DHBW Mannheim
Informatik

Mannheim, 09.11.2022
Mathematik II/1

Lösungen zu Übungsblatt 4

Aufgabe 1. a) Wir betrachten eine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ und Elemente $a, b, c \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, die gegeben ist durch

$$h(t) = f(at + c, bt - c)$$

(in Abhängigkeit von den partiellen Ableitungen von f).

Lösung:

Wir nutzen parameterabhängige Differentiation mit $x = x(t) = at + c$ und $y = y(t) = bt - c$. Dann gilt

$$\frac{dx}{dt} = a, \qquad \frac{dy}{dt} = b$$

also

$$\begin{array}{rcl} \frac{df}{dt} & = & \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} \\ & = & a \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(at + c, bt - c) + b \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(at + c, bt - c) \end{array}$$

b) Bestimmen Sie das totale Differential der parameterabhängigen Funktion

$$z = f(x, y) = \sin(x \cdot y), \qquad x = x(u, v) = u \cdot v, \quad y = y(u, v) = u^2 + v^2$$

nach der Kettenregel.

Lösung:

Die Kettenregel besagt

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial z}{\partial u} & = & \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & = & \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \end{array}$$

Diese partiellen Ableitungen sind leicht zu berechnen:

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) & = & y \cdot \cos(x \cdot y) \\ \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) & = & x \cdot \cos(x \cdot y) \\ \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) & = & v \\ \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) & = & u \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) & = & 2u \\ \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) & = & 2v \end{array}$$

und damit gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial u}(u,v) &= y\cdot\cos(x\cdot y)\cdot v + x\cdot\cos(x\cdot y)\cdot 2u\\
&= (3u^2v+v^3)\cdot\cos(u^3v+uv^3)\\
\frac{\partial z}{\partial v}(u,v) &= y\cdot\cos(x\cdot y)\cdot u + x\cdot\cos(x\cdot y)\cdot 2v\\
&= (u^3+3uv^2)\cdot\cos(u^3v+uv^3)
\end{aligned}$$

Aufgabe 2. Berechnen Sie die Richtungsableitung der Funktion f gegeben durch

$$f(x,y) = e^{x+y}\cdot\sqrt{x^2+y^2+1} - x - 3y$$

in Richtung $\overrightarrow{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ im Punkt $(0,\,0)$.

$$f(x,y) = \cos(x+y)\cdot\sqrt{x^2+y^2+1} - x - 3y$$

in Richtung $\overrightarrow{v} = \frac{1}{\sqrt{13}}\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ im Punkt $(0,\,0)$.

Lösung:
Wir haben zu betrachten

$$f_{\overrightarrow{v}}(t) = f\left(0+\frac{t}{\sqrt{5}}, 0-\frac{2t}{\sqrt{5}}\right) = \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot t\right)\cdot\sqrt{t^2+1} - \frac{t}{\sqrt{5}} + \frac{6t}{\sqrt{5}}$$

Hierfür gilt

$$f'_{\overrightarrow{v}}(t) = -\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\exp\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot t\right)\cdot\sqrt{t^2+1} + \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot t\right)\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} + \frac{5}{\sqrt{5}}$$

Also erhalten wir als Richtungsableitung

$$f'_{\overrightarrow{v}}(0) = -\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die Tangentialebene an die Funktion, gegeben durch

$$f(x,y) = \ln\left(\frac{x^2+y^2+1}{x^4+y^4+1}\right) + \sin(\pi\cdot x\cdot y^2)$$

im Punkt $(-2,1)$.
Lösung:
Offensichtlich ist die Funktion $f(x,y)$ stetig partiell differenzierbar in $(-2,1)$ (nach Summen–, Produkt–, Quotienten– und Kettenregel). Zur Vereinfachung der Rechnung betrachten wir zunächst

$$g(x,y) = \frac{x^2+y^2+1}{x^4+y^4+1}$$

damit gilt

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) &= -\frac{2x^5+4x^3y^2-2xy^4+4x^3-2x}{(x^4+y^4+1)^2} \\
\tfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) &= -\frac{2y^5+4y^3x^2-2yx^4+4y^3-2y}{(x^4+y^4+1)^2}
\end{aligned}$$

also nach der Kettenregel

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= -\frac{1}{\frac{x^2+y^2+1}{x^4+y^4+1}} \cdot \frac{2x^5+4x^3y^2-2xy^4+4x^3-2x}{(x^4+y^4+1)^2} + \pi \cdot y^2 \cdot \cos(\pi \cdot x \cdot y^2) \\
&= -\frac{2x^5+4x^3y^2-2xy^4+4x^3-2x}{(x^2+y^2+1)\cdot(x^4+y^4+1)} + \pi \cdot y^2 \cdot \cos(\pi \cdot x \cdot y^2) \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -\frac{2y^5+4y^3x^2-2yx^4+4y^3-2y}{(x^2+y^2+1)\cdot(x^4+y^4+1)} + \pi \cdot 2xy \cdot \cos(\pi \cdot x \cdot y^2)
\end{aligned}$$

Alternativ (und vermutlich sogar einfacher) können wir ausnutzen, dass

$$\ln\left(\frac{x^2+y^2+1}{x^4+y^4+1}\right) = \ln(x^2+y^2+1) - \ln(x^4+y^4+1)$$

woraus dann relativ direkt folgt, dass

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{2x}{x^2+y^2+1} - \frac{4x^3}{x^4+y^4+1} + \pi \cdot y^2 \cdot \cos(\pi \cdot x \cdot y^2) \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{2y}{x^2+y^2+1} - \frac{4y^3}{x^4+y^4+1} + \pi \cdot 2xy \cdot \cos(\pi \cdot x \cdot y^2)
\end{aligned}$$

Mit beiden Rechnungen erhalten wir bei $(-2,1)$:

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial f}{\partial x}(-2,1) &= \tfrac{10}{9} + \pi \\
\tfrac{\partial f}{\partial y}(-2,1) &= \tfrac{1}{9} - 4\pi
\end{aligned}$$

Damit hat die Tangentialebene die Vektordarstellung

$$E : \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -\ln(3) \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{10}{9} + \pi \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{9} - 4\pi \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4. Bestimmen Sie die lineare Approximation an die Abbildung, gegeben durch

$$f(x,y) = \left(\frac{xy}{1+x^2+y^2}, \sqrt{x^2y^2+x^2+y^2+1}\right)$$

im Punkt $P = (3,1)$.

Lösung:
Offensichtlich ist $f(x,y)$ stetig partielle differenzierbar. Wir haben zunächst alle partiellen Ableitungen, also das totale Differential zu bestimmen:

$$D(f)(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{y\cdot(1-x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2} & \frac{x\cdot(1+x^2-y^2)}{(1+x^2+y^2)^2} \\ \frac{x\cdot(y^2+1)}{\sqrt{x^2y^2+x^2+y^2+1}} & \frac{y\cdot(x^2+1)}{\sqrt{x^2y^2+x^2+y^2+1}} \end{pmatrix}$$

also an der Stelle $(3,1)$:

$$D(f)(3,1) = \begin{pmatrix} -\frac{7}{121} & \frac{27}{121} \\ \frac{3\sqrt{5}}{5} & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

und damit ist die lineare Approximation an f bei $(3,1)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} L(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{3}{11} \\ \sqrt{20} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{7}{121} & \frac{27}{121} \\ \frac{3\sqrt{5}}{5} & \sqrt{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{27}{121} - \frac{7}{121}\cdot x + \frac{27}{121}\cdot y \\ -\frac{4\sqrt{5}}{5} + \frac{3\sqrt{5}}{5}\cdot x + \sqrt{5}\cdot y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 5. Bestimmen Sie das totale Differential der Abbildung $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x,y) = \left(\ln(\sqrt{x^2+y^2+2}),\ \frac{\ln(x^4+y^4+1)}{\sqrt{x^4+y^4+1}} \right)$$

Lösung:
Offensichtlich ist $f(x,y)$ stetig partielle differenzierbar. Zur Bestimmung des totalen Differentials haben wir alle partiellen Ableitungen zu ermitteln. Dazu wenden wir bei der ersten Komponente die Kettenregel zweimal an und bei der zweiten die Quotientenregel und die Kettenregel und erhalten:

$$D(f)(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2+2} & \frac{y}{x^2+y^2+2} \\ \frac{4x^3-2x^3\cdot\ln(x^4+y^4+1)}{\sqrt{x^4+y^4+1}^3} & \frac{4y^3-2y^3\cdot\ln(x^4+y^4+1)}{\sqrt{x^4+y^4+1}^3} \end{pmatrix}$$

Beachten Sie dabei, dass nach der Quotientenregel

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) &= \frac{\frac{4x^3}{x^4+y^4+1}\cdot\sqrt{x^4+y^4+1} - \ln(x^4+y^4+1)\cdot\frac{4x^3}{2\cdot\sqrt{x^4+y^4+1}}}{\sqrt{x^4+y^4+1}^2} \\ &= \frac{\frac{4x^3}{\sqrt{x^4+y^4+1}} - \ln(x^4+y^4+1)\cdot\frac{2x^3}{\sqrt{x^4+y^4+1}}}{\sqrt{x^4+y^4+1}^2} \\ &= \frac{4x^3-2x^3\cdot\ln(x^4+y^4+1)}{\sqrt{x^4+y^4+1}^3} \end{aligned}$$

(und entsprechend für die partielle Ableitung nach y).

Aufgabe 6. a) Wir betrachten eine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ und zwei Punkte $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, die gegeben ist durch

$$h(t) = f\left((t^2 + t) \cdot x_0, (t^3 + 1) \cdot y_0\right)$$

(in Abhängigkeit von den partiellen Ableitungen von f).

Lösung:

Wir können hier offensichtlich parameterabhängige Differentiation anwenden, und zwar mit

$$z = f(x, y), \qquad x = x(t) = (t^2 + t) \cdot x_0, \quad y = y(t) = (t^3 + 1) \cdot y_0$$

Damit gilt

$$\frac{dx}{dt} = (2t + 1) \cdot x_0, \qquad \frac{dy}{dt} = 3t^2 \cdot y_0$$

also

$$\begin{aligned} \tfrac{df}{dt} &= \tfrac{\partial f}{\partial x} \cdot \tfrac{dx}{dt} + \tfrac{\partial f}{\partial x} \cdot \tfrac{dx}{dt} \\ &= (2t+1) \cdot x_0 \cdot \tfrac{\partial f}{\partial x}\left((t^2 + t) \cdot x_0, (t^3 + 1) \cdot y_0\right) \\ &\quad +3t^2 \cdot y_0 \cdot \tfrac{\partial f}{\partial x}\left((t^2 + t) \cdot x_0, (t^3 + 1) \cdot y_0\right) \end{aligned}$$

b) Wir betrachten zwei stetig differenzierbare Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Bestimmen Sie das totale Differential der Funktion $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, die gegeben ist durch

$$h(x, y) = \sin(f(x, y) \cdot g(x, y)) \cdot \ln(f(x, y)^2 + g(x, y)^2 + 1)$$

(in Abhängigkeit von f und g und den partiellen Ableitungen von f und g).

Lösung:

Wir können hier offensichtlich parameterabhängige Differentiation anwenden, und zwar mit

$$z = \sin(uv) \cdot \ln(u^2 + v^2 + 1), \quad u = u(x, y) = f(x, y), \; v = v(x, y) = g(x, y)$$

(beachten Sie die etwas unüblichen Bezeichnungen; es ist aber das gleiche Prinzip).

Die Kettenregel besagt

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial z}{\partial x} &= \tfrac{\partial z}{\partial u} \cdot \tfrac{\partial u}{\partial x} + \tfrac{\partial z}{\partial v} \cdot \tfrac{\partial v}{\partial x} \\ \tfrac{\partial z}{\partial y} &= \tfrac{\partial z}{\partial u} \cdot \tfrac{\partial u}{\partial y} + \tfrac{\partial z}{\partial v} \cdot \tfrac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}$$

Diese partiellen Ableitungen sind leicht zu berechnen:

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial z}{\partial u}(u,v) &= v\cdot\cos(uv)\cdot\ln(u^2+v^2+1)+\sin(uv)\cdot\tfrac{2u}{u^2+v^2+1}\\
\tfrac{\partial z}{\partial v}(u,v) &= u\cdot\cos(uv)\cdot\ln(u^2+v^2+1)+\sin(uv)\cdot\tfrac{2v}{u^2+v^2+1}\\
\tfrac{\partial u}{\partial x}(x,v) &= \tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\\
\tfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= \tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\\
\tfrac{\partial v}{\partial x}(x.y) &= \tfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)\\
\tfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) &= \tfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial z}{\partial x}(x,y) &= g(x,y)\cdot\cos(f(x,y)\cdot g(x,y))\cdot\ln(f(x,y)^2+g(x,y)^2+1)\\
&\quad+\sin(f(x,y)\cdot g(x,y))\cdot\tfrac{2f(x,y)}{f(x,y)^2+g(x,y)^2+1}\cdot\tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\\
&\quad+f(x,y)\cdot\cos(f(x,y)\cdot g(x,y))\cdot\ln(f(x,y)^2+g(x,y)^2+1)\\
&\quad+\sin(f(x,y)\cdot g(x,y))\cdot\tfrac{2g(x,y)}{f(x,y)^2+g(x,y)^2+1}\cdot\tfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)\\
\tfrac{\partial z}{\partial y} &= g(x,y)\cdot\cos(f(x,y)\cdot g(x,y))\cdot\ln(f(x,y)^2+g(x,y)^2+1)\\
&\quad+\sin(f(x,y)\cdot g(x,y))\cdot\tfrac{2f(x,y)}{f(x,y)^2+g(x,y)^2+1}\cdot\tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\\
&\quad+f(x,y)\cdot\cos(f(x,y)\cdot g(x,y))\cdot\ln(f(x,y)^2+g(x,y)^2+1)\\
&\quad+\sin(f(x,y)\cdot g(x,y))\cdot\tfrac{2g(x,y)}{f(x,y)^2+g(x,y)^2+1}\cdot\tfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)
\end{aligned}$$