Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Wir betrachten den zyklischen $[6,3]_7$–Code C mit Erzeugerpolynom $G(X) = X^3 + X^2 + 4X + 1$.

a) Bestimmen Sie das Paritätsprüfpolynom $H(X)$ dieses zyklischen Codes.

b) Codieren Sie die Informationen $m = (5,3,1)$ und $n = (2,3,4)$.

c) Überprüfen Sie, ob $a = (5,4,4,4,6,3)$ bzw. $b = (4,5,0,6,1,5)$ ein Codewort des Codes C ist und bestimmen Sie gegebenenfalls die zugehörige Nachricht $m = (m_0, m_1, m_2)$.

Aufgabe 2. Wir betrachten den Körper $\mathbb{F}_8$, gegeben durch die Relation $\alpha^3 = \alpha + 1$.

a) Zeigen Sie, dass $G(X) = X^3 + (\alpha^2+\alpha)\cdot X^2 + (\alpha^2+\alpha)\cdot X + 1$ das Erzeugerpolynom eines zyklischen $[7,4]_8$–Codes C ist.

   Verwenden Sie diese Erzeugerpolynom in den folgenden Teilaufgaben, auch wenn Sie nicht nachweisen können, dass es ein Erzeugerpolynom eines zyklischen $[7,4]_8$–Codes ist.

b) Zeigen Sie, dass für diesen Code C gilt

$$d(C) \geq 3$$

c) Codieren Sie die Informationen $m = (\alpha+1,\ \alpha^2,\ \alpha^2+1, 1)$ und $n = (\alpha, \alpha, \alpha^2, \alpha^2)$.

Aufgabe 3. Wir betrachten den Körper $\mathbb{F}_8$, gegeben durch die Relation $\alpha^3 = \alpha + 1$ und den zyklischen $[7,4]_8$–Code, gegeben durch das Erzeugerpolynom $G(X) = X^3 + (\alpha^2+\alpha)\cdot X^2 + (\alpha^2+\alpha)\cdot X + 1$ aus Aufgabe 2

a) Überprüfen Sie, ob $a = (\alpha^2,\, 1,\, \alpha^2,\, 0, \alpha^2, 1,\, \alpha^2)$ ein Codewort von C ist und bestimmen Sie gegebenenfalls die zugehörige Nachricht $m = (m_0, m_1, m_2, m_3)$. Falls es kein Codewort ist, so versuchen Sie, das Wort zum nächstgelegenen Codewort zu korrigieren. Dabei dürfen Sie Aufgabe 2 b) (also die Tatsache, dass $d(C) \geq 3$ ist) benutzen, auch wenn Sie diesen Aufgabenteil nicht zeigen konnten.

b) Überprüfen Sie, ob $b = (\alpha^2 + \alpha, \alpha + 1,\, \alpha + 1\,,\, 0\,,\, 1,\, \alpha + 1,\, \alpha)$ ein Codewort von C ist und bestimmen Sie gegebenenfalls die zugehörige Nachricht $n = (n_0, n_1, n_2, n_3)$. Falls es kein Codewort ist, so versuchen Sie, das Wort zum nächstgelegenen Codewort zu korrigieren. Dabei dürfen Sie Aufgabe 2 b) (also die Tatsache, dass $d(C) \geq 3$ ist) benutzen, auch wenn Sie diesen Aufgabenteil nicht zeigen konnten.

Aufgabe 4. Wir betrachten einen beliebigen Körper K und Elemente $r_1, \ldots, r_n \in K$ $(n \geq 2)$. Hierfür definieren wir die $n \times n$–Matrix

$$V(r_1,\ldots,r_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ r_1 & r_2 & \ldots & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & \ldots & r_n^2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \ldots & r_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Verifzieren Sie, dass $\det\left(V(r_1,\ldots,r_n)\right) = \prod\limits_{1\leq i<j\leq n} (r_j - r_i)$.
Insbesondere ist also $\det\left(V(r_1,\ldots,r_n)\right) \neq 0$, wenn die r_i paarweise verschieden sind.