2. Übung TAINF20

Wintersemester 2020/21

Als Nachtrag zu der in der Übung nicht besprochenen Aufgabe:

Aufg1.: Beweisen Sie

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

Lösung: Zu zeigen ist

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \tag{1}$$

(I.A.) Für $n = 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^0} = 1 = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^1}\right) = 2 \cdot (1 - 1/2)$$

(I.A.) Die Gleichung (1) gelte für ein $n \in \mathbb{N}$.

(I.S.) $n \to n + 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2^{k-1}} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{n+1-1}} \overset{I.V.}{=} 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{2^n} \\
&= 2 - \frac{2}{2^n} + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{2}{2^{n+1}} \\
&= 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)
\end{aligned}$$