

Aufgaben zu „Elementare Funktionen“

1. Die Funktionen $\sinh x$ und $\cosh x$ seien definiert durch
$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad , \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad .$$
Zeigen Sie für alle reellen x und y :
 - a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, b) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$,
 - b) $\sinh x + \sinh y = 2 \sinh ((x+y)/2) \cosh ((x-y)/2)$.
2. Bestimmen Sie zu folgenden Funktionen f die Umkehrfunktion. Ist f nicht im gesamten Definitionsbereich $D(f)$ monoton, schränken Sie $D(f)$ in geeigneter Weise ein:
 - a) $f(x) = 1 + \ln(x+2)$, b) $f(x) = x^2 - 2x$.Skizzieren Sie die Schaubilder von Funktion und Umkehrfunktion .
3. Drücken Sie folgende Größen durch $\ln 2$ aus :
 - a) $\ln 1024$, b) $\ln \sqrt{2}$, c) $\ln(1/2)$.
4. Wie groß ist $\log_k(e^k)$ für $k = 2, 3, 4$?
5. Die Funktion $y = f(x)$ sei durch $y^2 - 1 + \log_2(x-1) = 0$, $y \geq 0$, festgelegt . Bestimmen Sie den (größtmöglichen) Definitionsbereich und die Umkehrfunktion. Skizze !
6. Schreiben Sie die Funktion $f(x) = 3 \sin x + 4 \cos x$ in der Form $f(x) = A \sin(x + B)$ mit geeigneten Konstanten A und B .
7. Die Additionstheoreme für $\sin x$ und $\cos x$ seien bekannt. Zeigen Sie :
 - a) $2 \sin nx \sin mx = \cos(n-m)x - \cos(n+m)x$,
 - b) $2 \cos nx \cos mx = \cos(n-m)x + \cos(n+m)x$,
 - c) $2 \sin nx \cos mx = \sin(n-m)x + \sin(n+m)x$.
8. Berechnen Sie $\sin x$ und $\cos x$ für $x = \pi/4$, $\pi/8$ und $\pi/16$. Geben Sie jeweils Wurzelausdrücke und Dezimalbrüche an.
9. Seien $a > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie , dass für die Funktion f mit $f(x) = \sqrt[n]{a - x^n}$ für $x \in [0, \sqrt[n]{a}]$ gilt : $f(f(x)) = x$. Bestimmen Sie die Umkehrfunktion von f .
10. Bei der Navigation in Gezeitengewässern benutzen Segler zur Schätzung der Wassertiefe die Faustregel, dass in der 1. , 2. usw. bis zur 6. Stunde zwischen Niedrig- und Hochwasser $1/12$, $2/12$, $3/12$, $3/12$, $2/12$ und $1/12$ des Tidenhubs aufläuft.

Wie gut verträgt sich diese Regel mit der Annahme , dass der Wasserstand als Funktion der Zeit eine sinusförmige Schwingung ist ? Die Periodendauer soll der Einfachheit mit 12 Stunden angenommen werden. Skizzieren Sie z.B. den Verlauf der Sinuskurve und den Wasserstand nach der Faustregel durch einen Streckenzug .