–periodische Funktion schon eindeutig festgelegt durch die Angabe

$$f(x) = x \qquad \text{für} \;\; x \in [-\pi, \pi[$$

Die Rechtecksschwingung ist als 2π–periodische Funktion schon eindeutig festgelegt durch

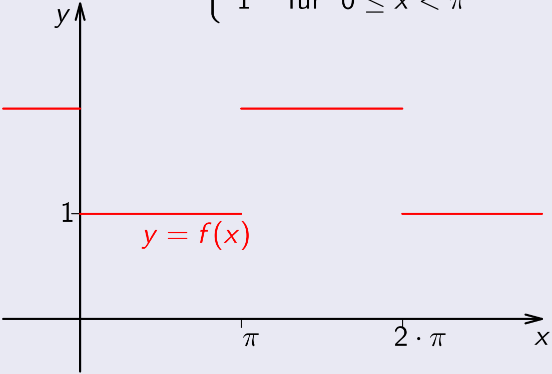
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le x < \pi \\ -1 & \text{für } \pi \le x < 2\pi \end{cases}$$

Fourierreihen

Übung

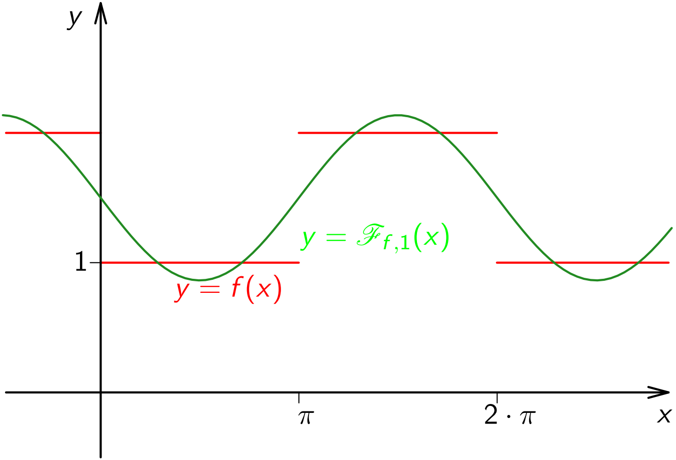
Berchnen Sie die Fourierreihe der 2π–periodischen Funktion f, die auf dem Intervall $[-\pi, \pi[$ gegeben ist durch

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{für } -\pi \leq x < 0 \\ 1 & \text{für } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$



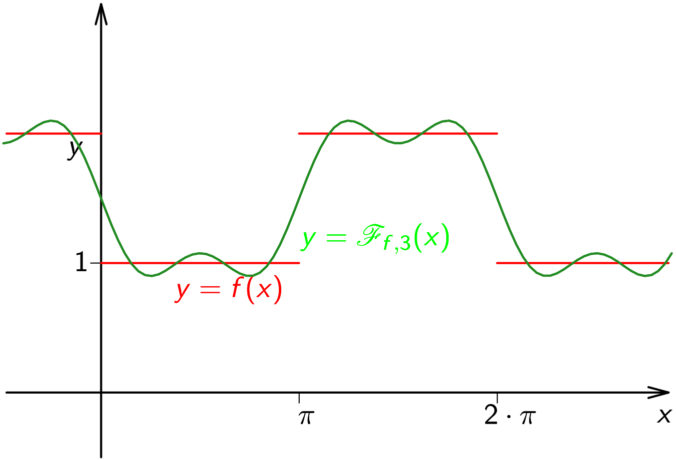
Fourierreihen

Wir erhalten also als erste Näherung durch das erste Fourierpolynom $\mathscr{F}_{f,1}(t) = \frac{3}{2} - \frac{2}{\pi} \cdot \sin(t)$:



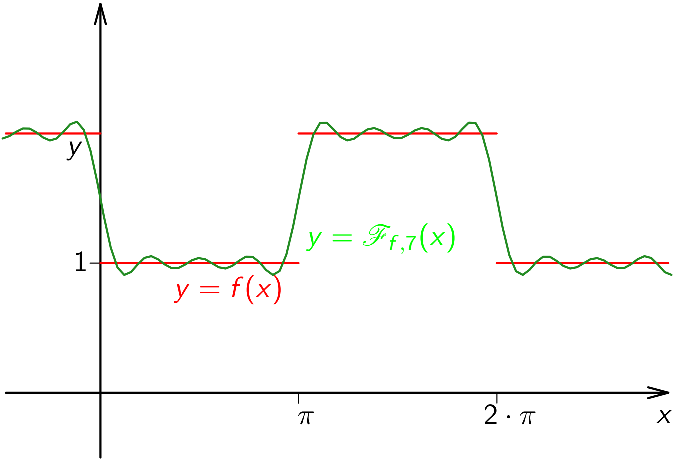
Fourierreihen

durch $\mathscr{F}_{f,3}$, also mit Koeffizienten bis zum Grad 3:



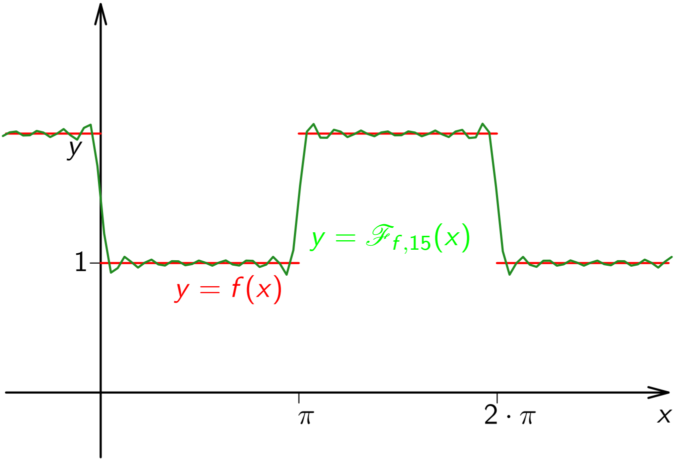
Fourierreihen

durch $\mathscr{F}_{f,7}$, also mit Koeffizienten bis zum Grad 7:



Fourierreihen

und durch $\mathscr{F}_{f,15}$, also mit Koeffizienten bis zum Grad 15:



Fourierreihen

Beispiel

Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ der Periode 4, die auf dem Intervall $[-2, 2[$ gegeben ist durch

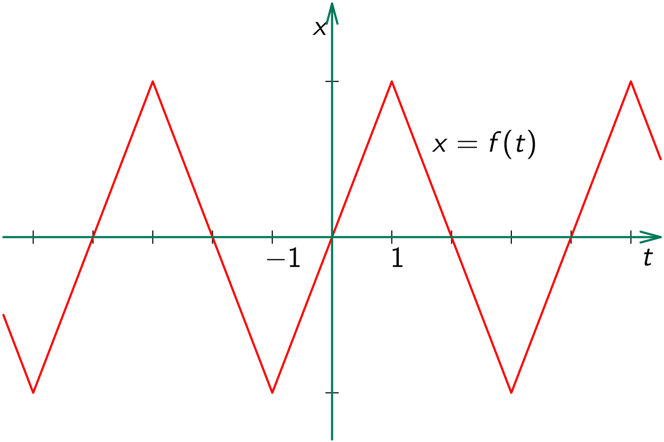
$$f(t) = \begin{cases} -2 - t & \text{für} \quad -2 \leq t < -1 \\ t & \text{für} \quad -1 \leq t < 1 \\ 2 - t & \text{für} \quad 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

hat die Fourierreihe

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 8}{(2n+1)^2 \cdot \pi^2} \cdot \sin\left(\frac{(2n+1) \cdot \pi}{2} \cdot t\right)$$

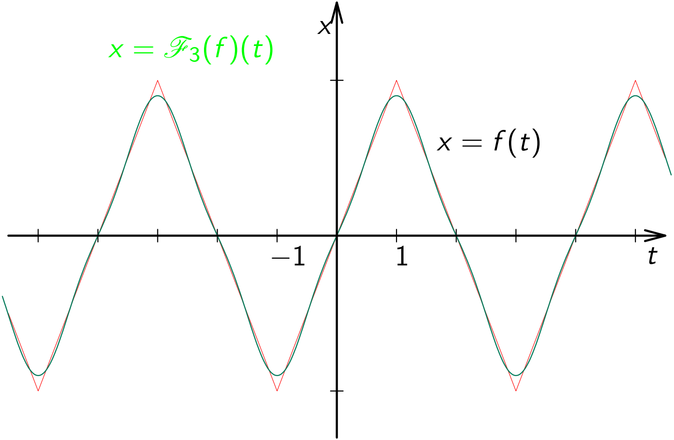
Fourierreihen

Die Funktion stellt sich graphisch wie folgt dar

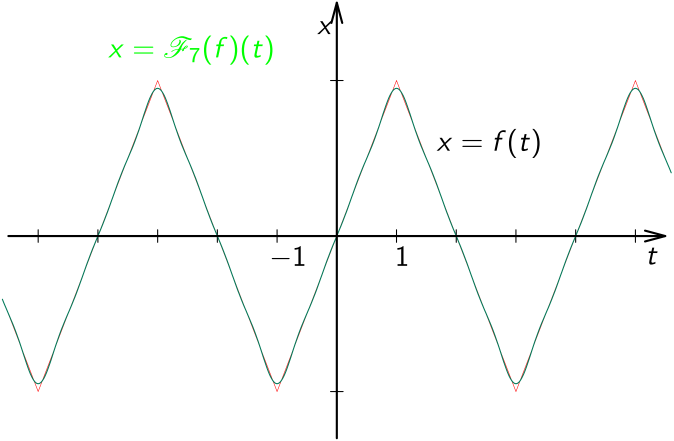


Fourierreihen

Die Approximation von $f(t)$ durch das dritte Fourierpolynom $\mathscr{F}_3(f)(t)$ sieht aus wie folgt



und die Approximation von $f(t)$ durch das siebte Fourierpolynom $\mathscr{F}_7(f)(t)$ ist



Fourierreihen

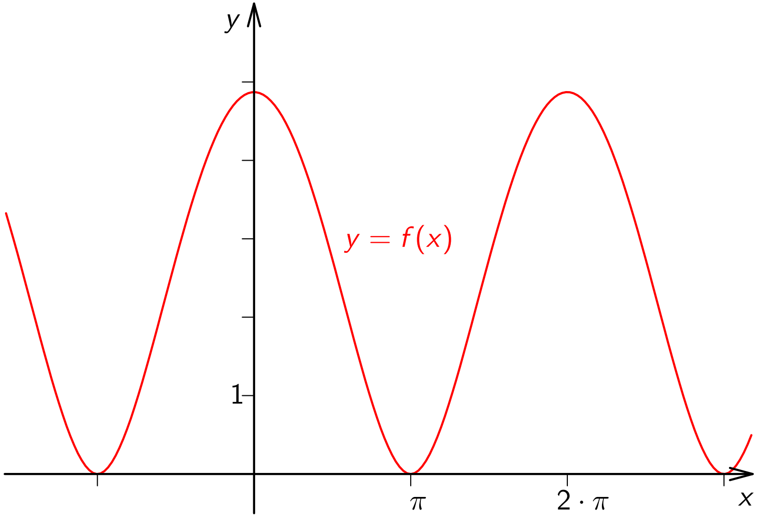
Wir betrachten nun die 2π–periodische Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, die auf dem Intervall $]-\pi, \pi]$ gegeben ist durch

$$f(x) = \frac{1}{20} \cdot x^4 - \frac{\pi^2}{10} \cdot x^2 + \frac{\pi^4}{20}$$

(und dann 2π–periodisch fortgesetzt wird).
Diese Funktion ist per Definitionem 2π–periodisch.

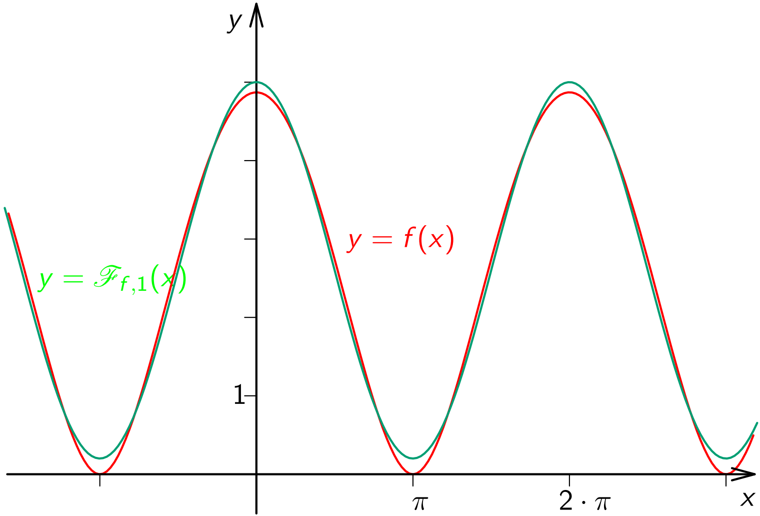
Fourierreihen

Die Funktion hat die Gestalt



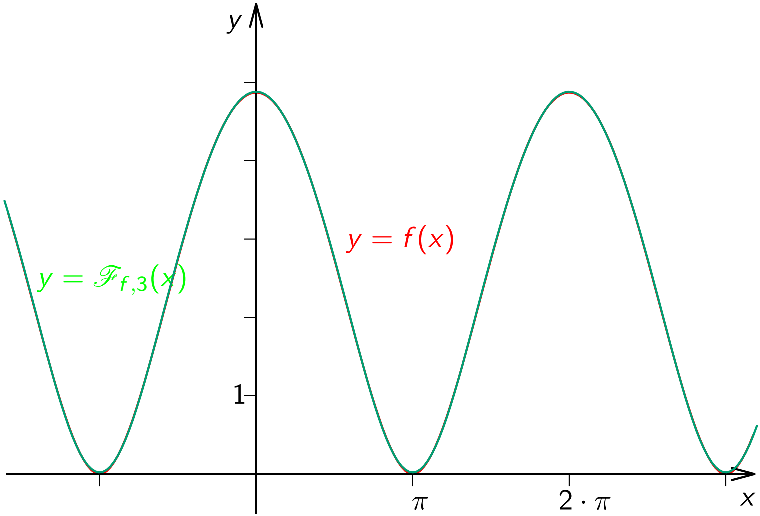
Fourierreihen

Wir erhalten also als Näherung mit dem ersten Fourierpolynom $\mathscr{F}_{f,1}$:



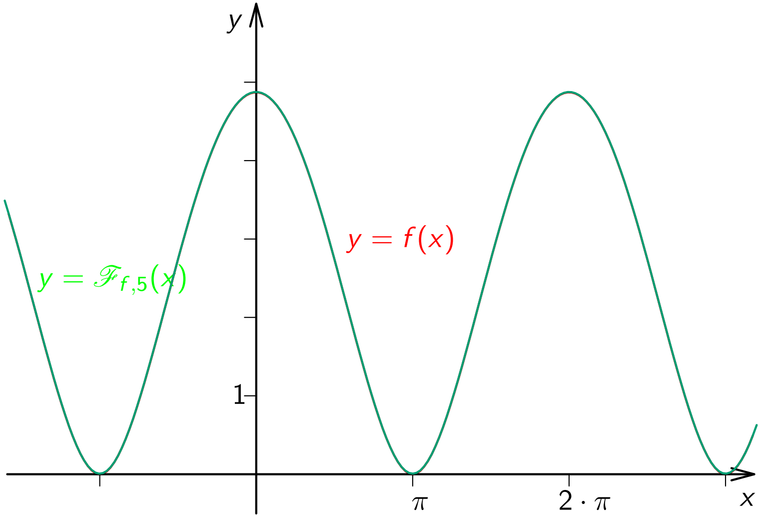
Fourierreihen

mit dem drittten $\mathscr{F}_{f,3}$:



Fourierreihen

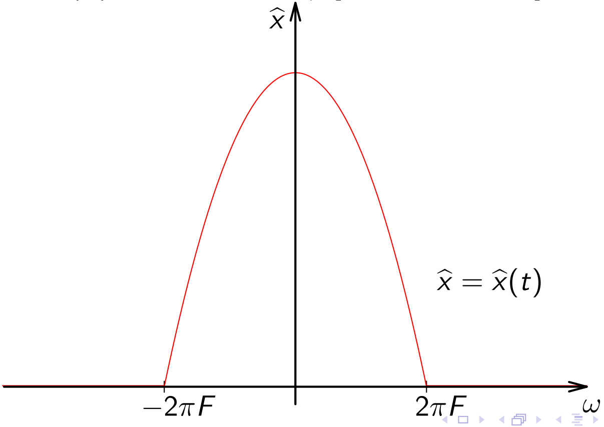
und mit dem fünften $\mathscr{F}_{f,5}$:



bandbeschränkte Signale

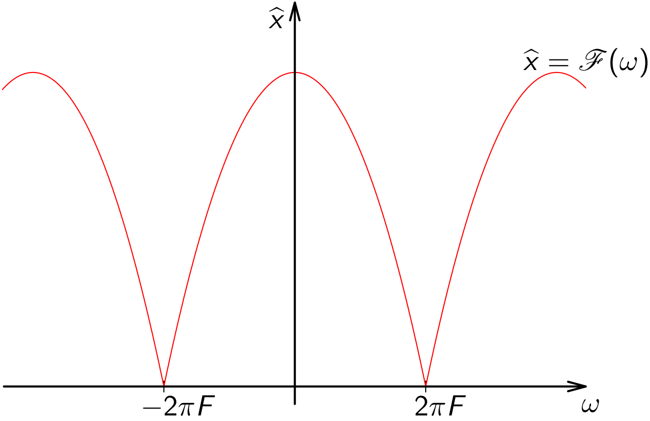
Ein Signal $x(t)$ heißt **bandbeschränkt** mit maximaler Frequenz F, wenn die Fouriertransformierte $\widehat{x}(\omega)$ von $x(t)$ existiert, und wenn

$$\widehat{x}(\omega) = 0 \qquad \text{für } \omega \notin [-2\pi \cdot F, 2\pi \cdot F]$$



bandbeschränkte Signale

Ein bandbeschränktes Signal kann $4\pi F$–periodisch gemacht werden:



Shannon–Nyquist–Abtasttheorem

Fourierreihen und Foriertransformation liefern die **Kardinalreihendarstellung** eines mit maximaler Frequenz F bandbeschränkten stetigen Signals:

$$x(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{l}{2F}\right) \cdot \frac{\sin(2\pi \cdot F \cdot t - \pi \cdot l)}{2\pi \cdot F \cdot t - \pi \cdot l}$$

Das Signal $x(t)$ kann also vollständig und ohne Informationsverlust aus den Abtastwerten $\left\{x\left(\frac{l}{2F}\right)\right\}_{l\in\mathbb{Z}}$ rekonstruiert werden.

Shannon–Nyquist–Abtasttheorem

Satz (Abtasttheorem von Shannon)

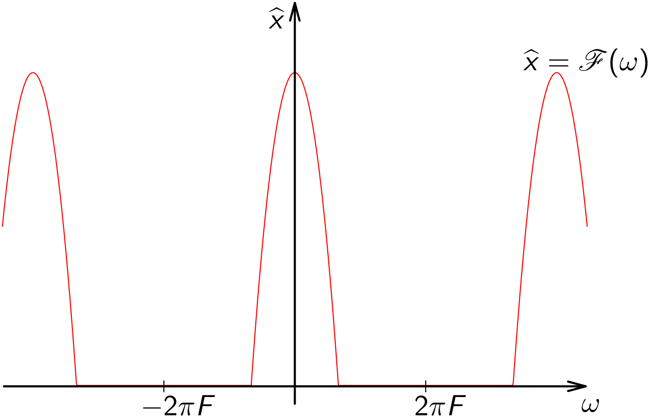
Ist $x(t)$ ein durch die maximale Frequenz F bandbeschränktes stetiges Signal, so kann $x(t)$ durch eine Abtastung deren Abtastabstände höchstens $\frac{1}{2F}$ sind, vollständig aus dem daraus entstehenden zeitdiskreten Signal wiederhergestellt werden

Bemerkung

Das Abtasttheorem lässt sich auch wie folgt formulieren: Wird ein durch die maximale Frequenz F bandbegrenztes Signal mindestens mit doppelter Abtastfrequenz $2 \cdot F$ abgetastet, so kann es aus den Abtastwerten rekonstruiert werden. Bestimmt F auch die minimale Bandbreite, so kann keine kleinere Abtastfrequenz gewählt werden, um das Signal zu rekonstruieren.

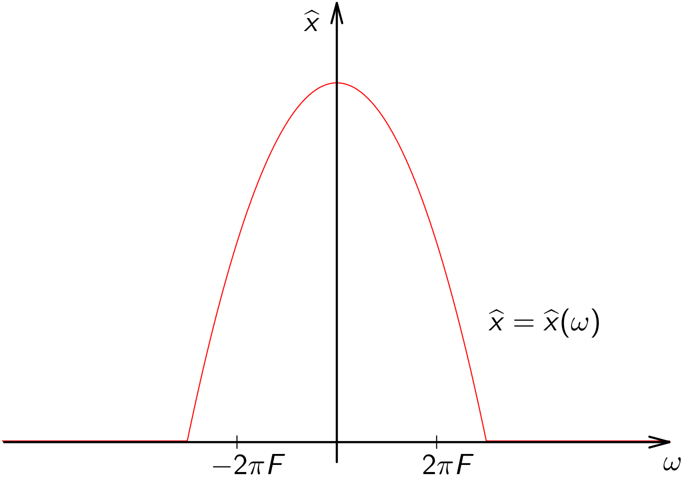
Shannon–Nyquist und Oversampling

Wird die Bandbreite des Signals überschätzt, so führt das zu Mehraufwand aber keinen technischen Problemen:



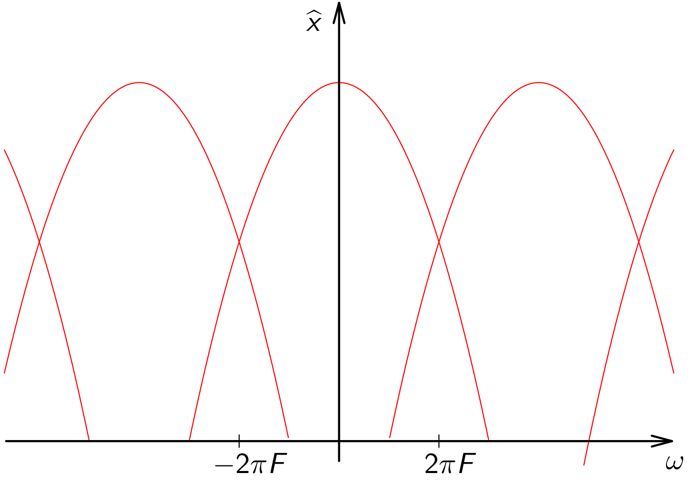
Shannon–Nyquist und Undersampling

Unterschätzen führt dagegen zu Problemen. ist z.B. Originalbandbreite größer,



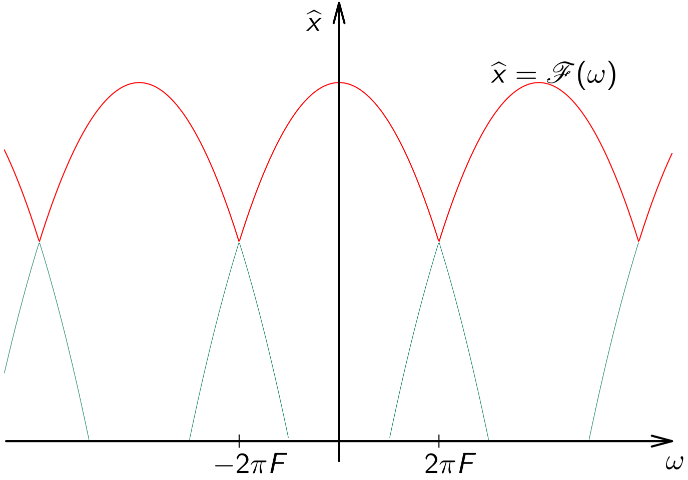
Shannon–Nyquist und Undersampling

Die Frequenzbögen überschneiden sich beim periodisch machen:



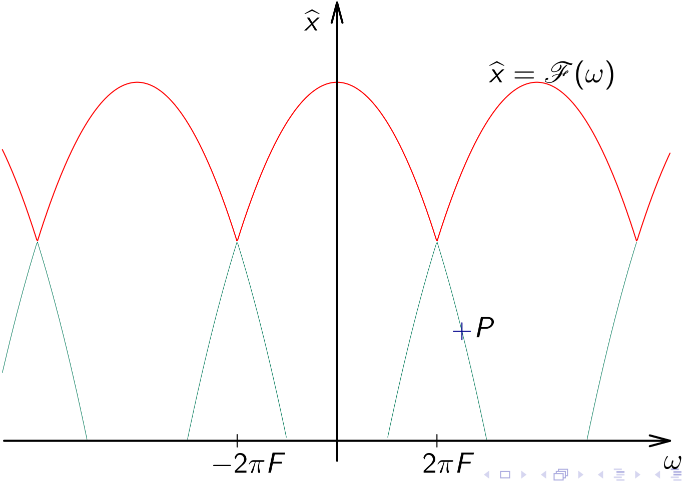
Shannon–Nyquist und Undersampling

Für die Fourierreihenentwicklung wird dann folgendes Bild betrachtet



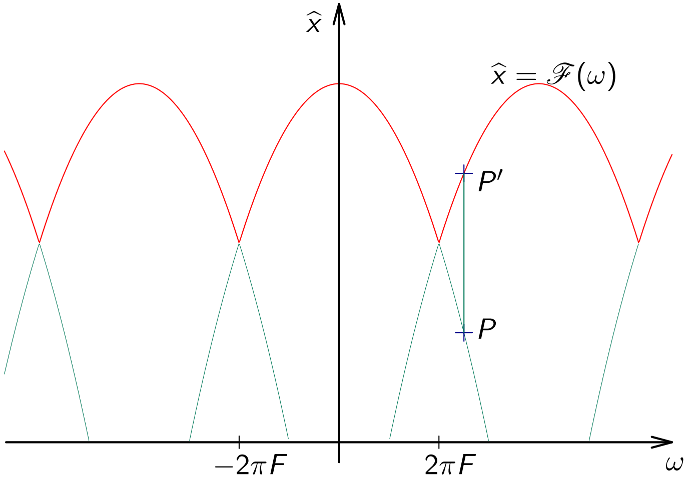
Shannon–Nyquist und Undersampling

Eine Frequenz (hier der Punkt P), die beim ursprünglichen Signal ausserhalb $[-2\pi F, 2\pi F]$ lag



Shannon–Nyquist und Undersampling

wird dann im Rahmen der Rekonstruktion mit P' identifiziert



Shannon–Nyquist und Undersampling

und als Frequenz P'' innerhalb des Intervalls $[-2\pi F, 2\pi F]$ interpretiert und wiedergegeben