Lineare Algebra
algebraische Strukturen 1

Reinhold Hübl

Wintersemester 2020/21

Duale Hochschule Baden-Württemberg Mannheim

Mengen und Mengenalgebren

Definition

Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objektem m, genannt die Elemente von M, unseres Anschauungsraums oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

Ist m ein Element von M, so schreiben wir $m \in M$, andernfalls schreiben wir $m \notin M$. Für jedes Objekt m unserer Anschauung und jede Menge M gilt also genau entweder $m \in M$ oder $m \notin M$, nicht aber beides.

Mengen und Mengenalgebren

Definition

Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objektem m, genannt die Elemente von M, unseres Anschauungsraums oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

Ist m ein Element von M, so schreiben wir $m \in M$, andernfalls schreiben wir $m \notin M$. Für jedes Objekt m unserer Anschauung und jede Menge M gilt also genau entweder $m \in M$ oder $m \notin M$, nicht aber beides.

Definition

Zwei Mengen N und M heißen gleich, geschrieben $M = N$, wenn ein Objekt x genau dann Element von N ist, wenn es Element von M ist, d.h. wenn die Äquivalenz $x \in N \iff x \in M$ gilt.

Mengen und Mengenalgebren

Definition

Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objektem m, genannt die Elemente von M, unseres Anschauungsraums oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

Ist m ein Element von M, so schreiben wir $m \in M$, andernfalls schreiben wir $m \notin M$. Für jedes Objekt m unserer Anschauung und jede Menge M gilt also genau entweder $m \in M$ oder $m \notin M$, nicht aber beides.

Definition

Zwei Mengen N und M heißen gleich, geschrieben $M = N$, wenn ein Objekt x genau dann Element von N ist, wenn es Element von M ist, d.h. wenn die Äquivalenz $x \in N \iff x \in M$ gilt.

Mengen und Mengenalgebren

Definition

Eine Menge N heißt **Teilmenge** eine Menge M, geschrieben $N \subseteq M$, wenn jedes Element von N auch Element von M ist, d.h. wenn die Implikation $x \in N \Longrightarrow x \in M$ gilt. In diesem Fall heißt M auch *Obermenge* von N.
N heißt echte Teilmenge von M, geschrieben $N \subset N$, wenn N Teilmenge von M mit $N \neq M$ ist.

Mengen und Mengenalgebren

Definition

Eine Menge N heißt **Teilmenge** eine Menge M, geschrieben $N \subseteq M$, wenn jedes Element von N auch Element von M ist, d.h. wenn die Implikation $x \in N \Longrightarrow x \in M$ gilt. In diesem Fall heißt M auch *Obermenge* von N. N heißt echte Teilmenge von M, geschrieben $N \subset N$, wenn N Teilmenge von M mit $N \neq M$ ist.

Beispiel

Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist eine (echte) Teilmenge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.

Mengen und Mengenalgebren

Definition

Eine Menge N heißt **Teilmenge** eine Menge M, geschrieben $N \subseteq M$, wenn jedes Element von N auch Element von M ist, d.h. wenn die Implikation $x \in N \Longrightarrow x \in M$ gilt. In diesem Fall heißt M auch *Obermenge* von N.
N heißt echte Teilmenge von M, geschrieben $N \subset N$, wenn N Teilmenge von M mit $N \neq M$ ist.

Beispiel

Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist eine (echte) Teilmenge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.
Jede natürliche Zahl ist eine ganze Zahl, es gibt aber ganze Zahlen (z.B. -1), die keine natürlichen Zahlen sind.

Mengen und Mengenalgebren

Definition

Eine Menge N heißt **Teilmenge** eine Menge M, geschrieben $N \subseteq M$, wenn jedes Element von N auch Element von M ist, d.h. wenn die Implikation $x \in N \Longrightarrow x \in M$ gilt. In diesem Fall heißt M auch *Obermenge* von N.
N heißt echte Teilmenge von M, geschrieben $N \subset N$, wenn N Teilmenge von M mit $N \neq M$ ist.

Beispiel

Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist eine (echte) Teilmenge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.
Jede natürliche Zahl ist eine ganze Zahl, es gibt aber ganze Zahlen (z.B. -1), die keine natürlichen Zahlen sind.

Mengenoperationen

Definition

Die **Schnittmenge** von A und B, geschrieben $A \cap B$ besteht aus den Elementen von M, die sowohl in A als auch in B sind:

$$A \cap B = \{x \in M | x \in A \text{ und } x \in B\}$$

Falls $A \cap B = \emptyset$, so nennen wir A und B *disjunkt*.

Definition

Die **Vereinigungsmenge** von A und B, geschrieben $A \cup B$ besteht aus den Elementen von M, die entweder in A oder in B sind:

$$A \cup B = \{x \in M | x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

Mengenoperationen

Definition

Die **Schnittmenge** von A und B, geschrieben $A \cap B$ besteht aus den Elementen von M, die sowohl in A als auch in B sind:

$$A \cap B = \{x \in M | x \in A \text{ und } x \in B\}$$

Falls $A \cap B = \emptyset$, so nennen wir A und B *disjunkt*.

Definition

Die **Vereinigungsmenge** von A und B, geschrieben $A \cup B$ besteht aus den Elementen von M, die entweder in A oder in B sind:

$$A \cup B = \{x \in M | \, x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

Mengenoperationen - Schnitt- und Vereinigungsmengen

Satz

Für Teilmengen $A, B, C \subseteq M$ einer Grundmenge M gilt

Kommutativgesetz	$A \cup B = B \cup A$
	$A \cap B = B \cap A$
Assoziativgesetz	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Distributivgesetz	$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
	$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
Verschmelzungsgesetz	$A \cap (A \cup B) = A$
	$A \cup (A \cap B) = A$

Mengenoperationen - Differenzmengen

Definition

Die **Differenzmenge** von B und A, geschrieben $B \setminus A$ besteht aus den Elementen von Ma, die in B aber nicht in A sind:

$$B \setminus A = \{x \in M | x \in B \text{ und } x \notin A\}$$

Falls $A \subseteq B$ nennen wir $B \setminus A$ auch das **Komplement** von A in B und schreiben hierfür $\overline{A}^B$. Falls $B = M$, schreiben wir hierfür auch kurz $\overline{A}$ und nennen es das Komplement von A.

Mengenoperationen - das Komplement

Regel

Für eine Teilmenge $A \subseteq M$ gilt:

1. $\overline{\overline{A}} = A$

Mengenoperationen - das Komplement

Regel

Für eine Teilmenge $A \subseteq M$ gilt:

1. $\overline{\overline{A}} = A$
2. $\overline{A} \cup A = M.$

Mengenoperationen - das Komplement

Regel

Für eine Teilmenge $A \subseteq M$ gilt:

1. $\overline{\overline{A}} = A$
2. $\overline{A} \cup A = M$.
3. $\overline{A} \cap A = \emptyset$.

Mengenoperationen - das Komplement

Regel

Für eine Teilmenge $A \subseteq M$ gilt:

1. $\overline{\overline{A}} = A$
2. $\overline{A} \cup A = M.$
3. $\overline{A} \cap A = \emptyset.$
4. $\overline{\emptyset} = M$

Mengenoperationen - das Komplement

Regel

Für eine Teilmenge $A \subseteq M$ gilt:

1. $\overline{\overline{A}} = A$
2. $\overline{A} \cup A = M.$
3. $\overline{A} \cap A = \emptyset.$
4. $\overline{\emptyset} = M$
5. $\overline{M} = \emptyset.$

Mengenoperationen - das Komplement

Regel

Für eine Teilmenge $A \subseteq M$ gilt:

1. $\overline{\overline{A}} = A$
2. $\overline{A} \cup A = M.$
3. $\overline{A} \cap A = \emptyset.$
4. $\overline{\emptyset} = M$
5. $\overline{M} = \emptyset.$

Mengenoperationen - das kartesische Produkt

Definition

Das **kartesische Produkt** zweier Mengen M und N ist die Menge $M \times N$, deren Elemente die geordneten Paare (m, n) sind, wobei $m \in M$ und $n \in N$, also

$$M \times N = \{(m, n) | \, m \in M \text{ und } n \in N\}$$

Beispiel

Für $M = \{1, 2, 3\}$ und $N = \{r, l\}$ ist

$$M \times N = \{(1, r), (1, l), (2, r), (2, l), (3, r), (3, l)\}$$

Mengenoperationen - das kartesische Produkt

Definition

Das **kartesische Produkt** zweier Mengen M und N ist die Menge $M \times N$, deren Elemente die geordneten Paare (m, n) sind, wobei $m \in M$ und $n \in N$, also

$$M \times N = \{(m, n) | \, m \in M \text{ und } n \in N\}$$

Beispiel

Für $M = \{1, 2, 3\}$ und $N = \{r, l\}$ ist

$$M \times N = \{(1, r), (1, l), (2, r), (2, l), (3, r), (3, l)\}$$

Bemerkung

Die Bildung des kartesischen Produkts kann auch iteriert werden: Für Mengen L, M und N gilt

$$L \times M \times N = (L \times M) \times N = L \times (M \times N)$$

Mengenoperationen - das kartesische Produkt

Definition

Das **kartesische Produkt** zweier Mengen M und N ist die Menge $M \times N$, deren Elemente die geordneten Paare (m, n) sind, wobei $m \in M$ und $n \in N$, also

$$M \times N = \{(m, n) | \, m \in M \text{ und } n \in N\}$$

Beispiel

Für $M = \{1, 2, 3\}$ und $N = \{r, l\}$ ist

$$M \times N = \{(1, r), (1, l), (2, r), (2, l), (3, r), (3, l)\}$$

Bemerkung

Die Bildung des kartesischen Produkts kann auch iteriert werden:
Für Mengen L, M und N gilt

$$L \times M \times N = (L \times M) \times N = L \times (M \times N)$$

Relationen

Definition

Eine **Relation** R zwischen zwei Mengen M und N ist eine Beziehung zwischen Elementen von M und N, dargestellt durch geordnete Paare (m, n) mit $m \in M$ und $n \in N$. Wir schreiben hierfür $m \sim_R n$ oder mRn und sagen *m steht in Relation mit n (bezüglich R)*.
Ist $M = N$, so heißt R auch Relation auf M. In diesem Fall nennen wir R auch **homogen**.

Bemerkung

Eine Relation R zwischen M und N ist ein Teilmenge $R \subseteq M \times N$ des kartesischen Produktes.

Relationen

Definition

Eine **Relation** R zwischen zwei Mengen M und N ist eine Beziehung zwischen Elementen von M und N, dargestellt durch geordnete Paare (m, n) mit $m \in M$ und $n \in N$. Wir schreiben hierfür $m \sim_R n$ oder mRn und sagen *m steht in Relation mit n (bezüglich R)*.
Ist $M = N$, so heißt R auch Relation auf M. In diesem Fall nennen wir R auch **homogen**.

Bemerkung

Eine Relation R zwischen M und N ist ein Teilmenge $R \subseteq M \times N$ des kartesischen Produktes.

Bemerkung

Gleichheit $=$ definiert eine Relation auf $\mathbb{Z}$,

$$R = \{(z, z) \mid z \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Relationen

Definition

Eine **Relation** R zwischen zwei Mengen M und N ist eine Beziehung zwischen Elementen von M und N, dargestellt durch geordnete Paare (m, n) mit $m \in M$ und $n \in N$. Wir schreiben hierfür $m \sim_R n$ oder mRn und sagen *m steht in Relation mit n (bezüglich R)*.
Ist $M = N$, so heißt R auch Relation auf M. In diesem Fall nennen wir R auch **homogen**.

Bemerkung

Eine Relation R zwischen M und N ist ein Teilmenge $R \subseteq M \times N$ des kartesischen Produktes.

Bemerkung

Gleichheit $=$ definiert eine Relation auf $\mathbb{Z}$,

$$R = \{(z, z) \,|\, z \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Relationen

Jede Abbildung $f : M \longrightarrow N$ ist eine Relation R zwischen M und N mit der folgenden speziellen Eigenschaft

Für alle $m \in M$ existiert genau ein $n \in N$ mit $(m, n) \in R$

Eine solche Relation heißt auch **linkstotal** und **rechtseindeutig**

Relationen

Jede Abbildung $f : M \longrightarrow N$ ist eine Relation R zwischen M und N mit der folgenden speziellen Eigenschaft

$$\text{Für alle } \ m \in M \ \text{ existiert genau ein } \ n \in N \ \text{ mit } (m, n) \in R$$

Eine solche Relation heißt auch **linkstotal** und **rechtseindeutig**

Umgekehrt definiert jede linkstotale und rechtseindeutige Relation eine Abbildung:
Ist $m \in M$, so gibt es genau ein $n \in N$ mit $(m, n) \in R$, und wir definieren $f : M \longrightarrow N$ durch $f(m) = n$.

Relationen

Jede Abbildung $f : M \longrightarrow N$ ist eine Relation R zwischen M und N mit der folgenden speziellen Eigenschaft

$$\text{Für alle } \ m \in M \ \text{ existiert genau ein } \ n \in N \ \text{ mit } (m, n) \in R$$

Eine solche Relation heißt auch **linkstotal** und **rechtseindeutig**

Umgekehrt definiert jede linkstotale und rechtseindeutige Relation eine Abbildung:
Ist $m \in M$, so gibt es genau ein $n \in N$ mit $(m, n) \in R$, und wir definieren $f : M \longrightarrow N$ durch $f(m) = n$.

Relationen

Beispiel

Die Relation

$$R = \{(x, \mathrm{e}^x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$$

definiert die Exponentialfunktion. Die Exponentialfunktion wird auch definiert durch die folgende Beschreibung der Relation

$$R = \{\ln(x), x) \mid x \in \mathbb{R}_{>0}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$$

Relationen

Beispiel

Die Relation

$$R = \{(x, \mathrm{e}^x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$$

definiert die Exponentialfunktion. Die Exponentialfunktion wird auch definiert durch die folgende Beschreibung der Relation

$$R = \{\ln(x), x) \mid x \in \mathbb{R}_{>0}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$$

Der natürliche Logarithmus dagegen wird definiert durch die Relation

$$R = \{(x, \ln(x)) \mid x \in \mathbb{R}_{>0}\} \subseteq \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$$

Relationen

Beispiel

Die Relation

$$R = \{(x, \mathrm{e}^x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$$

definiert die Exponentialfunktion. Die Exponentialfunktion wird auch definiert durch die folgende Beschreibung der Relation

$$R = \{\ln(x), x) \mid x \in \mathbb{R}_{>0}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$$

Der natürliche Logarithmus dagegen wird definiert durch die Relation

$$R = \{(x, \ln(x)) \mid x \in \mathbb{R}_{>0}\} \subseteq \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$$

Relationen

Übung

Überprüfen Sie, ob durch die Relation

$$R = \{(x^3, x^5) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

eine Funktion definiert wird.

Relationen

Übung

Überprüfen Sie, ob durch die Relation

$$R = \{(x^3, x^5) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

eine Funktion definiert wird.

Lösung:

Diese Relation definiert eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, die explizit auch durch $f(x) = \sqrt[3]{x^5}$ beschrieben werden kann.

Relationen

Übung

Überprüfen Sie, ob durch die Relation

$$R = \{(x^3, x^5) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

eine Funktion definiert wird.

Lösung:

Diese Relation definiert eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, die explizit auch durch $f(x) = \sqrt[3]{x^5}$ beschrieben werden kann.

Relationen

Beispiel

Ist $M = \mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen, so definiert die Beziehung R: *ist größer oder gleich* eine Relation auf M, die mit $\geq$ bezeichnet wird. Ein Zahlenpaar (a, b) ist also genau dann in $R \subseteq \mathbb{R} \times R$, wenn $a \geq b$.

Beispiel

Ist wieder $M = \mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen und ist $n \in \mathbb{Z}$ eine vorgegebene Zahl, so definiert die Beziehung R: *unterscheiden sich um ein Vielfaches von n* eine Relation of $\mathbb{Z}$. Ein Zahlenpaar (a, b) ist also genau dann in R wenn $a - b$ durch n teilbar ist.

Relationen

Beispiel

Ist $M = \mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen, so definiert die Beziehung R: *ist größer oder gleich* eine Relation auf M, die mit $\geq$ bezeichnet wird. Ein Zahlenpaar (a, b) ist also genau dann in $R \subseteq \mathbb{R} \times R$, wenn $a \geq b$.

Beispiel

Ist wieder $M = \mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen und ist $n \in \mathbb{Z}$ eine vorgegebene Zahl, so definiert die Beziehung R: *unterscheiden sich um ein Vielfaches von n* eine Relation of $\mathbb{Z}$. Ein Zahlenpaar (a, b) ist also genau dann in R wenn $a - b$ durch n teilbar ist.

Relationen

Wir interessieren uns vor allem für Relation auf einer Menge M.

Definition

Betrachte eine Relation R auf einer Menge M.

Relationen

Wir interessieren uns vor allem für Relation auf einer Menge M.

Definition

Betrachte eine Relation R auf einer Menge M.

- R heißt **reflexiv**, wenn für alle m aus M gilt: $m \sim_R m$.

Relationen

Wir interessieren uns vor allem für Relation auf einer Menge M.

Definition

Betrachte eine Relation R auf einer Menge M.

- R heißt **reflexiv**, wenn für alle m aus M gilt: $m \sim_R m$.
- R heißt **transitiv**, wenn gilt:

$$m_1 \sim_R m_2 \text{ und } m_2 \sim_R m_3 \Longrightarrow m_1 \sim_R m_3$$

Relationen

Wir interessieren uns vor allem für Relation auf einer Menge M.

Definition

Betrachte eine Relation R auf einer Menge M.

- R heißt **reflexiv**, wenn für alle m aus M gilt: $m \sim_R m$.
- R heißt **transitiv**, wenn gilt:

$$m_1 \sim_R m_2 \text{ und } m_2 \sim_R m_3 \implies m_1 \sim_R m_3$$

- R heißt **symmetrisch**, wenn gilt:

$$m_1 \sim_R m_2 \implies m_2 \sim_R m_1$$

Relationen

Wir interessieren uns vor allem für Relation auf einer Menge M.

Definition

Betrachte eine Relation R auf einer Menge M.

- R heißt **reflexiv**, wenn für alle m aus M gilt: $m \sim_R m$.
- R heißt **transitiv**, wenn gilt:

$$m_1 \sim_R m_2 \ \text{und}\ m_2 \sim_R m_3 \implies m_1 \sim_R m_3$$

- R heißt **symmetrisch**, wenn gilt:

$$m_1 \sim_R m_2 \implies m_2 \sim_R m_1$$

Relationen

Definition

Betrachte eine Relation R auf einer Menge M.

- R heißt **Äquivalenzrelation**, wenn R reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.

Relationen

Definition

Betrachte eine Relation R auf einer Menge M.

- R heißt **Äquivalenzrelation**, wenn R reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.
- R heißt textbfantisymmetrisch, wenn gilt:

$$m_1 \sim_R m_2 \text{ und } m_2 \sim_R m_1 \implies m_1 = m_2$$

Relationen

Definition

Betrachte eine Relation R auf einer Menge M.

- R heißt **Äquivalenzrelation**, wenn R reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.
- R heißt
  textbfantisymmetrisch, wenn gilt:
  $$m_1 \sim_R m_2 \text{ und } m_2 \sim_R m_1 \implies m_1 = m_2$$
- R heißt **asymmetrisch**, wenn gilt:
  $$m_1 \sim_R m_2 \implies \neg(m_2 \sim_R m_1)$$

Relationen

Definition

Betrachte eine Relation R auf einer Menge M.

- R heißt **Äquivalenzrelation**, wenn R reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.
- R heißt
  textbfantisymmetrisch, wenn gilt:
  $$m_1 \sim_R m_2 \text{ und } m_2 \sim_R m_1 \implies m_1 = m_2$$
- R heißt **asymmetrisch**, wenn gilt:
  $$m_1 \sim_R m_2 \implies \neg\left(m_2 \sim_R m_1\right)$$

Eine antisymmetrische Relation kann reflexiv sein (muss aber nicht), eine asymmetrische Relation ist niemals reflexiv (wenn $M \neq \emptyset$)

Relationen

Definition

Betrachte eine Relation R auf einer Menge M.

- R heißt **Äquivalenzrelation**, wenn R reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.
- R heißt
  textbfantisymmetrisch, wenn gilt:
  $$m_1 \sim_R m_2 \text{ und } m_2 \sim_R m_1 \implies m_1 = m_2$$
- R heißt **asymmetrisch**, wenn gilt:
  $$m_1 \sim_R m_2 \implies \neg(m_2 \sim_R m_1)$$

Eine antisymmetrische Relation kann reflexiv sein (muss aber nicht), eine asymmetrische Relation ist niemals reflexiv (wenn $M \neq \emptyset$)

Äquivalenzrelationen

Jede Äquivalenzrelation $\sim$ auf M liefert uns eine natürliche Zerlegung von M in disjunkte Teilmengen:

Definition

Wir betrachten eine Äquivalenzrelation $\sim_R$ auf M.

Äquivalenzrelationen

Jede Äquivalenzrelation $\sim$ auf M liefert uns eine natürliche Zerlegung von M in disjunkte Teilmengen:

Definition

Wir betrachten eine Äquivalenzrelation $\sim_R$ auf M.

Zwei Elemente $m, n \in M$ heissen **äquivalent** (bezüglich $\sim_R$), wenn $m \sim_R n$.

Äquivalenzrelationen

Jede Äquivalenzrelation $\sim$ auf M liefert uns eine natürliche Zerlegung von M in disjunkte Teilmengen:

Definition

Wir betrachten eine Äquivalenzrelation $\sim_R$ auf M.
Zwei Elemente $m, n \in M$ heissen **äquivalent** (bezüglich $\sim_R$), wenn $m \sim_R n$.
Eine Teilmenge $A \subseteq M$ heißt **Äquivalenzklasse**, wenn gilt

Äquivalenzrelationen

Jede Äquivalenzrelation $\sim$ auf M liefert uns eine natürliche Zerlegung von M in disjunkte Teilmengen:

Definition

Wir betrachten eine Äquivalenzrelation $\sim_R$ auf M.
Zwei Elemente $m, n \in M$ heissen **äquivalent** (bezüglich $\sim_R$), wenn $m \sim_R n$.
Eine Teilmenge $A \subseteq M$ heißt **Äquivalenzklasse**, wenn gilt

- Sind $m, n \in A$, so ist $m \sim_R n$.

Äquivalenzrelationen

Jede Äquivalenzrelation $\sim$ auf M liefert uns eine natürliche Zerlegung von M in disjunkte Teilmengen:

Definition

Wir betrachten eine Äquivalenzrelation $\sim_R$ auf M.
Zwei Elemente $m, n \in M$ heissen **äquivalent** (bezüglich $\sim_R$), wenn $m \sim_R n$.
Eine Teilmenge $A \subseteq M$ heißt **Äquivalenzklasse**, wenn gilt

- Sind $m, n \in A$, so ist $m \sim_R n$.
- Ist $m \in A$ und $n \in M$ mit $n \sim_R m$, so ist $n \in A$.

Äquivalenzrelationen

Jede Äquivalenzrelation $\sim$ auf M liefert uns eine natürliche Zerlegung von M in disjunkte Teilmengen:

Definition

Wir betrachten eine Äquivalenzrelation $\sim_R$ auf M.
Zwei Elemente $m, n \in M$ heissen **äquivalent** (bezüglich $\sim_R$), wenn $m \sim_R n$.
Eine Teilmenge $A \subseteq M$ heißt **Äquivalenzklasse**, wenn gilt

- Sind $m, n \in A$, so ist $m \sim_R n$.
- Ist $m \in A$ und $n \in M$ mit $n \sim_R m$, so ist $n \in A$.

Ist $m \in M$, so heißt $[m]_R := \{n \in M : n \sim_R m\}$ die **Äquivalenzklasse von** m.

Äquivalenzrelationen

Jede Äquivalenzrelation $\sim$ auf M liefert uns eine natürliche Zerlegung von M in disjunkte Teilmengen:

Definition

Wir betrachten eine Äquivalenzrelation $\sim_R$ auf M.
Zwei Elemente $m, n \in M$ heissen **äquivalent** (bezüglich $\sim_R$), wenn $m \sim_R n$.
Eine Teilmenge $A \subseteq M$ heißt **Äquivalenzklasse**, wenn gilt

- Sind $m, n \in A$, so ist $m \sim_R n$.
- Ist $m \in A$ und $n \in M$ mit $n \sim_R m$, so ist $n \in A$.

Ist $m \in M$, so heißt $[m]_R := \{n \in M : n \sim_R m\}$ die **Äquivalenzklasse von** m.

Äquivalenzrelationen

Bemerkung

Ist $\sim_R$ eine Äuqivalenzrelation auf M und sind $m, n \in M$, so gilt entweder $[m]_R = [n]_R$ oder $[m]_R$ und $[n]_R$ sind disjunkt.

Eine Äquivalenzrelation $\sim_R$ auf M zerlegt also M in disjunkte Teilmengen, die Äquivalenzklassen. Wir schreiben $M/\sim_R$ für die Menge der Äquivalenzklassen, also

$$M/\sim_R = \{[m]_R \mid m \in M\}$$

Äquivalenzrelationen

Bemerkung

Ist $\sim_R$ eine Äuqivalenzrelation auf M und sind $m, n \in M$, so gilt entweder $[m]_R = [n]_R$ oder $[m]_R$ und $[n]_R$ sind disjunkt.
Eine Äquivalenzrelation $\sim_R$ auf M zerlegt also M in disjunkte Teilmengen, die Äquivalenzklassen. Wir schreiben $M/\sim_R$ für die Menge der Äquivalenzklassen, also

$$M/\sim_R = \{[m]_R \mid m \in M\}$$

Definition

Ist R eine Äquivalenzrealtion auf M und A ein Äquivalenzklasse (bezüglich R), so heißt ein beliebiges Element $a \in A$ ein **Repräsentant** der Äquivalenzklasse A.

Äquivalenzrelationen

Bemerkung

Ist $\sim_R$ eine Äuqivalenzrelation auf M und sind $m, n \in M$, so gilt entweder $[m]_R = [n]_R$ oder $[m]_R$ und $[n]_R$ sind disjunkt.
Eine Äquivalenzrelation $\sim_R$ auf M zerlegt also M in disjunkte Teilmengen, die Äquivalenzklassen. Wir schreiben $M/\sim_R$ für die Menge der Äquivalenzklassen, also

$$M/\sim_R = \{[m]_R \mid m \in M\}$$

Definition

Ist R eine Äquivalenzrealtion auf M und A ein Äquivalenzklasse (bezüglich R), so heißt ein beliebiges Element $a \in A$ ein **Repräsentant** der Äquivalenzklasse A.
Ein **Repräsentantensystem** der Äquivalenzrelation R ist eine Teilmenge $N \subseteq M$ die genau einen Repräsentanten jeder Äquivlenzklasse enthält.

Äquivalenzrelationen

Bemerkung

Ist $\sim_R$ eine Äuqivalenzrelation auf M und sind $m, n \in M$, so gilt entweder $[m]_R = [n]_R$ oder $[m]_R$ und $[n]_R$ sind disjunkt.
Eine Äquivalenzrelation $\sim_R$ auf M zerlegt also M in disjunkte Teilmengen, die Äquivalenzklassen. Wir schreiben $M/\sim_R$ für die Menge der Äquivalenzklassen, also

$$M/\sim_R = \{[m]_R \mid m \in M\}$$

Definition

Ist R eine Äquivalenzrealtion auf M und A ein Äquivalenzklasse (bezüglich R), so heißt ein beliebiges Element $a \in A$ ein **Repräsentant** der Äquivalenzklasse A.
Ein **Repräsentantensystem** der Äquivalenzrelation R ist eine Teilmenge $N \subseteq M$ die genau einen Repräsentanten jeder Äquivlenzklasse enthält.

Äquivalenzrelationen

Beispiel

Für die Äquivalenzrelation $\sim_R$ auf $\mathbb{Z}$ definiert durch *unterscheiden sich um ein Vielfaches von n* gilt:

- Falls $n = 0$:

$$\mathbb{Z}/\sim_R = \mathbb{Z}$$

Äquivalenzrelationen

Beispiel

Für die Äquivalenzrelation $\sim_R$ auf $\mathbb{Z}$ definiert durch *unterscheiden sich um ein Vielfaches von n* gilt:

- Falls $n = 0$:

$$\mathbb{Z}/\sim_R = \mathbb{Z}$$

- Falls $n > 0$:

$$\mathbb{Z}/\sim_R = \{[0]_R, [1]_R, \ldots, [n-1]_R\}$$

Äquivalenzrelationen

Beispiel

Für die Äquivalenzrelation $\sim_R$ auf $\mathbb{Z}$ definiert durch *unterscheiden sich um ein Vielfaches von n* gilt:

- Falls $n = 0$:
$$\mathbb{Z}/\sim_R = \mathbb{Z}$$
- Falls $n > 0$:
$$\mathbb{Z}/\sim_R = \{[0]_R, [1]_R, \ldots, [n-1]_R\}$$
- Falls $n < 0$:
$$\mathbb{Z}/\sim_R = \{[0]_R, [1]_R, \ldots, [-n-1]_R\}$$

Äquivalenzrelationen

Beispiel

Für die Äquivalenzrelation $\sim_R$ auf $\mathbb{Z}$ definiert durch *unterscheiden sich um ein Vielfaches von n* gilt:

- Falls $n = 0$:
$$\mathbb{Z}/\sim_R = \mathbb{Z}$$
- Falls $n > 0$:
$$\mathbb{Z}/\sim_R = \{[0]_R, [1]_R, \dots, [n-1]_R\}$$
- Falls $n < 0$:
$$\mathbb{Z}/\sim_R = \{[0]_R, [1]_R, \dots, [-n-1]_R\}$$

Für $n \neq 0$ sind die angegebenen Äquivalenzklassen paarweise disjunkt. Wir schreiben in diesem Fall auch $\mathbb{Z}_n$, $\mathbb{Z}/(n)$ oder $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für $\mathbb{Z}/\sim_R$.

Äquivalenzrelationen

Beispiel

Für die Äquivalenzrelation $\sim_R$ auf $\mathbb{Z}$ definiert durch *unterscheiden sich um ein Vielfaches von n* gilt:

- Falls $n = 0$:
$$\mathbb{Z}/\sim_R = \mathbb{Z}$$
- Falls $n > 0$:
$$\mathbb{Z}/\sim_R = \{[0]_R, [1]_R, \dots, [n-1]_R\}$$
- Falls $n < 0$:
$$\mathbb{Z}/\sim_R = \{[0]_R, [1]_R, \dots, [-n-1]_R\}$$

Für $n \neq 0$ sind die angegebenen Äquivalenzklassen paarweise disjunkt. Wir schreiben in diesem Fall auch $\mathbb{Z}_n$, $\mathbb{Z}/(n)$ oder $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für $\mathbb{Z}/\sim_R$.

Die Menge $\{0, 1, \dots, n-1\}$ bildet also ein Repräsentantensystem der Relation R. Es gibt aber noch viele weitere Repräsentantensysteme, etwa $\{1, 2, \dots, n\}$, $\{n, n+1, \dots, 2n-1\}$, $\{0, n+1, 2n+2, 3n+3 \dots, n^2-1\}$.

Äquivalenzrelationen

Beispiel

Für die Äquivalenzrelation $\sim_R$ auf $\mathbb{Z}$ definiert durch *unterscheiden sich um ein Vielfaches von n* gilt:

- Falls $n = 0$:
$$\mathbb{Z}/\sim_R = \mathbb{Z}$$
- Falls $n > 0$:
$$\mathbb{Z}/\sim_R = \{[0]_R, [1]_R, \ldots, [n-1]_R\}$$
- Falls $n < 0$:
$$\mathbb{Z}/\sim_R = \{[0]_R, [1]_R, \ldots, [-n-1]_R\}$$

Für $n \neq 0$ sind die angegebenen Äquivalenzklassen paarweise disjunkt. Wir schreiben in diesem Fall auch $\mathbb{Z}_n$, $\mathbb{Z}/(n)$ oder $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für $\mathbb{Z}/\sim_R$.
Die Menge $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ bildet also ein Repräsentantensystem der Relation R. Es gibt aber noch viele weitere Repräsentantensysteme, etwa $\{1, 2, \ldots, n\}$, $\{n, n+1, \ldots, 2n-1\}$, $\{0, n+1, 2n+2, 3n+3 \ldots, n^2-1\}$.

Äquivalenzrelationen

Übung

Wir betrachten eine Relation R auf $\mathbb{Z}$ mit

$$x \sim_R y \iff x^2 = y^2$$

Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist und bestimmen Sie ein Repräsentantensystem von R.

Äquivalenzrelationen

Übung

Wir betrachten eine Relation R auf $\mathbb{Z}$ mit

$$x \sim_R y \iff x^2 = y^2$$

Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist und bestimmen Sie ein Repräsentantensystem von R.

Lösung:

Die Relation R ist eine Äquivalenzrelation und ein Repräsentantensystem sind alle ganzen Zahlen $z \geq 0$ (oder alle ganzen Zahlen $z \leq 0$).

Äquivalenzrelationen

Übung

Wir betrachten eine Relation R auf $\mathbb{Z}$ mit

$$x \sim_R y \iff x^2 = y^2$$

Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist und bestimmen Sie ein Repräsentantensystem von R.

Lösung:

Die Relation R ist eine Äquivalenzrelation und ein Repräsentantensystem sind alle ganzen Zahlen $z \geq 0$ (oder alle ganzen Zahlen $z \leq 0$).

Ordnungsrelationen

Neben Äquvalenzrelation eine besondere Rolle spielen Vergleichsrelationen, wie etwa die Relationen $\geq$ oder $>$ auf den reellen Zahlen.

Definition

Es sei R eine Relation auf eine Menge M.
R heißt **Ordnungsrelation** oder **Ordnung** auf M, wenn sie reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.

Ordnungsrelationen

Neben Äquvalenzrelation eine besondere Rolle spielen Vergleichsrelationen, wie etwa die Relationen $\geq$ oder $>$ auf den reellen Zahlen.

Definition

Es sei R eine Relation auf eine Menge M.
R heißt **Ordnungsrelation** oder **Ordnung** auf M, wenn sie reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.
R heißt **strikte Ordnungsrelation** oder **strikte Ordnung** auf M, wenn sie asymmetrisch und transitiv ist.

Ordnungsrelationen

Neben Äquvalenzrelation eine besondere Rolle spielen Vergleichsrelationen, wie etwa die Relationen $\geq$ oder $>$ auf den reellen Zahlen.

Definition

Es sei R eine Relation auf eine Menge M.
R heißt **Ordnungsrelation** oder **Ordnung** auf M, wenn sie reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.
R heißt **strikte Ordnungsrelation** oder **strikte Ordnung** auf M, wenn sie asymmetrisch und transitiv ist.

Beispiel

Die Relation $\geq$ auf $\mathbb{R}$ ist eine Ordnungsrelation aber keine strikte Ordnungsrelation.

Ordnungsrelationen

Neben Äquvalenzrelation eine besondere Rolle spielen Vergleichsrelationen, wie etwa die Relationen $\geq$ oder $>$ auf den reellen Zahlen.

Definition

Es sei R eine Relation auf eine Menge M.
R heißt **Ordnungsrelation** oder **Ordnung** auf M, wenn sie reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.
R heißt **strikte Ordnungsrelation** oder **strikte Ordnung** auf M, wenn sie asymmetrisch und transitiv ist.

Beispiel

Die Relation $\geq$ auf $\mathbb{R}$ ist eine Ordnungsrelation aber keine strikte Ordnungsrelation.

Beispiel

Die Relation $>$ auf $\mathbb{R}$ ist eine strikte Ordnungsrelation.

Ordnungsrelationen

Neben Äquvalenzrelation eine besondere Rolle spielen Vergleichsrelationen, wie etwa die Relationen $\geq$ oder $>$ auf den reellen Zahlen.

Definition

Es sei R eine Relation auf eine Menge M.
R heißt **Ordnungsrelation** oder **Ordnung** auf M, wenn sie reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.
R heißt **strikte Ordnungsrelation** oder **strikte Ordnung** auf M, wenn sie asymmetrisch und transitiv ist.

Beispiel

Die Relation $\geq$ auf $\mathbb{R}$ ist eine Ordnungsrelation aber keine strikte Ordnungsrelation.

Beispiel

Die Relation $>$ auf $\mathbb{R}$ ist eine strikte Ordnungsrelation.

Ordnungsrelationen

Beispiel

Die Relation R auf $\mathbb{Z}^2$ mit

$$(a, b) \sim_R (c, d) \iff a + b > c + d$$

ist eine strikte Ordnung auf $\mathbb{Z}^2$.

Übung

Überprüfen Sie, ob die Relation R aus $\mathbb{Z}^2$ mit

$$(a, b) \sim_R (c, s) \iff a + b \geq c + d$$

eine Ordnung auf $\mathbb{Z}^2$ definiert.

Ordnungsrelationen

Beispiel

Die Relation R auf $\mathbb{Z}^2$ mit

$$(a,b) \sim_R (c,d) \iff a+b > c+d$$

ist eine strikte Ordnung auf $\mathbb{Z}^2$.

Übung

Überprüfen Sie, ob die Relation R aus $\mathbb{Z}^2$ mit

$$(a,b) \sim_R (c,s) \iff a+b \geq c+d$$

eine Ordnung auf $\mathbb{Z}^2$ definiert.

Ordnungsrelationen

Beispiel

Die Relation R auf $\mathbb{Z}^2$ mit

$$(a, b) \sim_R (c, d) \iff a + b > c + d$$

ist eine strikte Ordnung auf $\mathbb{Z}^2$.

Übung

Überprüfen Sie, ob die Relation R aus $\mathbb{Z}^2$ mit

$$(a, b) \sim_R (c, s) \iff a + b \geq c + d$$

eine Ordnung auf $\mathbb{Z}^2$ definiert.

Lösung:

R definiert keine Ordnung auf $\mathbb{Z}^2$.

Ordnungsrelationen

Beispiel

Die Relation R auf $\mathbb{Z}^2$ mit

$$(a,b) \sim_R (c,d) \iff a+b > c+d$$

ist eine strikte Ordnung auf $\mathbb{Z}^2$.

Übung

Überprüfen Sie, ob die Relation R aus $\mathbb{Z}^2$ mit

$$(a,b) \sim_R (c,s) \iff a+b \geq c+d$$

eine Ordnung auf $\mathbb{Z}^2$ definiert.

Lösung:

R definiert keine Ordnung auf $\mathbb{Z}^2$.

innere Verknüpfung

Wir betrachten eine (beliebige) Menge M.

Definition

Eine Abbildung

$$\circ : M \times M \longrightarrow M$$

also eine Abbildung mit Definitonsbereich $M \times M$ und Bildbereich M heißt **(innere) Verknüpfung** von M.
Wir schreiben in diesem Fall $m \circ n$ für $\circ(m, n)$.

innere Verknüpfung

Wir betrachten eine (beliebige) Menge M.

Definition

Eine Abbildung

$$\circ : M \times M \longrightarrow M$$

also eine Abbildung mit Definitonsbereich $M \times M$ und Bildbereich M heißt **(innere) Verknüpfung** von M.
Wir schreiben in diesem Fall $m \circ n$ für $\circ(m, n)$.

Beispiel

Ist $M = \mathbb{Z}$ und

$$\circ =' +' : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad (a, b) \longmapsto a + b$$

die Addition ganzer Zahlen, so ist $'+'$ eine innere Verknüpfung auf $\mathbb{Z}$.

innere Verknüpfung

Wir betrachten eine (beliebige) Menge M.

Definition

Eine Abbildung

$$\circ : M \times M \longrightarrow M$$

also eine Abbildung mit Definitonsbereich $M \times M$ und Bildbereich M heißt **(innere) Verknüpfung** von M.
Wir schreiben in diesem Fall $m \circ n$ für $\circ(m, n)$.

Beispiel

Ist $M = \mathbb{Z}$ und

$$\circ =' +' : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad (a, b) \longmapsto a + b$$

die Addition ganzer Zahlen, so ist $'+'$ eine innere Verknüpfung auf $\mathbb{Z}$.

innere Verknüpfung

Beispiel

Es sei $M = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$ die Menge aller Abbildungen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und es sei

$$\circ : M \times M \longrightarrow M, \quad (f, g) \longmapsto g \circ f$$

die Komposition von zwei Abbildungen. Dann ist $\circ$ eine innere Verknüpfung von M.

Beispiel

Es sei M eine beliebige Menge und es sei $\mathfrak{P}(M)$ ihre Potenzmenge. Dann wird durch

$$\circ : \mathfrak{P}(M) \times \mathfrak{P}(M) \longrightarrow \mathfrak{P}(M), \quad (A, B) \longmapsto A \cup B$$

also das Bilden der Vereinigungsmenge, eine innere Verknüpfung auf $\mathfrak{P}(M)$ definiert. (Analoges gilt für die Durchschnittsbildung).

innere Verknüpfung

Beispiel

Es sei $M = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$ die Menge aller Abbildungen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und es sei

$$\circ : M \times M \longrightarrow M, \quad (f, g) \longmapsto g \circ f$$

die Komposition von zwei Abbildungen. Dann ist $\circ$ eine innere Verknüpfung von M.

Beispiel

Es sei M eine beliebige Menge und es sei $\mathfrak{P}(M)$ ihre Potenzmenge. Dann wird durch

$$\circ : \mathfrak{P}(M) \times \mathfrak{P}(M) \longrightarrow \mathfrak{P}(M), \quad (A, B) \longmapsto A \cup B$$

also das Bilden der Vereinigungsmenge, eine innere Verknüpfung auf $\mathfrak{P}(M)$ definiert. (Analoges gilt für die Durchschnittsbildung).

Halbgruppen

Für eine Menge M mit einer Verknüpfung $\circ$ schreiben wir kurz $(M, \circ)$.

Definition

Eine nichtleere Menge $(M, \circ)$ mit einer Verknüpfung $\circ$ heißt **Halbgruppe**, wenn $\circ$ das Assoziativgesetz erfüllt, also wenn gilt:

$$(n \circ m) \circ l = n \circ (m \circ l) \qquad \text{für alle } \; l, m, n \in M$$

Halbgruppen

Für eine Menge M mit einer Verknüpfung $\circ$ schreiben wir kurz $(M, \circ)$.

Definition

Eine nichtleere Menge $(M, \circ)$ mit einer Verknüpfung $\circ$ heißt **Halbgruppe**, wenn $\circ$ das Assoziativgesetz erfüllt, also wenn gilt:

$$(n \circ m) \circ l = n \circ (m \circ l) \qquad \text{für alle } \; l, m, n \in M$$

Beispiel

$(\mathbb{N}, +)$ ist eine Halbgruppe.

Halbgruppen

Für eine Menge M mit einer Verknüpfung $\circ$ schreiben wir kurz $(M, \circ)$.

Definition

Eine nichtleere Menge $(M, \circ)$ mit einer Verknüpfung $\circ$ heißt **Halbgruppe**, wenn $\circ$ das Assoziativgesetz erfüllt, also wenn gilt:

$$(n \circ m) \circ l = n \circ (m \circ l) \qquad \text{für alle } \; l, m, n \in M$$

Beispiel

$(\mathbb{N}, +)$ ist eine Halbgruppe.

Beispiel

$(\mathbb{N} \setminus \{0\}, +)$ ist eine Halbgruppe.

Halbgruppen

Für eine Menge M mit einer Verknüpfung $\circ$ schreiben wir kurz $(M, \circ)$.

Definition

Eine nichtleere Menge $(M, \circ)$ mit einer Verknüpfung $\circ$ heißt **Halbgruppe**, wenn $\circ$ das Assoziativgesetz erfüllt, also wenn gilt:

$$(n \circ m) \circ l = n \circ (m \circ l) \qquad \text{für alle } \; l, m, n \in M$$

Beispiel

$(\mathbb{N}, +)$ ist eine Halbgruppe.

Beispiel

$(\mathbb{N} \setminus \{0\}, +)$ ist eine Halbgruppe.

Beispiel

$(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine Halbgruppe.

Halbgruppen

Für eine Menge M mit einer Verknüpfung $\circ$ schreiben wir kurz $(M, \circ)$.

Definition

Eine nichtleere Menge $(M, \circ)$ mit einer Verknüpfung $\circ$ heißt **Halbgruppe**, wenn $\circ$ das Assoziativgesetz erfüllt, also wenn gilt:

$$(n \circ m) \circ l = n \circ (m \circ l) \qquad \text{für alle } \; l, m, n \in M$$

Beispiel

$(\mathbb{N}, +)$ ist eine Halbgruppe.

Beispiel

$(\mathbb{N} \setminus \{0\}, +)$ ist eine Halbgruppe.

Beispiel

$(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine Halbgruppe.

Halbgruppen

Übung

Auf der Menge $M = \mathbb{R}$ definieren wir die innere Verknüpfung

$$\circ : M \times M \longrightarrow M$$

durch

$$\circ(a,b) = \begin{cases} 1 & \text{falls } a \geq b \\ 0 & \text{falls } a < b \end{cases}$$

Überprüfen Sie, ob $(m\circ)$ eine Halbgruppe ist.

Halbgruppen

Übung

Auf der Menge $M = \mathbb{R}$ definieren wir die innere Verknüpfung

$$\circ : M \times M \longrightarrow M$$

durch

$$\circ(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{falls } a \geq b \\ 0 & \text{falls } a < b \end{cases}$$

Überprüfen Sie, ob $(m\circ)$ eine Halbgruppe ist.

Lösung:

Dieses $(M, \circ)$ ist keine Halbgruppe, denn

$$(4 \circ 3) \circ 2 = 1 \circ 2 = 0$$

aber

Halbgruppen

Übung

Auf der Menge $M = \mathbb{R}$ definieren wir die innere Verknüpfung

$$\circ : M \times M \longrightarrow M$$

durch

$$\circ(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{falls } a \geq b \\ 0 & \text{falls } a < b \end{cases}$$

Überprüfen Sie, ob $(m\circ)$ eine Halbgruppe ist.

Lösung:

Dieses $(M, \circ)$ ist keine Halbgruppe, denn

$$(4 \circ 3) \circ 2 = 1 \circ 2 = 0$$

aber

Monoid

Definition

Ein Element e einer Halbgruppe $(M, \circ)$ heißt **neutrales Element** der Halbgruppe, wenn gilt

$$m \circ e = m, \quad e \circ m = m \qquad \text{für alle } \ m \in M$$

Eine Halbgruppe $(M, \circ)$ mt neutralem Element e heiß **Monoid**. Wir schreiben hierfür auch $(M, \circ, e)$

Bemerkung

Das neutrale Element eines Monoids $(M, \circ)$ ist eindeutig. Sind nämlich e und e' zwei Elemente aus M mit de Eigenschaft des neutralen Elements, so folgt aus ebendieser Eigenschaft

$$e' = e \circ e' = e$$

Monoid

Definition

Ein Element e einer Halbgruppe $(M, \circ)$ heißt **neutrales Element** der Halbgruppe, wenn gilt

$$m \circ e = m, \quad e \circ m = m \qquad \text{für alle } \ m \in M$$

Eine Halbgruppe $(M, \circ)$ mt neutralem Element e heiß **Monoid**. Wir schreiben hierfür auch $(M, \circ, e)$

Bemerkung

Das neutrale Element eines Monoids $(M, \circ)$ ist eindeutig. Sind nämlich e und e' zwei Elemente aus M mit de Eigenschaft des neutralen Elements, so folgt aus ebendieser Eigenschaft

$$e' = e \circ e' = e$$

Monoid

Beispiel

$(\mathbb{N}, +)$ ist ein Monoid mit neutralem Element 0.

Beispiel

$(\mathbb{N} \setminus \{0\}, +)$ ist kein Monoid.

Monoid

Beispiel

$(\mathbb{N}, +)$ ist ein Monoid mit neutralem Element 0.

Beispiel

$(\mathbb{N} \setminus \{0\}, +)$ ist kein Monoid.

Beispiel

$(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist ein Monoid mit neutralem Element 1.

Monoid

Beispiel

$(\mathbb{N}, +)$ ist ein Monoid mit neutralem Element 0.

Beispiel

$(\mathbb{N} \setminus \{0\}, +)$ ist kein Monoid.

Beispiel

$(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist ein Monoid mit neutralem Element 1.

Beispiel

$(\mathbb{Z}, +)$ ist ein Monoid mit neutralem Element 0. $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist ein Monoid mit neutralem Element 1.

Monoid

Beispiel

$(\mathbb{N}, +)$ ist ein Monoid mit neutralem Element 0.

Beispiel

$(\mathbb{N} \setminus \{0\}, +)$ ist kein Monoid.

Beispiel

$(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist ein Monoid mit neutralem Element 1.

Beispiel

$(\mathbb{Z}, +)$ ist ein Monoid mit neutralem Element 0. $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist ein Monoid mit neutralem Element 1.

Monoid

Beispiel

Ist $M = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$ die Menge aller Funktionen von $\mathbb{R}$ in sich mit der inneren Verknüpfung $\circ$, gegeben durch

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

(Komposition von Abbildungen), so ist $(M\circ)$ ein Monoid mit neutralem Element

$$\mathrm{id} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x\,.$$

Monoid

Übung

Überprüfen Sie, ob die Menge

$$M = 3 \cdot \mathbb{N} = \{0, 3, 6, 9, 12, \ldots\} = \{3 \cdot k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

zusammen mit der Addition ganzer Zahlen ein Monoid ist.

Monoid

Übung

Überprüfen Sie, ob die Menge

$$M = 3 \cdot \mathbb{N} = \{0, 3, 6, 9, 12, \ldots\} = \{3 \cdot k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

zusammen mit der Addition ganzer Zahlen ein Monoid ist.

Lösung:

Die Menge $(M, +)$ ist ein Monoid mit neutralem Element 0.

Monoid

Übung

Überprüfen Sie, ob die Menge

$$M = 3 \cdot \mathbb{N} = \{0, 3, 6, 9, 12, \ldots\} = \{3 \cdot k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

zusammen mit der Addition ganzer Zahlen ein Monoid ist.

Lösung:

Die Menge $(M, +)$ ist ein Monoid mit neutralem Element 0.

Gruppen

Definition

Ist $(M, \circ)$ ein Monoid mit neutralem Element e und ist $m \in M$, so heißt ein Element $n \in M$ **inverses Element** zu m wenn gilt

$$m \circ n = e, \qquad n \circ m = e$$

In diesem Fall schreiben wir m^{-1} für n.

Ein Monoid $(G, \circ)$ heißt **Gruppe**, wenn es zu jedem Element $m \in G$ eine inverses Element in G gibt.

Gruppen

Definition

Ist $(M, \circ)$ ein Monoid mit neutralem Element e und ist $m \in M$, so heißt ein Element $n \in M$ **inverses Element** zu m wenn gilt

$$m \circ n = e, \qquad n \circ m = e$$

In diesem Fall schreiben wir m^{-1} für n.
Ein Monoid $(G, \circ)$ heißt **Gruppe**, wenn es zu jedem Element $m \in G$ eine inverses Element in G gibt.

Beispiel

Die Menge $\mathbb{Z}$ mit der Addition $+$ ist eine Gruppe.

Gruppen

Definition

Ist $(M, \circ)$ ein Monoid mit neutralem Element e und ist $m \in M$, so heißt ein Element $n \in M$ **inverses Element** zu m wenn gilt

$$m \circ n = e, \qquad n \circ m = e$$

In diesem Fall schreiben wir m^{-1} für n.
Ein Monoid $(G, \circ)$ heißt **Gruppe**, wenn es zu jedem Element $m \in G$ eine inverses Element in G gibt.

Beispiel

Die Menge $\mathbb{Z}$ mit der Addition $+$ ist eine Gruppe.
Zu jeder ganzen Zahl z gibt es eine ganze Zahl $-z$ mit

$$z + (-z) = 0$$

Gruppen

Definition

Ist $(M, \circ)$ ein Monoid mit neutralem Element e und ist $m \in M$, so heißt ein Element $n \in M$ **inverses Element** zu m wenn gilt

$$m \circ n = e, \qquad n \circ m = e$$

In diesem Fall schreiben wir m^{-1} für n.
Ein Monoid $(G, \circ)$ heißt **Gruppe**, wenn es zu jedem Element $m \in G$ eine inverses Element in G gibt.

Beispiel

Die Menge $\mathbb{Z}$ mit der Addition $+$ ist eine Gruppe.
Zu jeder ganzen Zahl z gibt es eine ganze Zahl $-z$ mit

$$z + (-z) = 0$$

Gruppen

Beispiel

Das Monoid $(\mathbb{N}, +)$ ist keine Gruppe. So gibt es etwa keine natürliche Zahl n mit $1 + n = 0$.

Beispiel

Das Monoid $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist keine Gruppe. So gibt es etwa keine ganze Zahl n mit $2 \cdot n = 1$.

Gruppen

Beispiel

Das Monoid $(\mathbb{N}, +)$ ist keine Gruppe. So gibt es etwa keine natürliche Zahl n mit $1 + n = 0$.

Beispiel

Das Monoid $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist keine Gruppe. So gibt es etwa keine ganze Zahl n mit $2 \cdot n = 1$.

Beispiel

Das Monoid $(\mathbb{R}, +)$ ist eine Gruppe. Zu jeder reellen Zahl r gibt es eine reelle Zahl $-r$ mit $r + (-r) = 0$.

Gruppen

Beispiel

Das Monoid $(\mathbb{N}, +)$ ist keine Gruppe. So gibt es etwa keine natürliche Zahl n mit $1 + n = 0$.

Beispiel

Das Monoid $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist keine Gruppe. So gibt es etwa keine ganze Zahl n mit $2 \cdot n = 1$.

Beispiel

Das Monoid $(\mathbb{R}, +)$ ist eine Gruppe. Zu jeder reellen Zahl r gibt es eine reelle Zahl $-r$ mit $r + (-r) = 0$.

Beispiel

Das Monoid $(\mathbb{R}, \cdot)$ ist keine Gruppe, denn es gibt kein $r \in \mathbb{R}$ mit $0 \cdot r = 1$.

Gruppen

Beispiel

Das Monoid $(\mathbb{N}, +)$ ist keine Gruppe. So gibt es etwa keine natürliche Zahl n mit $1 + n = 0$.

Beispiel

Das Monoid $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist keine Gruppe. So gibt es etwa keine ganze Zahl n mit $2 \cdot n = 1$.

Beispiel

Das Monoid $(\mathbb{R}, +)$ ist eine Gruppe. Zu jeder reellen Zahl r gibt es eine reelle Zahl $-r$ mit $r + (-r) = 0$.

Beispiel

Das Monoid $(\mathbb{R}, \cdot)$ ist keine Gruppe, denn es gibt kein $r \in \mathbb{R}$ mit $0 \cdot r = 1$.
Das Monoid $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine Gruppe.

Gruppen

Beispiel

Das Monoid $(\mathbb{N}, +)$ ist keine Gruppe. So gibt es etwa keine natürliche Zahl n mit $1 + n = 0$.

Beispiel

Das Monoid $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist keine Gruppe. So gibt es etwa keine ganze Zahl n mit $2 \cdot n = 1$.

Beispiel

Das Monoid $(\mathbb{R}, +)$ ist eine Gruppe. Zu jeder reellen Zahl r gibt es eine reelle Zahl $-r$ mit $r + (-r) = 0$.

Beispiel

Das Monoid $(\mathbb{R}, \cdot)$ ist keine Gruppe, denn es gibt kein $r \in \mathbb{R}$ mit $0 \cdot r = 1$. Das Monoid $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine Gruppe.

Gruppen

Beispiel

Ist $M = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$ die Menge aller Funktionen von $\mathbb{R}$ in sich mit der Komposition $\circ$, gegeben durch

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

als innerer Verknüpfung, so ist $(M, \circ)$ keine Gruppe, denn zur Nullabbildung 0 gibt es keine Funktion f mit $f \circ 0 = \mathrm{id}$.
Ist allerdings $M' \subseteq M$ die Teilmenge aller bijektiven Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow R$, so definiert $\circ$ eine innere Verknüpfung auf M' und $(M', \circ)$ ist eine Gruppe.

Gruppen

Beispiel

Ist $M = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$ die Menge aller Funktionen von $\mathbb{R}$ in sich mit der Komposition $\circ$, gegeben durch

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

als innerer Verknüpfung, so ist $(M, \circ)$ keine Gruppe, denn zur Nullabbildung 0 gibt es keine Funktion f mit $f \circ 0 = \mathrm{id}$.
Ist allerdings $M' \subseteq M$ die Teilmenge aller bijektiven Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow R$, so definiert $\circ$ eine innere Verknüpfung auf M' und $(M', \circ)$ ist eine Gruppe.
Ist f aus M' und ist f^{-1} die zu f inverse Abbildung, so gilt hierfür

$$(f \circ f^{-1})(x) = x = \mathrm{id}(x) = x = (f^{-1} \circ f)(x)$$

und damit ist f^{-1} das zu f inverse Element.

Gruppen

Beispiel

Ist $M = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$ die Menge aller Funktionen von $\mathbb{R}$ in sich mit der Komposition $\circ$, gegeben durch

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

als innerer Verknüpfung, so ist $(M, \circ)$ keine Gruppe, denn zur Nullabbildung 0 gibt es keine Funktion f mit $f \circ 0 = \mathrm{id}$.
Ist allerdings $M' \subseteq M$ die Teilmenge aller bijektiven Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow R$, so definiert $\circ$ eine innere Verknüpfung auf M' und $(M', \circ)$ ist eine Gruppe.
Ist f aus M' und ist f^{-1} die zu f inverse Abbildung, so gilt hierfür

$$(f \circ f^{-1})(x) = x = \mathrm{id}(x) = x = (f^{-1} \circ f)(x)$$

und damit ist f^{-1} das zu f inverse Element.

Permutationsgruppe

Beispiel

Ist $M_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ die Menge der Zahlen $1, 2, \ldots, n$, und ist S_n die Menge der bijektiven Abbildungen auf M_n, so heißt S_n **Permutationsgruppe** der Zahlen $1, \ldots, n$ und ihre Elemente heißen Permutationen von $1, \ldots, n$.

Ein Element $\sigma \in S_n$ lässt sich am besten tabellarisch darstellen

1	2	$\ldots$	n
$\sigma(1)$	$\sigma(2)$	$\ldots$	$\sigma(n)$

Permutationsgruppe

Beispiel

Ist $M_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ die Menge der Zahlen $1, 2, \ldots, n$, und ist S_n die Menge der bijektiven Abbildungen auf M_n, so heißt S_n **Permutationsgruppe** der Zahlen $1, \ldots, n$ und ihre Elemente heißen Permutationen von $1, \ldots, n$.

Ein Element $\sigma \in S_n$ lässt sich am besten tabellarisch darstellen

1	2	...	n
$\sigma(1)$	$\sigma(2)$	...	$\sigma(n)$

Hierfür schreiben wir auch

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Permutationsgruppe

Beispiel

Ist $M_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ die Menge der Zahlen $1, 2, \ldots, n$, und ist S_n die Menge der bijektiven Abbildungen auf M_n, so heißt S_n **Permutationsgruppe** der Zahlen $1, \ldots, n$ und ihre Elemente heißen Permutationen von $1, \ldots, n$.

Ein Element $\sigma \in S_n$ lässt sich am besten tabellarisch darstellen

1	2	$\ldots$	n
$\sigma(1)$	$\sigma(2)$	$\ldots$	$\sigma(n)$

Hierfür schreiben wir auch

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Permutationsgruppe

Eine Permuation τ heißt **Transposition** wenn sie nur zwei Zahlen i und j vertauscht, aber alle andern festlässt. Hierfür schreiben wir $\tau = \tau_{i,j} =< i\ j >$.

Permutationsgruppe

Eine Permuation τ heißt **Transposition** wenn sie nur zwei Zahlen i und j vertauscht, aber alle andern festlässt. Hierfür schreiben wir $\tau = \tau_{i,j} =< i\ j >$.

Beispiel

Die Permuation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

ist die Transposition $<1\ \ 3>$ der Zahlen 1 und 3

Permutationsgruppe

Eine Permuation τ heißt **Transposition** wenn sie nur zwei Zahlen i und j vertauscht, aber alle andern festlässt. Hierfür schreiben wir $\tau = \tau_{i,j} = < i\ j >$.

Beispiel

Die Permuation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

ist die Transposition $< 1 \quad 3 >$ der Zahlen 1 und 3

Regel

$< i\ j > \circ < i\ j > = \mathrm{id}.$

Permutationsgruppe

Eine Permuation τ heißt **Transposition** wenn sie nur zwei Zahlen i und j vertauscht, aber alle andern festlässt. Hierfür schreiben wir $\tau = \tau_{i,j} = < i\ j >$.

Beispiel

Die Permuation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

ist die Transposition $< 1\ \ 3 >$ der Zahlen 1 und 3

Regel

$< i\ j > \circ < i\ j > = \mathrm{id}.$

Regel

$|S_n| = n!.$

Permutationsgruppe

Eine Permuation τ heißt **Transposition** wenn sie nur zwei Zahlen i und j vertauscht, aber alle andern festlässt. Hierfür schreiben wir $\tau = \tau_{i,j} = < i\ j >$.

Beispiel

Die Permuation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

ist die Transposition $<1\ \ 3>$ der Zahlen 1 und 3

Regel

$< i\ j > \circ < i\ j > = \mathrm{id}.$

Regel

$|S_n| = n!.$

Permutationsgruppe

Ein Paar $i, j \in \{1, \dots, n\}$ eine Fehlstand von σ, wenn $i < j$ aber $\sigma(i) > \sigma(j)$. Wir definieren die **Signatur** $\operatorname{sign}(\sigma)$ von σ durch

$$\operatorname{sign}(\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{falls die Anzahl der Fehlstände gerade ist} \\ -1 & \text{falls die Anzahl der Fehlstände ungerade ist} \end{cases}$$

Permutationsgruppe

Ein Paar $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ eine Fehlstand von σ, wenn $i < j$ aber $\sigma(i) > \sigma(j)$. Wir definieren die **Signatur** $\mathrm{sign}(\sigma)$ von σ durch

$$\mathrm{sign}(\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{falls die Anzahl der Fehlstände gerade ist} \\ -1 & \text{falls die Anzahl der Fehlstände ungerade ist} \end{cases}$$

Eine Permuation σ heißt **gerade**, wenn $\mathrm{sign}(\sigma) = +1$ und **ungerade**, wenn $\mathrm{sign}(\sigma) = -1$.

Permutationsgruppe

Ein Paar $i, j \in \{1, \dots, n\}$ eine Fehlstand von σ, wenn $i < j$ aber $\sigma(i) > \sigma(j)$. Wir definieren die **Signatur** $\mathrm{sign}(\sigma)$ von σ durch

$$\mathrm{sign}(\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{falls die Anzahl der Fehlstände gerade ist} \\ -1 & \text{falls die Anzahl der Fehlstände ungerade ist} \end{cases}$$

Eine Permuation σ heißt **gerade**, wenn $\mathrm{sign}(\sigma) = +1$ und **ungerade**, wenn $\mathrm{sign}(\sigma) = -1$.

Die Signatur hat auch folgende Beschreibung

$$\mathrm{sign}(\sigma) = \prod_{i<j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

Permutationsgruppe

Ein Paar $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ eine Fehlstand von σ, wenn $i < j$ aber $\sigma(i) > \sigma(j)$. Wir definieren die **Signatur** $\mathrm{sign}(\sigma)$ von σ durch

$$\mathrm{sign}(\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{falls die Anzahl der Fehlstände gerade ist} \\ -1 & \text{falls die Anzahl der Fehlstände ungerade ist} \end{cases}$$

Eine Permuation σ heißt **gerade**, wenn $\mathrm{sign}(\sigma) = +1$ und **ungerade**, wenn $\mathrm{sign}(\sigma) = -1$.
Die Signatur hat auch folgende Beschreibung

$$\mathrm{sign}(\sigma) = \prod_{i<j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

Es ist $\mathrm{sign}(<i\ j>) = -1$.

Permutationsgruppe

Ein Paar $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ eine Fehlstand von σ, wenn $i < j$ aber $\sigma(i) > \sigma(j)$. Wir definieren die **Signatur** $\mathrm{sign}(\sigma)$ von σ durch

$$\mathrm{sign}(\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{falls die Anzahl der Fehlstände gerade ist} \\ -1 & \text{falls die Anzahl der Fehlstände ungerade ist} \end{cases}$$

Eine Permuation σ heißt **gerade**, wenn $\mathrm{sign}(\sigma) = +1$ und **ungerade**, wenn $\mathrm{sign}(\sigma) = -1$.
Die Signatur hat auch folgende Beschreibung

$$\mathrm{sign}(\sigma) = \prod_{i<j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

Es ist $\mathrm{sign}(< i\ j >) = -1$.

kommutative Gruppen

Definition

Eine Gruppe $(G, \circ)$ heißt **kommutativ** oder **abelsch** wenn für je zwei Elemente $g, h \in G$ gilt:

$$g \circ h = h \circ g$$

Beispiel

$(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{Q}, +)$ sind kommutative Gruppen.
$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ und $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ sind kommutative Gruppen

kommutative Gruppen

Definition

Eine Gruppe $(G, \circ)$ heißt **kommutativ** oder **abelsch** wenn für je zwei Elemente $g, h \in G$ gilt:

$$g \circ h = h \circ g$$

Beispiel

$(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{Q}, +)$ sind kommutative Gruppen.
$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ und $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ sind kommutative Gruppen

Beispiel

Ist G die Gruppe der bijektiven Abbildungen von $\mathbb{R}$ in sich, so ist G nicht kommutativ.

kommutative Gruppen

Definition

Eine Gruppe $(G, \circ)$ heißt **kommutativ** oder **abelsch** wenn für je zwei Elemente $g, h \in G$ gilt:

$$g \circ h = h \circ g$$

Beispiel

$(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{Q}, +)$ sind kommutative Gruppen.
$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ und $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ sind kommutative Gruppen

Beispiel

Ist G die Gruppe der bijektiven Abbildungen von $\mathbb{R}$ in sich, so ist G nicht kommutativ.

kommutative Gruppen

Übung

Überprüfen Sie, ob die Gruppe S_3 der Permutationen der Zahlen $1, 2$ und 3 kommutativ ist.

kommutative Gruppen

Übung

Überprüfen Sie, ob die Gruppe S_3 der Permutationen der Zahlen $1, 2$ und 3 kommutativ ist.

Lösung:

Dei Gruppe S_3 ist nicht kommutativ. Generell ist für $n \geq 3$ die Gruppe S_n der Permuationen nicht kommutativ.

kommutative Gruppen

Übung

Überprüfen Sie, ob die Gruppe S_3 der Permutationen der Zahlen $1, 2$ und 3 kommutativ ist.

Lösung:

Dei Gruppe S_3 ist nicht kommutativ. Generell ist für $n \geq 3$ die Gruppe S_n der Permuationen nicht kommutativ.

So ist etwa $\langle 1\ \ 2\rangle \circ \langle 1\ \ 3\rangle \neq \langle 1\ \ 3\rangle \circ \langle 1\ \ 2\rangle$.

kommutative Gruppen

Übung

Überprüfen Sie, ob die Gruppe S_3 der Permutationen der Zahlen $1, 2$ und 3 kommutativ ist.

Lösung:

Dei Gruppe S_3 ist nicht kommutativ. Generell ist für $n \geq 3$ die Gruppe S_n der Permuationen nicht kommutativ.
So ist etwa $\langle 1 \;\; 2 \rangle \circ \langle 1 \;\; 3 \rangle \neq \langle 1 \;\; 3 \rangle \circ \langle 1 \;\; 2 \rangle$.