Def. Gruppe (aus der Gruppentheorie)

Eine Gruppe ist ein 4-Tupel der Form <$G, e, *, i$>
wobei gilt:

- $e \in G$ (das neutrale Element)
- $* : GxG \rightarrow G$
- $i : G \rightarrow G$ (das Inverse)
- Es gelten die folgenden Axiome:
    - $\forall x \in G : e * x = x$
    - $\forall x \in G : i(x) * x = e$
    - $\forall x, y, z \in G : (x * y) * z = x * (y * z)$

Def. Signatur

$\Sigma =< V, F, arity >$ wobei gilt:

- V ist Menge der Variablen
- F ist Menge der Funktionszeichen
- $arity : F \rightarrow \N$, gibt pro Funktion an, wie viele Argumente diese Funktion als Input bekommt
- $V \cap F = \emptyset$ (Variablen müssen ungleich Funktionszeichen sein)

Def. Sigma-Terme

$\mathcal{T}_\Sigma$ ist die Menge von Σ-Termen ist induktiv definiert:

1. $x \in \mathcal{T}_\Sigma$ für alle Variablen x
2. $c \in \mathcal{T}_\Sigma$ für alle Funktionszeichen c, bei denen gilt: $arity(c) = 0$
3. Falls f ein Funktionszeichen ist und $n = arity(f)$ und $n > 0$ und $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}_\Sigma$, dann gilt: $f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{T}_\Sigma$

Def. Sigma-Gleichung

Damit sagen wir, dass zwei Terme logisch gleich sind (z.B. 1*x = x ist logisch, aber nicht syntaktisch gleich)

Wir schreiben $< s, t >$ oder auch $s \approx t$, g.d.w. s logisch gleich t ist.

Def. Sigma-Algebra

Sei Σ eine Signatur, dann ist $\mathcal{A} =< A, \mathcal{I} >$ eine Algebra, g.d.w.:

1. A ist ein nicht-leeres Universum. (Das Universum enthält alle Symbole, die wir haben können)
2. $\mathcal{I}$ ist die Interpretation der Funktions-Symbole. Für alle $f \in F$ gilt: $\mathcal{I}(f) : A^{arity(f)} -> A$. Wir schreiben auch $f^{\mathcal{A}}$ für die Interpretation

Die Menge aller Σ-Algebras schreiben wir als $Alg(\Sigma)$

Def. Variablen-Belegung

Sei Σ eine Signatur und $\mathcal{A}$ eine Algebra, dann definieren wir I als Variablen-Belegung wie folgt:

$I : V \to A$

Jede Variable wird einem Element aus dem Universum A zugeordnet

Def. Anwendung

Die Anwendung $eval$ ist wie folgt definiert:

1. $eval(x, I) := I(x)$ für alle $x \in V$
2. $eval(c, I) := c^{\mathcal{A}}$ für alle Konstanten $c \in F$ (also es gilt $arity(c) = 0$)
3. $eval(f(t_1, \ldots, t_n), I) := f^{\mathcal{A}}(eval(t_1, I), \ldots, eval(t_n, I))$

Def. Gültige Gleichung

Eine Gleichung $s \approx t$ ist gültig g.d.w. $eval(s, I) = eval(t, I)$ für alle Variablen-Belegungen $I : V -> A$ gilt.

Wir schreiben das auch als $\mathcal{A} \models s \approx t$

Def. E-Varietät

Sei E eine Menge von Σ-Gleichungen, dann ist die E-Varietät die Menge aller Σ-Algebras, die die Gleichungen in E erfüllen.

Variety(E) := $\{\mathcal{A} \in Alg(\Sigma) | \forall (s \approx t) \in E : \mathcal{A} \models s \approx t\}$

Def. logische Konsequenz

Die Gleichung $s \approx t$ ist eine logische Konsequenz g.d.w.

Für alle $\mathcal{A} \in Variety(E)$ muss $\mathcal{A} \models s \approx t$

Wir schreiben dann auch $E \models s \approx t$

Falls $E \models s \approx t$ gilt, dann gilt auch $E \models t \approx s$

Def. Sigma-Substitution

Die Substitution $\sigma : V \to \mathcal{T}_\Sigma$

Wir schreiben auch $\sigma = \{x_1 \to t_1, \ldots, x_n \to t_n\}$

Die Anwendung einer Substition (wir schreiben $x\sigma$) ist wie folgt definiert:

1. Für alle Variablen x, gilt: $x\sigma = \sigma(x)$
2. Für alle Konstanten c gilt: $c\sigma = c$
3. Für alle Funktionen f gilt: $f(t_1, \ldots, t_n)\sigma = f(t_1\sigma, \ldots, t_n\sigma)$

Induktive Def. der Relation $\vdash$ ("Beweis"-Relation)

1. $E \vdash s \approx t$ für alle Gleichungen $(s \approx t) \in E$
2. $E \vdash s \approx s$ für alle Terme s
3. Falls $E \vdash s \approx t$ dann gilt auch $E \vdash t \approx s$
4. Falls $E \vdash r \approx s$ und $E \vdash s \approx t$ dann gilt auch: $E \vdash r \approx t$
5. Falls $n = arity(f)$ und für alle $i = 1, \ldots, n$ $E \vdash s_i \approx t_i$ gilt, dann gilt auch: $E \vdash f(s_1, \ldots, s_n) \approx f(t_1, \ldots, t_n)$
6. Falls $E \vdash s \approx t$und σ eine Substitution ist, dann gilt auch $E \vdash s\sigma \approx t\sigma$

Induktive Def. der Menge Pos(t)

```
Bsp.:
1 * (x + y)
Das können wir uns wie folgt vorstellen:

   *
  / \
 1   +
    / \
   x   y

Wir wollen die einzelnen Terme individuell ansprechen können und müssen
deswegen deren Position definieren.
In diesem Beispiel:
- 1*(x + y) ist an Postion []
- 1 ist an Position [1]
- x + y ist an Position [2]
- x ist an Position [2, 1]
- y ist an Positon [2, 2]
```

$Pos(t)$ ist die Menge aller Positionen in einem Term t und ist wie folgt definiert:

1. Für jede Variable x gilt: $Pos(x) := \{[]\}$
2. Für jede Konstante c gilt: $Pos(c) := \{[]\}$
3. Für jede Funktion f gilt: $Pos(f(t_1, \dots, t_n)) := \big\{[\,]\big\} \cup \bigcup_{i=1}^{n} \big\{[i] + u \mid u \in Pos(t_i)\big\}$

Def. Teilterm

Wenn t ein Teilterm von s ist und an der Position u in s ist, dann schreiben wir $s/u = t$. Wir definieren s/u induktiv wie folgt:

1. $s/[] := s$
2. $f(s_1, \dots, s_n)/([i] + u) := s_i/u$

Def. Termersetzung

Wir können den Teilterm an der Position u in s mit einem Term t ersetzen und schreiben dann $s[u \to t]$. Wir definieren das induktiv:

1. $s[[] \to t] := t$
2. $f(s_1, \dots, s_n)[[i] + u \to t] := f(s_1, \dots, s_i[u \to t], \dots, s_n)$

Def. Termersetzungs-Ordnung

Die Relation $\prec$ ordnet Σ-Terme. Wir definieren diese Ordnung wie folgt:

1. Für alle $s \in \mathcal{T}_\Sigma$ gilt: $\neg(s \prec s)$
2. Für alle $r, s, t \in \mathcal{T}_\Sigma$ gilt: Falls $r \prec s$ und $s \prec t$ dann gilt auch $r \prec t$
3. Für alle $r, s \in \mathcal{T}_\Sigma$ und Substitionen σ gilt: Falls $r \prec s$ dann gilt auch $r\sigma \prec s\sigma$
4. Für alle $s, l, r \in \mathcal{T}_\Sigma$ und Positionen $u \in Pos(s)$ gilt: Falls $r \prec l$ dann gilt auch $s[u \to r] \prec s[u \to l]$
5. Es gibt eine Folge $(s_n)_{n \in \N}$ mit $s_{n+1} \prec s_n$ (in anderen Worten, es gibt eine Folge, die immer kleinere Terme liefert)
6. Für alle $(l \approx r) \in E$ gilt $l \prec r$

Regeln von Martelli & Montanari zur Lsg. von syntaktischen Gleichungssystemen

Syntaktische Gleichung schreibt sich als $s \doteq t$. Ein syntaktisches Gleichungssystem ist eine Menge solcher Gleichungen.

1. Falls $y \in V \land y \notin Vars(t)$, dann können wir $< E \cup \{y \doteq t\}, \sigma >$ zum folgendem umformen: $< E\{y \to t\}, \sigma\{y \to t\} >$
2. Falls $y \in V \land y \in Vars(t) \land y \neq t$, dann können wir $< E \cup t \doteq y, \sigma >$ zum folgendem umformen: Ω (kein mögliches Ergebnis)

3. Falls $y \in V \land t \notin V$, dann können wir $< E \cup \{t \doteq y\}, \sigma >$ zum folgendem umformen: $< E \cup \{y \doteq t\}, \sigma >$
4. Falls $x \in V$, dann können wir $< E \cup \{x \doteq x\}, \sigma >$ zum folgendem umformen: $< E, \sigma >$
5. $< E \cup \{f(s_1, \ldots, s_n) \doteq f(t_1, \ldots, t_n)\}, \sigma >$ zum folgendem umformen: $< E \cup \{s_1 \doteq t_1, \ldots, s_n \doteq t_n\}, \sigma >$
6. $f \neq g$ dann gibt es keine Lösung für $< E \cup \{f(\ldots) \doteq g(\ldots)\}, \sigma >$ (also wird zu Ω)

Def. Most General Unifier

Falls $< E, \{\} >$ zu $< \{\}, \mu >$ mit diesen Regeln umgeformt werden kann, dann ist mu der Most-general-unifier, auch $mgu(E)$ genannt