Es gilt zu zeigen:

$$||x - a|| < \delta \implies ||f(x) - f(a)|| < \epsilon$$

Wir zeigen dies für alle $\epsilon \in \mathbb{R}$ indem wir δ basierend auf ϵ konstruieren, sodass die zu zeigende Folgerung gilt.

Wir setzen nun $\delta := \epsilon + x$. Damit gilt also:

$$\begin{aligned}
& ||x - a|| < \delta && (1)\\
\implies & ||x - a|| < \epsilon + x && (2)\\
\implies & ||x - a|| - x < \epsilon && (3)\\
\implies & \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} - x < \epsilon && (4)\\
\implies & \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 - x} < \epsilon && (5)\\
& && (6)\\
\implies & ||x_1 - a_1 + x_2 - a_2|| < \epsilon && (7)\\
\implies & ||f(x) - f(a)|| < \epsilon && (8)
\end{aligned}$$