

## Konvergenzkriterien

### Absolute & Bedingte Konvergenz

1. Absolut Konvergent:  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$  konv.
2. Bedingt Konvergent:  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$  konv. und  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  div.
3. Absolut konv.  $\implies$  konv.

### Notwendiges Kriterium

$$\text{Ist } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv.} \rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$$

### Majorantenkriterium

$$0 \leq a_k \leq b_k, \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konv.} \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv.}$$

### Minorantenkriterium

$$0 \leq c_k \leq a_k, \sum_{k=1}^{\infty} c_k \text{ div.,} \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ div.}$$

### Quotientenkriterium

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ mit } a_k > 0 \text{ konv.} \iff \exists q : 0 < q < 1 : \forall k \geq k_0 : \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q$$

### Wurzelkriterium

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ mit } a_k > 0 \text{ konv.} \iff \exists q : 0 < q < 1 : \forall k \geq k_0 : \sqrt[k]{a_k} \leq q$$

### Leibniz-Kriterium

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} b_k \text{ konv.} \iff (b_k) \text{ monoton fallend, } b_k > 0, \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0$$

### Satz von L'Hôpital

Sei  $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$  eine unbestimmte Form, so gilt:

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

### Partialsumme

$s_n = \sum_{k=0}^n a_k$  ist eine Partialsumme für die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ . Wenn die Partialsumme der Reihe konvergiert, konvergiert die Reihe gegen den selben Wert

## Wichtige Reihen

Name	Def.	Konv.	Wert
Geometrische Reihe	$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$	$ q  < 1 \implies$ konv., ansonsten div.	Falls konv.: $\frac{A}{1-q}$ mit $A$ = Anfangswert der Reihe
...	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$	konv.	$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1$
Harmonische Reihe (für a=1)	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^a}$	$a > 1 \implies$ konv., ansonsten div.	...
...	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$	konv.	...
...	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\binom{2k}{k}}$	konv.	...
Alternierende Harmonische Reihe	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$	konv.	...

## Ableitungsregeln

### Faktorregel

$$(a \cdot f)' = a \cdot f'$$

### Summenregel

$$(f + g)' = f' + g'$$

### Potenzregel

$$(f^a)' = a \cdot f^{a-1}$$

### Produktregel

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

### Quotientenregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

### Kettenregel

$$(f(g))' = f'(g) \cdot g'$$

### Ableitung der Umkehrfunktion

$$f'(x_0) \neq 0 \text{ und } g \text{ Umkehrfunktion von } f \implies g'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

## Integrieren

### Partielle Integration

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx$$

### Substitutionsregel

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(g(y)) \cdot g'(y) dy$$

1. **Grenzen berechnen:**

$$a, b \rightarrow g(a), g(b)$$

2. **Substitution ableiten & nach  $dx$  umformen:**

$$\left(\frac{dx}{dy} = g'(y)\right) \rightarrow (dx = g'(y) \cdot dy)$$

3. **Substitution einsetzen & ausrechnen:**

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(g(y)) \cdot g'(y) dy$$

## Rotationskörper

**Rotation um X-Achse:**

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

**Rotation um Y-Achse:**

$$V = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) dx$$

## Bogenlänge

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

## Logarithmus

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \quad (1)$$

$$\ln(x) = \log_a(x) \cdot \ln(a) \quad (2)$$

$$\log_a(x) + \log_a(y) = \log_a(x \cdot y) \quad (3)$$

$$\log_a(x) - \log_a(y) = \log_a\left(\frac{x}{y}\right) \quad (4)$$

$$\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x) \quad (5)$$

$$(6)$$

## Elementare Ableitungen & Stammfunktionen

Stammfunktion	Funktion	Ableitung
$\frac{1}{a}e^{a \cdot x}$	$e^{a \cdot x}$	$a \cdot e^{a \cdot x}$
$x \cdot \ln(x) - x$	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\ln(f(x))$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$	...
$\frac{f(x)^2}{2}$	$f'(x) \cdot f(x)$	...
$\sqrt{f(x)}$	$\frac{f'(x)}{2 \cdot \sqrt{f(x)}}$	...

## Winkelfunktionen

x	0	$\pi / 2$	$\pi$	$3\pi / 2$	$n\pi$ ( n ganz)
sin x	0	1	0	- 1	0
cos x	1	0	- 1	0	$(- 1)^n$

Gradmaß	- 45°	90°	180°	360°	405°	720°
Bogenmaß	$-\pi / 4$	$\pi / 2$	$\pi$	$2\pi$	$9\pi / 4$	$4\pi$

Name	Definition	Ableitung	Weiteres
$\sin$	$\frac{GK}{H}$	$\cos$	$\sin^2 = 1 - \cos^2$ , $\sin(-x) = -\sin(x)$ , $\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$ , $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$
$\cos$	$\frac{AK}{H}$	$-\sin$	$\cos^2 = 1 - \sin^2$ , $\cos(x) = \cos(-x)$ , $\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$
$\tan$	$\frac{\sin}{\cos}$	$\frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$	$\tan(-x) = -\tan(x)$ ,
$\cot$	$\frac{\cos}{\sin}$	$\frac{-1}{\sin^2} = -(1 + \cot^2)$	$\cot(-x) = -\cot(x)$ ,
$\arcsin$	...	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$D(f) = [-1, 1], W(f) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\arccos$	...	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$D(f) = [-1, 1], W(f) = [0, \pi]$
$\arctan$	...	$\frac{1}{1+x^2}$	$D(f) = (-\infty, \infty), W(f) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$\operatorname{arccot}$	...	$\frac{-1}{1+x^2}$	$D(f) = (-\infty, \infty), W(f) = (0, \pi)$
$\sinh$	$\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$	$\cosh$	...
$\cosh$	$\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$	$\sinh$	...
$\tanh$	...	$\frac{1}{\cosh^2} = 1 - \tanh^2$	...
$\coth$	...	$\frac{-1}{\sinh^2} = 1 - \coth^2$	...
$\operatorname{arsinh}$	...	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	...
$\operatorname{arcosh}$	...	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} (x > 1)$	...
$\operatorname{artanh}$	...	$\frac{1}{1-x^2} ( x  < 1)$	...
$\operatorname{arcoth}$	...	$\frac{1}{1-x^2} ( x  > 1)$	...

Table 1: Winkelfunktionen (GK = Gegenkathete, AK = Ankathete und H = Hypotenuse)