LEHRBUCH

Heinz-Dieter Ebbinghaus

Einführung in die Mengenlehre

5. Auflage

Springer Spektrum

Einführung in die Mengenlehre

Heinz-Dieter Ebbinghaus

Einführung in die Mengenlehre

5. Auflage

Springer Spektrum

Heinz-Dieter Ebbinghaus
Mathematisches Institut
Universität Freiburg
Freiburg im Breisgau, Deutschland

ISBN 978-3-662-63865-1 ISBN 978-3-662-63866-8 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-662-63866-8

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Planung/Lektorat: Andreas Rüdinger
Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Vorwort

Als mathematische Einzelwissenschaft verkörpert die Mengenlehre eine typische axiomatisch-deduktive Theorie: Über einem Fundament von Axiomen erhebt sich das Gebäude der beweisbaren Sätze. Unter einem anderen Aspekt kommt ihr jedoch eine Sonderstellung zu: Mit einem gewachsenen mengentheoretischen Verständnis der Mathematik haben ihre Begriffsbildungen und Redeweisen Eingang in die meisten mathematischen Betrachtungen gefunden. Dabei hat sich herausgestellt, dass sie für praktisch alle mathematischen Theorien ein begriffliches Gerüst zu liefern vermag. Diese Entwicklung offenbart eine große Tragweite des Mengenbegriffs und der mengentheoretischen Axiome; sie verlangt nach sorgfältiger und kritischer Prüfung, und das um so mehr, als die ersten Axiomensysteme tatsächlich widerspruchsvoll waren.

Einer Einführung in die Mengenlehre erwachsen daher mehrere Aufgaben: Sie sollte einen Einblick in die Theorie geben, und sie sollte versuchen, die zugrunde gelegten Axiome möglichst weitgehend zu rechtfertigen. Das vorliegende Buch nimmt sich beider Forderungen an. Im ersten Teil wendet es sich überwiegend dem Aufbau der Theorie zu; im zweiten Teil steht dann die Diskussion der Axiome im Vordergrund. Die räumliche Trennung ist nicht scharf, zeigt es sich doch, dass beide Aspekte mannigfach miteinander verwoben sind und sich gegenseitig bedingen und fördern.

Zur Formulierung der mengentheoretischen Axiome und der Abklärung ihrer Tragweite bedarf es einer klar umrissenen Sprache. Sie wird bereits früh eingeführt, um in der Arbeit am Stoff mit ihr vertraut zu werden, wird jedoch möglichst ungezwungen verwendet. Um die Intuition zu stärken, nehmen die Argumentationen stets Bezug auf ein gleichsam objektiv gegebenes „Universum“ von Mengen, das es zu beschreiben gilt.

Die Lektüre des Buches erfordert keine spezifischen mathematischen Kenntnisse. Insofern richtet es sich nicht nur an Studierende der Mathematik, sondern an alle, die an den Grundlagen der Mathematik interessiert sind und die Fähigkeit und Bereitschaft mitbringen, Gedankengänge mathematischer Prägung nachzuvollziehen.

Eine kurze Schilderung des Inhalts:

Das erste Kapitel führt in die Problematik, den Nutzen und die Tragweite der Mengenlehre ein. Es deutet die Leitgedanken an, denen die spätere Darstellung folgt.

Die Kapitel II bis V enthalten die Elemente der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre bis zu einem mengentheoretischen Aufbau der Zahlsysteme. Um diesem Teil eine gewisse Geschlossenheit zu geben, werden einige Sonderfälle der erst in Kapitel VII folgenden Rekursionstheoreme vorab bewiesen.

Die Kapitel VI bis IX stellen das Rüstzeug für einen tieferen Einstieg in die Mengenlehre bereit: Ordinalzahlen, Rekursionstheoreme, das Auswahlaxiom mit einigen Äquivalenten, unendliche Mächtigkeiten und Kardinalzahlarithmetik. Den Abschluss bildet eine ausführliche Behandlung der Cantorschen Kontinuumshypothese.

Die Kapitel X bis XII widmen sich der Diskussion der mengentheoretischen Axiome. Im Zentrum von Kapitel X steht die kumulativ-hierarchische Struktur des Mengenuniversums. Der Nachweis der Gleichwertigkeit des Zermelo-Fraenkelschen Axiomensystems mit einem auf dieser Struktur beruhenden Axiomensystem von Scott dient dazu, die inhaltliche Geschlossenheit der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre zu belegen. Kapitel XI beginnt mit einer Einführung in das Gebiet der Unabhängigkeitsbeweise. Die Behandlung der konstruktiblen Hierarchie Gödels – jetzt in geschlossener Form – erlaubt es, Beweise der relativen Widerspruchsfreiheit des Auswahlaxioms und der Cantorschen Kontinuumshypothese zu erbringen und damit die Diskussion des Zermelo-Fraenkelschen Axiomensystems in wesentlichen Punkten abzurunden. Die weiteren Ausführungen über die Tragweite mengentheoretischer Axiomatisierungen und über die Problematik des Mengenbegriffs orientieren sich im Licht der dargestellten Ergebnisse an den Leitgedanken des ersten Kapitels. Der Haupttext endet mit Kapitel XII in einer Gegenüberstellung der Zermelo-Fraenkelschen und der von Neumann-Bernays-Gödelschen Mengenlehre.

Das abschließende Kapitel XIII enthält Lösungshinweise für die Aufgaben. Die Hinweise sollen eine Hilfe sein, wenn man das Buch zur eigenständigen Erarbeitung des dargebotenen Stoffes nutzen möchte.

Ich danke Frau Heike Mildenberger für hilfreiche Hinweise und Herrn Andreas Rüdinger vom Springer-Verlag für die verständnisvolle Begleitung der vorliegenden Ausgabe.

Freiburg, im Mai 2021 Heinz-Dieter Ebbinghaus

Inhaltsverzeichnis

I

Einleitung

Erst wollen wir den Standort gehörig erwägen, auf dem jeder von uns hält, damit wir umso redlicher Licht und Wetter teilen können.[1]

Ziel dieses Kapitels ist es, den Einstieg in die Mengenlehre vorzubereiten, den dabei eingeschlagenen Weg zu motivieren und den Blick für die Tragweite unseres Unterfangens zu schärfen. Den Ausgangspunkt unserer Betrachtungen bildet der naive Mengenbegriff. Seine Analyse in §1 führt in Kapitel III zu den ersten Axiomen. Die folgenden Abschnitte setzen zunehmend auf ein bereits vorhandenes Vorverständnis. Da sie jedoch im technischen Sinn nicht Voraussetzung für die späteren Kapitel sind, kann ihre Lektüre an geeigneter Stelle – etwa in Befolgung entsprechender Verweise – nachgeholt werden.

§1 Der naive Mengenbegriff

Georg Cantor (1845–1918), der Schöpfer der Mengenlehre, eröffnet seine *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* (*Cantor 1895/97*), die den Schlussstein seiner mengentheoretischen Arbeiten bilden, mit der folgenden Definition:

> Unter einer „Menge“ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente“ von M genannt werden) zu einem Ganzen.

Es handelt sich hier nicht um eine Definition, wie man sie aus der heutigen Mathematik kennt. Dazu sind die Begriffe „Zusammenfassung“, „Objekt unserer Anschauung“, usf. zu unbestimmt. Wir wollen in ihr eine Beschreibung

[1] Die Zitate unter den Kapitelüberschriften entstammen den Theologischen Streitschriften Gotthold Ephraim Lessings.

H.-D. Ebbinghaus, *Einführung in die Mengenlehre*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-63866-8_1

sehen, von der wir uns anschaulich leiten lassen können. Einige Beispiele sollen uns auf den Weg bringen:

1.1 die Menge M_1 der ganzen Zahlen;

1.2 die Menge M_2 der reellen Zahlen;

1.3 die Menge M_3, die aus der Zahl 7 und aus der Zahl c der Primteiler von 510510 besteht.

In diesen Beispielen haben wir Dinge, nämlich Zahlen, zu einer Menge zusammengefasst, denen wir intuitiv die Eigenschaft absprechen, Mengen zu sein. Die Cantorsche Vorstellung schließt jedoch auch die Möglichkeit ein, *dass Mengen selbst wieder Elemente von Mengen sein können* wie im Beispiel

1.4 der Menge M_4, die aus der Menge M_2 und der Zahl 7 besteht.

Wir schreiben

$$x \in M,$$

wenn x Element der Menge M ist, und

$$x \notin M,$$

wenn x kein Element von M ist. So gilt z. B.

$$7 \in M_3,\ \ M_2 \in M_4,\ \ \pi \notin M_1.$$

In der Regel beschreibt man eine Menge, indem man ihre Elemente angibt. Das kann durch eine konkrete Aufzählung geschehen wie in 1.3 und 1.4, aber auch dadurch, dass man die Elemente durch eine gemeinsame *Eigenschaft* charakterisiert wie in 1.1 und 1.2. Man schreibt z. B.

$$M_3 = \{7, c\},$$

$$(*) \qquad M_1 = \{x \mid x \text{ ist ganze Zahl}\},$$

wobei in der Notierung für M_3 die Reihenfolge der Aufzählung keine Rolle spielt:

$$M_3 = \{c, 7\}.$$

Auch die Elemente von M_3 kann man durch eine Eigenschaft charakterisieren. Wir definieren dazu die Eigenschaft E_3 durch

$$E_3 \text{ treffe genau dann auf } x \text{ zu, wenn } x = 7 \text{ oder } x = c.$$

Dann ist $M_3 = \{x \mid E_3 \text{ trifft zu auf } x\}$. Ähnlich kann man bei jeder *endlichen* Menge, d. h. jeder Menge mit nur endlich vielen Elementen, verfahren. Die

Methode der konkreten Aufzählung der Elemente kann bei *unendlichen* Mengen Schwierigkeiten bereiten. Eine Aussage wie „Die Menge M der natürlichen Zahlen besteht aus 0, 1, 2, usf.“ liefert keine genaue Beschreibung von M, da die Bedeutung des „usf.“ letztlich nur suggestiv nahegelegt, nicht aber genau angegeben wird. Eine Bezeichnungsweise der Form

$$M = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

appelliert daher bereits an ein gemeinsames Vorverständnis. Für die Menge M_2 versagt, wie wir später sehen werden, eine „aufzählende“ Darstellung grundsätzlich.

In Übereinstimmung mit der Cantorschen Vorstellung haben wir die Beispielmengen M_1 und M_2 dadurch gewonnen, dass wir jeweils eine geeignete Eigenschaft vorgegeben und die Dinge, die diese Eigenschaft besitzen, zusammengefasst haben. Einen solchen Übergang von einer Eigenschaft E zur Menge

$$\{x \mid E \text{ trifft zu auf } x\}$$

durch Zusammenfassung nennt man eine *Komprehension*. Komprehensionen erscheinen als sehr natürliche Mengenbildungsprozesse, und bislang spricht nichts gegen die Ansicht, dass sie für alle Eigenschaften durchführbar sein müssten. Zu welch ernsthaften Schwierigkeiten sie dennoch in der Mengenlehre geführt haben, werden wir in §3 diskutieren.

Für die folgenden Betrachtungen wollen wir verraten, dass $c = 7$ ist. Ist dann auch

$$(**) \qquad \{7, c\} = \{7\}?$$

Die Antwort hängt von dem Aspekt ab, unter dem wir Mengen betrachten wollen. Wenn wir die Vorstellung haben, dass Mengen allein durch ihre Elemente, sozusagen durch ihren *Umfang*, bestimmt seien, wenn wir sie also nur unter *quantitativen* Gesichtspunkten betrachten, müssen wir die Frage bejahen (sog. *extensionale* Auffassung). Wenn wir dagegen der Meinung sind, dass z. B. die besondere Bedeutung von c die linke Menge in (∗∗) von der rechten abhebt, müssen wir die Frage verneinen (*intensionale* Auffassung).

Mengenlehre und Mathematik schließen sich heute durchweg der extensionalen Auffassung an. Also: *Zwei Mengen, welche die gleichen Elemente enthalten, sind gleich* (sog. *Extensionalitätsaxiom*). Anschaulicher gesagt: Eine Menge M ist nichts weiter als die Zusammenfassung ihrer Elemente; deren „Persönlichkeit“ zählt nicht, „Dabeisein“ ist alles.

Einige weitere Beispiele mögen den extensionalen Standpunkt noch deutlicher werden lassen:

$$\text{(i)} \qquad \{1, 2, 1\} = \left\{\frac{4}{2}, \frac{3}{3}\right\}.$$

(ii) Sind E und E' Eigenschaften, die auf die gleichen Dinge zutreffen, so ist

$$\{x \mid E \text{ trifft zu auf } x\} = \{x \mid E' \text{ trifft zu auf } x\},$$

etwa

$$M_1 = \{x \mid x \text{ ist Differenz zweier natürlicher Zahlen}\}$$

oder, ein wenig origineller:

$$M_1 = \{x \mid x \in M_1\}.$$

(iii) Die Menge

$$L = \{x \mid x \in M_1 \text{ und } x \neq x\}$$

enthält kein Element; sie ist *leer*. Ist L' eine weitere leere Menge, etwa

$$L' = \{x \mid x \in M_2 \text{ und } x^2 < 0\},$$

so enthalten L und L' die gleichen Elemente, nämlich keine, sind also gleich. *Es gibt demnach* (bei extensionaler Auffassung) *genau eine leere Menge*, die man üblicherweise mit „$\emptyset$“ bezeichnet.

Die Umkehrung des Extensionalitätsaxioms, die Aussage nämlich, dass gleiche Mengen auch die gleichen Elemente enthalten, ergibt sich unmittelbar aus unserem Verständnis der Gleichheit und bedarf keiner Festlegung.

Mit den vorangehenden Betrachtungen haben wir einen Weg beschritten, auf dem wir später weiter in die Mengenlehre eindringen werden: Statt uns zu bemühen, eine möglichst präzise Definition des Mengenbegriffs zu geben, werden wir versuchen, die Mengenvorstellung, die wir exemplarisch gewonnen haben, zu analysieren. Wir gelangen so zu Forderungen wie dem Extensionalitätsaxiom, also zu *Axiomen* der Mengenlehre, aus denen wir z. B. alle mengentheoretischen Sachverhalte ableiten können, welche die Mathematik benötigt. Was ein solches Vorgehen für die Klärung des Mengenbegriffs zu leisten vermag, werden wir in §4 und, weit ausführlicher, in Kapitel XI diskutieren.

§2 Die Bedeutung der Mengenlehre für die Mathematik

Die heutige Mathematik erfährt eine wesentliche Prägung durch den Gebrauch mengentheoretischer Sprechweisen. Wir wollen die Bedeutung der Mengenlehre für die Mathematik unter drei Gesichtspunkten diskutieren: hinsichtlich der *Begriffsbildungen*, hinsichtlich des *axiomatisch-deduktiven Charakters der Mathematik* und hinsichtlich der *mathematischen Grundlagenforschung*.

2.1. In welchem Maße mengentheoretische Hilfsmittel bei der Definition mathematischer Begriffe herangezogen werden, sei an den folgenden Beispielen dargelegt:

(i) Ein *topologischer Raum* wird definiert als ein geordnetes Paar $(T, \mathcal{O})$, dessen erste Komponente T eine *Menge* ist und dessen zweite Komponente $\mathcal{O}$ eine *Menge von Teilmengen* von T ist, die gewissen *mengentheoretisch beschreibbaren* Bedingungen genügt. Hierbei heißt die Menge M eine *Teilmenge* der Menge M', wenn jedes Element von M auch Element von M' ist. So ist die Menge M_1 (aus §1) eine Teilmenge von M_2 und die leere Menge $\emptyset$ Teilmenge einer jeden Menge. – Zu Beispielen mengentheoretischer Beschreibungen vgl. IV. 1.

(ii) Eine Möglichkeit, den Begriff der *reellen Zahl* auf den Begriff der *rationalen Zahl* zurückzuführen, besteht darin, reelle Zahlen zu definieren als bestimmten Bedingungen genügende *Mengen* von rationalen Zahlen (als sog. *Unterklassen Dedekindscher Schnitte* in der Menge der rationalen Zahlen). Die übliche Anordnung der reellen Zahlen kann man dann durch die Teilmengenbeziehung definieren: Für so eingeführte reelle Zahlen ρ_0 und ρ_1 gelte $\rho_0 \leq \rho_1$ genau dann, wenn ρ_0 *Teilmenge* von ρ_1 ist. In ähnlicher Weise kann weiter der Begriff der rationalen Zahl über den Begriff der ganzen Zahl auf den Begriff der natürlichen Zahl zurückgeführt werden; vgl. V. 4.

Was aber sind natürliche Zahlen?

Die heute in der Mathematik durchweg befolgte *axiomatisch-deduktive Methode* gestattet es, dieser Frage auszuweichen. Man nutzt aus, dass die intuitiv vertrauten natürlichen Zahlen eine Struktur tragen, die den Bedingungen des sog. *Peanoschen Axiomensystems* genügt (vgl. V. 1), und aus diesem System lassen sich alle Aussagen über natürliche Zahlen deduzieren, die in der Mathematik benötigt werden. Eine zusätzliche inhaltliche Rechtfertigung erfährt dieses Vorgehen durch ein Resultat Dedekinds, dem zufolge je zwei Strukturen, die den Bedingungen des Peanoschen Axiomensystems genügen, *isomorph* sind und daher die gleichen für die Mathematik bedeutsamen Eigenschaften haben. Wir werden in V. 2 ein *mengentheoretisches Modell* des Peanoschen Axiomensystems angeben. Vom mathematischen Standpunkt aus spricht nichts dagegen, die Elemente dieses mengentheoretischen Modells als natürliche Zahlen anzusehen. Damit ist dann auch der Begriff der natürlichen Zahl mengentheoretisch definiert.

2.2. Wir haben bereits den axiomatisch-deduktiven Charakter der heutigen Mathematik betont: Sie legt dem Aufbau einer Theorie, z. B. der Analysis, der Topologie oder der Gruppentheorie, stets ein Axiomensystem zugrunde. Die aus einem solchen Axiomensystem deduzierbaren Sätze machen dann die betreffende Theorie aus. Weil aber die notwendigen *mengentheoretischen* Überlegungen in der Regel *intuitiv* durchgeführt werden, klafft im axiomatischen

Aufbau der mathematischen Theorien eine Lücke. Durch eine axiomatische Mengenlehre wird diese Lücke geschlossen. So wird es möglich, z. B. das Axiomensystem der Topologie um ein (ausreichend starkes) mengentheoretisches Axiomensystem zu erweitern und dann allein durch Deduktionen aus diesem mengentheoretisch-topologischen Axiomensystem und ohne stillschweigende Verwendung weiterer Sachverhalte die Topologie aufzubauen. Neben dem rein formalen Aspekt kommt diesem Vorgehen noch eine weitere Bedeutung zu. In gewissen Fällen kann man nämlich jetzt präzise beweisen, dass die Beantwortung noch offener mathematischer Fragestellungen auf der Basis der gewählten Mengenlehreaxiome nicht möglich ist. Auf Einzelheiten werden wir in Kapitel XI zurückkommen, wenn die begrifflichen Hilfsmittel für eine eingehendere Diskussion bereitstehen.

2.3. Die vorangehenden Überlegungen deuten an, und die Detailarbeit in den nächsten Kapiteln wird überzeugender darlegen, dass eine Darstellung der Mathematik und ihrer Grundbegriffe allein mit mengentheoretischen Hilfsmitteln möglich ist. Bei einem solchen Vorgehen wird die Mengenlehre zu derjenigen Disziplin, die den Boden bereitet, auf dem die Mathematik aufbaut. Gleichzeitig wird es möglich, Grundlagenfragen der Mathematik auf eine Analyse des Mengenbegriffs abzuwälzen. Man schafft also mit der Mengenlehre einen gemeinsamen, einheitlichen Rahmen, um solche Fragen zu diskutieren. Trotz dieser Verdienste ist jedoch vor übertriebenem Optimismus zu warnen, der sich in der Vorstellung manifestiert, nun gelte es *nur* noch, den Mengenbegriff befriedigend zu klären, dann seien alle Grundlagenprobleme gelöst. Solcher Glaube ähnelt dem eines Schuldners, der dem Werben eines Umschuldungsunternehmens erliegt, weil er meint, seine Schulden besser begleichen zu können, wenn er sich nur *einem* Gläubiger gegenübersehe. Die Schwierigkeiten, die bei der Entwicklung der Mengenlehre zutage getreten sind (vgl. §3) und die zum Teil noch heute anstehen (vgl. Kapitel XI), zeigen deutlich, wie unvollständig unsere Vorstellung vom Mengenbegriff noch immer ist und wie weit wir davon entfernt sind, auf dem Weg über die Mengenlehre zu einer sicheren Grundlegung der Mathematik zu kommen.

Gerade diese Schwierigkeiten waren Anlass, andere Wege einzuschlagen. Erwähnt sei hier der *Intuitionismus* (vgl. XI. 4), der in weitgehender Abkehr von der Mengenlehre und unter Abschwächung der klassischen Logik nur noch gewisse Teile der Mathematik zu rechtfertigen versucht. Doch so wichtig solche Alternativen aus grundlagentheoretischer Sicht auch sein mögen – für die Mathematik insgesamt sind sie von geringer Bedeutung. Die Tatsache, dass die Mathematik in ihrer heutigen Gestalt nicht ohne den Mengenbegriff gedacht werden kann und dass die mengentheoretische Auffassung fruchtbarste Impulse gegeben hat, liefert eine pragmatische Rechtfertigung für die Mengenlehre und Anlass genug, sich mit dem Mengenbegriff ernsthaft auseinanderzusetzen.

§3 Ein geschichtlicher Rückblick

Wir wollen in diesem Abschnitt einen kurzen Blick in die Geschichte der Mengenlehre werfen, um so einige Wesenszüge der heutigen Mengenlehresysteme besser verstehen zu können. Am Beispiel der *Russellschen Antinomie* wollen wir sehen, wie ein allzu „liberaler“ Gebrauch von Komprehensionen zu Widersprüchen führt, und wir wollen Ansätze schildern, solche Widersprüche zu vermeiden: die *Russellsche Typentheorie*, die *Zermelosche Mengenlehre* und die *von Neumann-Bernays-Gödelsche Klassen-Mengen-Lehre.*

Erste klare Vorstellungen über den Mengenbegriff finden sich bei Bernard Bolzano (1781–1848), dem bedeutenden Theologen, Philosophen und Mathematiker (1847, posthum veröffentlicht in *1851*). In seiner Definition einer Menge („Vielheit“) als einem „Inbegriff, den wir einem Begriff unterstellen, bei dem die Anordnung seiner Teile gleichgültig ist“, erkennen wir einen Vorläufer unserer heutigen extensionalen Auffassung, der zufolge ja eine Menge allein durch ihre Elemente bestimmt ist. Bolzanos Auffassung schließt auch die Existenz *unendlicher* Mengen ein – trotz ihrer zunächst paradox erscheinenden Eigenschaft, zu einer echten Teilmenge gleichmächtig sein zu können, einer Eigenschaft, die später Richard Dedekind (1831–1916) zur Grundlage seiner Endlichkeitsdefinition macht. Dedekind verfolgt konsequent das Ziel, mathematische Objekte auf den Mengenbegriff zurückzuführen, weil er glaubt, sie dadurch auf eine sichere Grundlage zu stellen. So schlägt er 1871 vor, die sog. *idealen Zahlen* der Algebra, seiner Meinung nach lediglich „fingierte“ Gebilde, durch die uns heute vertrauten *Ideale* zu ersetzen, also durch Mengen „wirklicher“ Zahlen, die hinsichtlich ihrer Existenz keinem Zweifel unterliegen. Im Jahre 1872 veröffentlicht er die rund 14 Jahre zuvor verfasste Schrift „*Stetigkeit und irrationale Zahlen*“ (*1872*), in der die reellen Zahlen, wie schon in §2 angedeutet, durch Dedekindsche Schnitte mengentheoretisch auf die rationalen Zahlen zurückgeführt werden. Der Zurückführungsprozess findet seinen Abschluss in der Abhandlung „*Was sind und was sollen die Zahlen?*“ (*1888*), in der schließlich ein mengentheoretisches Modell für die natürlichen Zahlen angegeben wird. Mit der letztgenannten Schrift hat Dedekind einen großen Einfluss auf die Entwicklung der Mengenlehre ausgeübt. So haben viele seiner Vorstellungen über Zermelo Eingang in die noch heute üblichen Axiomensysteme der Mengenlehre gefunden.

Trotz der Leistungen anderer, die wir am Beispiel Bolzanos und Dedekinds geschildert haben, gilt Georg Cantor zu Recht als der eigentliche Begründer der Mengenlehre. Die Neuartigkeit seiner Konzeptionen ließ alte Vorstellungen zusammenbrechen und öffnete Wege zu weitreichenden Entwicklungen.

Hierzu einige Beispiele.

Am 7. 12. 1873 bewies Cantor, dass die Menge der reellen Zahlen *überabzählbar* ist, d. h. nicht in der Form $\{r_0, r_1, \ldots\}$ geschrieben werden kann. Dieses erste im eigentlichen Sinn mengentheoretische Resultat wurde zum Ausgangspunkt einer Theorie der unendlichen Mächtigkeiten und der Tag seiner Entdeckung zum Geburtstag der Mengenlehre. 1878 zeigte Cantor dann, dass die reelle Gerade bijektiv auf die reelle Ebene und den reellen Raum abgebildet werden kann – ein Ergebnis, das eine grundlegende Revision des Dimensionsbegriffs erforderlich machte. 1879 führten ihn Überlegungen im Zusammenhang mit dem Identitätssatz für trigonometrische Reihen zur Konzeption des *Ordinalzahlbegriffs* und damit zur Grundlegung *transfiniter* Methoden, die heute weite Bereiche z. B. der Algebra oder der Topologie prägen.

Cantors Mengenbegriff wurzelt in anschaulichen Vorstellungen. Seine Beschreibung einer Menge als einer Zusammenfassung von bestimmten Objekten zu einem Ganzen haben wir bereits kennengelernt. Sie scheint ein weitreichendes *Komprehensionsprinzip* zu rechtfertigen: *Zu jeder Eigenschaft E existiert die Menge*

$$M_E = \{x \mid E \text{ trifft zu auf } x\}.$$

Wir sind bereits Komprehensionen begegnet, so bei der Menge der ganzen Zahlen (vgl. $(*)$ in Abschnitt 1) und bei der Menge der reellen Zahlen. Sie erscheinen „harmlos“, weil sie sich im „überschaubaren“ Bereich der Zahlen abspielen. Seien wir kühner und wählen als E die Eigenschaft, eine Menge zu sein. Komprehension liefert die Menge

$$V = \{x \mid x \text{ ist Menge}\},$$

also die *Menge aller Mengen.* Offensichtlich ist

(1) $$V \in V.$$

Wir haben damit *in Befolgung einleuchtender Prinzipien* ein Ergebnis gewonnen, das sich nicht in unsere Mengenvorstellung einordnen lässt: Wir haben eine Menge gefunden, *die sich selbst als Element enthält.*

Mit dieser Betrachtung sind wir der Geschichte bereits ein Stück vorausgeeilt. Gottlob Frege (1848–1925), einer der Begründer der mathematischen Logik, hatte im ersten Band seiner *Grundgesetze der Arithmetik* (*1893*) Teilen der Cantorschen Mengenlehre eine axiomatische Gestalt gegeben. Sein Ziel war es, die Mathematik logisch-mengentheoretisch zu begründen. Zu seinen Axiomen gehört auch das oben angeführte Komprehensionsprinzip. Etwa 1901 leiteten unabhängig voneinander Bertrand Russell (1872–1970) und Ernst Zermelo (1871–1953) im Fregeschen System einen Widerspruch ab, die sog. *Russellsche* (oder *Zermelo-Russellsche*) *Antinomie.* Wir erhalten sie, wenn wir auf die „Russellsche Eigenschaft“ R, die durch

(2) R trifft zu auf x genau dann, wenn x eine Menge ist mit $x \notin x$

gegeben wird, das Komprehensionsprinzip anwenden. Es liefert die „Russellsche Menge“

$$M_R = \{x \mid x \text{ ist Menge und } x \notin x\}.$$

Mit dieser können wir nun folgendermaßen schließen: Ist $M_R \in M_R$, so nach Definition von M_R auch $M_R \notin M_R$. Gilt umgekehrt $M_R \notin M_R$, liefert die Definition von M_R

(3) $$M_R \text{ ist keine Menge oder } M_R \in M_R,$$

also, da M_R eine Menge ist, $M_R \in M_R$. Insgesamt ergibt sich

(4) $$M_R \in M_R \text{ genau dann, wenn } M_R \notin M_R.$$

Wir haben einen Widerspruch erhalten! [2]

Cantor schien von dieser Entwicklung nicht beunruhigt zu sein. Er selbst hatte schon 1897 und 1899 in Briefen von ähnlich zustande gekommenen Antinomien berichtet, ohne sich erschreckt zu zeigen. Grund dafür war seine letztlich in theologischen Vorstellungen wurzelnde Überzeugung, dass man unterscheiden müsse zwischen unendlichen Mengen (wie der Menge der ganzen Zahlen), die man als Einheit, als fertiges Ding denken könne, und „absolut unendlichen“ oder „inkonsistenten Vielheiten“ (wie V oder M_R), die der beschränkte menschliche Geist nicht zu einem neuen Objekt zusammenfassen könne. Reiches Quellenmaterial hierzu findet sich in *Purkert und Ilgauds 1987*.

Für viele aber führte die Entdeckung der Russellschen Antinomie in eine Periode der Unsicherheit (*„Grundlagenkrise“* nach *Weyl 1921*), war doch nicht auszuschließen, dass auch an anderen Stellen scheinbar plausible mathematische Überlegungen zu Widersprüchen führen könnten. Die Vorschläge zur Überwindung der Krise waren von unterschiedlicher Art. In der Einsicht, dass die Widersprüche einem allzu sorglosen Umgang mit unendlichen Mengen erwüchsen, forderten einige den Verzicht auf alle infinitär-abstrakten Überlegungen. Zu einem Exponenten dieser Richtung wurde Luitzen E. J. Brouwer (1881–1966) mit dem von ihm begründeten und bereits oben erwähnten Intuitionismus. Jene, die stärker der herkömmlichen Mathematik verhaftet waren, versuchten, durch eine Beschränkung des Komprehensionsprinzips *und damit auch durch eine inhaltliche Revision des Mengenbegriffs* die Russellsche Antinomie (und andere bekannt gewordene Antinomien) auszuschließen und dabei möglichst viel von dem, was sich bewährt hatte, beizubehalten. Wir stellen im Folgenden drei solcher Ansätze vor.

---

[2] Wie man leicht sieht, ist die Form (4) der Russellschen Antinomie gleichwertig mit der Form (4') $M_R \in M_R$ und $M_R \notin M_R$.

Die *Russellsche Typentheorie* (*Whitehead und Russell 1910ff*). Wir schildern sie am Sonderfall der *unverzweigten Typentheorie.* Ihr liegt die Vorstellung zugrunde, dass eine Menge ein „höheres“ Objekt sei als die Elemente, die sie bilden. Die unterste Stufe der Hierarchie der mathematischen Objekte besteht aus Dingen wie Zahlen oder Punkten, denen wir intuitiv die Eigenschaft absprechen, eine Menge zu sein. Man nennt sie, Zermelo folgend, oft *Urelemente.* Wir wollen sie in diesem Zusammenhang auch als *Mengen nullter Stufe* bezeichnen. Über den Urelementen liegen als *Mengen erster Stufe* die Mengen von Urelementen, darüber dann als *Mengen zweiter Stufe* die Mengen von Mengen erster Stufe, usf. Die Mengen aller Stufen bilden zusammen das *Mengenuniversum.* Komprehensionen sind nur für Mengen einer festen Stufe möglich. Dabei entsteht dann eine Menge der nächst höheren Stufe. Beispielsweise können wir für $n = 0, 1, 2, \ldots$ die Mengen

$$V^{(n)} \;=\; \{x \mid x \text{ ist Menge } n\text{-ter Stufe}\}$$

und

$$M_R^{(n)} \;=\; \{x \mid x \text{ ist Menge } n\text{-ter Stufe und } x \notin x\}$$

$(n+1)$-ter Stufe bilden. Für $V^{(n)}$, die „Allmenge zur Stufe n“, gilt anstelle des Analogons von (1) jetzt

$$V^{(n)} \notin V^{(n)},$$

da $V^{(n)}$ keine Menge n-ter Stufe ist. Auch die Russellsche Antinomie kann – wenigstens ad hoc – nicht mehr nachvollzogen werden: Für die „Russellschen Mengen“ $M_R^{(n)}$ gilt zunächst wie für die $V^{(n)}$, dass $M_R^{(n)} \notin M_R^{(n)}$. Wenn wir jetzt aber versuchen, von $M_R^{(n)} \notin M_R^{(n)}$ auf $M_R^{(n)} \in M_R^{(n)}$ zu schließen, gelangen wir zwar noch zum Analogon von (3), nämlich zu

$$M_R^{(n)} \text{ ist keine Menge } n\text{-ter Stufe oder } M_R^{(n)} \in M_R^{(n)};$$

da aber bereits das linke Glied dieser oder-Aussage gilt, können wir nicht mehr folgern, dass $M_R^{(n)} \in M_R^{(n)}$ sein muss.

Die *Zermelosche Mengenlehre.* Es war Ernst Zermelo, der auf der Grundlage einer *typenfreien* Mengenvorstellung in *Zermelo 1908b* das erste brauchbare Axiomensystem der Mengenlehre vorstellte. Seine Vorgehensweise können wir klar den einleitenden Bemerkungen entnehmen: Angesichts der Russellschen Antinomie, so schreibt er, „bleibt nichts anderes übrig, als, [...] ausgehend von der historisch bestehenden ‚Mengenlehre‘, die Prinzipien aufzusuchen, welche zur Begründung dieser mathematischen Disziplin erforderlich sind. Diese Aufgabe muß in der Weise gelöst werden, daß man die Prinzipien einmal eng genug einschränkt, um alle Widersprüche auszuschließen, gleichzeitig aber auch weit genug ausdehnt, um alles Wertvolle dieser Lehre beizubehalten.“

Zermelo schwächt das Komprehensionsprinzip zum sog. *Aussonderungsprinzip* ab; Komprehensionen können nicht mehr grenzenlos, sondern *nur im Rahmen einer bereits vorgegebenen Menge* durchgeführt werden: *Zu jeder Eigenschaft E und jeder Menge x existiert die Menge*

$$y_{E,x} = \{z \mid z \in x \text{ und } E \text{ trifft zu auf } z\}.$$

Wir werden in III. 1 sehen, dass auch die Zermelosche Form der Komprehension es – zumindest ad hoc – nicht mehr erlaubt, die Russellsche Antinomie nachzuvollziehen.

Genauer betrachtet unterliegt das Aussonderungsprinzip einer weiteren Einschränkung, weil nur *gewisse* Eigenschaften für die Aussonderung herangezogen werden können. Zermelo nannte sie *definit*, ohne allerdings diesen Begriff zu präzisieren. Dies tat erst Thoralf Skolem (1887–1963) im Jahr 1922. Im gleichen Jahr erweiterten Adolf (Abraham) Fraenkel (1891–1965) und Skolem das Zermelosche Axiomensystem, um eine von ihnen erkannte Lücke zu schließen. Es entstand das **Z***ermelo*-**F***raenkelsche Axiomensystem* (*mit Auswahlaxiom, Axiom of* **C***hoice*), **ZFC**, das auch wir unseren Betrachtungen zugrunde legen werden.

Klassen-Mengen-Lehren. Ein dritter Vorschlag, die Russellsche Antinomie zu vermeiden, geht auf Paul Bernays (1888–1977; 1937ff.) und Kurt Gödel (1906–1978; 1940), sowie auf Vorarbeiten von John von Neumann (1903–1957; 1923ff.) zurück. Ihm liegt die Absicht zugrunde, das intuitiv so einsichtige Komprehensionsprinzip nicht zu beschränken. Wenn man sich klarmacht, dass nicht die *Bildung* der Russellschen Menge M_R gefährlich ist, sondern der Umstand, dass man M_R als *Element* betrachtet, z. B. als Element von sich selbst, liegt es nahe, die Mengen einzuteilen in solche, die Elemente sein dürfen, und solche, die das *nicht* sein dürfen, z. B. weil sie „zu groß“ sind. Hier liegt der Ansatz für das von **N**eumann-**B**ernays-**G**ödelsche System **NBG**. Die Objekte der Theorie heißen jetzt nicht mehr Mengen, sondern *Klassen.* Klassen, denen das Elementsein erlaubt ist, heißen *Mengen.* Jede Menge ist also eine Klasse, und jedes Element einer Klasse ist eine Menge. Klassen, denen das Elementsein nicht erlaubt ist, heißen *echte Klassen.* Bei Komprehensionen können jetzt natürlich nur Mengen zu einer Klasse zusammengefasst werden. Das Komprehensionsprinzip lautet demnach: *Zu jeder Eigenschaft E* (die, ähnlich wie beim Aussonderungsprinzip, gewissen Beschränkungen unterliegt) *existiert die Klasse*

$$K_E = \{x \mid x \text{ ist Menge und } E \text{ trifft zu auf } x\}.$$

Wählen wir als E z. B. die Eigenschaft, mit sich selbst identisch zu sein, gelangen wir durch Komprehension zur *Allklasse*

$$V = \{x \mid x \text{ ist Menge}\},$$

d. h. zur *Klasse aller Mengen*. Das Analogon von (1), also $V \in V$, können wir nicht mehr unmittelbar erschließen, da wir nicht wissen, ob V eine Menge ist. Wenn wir verlangen, dass keine Menge sich selbst als Element enthalten darf, können wir sogar folgern, dass V keine Menge sein kann, also eine echte Klasse ist. Auf eine ähnliche Weise können wir der Russellschen Antinomie „entkommen“: Komprehension mit der „Russellschen Eigenschaft“ R aus (2) liefert die „Russellsche Klasse“

$$K_R = \{x \mid x \text{ ist Menge und } x \notin x\}.$$

Ähnlich wie oben auf Seite 9 erhalten wir mit $K_R \in K_R$ noch $K_R \notin K_R$ und mit $K_R \notin K_R$ als Analogon von (3) noch

$$K_R \text{ ist keine Menge oder } K_R \in K_R,$$

doch da die Annahme, es gälte $K_R \in K_R$, zu einem Widerspruch, eben der Russellschen Antinomie, führen würde, können wir jetzt schließen, dass K_R keine Menge sein kann. Dadurch haben wir nicht nur die Antinomie vermieden, wir haben auch die Information erhalten, dass K_R eine echte Klasse ist.

An dieser Stelle ist eine Warnung angebracht, die gleichermaßen für **NBG**, für **ZFC** und für die Russellsche Typenhierarchie gilt. Die Tatsache, dass man in all diesen Systemen die Ableitung der Russellschen Antinomie nicht mehr unmittelbar nachvollziehen kann, schließt nicht aus, *dass dieser Widerspruch auf einem anderen Wege doch noch gewonnen werden könnte*. Zum Problem der *Widerspruchsfreiheit*, das hiermit zusammenhängt, sei auf die Ausführungen in §4 verwiesen.

Von den Axiomensystemen der Mengenlehre haben heute die Systeme **ZFC** und **NBG** die größte Bedeutung. Die Frage, welches der Systeme vorzuziehen sei, ist im Grunde irrelevant. Man kann nämlich zeigen, *dass in beiden Systemen die gleichen Sätze über Mengen herleitbar sind*. **ZFC** spielt bei der Behandlung rein mengentheoretischer Fragestellungen eine beherrschende Rolle. Umgekehrt mag sich die **NBG**-Mengenlehre eher als Gebrauchsmengenlehre für die Mathematik anbieten, erlaubt sie es doch, über Begriffsbildungen wie die (echte) Klasse aller Gruppen unmittelbarer zu sprechen.

Wir werden unseren Betrachtungen das System **ZFC** zugrunde legen, dabei aber die Formulierungsvorteile der **NBG**-Mengenlehre weitgehend zu erhalten suchen. In Kapitel XII geben wir die Axiome von **NBG** explizit an und beweisen, so weit das in unserem Rahmen möglich ist, die Gleichwertigkeit von **NBG** und **ZFC** für Aussagen über Mengen.

§4 Zur Tragweite mengentheoretischer Axiomensysteme

Der geschichtliche Rückblick in §3 hat erkennen lassen, dass bei der Aufstellung mengentheoretischer Axiomensysteme spezifische Schwierigkeiten zutage getreten sind. Wenn man den Weg, der von Cantor über Frege und Russell z. B. zu Zermelo oder zu Bernays und Gödel führt, genauer verfolgt, erkennt man ein gewisses Entwicklungsprinzip, das seine Existenz wesentlich diesen Schwierigkeiten verdankt: Frege hatte die Cantorsche Vorstellung in ein weitgehend axiomatisches Gewand gekleidet. Die Antinomie, die Russell und Zermelo im Fregeschen System ableiten konnten, lehrte jedoch, dass die zugrunde liegende Mengenvorstellung korrigiert werden musste. Im Bewusstsein dieser Tatsache versuchte man anschließend, zu einer intuitiv einsichtigen Korrektur zu gelangen, um daraufhin neue, bessere Axiomensysteme aufzustellen. So führten in einem Prozess gegenseitiger Einwirkung inhaltliche Analysen des Mengenbegriffs zur Aufstellung von Axiomensystemen, und umgekehrt gaben Konsequenzen aus diesen Systemen Anlass zu einer Revision der Mengenvorstellung und damit wieder den Anstoß zur Aufstellung neuer Axiome. Die Betrachtungen in diesem Buch, insbesondere in den Kapiteln X bis XII, werden, so hoffen wir, dieses Wechselspiel noch deutlicher erkennen lassen als die kurzen Ausführungen in §3 das vermochten.

Zum Abschluss der Einleitung wollen wir die Frage nach der Tragweite mengentheoretischer Axiomensysteme aufwerfen. Zwar müssen wir eine eingehende Antwort bis Kapitel XI zurückstellen, doch kann eine kurze Diskussion zu diesem Zeitpunkt vielleicht schon jetzt darlegen, was wir vom Aufbau einer axiomatischen Mengenlehre grundsätzlich erwarten und was wir nicht erwarten dürfen.

Nehmen wir an, wir seien auf dem oben geschilderten Weg schließlich zu einem Axiomensystem der Mengenlehre, etwa **ZFC**, gelangt. Dann drängt sich eine zunächst sehr ungenaue Frage auf:

Ist **ZFC** *gut*?

Wir wollen diese Frage unter verschiedenen Gesichtspunkten präzisieren.

Pragmatisch: Reicht **ZFC** *für die Mathematik aus?*

Alle Erfahrungen sprechen für eine weitgehend positive Antwort. Die Ausführungen in den nächsten Kapiteln werden eine Reihe exemplarischer Belege erbringen. Über Einschränkungen, die auch konkrete mathematische Probleme betreffen und die zum Teil von prinzipieller Art sind, sprechen wir im Zusammenhang mit der „ehrgeizigen“ Frage weiter unten.

Inhaltlich: Beschreibt **ZFC** *unsere Mengenvorstellung adäquat?*

Für eine Beantwortung dieser Frage gibt es natürlich keine objektiven Belege. Doch stellen vielleicht die Betrachtungen, die wir in X. 3 anhand des *Scottschen Axiomensystems* durchführen, Argumente für eine positive Antwort bereit. Allerdings entsteht hier ein Problem prinzipieller Art. Sollte aus den Axiomen von **ZFC**, wie z. B. aus den Axiomen des Fregeschen Systems, ein *Widerspruch* herleitbar sein, wären die Bedingungen von **ZFC** unerfüllbar, und **ZFC** könnte auf keinen Fall eine adäquate Beschreibung unserer Mengenvorstellung liefern. Die Antwort auf unsere inhaltliche Frage müsste also trotz intuitiv begründeter Zustimmung negativ ausfallen. Zudem wäre dann, wie die Logik zeigt, *jede* Aussage aus den Axiomen von **ZFC** beweisbar, und **ZFC** wäre auch für die Mathematik völlig unbrauchbar. Wir fragen daher

Formal: Ist **ZFC** *widerspruchsfrei?*

Die Antwort wird lauten: Sollte **ZFC** widerspruchsfrei sein – und die Erfahrung spricht dafür –, werden wir es niemals sicher wissen, *weil wir es nicht beweisen können.* Für diesen Zustand der Unwissenheit zeichnet der *Zweite Gödelsche Unvollständigkeitssatz* verantwortlich. In Kapitel XI, wo wir diese Situation beleuchten, werden wir jedoch Methoden und Ergebnisse kennenlernen, die wenigstens *partiell* eine positive Antwort auf die Frage nach der Widerspruchsfreiheit ermöglichen.

Für die folgende Diskussion unterstellen wir, **ZFC** sei widerspruchsfrei. Die Stärke von **ZFC** können wir dann in sehr anspruchsvoller Weise daran messen, ob **ZFC** *vollständig* ist, d. h. ob **ZFC** jede mengentheoretische Aussage in dem Sinne entscheidet, dass entweder diese Aussage oder aber ihr Negat aus den Axiomen von **ZFC** beweisbar ist. Inhaltlich gesehen würde die Vollständigkeit sicherstellen, dass das System **ZFC** jede Mengenwelt, die den Bedingungen seiner Axiome genügt, in mengentheoretischer Hinsicht erschöpfend beschreibt. Wir fragen daher

Ehrgeizig: Ist **ZFC** *vollständig?*

Die Antwort lautet *nein.* Wir werden in XI. 1 und XI. 3 Methoden ansprechen, mit denen man von interessanten mengentheoretischen Aussagen (z. B. der sog. *Cantorschen Kontinuumshypothese*) nachweisen kann, dass **ZFC** sie nicht entscheidet. In XI. 3 werden wir überdies mit dem sog. *Ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatz* sehen, dass die Unvollständigkeit von **ZFC** kein Zufall ist, sondern unvermeidbar und von prinzipieller Natur.

Da **ZFC** unsere Mengenvorstellung spiegelt, überträgt sich die Unvollständigkeit auch auf diese. Mit anderen Worten: *In unserer Mengenvorstellung klaffen Lücken.* Den erkenntnistheoretischen Fragestellungen, die damit verbunden sind, ist der Abschnitt XI. 4 gewidmet.

II

Der Rahmen der Darstellung

Die größte Deutlichkeit war mir immer die größte Schönheit.

Bei der Entwicklung der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre lassen wir uns, Zermelo folgend, von einer *typenfreien* Mengenvorstellung leiten. Wir unterscheiden also nicht zwischen Mengen verschiedenen Typs oder verschiedener Stufe. Im Sinne dieser Auffassung ist es nur konsequent und fördert es die begriffliche Einfachheit weiter, *wenn wir auch die Urelemente als Mengen auffassen, also diejenigen Objekte der Mathematik wie etwa Zahlen oder Punkte, die wir intuitiv nicht von vornherein als Mengen ansehen. Damit sind dann alle Dinge, die wir zu betrachten haben, Mengen.*

Um den Zermeloschen Begriff der definiten Eigenschaft nach dem Vorgehen Skolems zu präzisieren, stellen wir in §1 die mengentheoretische Sprache vor. Der anschließende Abschnitt dient der Verabredung darstellerischer Mittel, mit denen wir die sprachlichen Vorteile der **NBG**-Mengenlehre für uns dienstbar machen wollen.

Um z. B. die in I. 4 aufgeworfene Frage nach der Widerspruchsfreiheit von **ZFC** behandeln zu können, benötigen wir neben einer exakt umrissenen Sprache auch eine exakte Definition der zugelassenen Regeln des Schließens. Da wir jedoch den Aufbau der Mengenlehre nicht mit einer allzu starken Betonung formaler Aspekte belasten wollen, schließen wir vorerst naiv und gehen erst in Kapitel XI kurz auf eine Präzisierung ein. Außerdem versuchen wir das inhaltliche Verständnis dadurch zu fördern, dass wir uns vorstellen, eine uns intuitiv gegebene Welt von Mengen – wir nennen sie das *Universum* – zu beschreiben. Dabei sind wir uns durchaus der Wechselwirkung zwischen Mengenvorstellung und axiomatischem Vorgehen bewusst, die wir zu Beginn von I. 4 angedeutet haben.

H.-D. Ebbinghaus, *Einführung in die Mengenlehre*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-63866-8_2

§1 Die mengentheoretische Sprache

Wie wir bereits betont haben, nehmen wir den extensionalen Standpunkt ein: Mengen, welche die gleichen Elemente enthalten, sind gleich. Mengen sind also allein durch ihre Elemente bestimmt. Diese Beschränkung auf ausschließlich quantitative Aspekte erlaubt es uns, unsere Untersuchungen nur im Hinblick auf die *Elementbeziehung zwischen Mengen* und die *Gleichheit von Mengen* zu führen.

Als Symbol für die Gleichheitsbeziehung zwischen Mengen verwenden wir das Zeichen $=$, als Symbol für die Elementbeziehung das Zeichen $\in$. Als *Variablen für Mengen* dienen $v_0, v_1, v_2, \ldots$; um einer teils bequemeren, teils suggestiveren Schreibweise willen weichen wir jedoch häufig von dieser Konvention ab und verwenden als Variablen beliebige kleine oder große Buchstaben vom Anfang oder Ende des Alphabets, nach Bedarf mit zusätzlichen Indizes oder anderen Unterscheidungszeichen.

Die einfachsten *Ausdrücke* unserer Sprache sind Feststellungen über die Gleichheit von Mengen und die Elementbeziehung zwischen Mengen und haben die Gestalt *Variable* $=$ *Variable* bzw. *Variable* $\in$ *Variable*, also z. B.

$$v_0 = v_{17}, \;\; v_3 \in v_2, \;\; v_7 \in v_7.$$

Wir nennen sie *atomare Ausdrücke*.

Die Ausdrücke der mengentheoretischen Sprache bestehen aus den *atomaren* Ausdrücken und den *zusammengesetzten* Ausdrücken. Die zusammengesetzten Ausdrücke erhält man, ausgehend von den atomaren, durch die folgenden Bildungsprozesse:

(1) Übergang von einem Ausdruck φ zu seiner *Negation* (*nicht* φ), kurz geschrieben: $\neg\varphi$;

(2) Übergang von einem Ausdruck φ und einem Ausdruck ψ zur *Konjunktion* (φ *und* ψ), kurz geschrieben: $(\varphi \wedge \psi)$;

entsprechende Bildung

(3) der *Disjunktion* (φ *oder* ψ), kurz geschrieben: $(\varphi \vee \psi)$,

(4) der *Implikation* (*wenn* φ, *so* ψ), kurz geschrieben: $(\varphi \rightarrow \psi)$,

(5) der *Äquijunktion* (φ *genau dann, wenn* ψ), kurz geschrieben: $(\varphi \leftrightarrow \psi)$;

(6) Übergang von einem Ausdruck φ und einer Variablen[1] x zur *Generalisierung* (*Für alle* $x : \varphi$), kurz geschrieben: $\forall x\, \varphi$;

[1] Genauer wird x hier und an entsprechender Stelle in (7) als Variable für Variablen gebraucht.

entsprechende Bildung

(7) der *Partikularisierung* (*Es gibt ein x mit φ*), kurz geschrieben: $\exists x\, \varphi$.

Man nennt $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ (*aussagenlogische*) *Junktoren* und $\forall, \exists$ *Quantoren.* Die Ausdrücke der mengentheoretischen Sprache – wir nennen sie fortan einfach *Ausdrücke* – bilden eine *Sprache der ersten Stufe*. Informationen über solche Sprachen findet man etwa in *Ebbinghaus, Flum und Thomas 2018*.

Beispiele für Ausdrücke sind:

(i) *Es gibt ein x mit nicht $x = y$*, kürzer: $\exists x \neg x = y$;

(ii) $$(x \in x \wedge x \in x);$$

(iii) $$\forall x \forall y \forall z \big((x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z\big).$$

Um uns anschaulicher auszudrücken, weichen wir häufig von der vorgeschriebenen Form der Ausdrücke ab. So erlauben wir uns, dort auf Klammern zu verzichten, wo sie zum Verständnis nichts beitragen, und vereinbaren, dass $\wedge$ und $\vee$ stärker binden als $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$. Für (iii) werden wir dann etwa schreiben:

(iii1) $$\forall x \forall y \forall z\, (x = y \wedge y = z \rightarrow x = z),$$

weiter verkürzen zu

(iii2) $$\forall xyz\, (x = y \wedge y = z \rightarrow x = z)$$

oder gar stillschweigend die Generalisierung unterdrücken:

(iii3) $$x = y \wedge y = z \rightarrow x = z,$$

vielleicht auch der stilistischen Abwechslung halber umgangssprachlicher verfahren:

(iii4) *Mit $x = y$ und $y = z$ ist $x = z$.*

Statt ¬ x = y bzw. $\neg\, x \in y$ schreiben wir häufig $x \neq y$ bzw. $x \notin y$.

Unabhängig davon, wie wir formulieren, wird es, so hoffen wir, stets möglich sein, die exakte Schreibweise zu rekonstruieren und sich so davon zu überzeugen, dass wir wirklich Ausdrücke im Sinn haben.

In den vorangehenden Betrachtungen haben wir in der uns vertrauten Umgangssprache die mengentheoretische Sprache definiert und über sie gesprochen. Man nennt in diesem Zusammenhang die mengentheoretische Sprache eine *Objektsprache* und die Umgangssprache eine *Metasprache*. Der besseren Lesbarkeit wegen werden wir nicht immer klar zwischen beiden Sprachschichten unterscheiden; doch es gibt eine gute Orientierungshilfe: Wenn wir über Mengen sprechen, bewegen wir uns in der Regel in der mengentheoretischen

Sprache, also in der Objektsprache; wenn wir über etwas anderes sprechen, z. B. über Ausdrücke, über Definierbarkeit, Beweisbarkeit usf., bewegen wir uns in der Metasprache.

Wir beenden unsere Betrachtungen zur mengentheoretischen Sprache mit einigen Bemerkungen zum Umgang mit Variablen. Wir möchten dabei Anregungen geben, über diesen Umgang, den man intuitiv meist in der richtigen Weise pflegt, ein wenig gründlicher nachzudenken. Außerdem werden wir einige Bezeichnungskonventionen treffen.

Eine Variable x kommt in einem Ausdruck φ *frei* vor, wenn sie in φ an mindestens einer Stelle vorkommt, wo sie nicht unmittelbar hinter einem Quantor und nicht im Wirkungsbereich eines $\forall x$ oder eines $\exists x$ steht. So kommen in dem Ausdruck[2]

$$(*) \qquad \varphi \;:=\; \exists u\, \forall x\, (\underset{(1)}{x} \in \underset{(2)}{y} \to \exists \underset{(3)}{y}\, \underset{(4)}{y} \in \underset{(5)}{z})$$

die Variablen y (bei (2)) und z (bei (5)) frei vor; y kommt bei (4) nicht frei vor, weil es dort im Wirkungsbereich des vorangehenden $\exists y$ steht, bei (3) nicht, weil es dort unmittelbar hinter $\exists$ steht; x kommt bei (1) nicht frei vor, weil es dort im Wirkungsbereich des vorangehenden $\forall x$ steht. Insgesamt kommen gerade y und z frei in φ vor.

Die in einem Ausdruck frei vorkommenden Variablen spielen die Rolle von *Parametern*. Wir übernehmen die in der Mathematik zur Kenntlichmachung von Parametern benutzten Schreibweisen. So steht z. B. $\psi(x_1, \ldots, x_n)$[3] für Ausdrücke, in denen höchstens die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ frei vorkommen. Für φ aus $(*)$ können wir also deutlicher $\varphi(y, z)$ schreiben. Mit $\varphi(v, w)$ bezeichnen wir dann denjenigen Ausdruck, der aus $\varphi(y, z)$ entsteht, indem wir y dort, wo es in $\varphi(y, z)$ frei vorkommt, durch v und entsprechend z durch w ersetzen. Vorsicht ist geboten, wenn die Ersetzungen mit Variablen vorgenommen werden sollen, die in dem betreffenden Ausdruck bereits zu einer Generalisierung oder Partikularisierung verwandt worden sind. Hierzu ein Beispiel. Mit $\psi(z) := \exists y\, y \in z$ („*z hat ein Element*") ist $\psi(w) = \exists y\; y \in w$ („*w hat ein Element*"). Würden wir $\psi(y) := \exists y\; y \in y$ setzen, würden wir statt der gewünschten Bedeutung „*y hat ein Element*" formuliert haben, dass es eine Menge gibt, die sich selbst als Element enthält. Berücksichtigen wir, dass es, inhaltlich gesprochen, in $\psi(z)$ auf die Variable y gar nicht ankommt, können wir eine neue Variable y' für y wählen und $\psi(y) = \exists y'\, y' \in y$ setzen. Um Eindeutigkeit zu erzielen, wie wir sie durch die Bezeichnung $\psi(y)$ bereits unterstellt haben, kann man die

[2] Ein Doppelpunkt vor $=$ und $\leftrightarrow$ deutet eine Definition an. Definiert wird jeweils die linke Seite.

[3] Wir benutzen n, m als Variablen für die „naiven" natürlichen Zahlen 0, 1, 2, usf.

Wahl der neuen Variablen y' geeignet fixieren. Die genaue Art und Weise spielt keine Rolle, da verschiedene Festlegungen zu logisch äquivalenten Ausdrücken führen.

Abschließend sei noch eine Konvention angefügt.

$\exists^{\leq 1} x\, \psi(x, y)$ besage, dass es höchstens ein x gibt mit $\psi(x, y)$; entsprechend besage $\exists^{=1} x\, \psi(x, y)$, dass es genau ein x mit $\psi(x, y)$ gibt. Mögliche Übersetzungen von $\exists^{\leq 1} x\, \psi(x, y)$ bzw. $\exists^{=1} x\, \psi(x, y)$ in Ausdrücke der mengentheoretischen Sprache sind z. B.

$$\forall x\, \forall z\, \big(\psi(x, y) \wedge \psi(z, y) \to x = z\big)$$

bzw.

$$\exists x\, \big(\psi(x, y) \wedge \forall z \big(\psi(z, y) \to z = x\big)\big).$$

Beim ersten Ausdruck haben wir von unserer Verabredung zur Ersparnis von Klammern Gebrauch gemacht.

1.1 Aufgaben.

1.1.1 Man übersetze die Extensionalitätsaussage „Mengen, welche die gleichen Elemente enthalten, sind gleich“ in einen Ausdruck.

1.1.2 Man verfahre ähnlich mit „Jede Menge ist Element einer Menge“ und mit „Keine Menge enthält alle anderen Mengen als Elemente“.

1.1.3 Man übersetze die „Ausdrücke“ $\exists^{\leq 2} x\, \psi(x, y)$ und $\exists^{=3} x\, \psi(x, y)$, wobei die Bedeutung von $\exists^{\leq 2}$ und $\exists^{=3}$ auf naheliegende Weise bestimmt sei, in Ausdrücke der mengentheoretischen Sprache.

§2 Prädikate, Operationen und Klassen

Wir stellen im Folgenden einige Sprech- und Darstellungsweisen zusammen, die darauf zielen, die Vorteile der **NBG**-Mengenlehre auch für unser Vorgehen dienstbar zu machen. Es reicht, wenn man diese Zusammenstellung bei der Lektüre der nächsten Kapitel begleitend zur Kenntnis nimmt.

Prädikate. Der Ausdruck

$$\varphi_T(x, y) \quad := \quad \forall z\, (z \in x \to z \in y)$$

besagt, dass jedes Element von x auch Element von y ist, d. h. dass x eine *Teilmenge* von y ist. Er beschreibt damit eine (zweistellige) *Beziehung* zwischen Mengen, die *Teilmengenbeziehung*. Eine Beziehung, die durch einen Ausdruck beschrieben werden kann, nennen wir ein *Prädikat*. Die Teilmengenbeziehung ist also ein (zweistelliges) Prädikat. Jeder Ausdruck $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ definiert ein

n-stelliges Prädikat. Dieses Prädikat trifft genau dann auf $x_1, \ldots, x_n$ zu, wenn $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ gilt. Auf die Bezeichnung der Parameter kommt es im Grunde nicht an; daher definieren $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ und $\varphi(y_1, \ldots, y_n)$ dasselbe Prädikat. Weitere Beispiele für Prädikate sind die (zweistellige) *Elementbeziehung*, die z. B. durch $x \in y$ beschreibbar ist, die einstellige Beziehung oder *Eigenschaft*, *eine nicht leere Menge zu sein*, die durch $\exists z\, z \in x$ beschrieben werden kann, oder auch die Eigenschaft, *eine leere Menge zu sein*, zu deren Beschreibung $\neg\exists z\, z \in x$ dienen kann.

Für Prädikate führt man häufig neue Symbole, sog. *Prädikatssymbole* ein. Für die Teilmengenbeziehung verwendet man gewöhnlich das (zweistellige) Prädikatssymbol $\subseteq$. Man definiert hierzu

$$(*) \qquad x \subseteq y \quad :\leftrightarrow \quad \varphi_T(x, y).$$

Die Einführung von $\subseteq$ bedeutet eine *Erweiterung der mengentheoretischen Sprache*, da z. B. Ausdrücke wie $x \subseteq x,\ x \subseteq y$ als neue atomare Ausdrücke hinzutreten. Diese Erweiterung ist jedoch nicht wesentlich; denn mit $(*)$ können wir den Gebrauch von $\subseteq$ jederzeit wieder eliminieren. So geht

$$\forall xy\, (x \subseteq y \land y \subseteq x \to x = y)$$

durch Elimination von $\subseteq$ in den (rein mengentheoretischen) Ausdruck

$$\forall xy\, \big(\forall z\, (z \in x \to z \in y) \land \forall z\, (z \in y \to z \in x) \to x = y\big)$$

über.

Eine systematische Behandlung der Eliminierbarkeit definierter Symbole findet man in *Ebbinghaus, Flum und Thomas 2018*.

Noch eine grundsätzliche Bemerkung: Wenn wir später axiomatisch vorgehen, haben wir nur solche Informationen über das Universum zur Verfügung, die wir aus dem zugrunde liegenden Axiomensystem *beweisen* können. Daher hängen unsere Kenntnisse über Prädikate von der Stärke des betreffenden Axiomensystems ab. Ob wir z. B. wissen können, dass das Prädikat, eine nicht leere Menge zu sein, überhaupt auf eine Menge zutrifft, hängt davon ab, ob in unserem Axiomensystem die Existenz einer nicht leeren Menge beweisbar ist. Entsprechendes gilt für *Operationen*, denen wir uns jetzt zuwenden.

Operationen. Die Abbildung, die jeder Menge x des Universums die Menge der Teilmengen von x, die sog. *Potenzmenge* von x, zuordnet, wollen wir die *Potenzmengenabbildung* nennen. Die Potenzmengenabbildung können wir durch einen Ausdruck $\varphi_P(x, y)$ beschreiben, der gerade besagt, dass y die Potenzmenge von x ist, nämlich durch

$$\varphi_P(x, y) \ := \ \forall z\, \big(z \in y \leftrightarrow \varphi_T(z, x)\big).$$

Eine auf dem Universum definierte Abbildung, die, wie die Potenzmengenabbildung, durch einen Ausdruck, also durch ein Prädikat, beschrieben werden kann, nennen wir eine *Operation*.

Bei Operationen stellt sich nun, anders als bei Prädikaten, eine spezifische Schwierigkeit ein. Auf Grund unserer inhaltlichen Mengenvorstellung ist die Potenzmengenabbildung *wohldefiniert*, d. h. es gibt *zu jedem x genau ein y mit* $\varphi_P(x,y)$. Wenn wir jedoch axiomatisch vorgehen, stehen uns nur die Axiome als Information zur Verfügung, und wir können die Potenzmengenabbildung erst dann als wohldefiniert ansehen, wenn sich aus den betreffenden Axiomen *beweisen* lässt, dass es zu jedem x genau ein y gibt mit $\varphi_P(x,y)$. Ob also $\varphi_P(x,y)$ eine Operation beschreibt, hängt von dem zugrunde gelegten Axiomensystem ab.

Allgemein: Es sei $\varphi(x,y)$ ein Ausdruck. Dann stehe „$\varphi(x,y)$ *ist funktional*" für den Ausdruck $\forall x \exists^{=1} y\, \varphi(x,y)$. Ist $\varphi(x,y)$ funktional (d. h. gilt dieser Ausdruck), so definiert $\varphi(x,y)$ eine Abbildung auf dem Universum, die jeder Menge x *das* y mit $\varphi(x,y)$ zuordnet, mithin eine Operation. Auf die Funktionalität können wir aber nur dann zurückgreifen, falls sie aus den zugrunde gelegten Axiomen *beweisbar* ist.

Für Operationen führt man häufig neue Symbole, sog. *Operationssymbole*, ein, so etwa für die Potenzmengenoperation das Symbol Pot. Wir setzen dazu fest:

$$(*) \qquad \mathrm{Pot}(x) = y \;\; :\leftrightarrow \;\; \varphi_P(x,y),$$

aber, um es noch einmal zu sagen, dies erst dann, wenn wir die Funktionalität von $\varphi_P(x,y)$ gesichert haben.

Die Einführung von Operationssymbolen wie Pot bedeutet ebenfalls eine Erweiterung der mengentheoretischen Sprache. Man kann Pot zum Aufbau von *Termen* wie $\mathrm{Pot}(x)$, $\mathrm{Pot}(\mathrm{Pot}(x))$ benutzen. Solche Terme können dann wie Variablen zum Aufbau neuer atomarer Ausdrücke wie etwa

$$\mathrm{Pot}(x) \in z \quad \text{oder} \quad \mathrm{Pot}\big(\mathrm{Pot}(x)\big) = z$$

verwendet werden, und dies auch mit bereits vorher eingeführten Symbolen wie bei

$$(**) \qquad \mathrm{Pot}\big(\mathrm{Pot}(x)\big) \subseteq z.$$

Operationssymbole können anhand ihrer Definition leicht eliminiert werden. Dies kann allerdings umständlich sein, wenn sie in Termen geschachtelt auftreten. Wir begnügen uns mit einem konkreten Beispiel, der Elimination von Pot (und $\subseteq$) aus dem Ausdruck unter $(**)$: Wir formen zunächst logisch äquivalent um zu

$$\exists u \left(\mathrm{Pot}(x) = u \wedge \mathrm{Pot}(u) \subseteq z\right)$$

und dann weiter zu

$$\exists u\left(\mathrm{Pot}(x) = u \wedge \exists v\,(\mathrm{Pot}(u) = v \wedge v \subseteq z)\right).$$

Nachdem wir auf diesem Weg die Anwendbarkeit der Definition (∗) vorbereitet haben, können wir übergehen zu

$$\exists u\left(\varphi_P(x,u) \wedge \exists v\left(\varphi_P(u,v) \wedge v \subseteq z\right)\right)$$

und, um schließlich noch $\subseteq$ zu eliminieren, zu

$$\exists u\left(\varphi_P(x,u) \wedge \exists v\left(\varphi_P(u,v) \wedge \varphi_T(v,z)\right)\right).$$

Man kann wohl kaum eindrucksvoller als an einem solchen Eliminationsprozess aufweisen, in welchem Maß die Einführung neuer Symbole die Lesbarkeit und die Prägnanz der Darstellung erhöht.

Statt *einstelliger* Operationen lassen sich völlig analog *zweistellige, dreistellige,...* Operationen einführen. Ein Sonderfall ist die Stellenzahl 0: Wenn ein Ausdruck $\varphi(y)$ in dem Sinne funktional ist, dass $\exists^{=1} y \varphi(y)$ gilt, so beschreibt $\varphi(y)$ eindeutig eine Menge. Für diese Menge können wir ein *Konstantensymbol*, etwa c, einführen, dessen Bedeutung wir durch die Definition

$$c = y \;:\leftrightarrow\; \varphi(y)$$

festlegen. Z. B. können wir schon mit wenigen Axiomen zeigen, dass der Ausdruck $\varphi(y) := \neg\exists z\; z \in y$ („y ist leer“) funktional ist, und dann mit

$$\emptyset = y \;:\leftrightarrow\; \neg\exists z\, z \in y$$

das übliche Konstantensymbol für die leere Menge einführen.

2.1 Aufgaben.

2.1.1 Man eliminiere das Operationssymbol Pot und das Prädikatssymbol $\subseteq$ aus dem Ausdruck $\forall xy\,(x \subseteq y \to \mathrm{Pot}(x) \subseteq \mathrm{Pot}(y))$.

2.1.2 Man gebe auf der Basis der naiven Mengenlehre eine Definition für die Durchschnittsbildung $x \cap y$ zweier Mengen x, y an und eliminiere $\cap$ aus dem Assoziativgesetz $\forall xyz\,(x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z)$.

2.1.3 Es seien F und G einstellige Operationen. Man zeige, dass die Abbildung $F \circ G$, die eine Menge x in die Menge $F\big(G(x)\big)$ überführt, eine Operation ist. Dabei beziehe man sich auf irgendein Axiomensystem, das F und G als Operationen zu definieren gestattet. Man verfahre ähnlich bei der Abbildung H, die folgendermaßen *durch Fallunterscheidung* definiert ist:

$$H(x) \;:=\; \begin{cases} F(x), & \text{falls } \varphi(x), \\ G(x), & \text{falls } \neg\varphi(x). \end{cases}$$

2.1.4 Die Redeweise „$\varphi(x, y)$ *ist schwach funktional*" stehe für $\forall x \exists^{\leq 1} y\, \varphi(x, y)$. Man führe im Falle der schwachen Funktionalität den Begriff der partiellen Operation ein und zeige, dass sich der Definitionsbereich einer partiellen Operation durch ein einstelliges Prädikat beschreiben lässt.

2.1.5 Auf der Basis der naiven Mengenlehre zeige man, dass eine partielle Operation zu einer (totalen) Operation fortgesetzt werden kann, wobei höchstens die leere Menge als neuer Wert auftritt.

Parameter. Zuweilen erweist es sich als vorteilhaft, Prädikate und Operationen zu betrachten, in deren mengentheoretische Beschreibung *Parameter* eingehen. Wir wollen uns hier mit einigen exemplarischen Bemerkungen begnügen, die wir, wenn nötig, an geeigneter Stelle vertiefen werden.

Wenn wir den Ausdruck $\varphi(x, w)$ für eine feste Menge w betrachten, so definiert er ein einstelliges Prädikat. Dieses Prädikat hängt natürlich von der gewählten Menge w ab. Ist z. B. $\varphi(x, w)$ der Ausdruck $w \in x$, wird für vorgegebenes w das Prädikat definiert, w als Element zu enthalten.

Ist ein Ausdruck $\varphi(x, y, w)$ für eine feste Menge w in dem Sinne funktional, dass $\forall x \exists^{=1} y\, \varphi(x, y, w)$ gilt, so definiert er für dieses w eine Operation, die eine Menge x auf *das* y mit $\varphi(x, y, w)$ abbildet. Natürlich kann es von der gewählten Menge w abhängen, ob Funktionalität vorliegt. Häufig interessieren in konkreten Einzelfällen solche Parameter, die, wie etwa die leere Menge, definierbar sind. Dann liegt im Grunde wieder der parameterfreie Fall vor.

Wir schließen mit einigen Bemerkungen über

Klassen. Es sei P ein einstelliges Prädikat, definiert etwa durch $\varphi(z)$, d. h. es gelte

$$Pz \;:\leftrightarrow\; \varphi(z).^4$$

Dann nennt man – in Anlehnung an die **NBG**-Mengenlehre – die Gesamtheit der Mengen z mit Pz eine *Klasse*, die man zuweilen in der Form

$$[z \mid Pz] \quad \text{oder} \quad [z \mid \varphi(z)]$$

notiert. Oft benutzt man zur weiteren Abkürzung Klassensymbole, die man durch eine Definition einführt, z. B. in der Form

$$K \;:=\; [z \mid \varphi(z)],$$

so für das Universum, die uns bereits vertraute *Allklasse*, in der Form

$$V \;:=\; [z \mid z = z].$$

[4] „Pz" stehe als Abkürzung für „P trifft zu auf z".

Ähnlich wie bei Prädikaten gelangt man auf diesem Weg zu einer Erweiterung der mengentheoretischen Sprache: Man lässt neue atomare Ausdrücke der Gestalt

$$x \in [z \mid \varphi(z)] \quad \text{und} \quad x \in K$$

zu.[5] Doch auch diese Spracherweiterung ist unwesentlich. So kann man ja jederzeit die Ausdrücke $x \in K$ oder $x \in [z \mid \varphi(z)]$ äquivalent durch $\varphi(x)$ ersetzen und damit den Gebrauch der Klassensymbole eliminieren – ähnlich, wie man statt „G ist ein Element der Klasse der Gruppen" auch sagen kann, dass G eine Gruppe ist.

Wir betonen abschließend noch einmal: Prädikate, Klassen und Operationen sind keine Objekte unserer Theorie; dies sind, wie wir vereinbart haben, allein die Mengen. Wenn wir über Prädikate (Klassen, Operationen) sprechen, so wegen der größeren Anschaulichkeit und immer im Hinblick auf einen definierenden Ausdruck, mit dessen Hilfe wir die Prädikats- (Klassen-, Operations-) Sprechweise wieder eliminieren und damit auf eine reine Mengensprechweise zurückführen können.

[5] Man mache sich Gedanken darüber, warum i. Allg. keine neuen atomaren Ausdrücke der Gestalt $[z \mid \varphi(z)] \in x$ oder $[z \mid \varphi_1(z)] \in [z \mid \varphi_2(z)]$ zugelassen werden.

III

Das Zermelo-Fraenkelsche Axiomensystem

> Denn wer weiß nicht, dass Axiomata Sätze sind, deren Worte man nur gehörig verstehen darf, um an ihrer Wahrheit nicht zu zweifeln?

Wir wollen im Folgenden das Zermelo-Fraenkelsche Axiomensystem der Mengenlehre vorstellen. Um eine erste Vertrautheit mit den Axiomen zu vermitteln, verbinden wir ihre Einführung mit einigen einfachen Folgerungen. Kommentare inhaltlicher Natur sollen den Blick für das Konzeptionelle schärfen und die eingehende Diskussion in den letzten Kapiteln vorbereiten.

Wir machen regen Gebrauch von Prädikats- und Operationssymbolen. So benutzen wir bei der Definition neuer Symbole oft solche, die bereits vorher eingeführt wurden. Auf Grund der Eliminierbarkeit, die wir exemplarisch kennengelernt haben, können wir zu Recht annehmen, dass wir uns letztlich in der mengentheoretischen Sprache bewegen.

§1 Extensionalität und Aussonderung

Mit dem ersten Axiom fordern wir, dass es eine Menge gibt, dass also das Universum nicht leer ist:

Existenzaxiom (Ex):

Es gibt eine Menge.

Also:

$$\exists x\; x = x.$$

Wir haben in I. 1 den extensionalen Standpunkt geschildert und angekündigt, dass wir uns ihm anschließen. Daher fordern wir als nächstes Axiom das

H.-D. Ebbinghaus, *Einführung in die Mengenlehre*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-63866-8_3

Extensionalitätsaxiom (Ext):

Umfangsgleiche Mengen sind gleich.

Also:

$$\forall x \forall y \bigl(\forall z\,(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y\bigr).$$

Das Extensionalitätsaxiom betont den quantitativen Charakter der Mengen. Es hat eine Konsequenz, die für die Gestalt der Mengenlehre wesentlich ist: Zu Beginn von Kapitel II haben wir uns entschlossen, die Urelemente als Mengen aufzufassen, die dann selbstverständlich nicht wiederum Elemente enthalten sollen, also *leer* sind. Nach **Ext** sind all diese Mengen gleich, d. h. **Ext** *schließt die Existenz verschiedener Urelemente aus.*[1] Im Hinblick auf die Mathematik sind wir damit in einen Zugzwang gekommen: Wir müssen für die Urelemente, aber auch für andere Objekte der Mathematik, denen man intuitiv die Eigenschaft, Mengen zu sein, abspricht (z. B. n-Tupel, komplexe Zahlen, Funktionen), einen adäquaten mengentheoretischen Ersatz finden. Mit anderen Worten: Wir müssen das von Dedekind begonnene Programm durchführen.

In II. 2 haben wir $\subseteq$ als Symbol für das Prädikat der Teilmengenbeziehung eingeführt. Nach **Ext** gilt offensichtlich

1.1 Satz. $x \subseteq y \wedge y \subseteq x \to x = y$.[2]

Der Satz wird oft benutzt, um die Gleichheit von Mengen zu beweisen.

Bemerkung. Man achte streng auf den Unterschied zwischen $\in$ und $\subseteq$. Für $x \in y$ sagen wir stets *x ist Element von y* oder *y enthält x*, und für $x \subseteq y$ stets *x ist Teilmenge von y* oder *y ist Obermenge von x.*

Das Aussonderungsprinzip Zermelos, das wir in I. 3 naiv formuliert haben, sichert die Existenz solcher Teilmengen einer Menge, deren Elemente durch eine „definite" Eigenschaft charakterisierbar sind. Wir präzisieren dieses Prinzip nach einem Vorschlag von Skolem, indem wir eine Eigenschaft E von Mengen dann *definit* nennen, wenn es Mengen $x_1, \ldots, x_n$ und einen Ausdruck $\varphi(z, x_1, \ldots, x_n)$ gibt, so dass E auf eine Menge z genau dann zutrifft, wenn $\varphi(z, x_1, \ldots, x_n)$ gilt.[3] Wir gelangen damit zum

Schema der Aussonderungsaxiome (Aus): Das Schema enthält zu jedem Ausdruck der Gestalt $\varphi(z, \overset{n}{x})$[4] aus der ursprünglichen mengentheoretischen

[1]Möchte man diese Konsequenz vermeiden, muss man **Ext** abschwächen (vgl. hierzu *Barwise 1975*).

[2]Eigentlich sollte hier die generalisierte Form $\forall x \forall y\,(x \subseteq y \wedge y \subseteq x \to x = y)$ stehen. Bei Sätzen, Hilfssätzen und Definitionen verzichten wir jedoch in der Regel auf eine explizite Erwähnung der Generalisierung.

[3]Definite Eigenschaften sind also gerade die (mit Parametern definierbaren) einstelligen Prädikate.

[4]Statt $x_1, \ldots, x_n$ schreiben wir im Folgenden häufig $\overset{n}{x}$.

Sprache das Axiom

Zu allen Mengen $x_1, \ldots, x_n$ *und allen Mengen* x *gibt es eine Menge* y*, welche genau diejenigen Elemente* z *von* x *enthält, für die* $\varphi(z, \overset{n}{x})$ *gilt.*

Also:

$$\forall \overset{n}{x}\, \forall x \exists y \forall z \left(z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge \varphi(z, \overset{n}{x})\right).$$

Genügt y der Bedingung

$$(*) \qquad \forall z \left(z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge \varphi(z, \overset{n}{x})\right),$$

ist es nach **Ext** eindeutig bestimmt. Wir können daher das zu $\varphi(z, \overset{n}{x})$ gehörende Aussonderungsaxiom folgendermaßen verschärfen:

1.2 Satz. *Zu allen* $x_1, \ldots, x_n$ *und allen* x *gibt es genau ein* y*, das gerade diejenigen Elemente* z *von* x *enthält, für die* $\varphi(z, \overset{n}{x})$ *gilt.*[5]

Was hat Skolem bewogen, den Definitheitsbegriff so zu präzisieren? Es war Pragmatismus: „Dies ist ein *vollkommen klarer Begriff und hinreichend umfassend*, um alle gewöhnlichen mengentheoretischen Beweise durchführen zu können“ (*Skolem 1923*).

Für die den Mengen $x_1, \ldots, x_n$ und x nach Satz 1.2 eindeutig zugeordnete Menge y wollen wir in Zukunft

$$\{z \in x \mid \varphi(z, \overset{n}{x})\}$$

schreiben. Die Wahl der (von x, y und den x_l verschiedenen) Variablen z ist dabei unwesentlich.[6]

Das Schema **Aus** besteht aus unendlich vielen Axiomen. Das Axiomensystem von Zermelo und Fraenkel, das wir aufstellen wollen, wird also unendlich sein. In X. 2 werden wir zeigen können, dass jedes mit ihm äquivalente System unendlich sein *muss.*

---

[5] Da sich definierte Prädikats- und Operationssymbole mit Hilfe ihrer Definition wieder eliminieren lassen, gilt Satz 1.2 auch für solche Ausdrücke, die definierte Symbole enthalten.

[6] Die Abbildung, die $x_1, \ldots, x_n, x$ in $\{z \in x \mid \varphi(z, \overset{n}{x})\}$ überführt, ist eine $(n+1)$-stellige *Operation*, die durch den in $(*)$ stehenden Ausdruck beschrieben wird. – Eine prägnante Form des Aussonderungsschemas erhalten wir, wenn wir die *Klassenschreibweise* benutzen: Das Schema enthält für jede (mit Parametern definierbare) Klasse K das Axiom

$$\forall x \exists y \forall z \,(z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge z \in K),$$

d. h. unter intuitiver Benutzung des Durchschnitts, den wir exakt erst weiter unten einführen:

Für alle Mengen x *ist* $x \cap K$ *eine Menge.*

Wir wollen jetzt aus **Ex**, **Ext** und **Aus** einige Folgerungen ziehen. Zunächst wollen wir sehen, dass die durch **Aus** garantierten Komprehensionsmöglichkeiten nicht mehr ausreichen, ad hoc die Herleitung der Russellschen Antinomie, wie wir sie im Fregeschen System durchgeführt haben, zu imitieren.

Nach **Aus** gibt es zu jeder Menge x die analog zur „Russellschen Menge“ M_R (vgl. I. 3) gebildete Menge

$$y \;:=\; \{z \in x \mid z \notin z\}.$$

Falls $y \in y$, ist $y \notin y$, falls $y \notin y$, ebenfalls. Also ist $y \notin y$. Hieraus erhalten wir

$$y \notin x \quad \text{oder} \quad y \in y$$

und werden, um den Widerspruch zu vermeiden, der der Russellschen Antinomie entspricht, auf $y \notin x$ geführt. Ähnlich wie bei der **NBG**-Mengenlehre ist eine zusätzliche Information abgefallen:

1.3 Satz. $\forall x \{z \in x \mid z \notin z\} \notin x$.

Keine Menge enthält demnach alle Mengen: *Es gibt keine Allmenge.*

Weitere Folgerungen betreffen die *leere Menge*, den *Durchschnitt* über zwei oder mehr Mengen und die *mengentheoretische Differenz.*

Die leere Menge

Sei x eine Menge (**Ex**!). Nach **Aus** existiert dann die Menge $\{z \in x \mid z \neq z\}$. Sie ist leer und nach **Ext** eindeutig bestimmt. Wir nennen sie die *leere Menge* und bezeichnen sie mit $\emptyset$. Bereits in II. 2 haben wir angedeutet, wie wir $\emptyset$ exakt definieren können: Wir setzen $\psi(y) := \neg\exists z\; z \in y$ („*y ist leer*“). Auf Grund der vorangehenden Überlegungen gilt dann $\exists^{=1} y\; \psi(y)$; der Ausdruck $\psi(y)$ ist also funktional. Das rechtfertigt die Festsetzung

1.4 Definition. $\emptyset = y \;:\leftrightarrow\; \psi(y)$.

Um in Zukunft für Definitionen wie 1.4 und auch in anderen Fällen eine einfache Schreibweise zur Hand zu haben, treffen wir folgende Vereinbarung: Wenn es eine Menge gibt, die genau aus den z mit $\varphi(z, \overset{n}{x})$ besteht, schreiben wir für diese (nach **Ext** dann eindeutig bestimmte) Menge auch

$$(**) \qquad \{z \mid \varphi(z, \overset{n}{x})\}.$$

Damit können wir $\emptyset$ in der folgenden Form einführen:

1.4′ Definition. $\emptyset \;:=\; \{z \mid z \neq z\}$.

Nicht immer gibt es eine Menge, die genau aus den z mit $\varphi(z, \overset{n}{x})$ besteht; für den Ausdruck $z = z$ etwa deshalb nicht, weil es nach Satz 1.3 keine Allmenge gibt. Die Schreibweise $(**)$ dürfen wir – anders als die Klassenschreibweise $[z \mid \varphi(z, \overset{n}{x})]$ – nicht „gedankenlos" verwenden; sie erfordert in jedem Fall einen entsprechenden Existenzbeweis.

Durchschnitte

Es sei $\cap$ ein zweistelliges Operationssymbol. Als eine weitere Anwendung von Satz 1.2 definieren wir den *Durchschnitt* $x \cap y$ von x und y in der Form

1.5 Definition. $x \cap y \;:=\; \{z \in x \mid z \in y\}$.

Die Menge $x \cap y$ besteht aus denjenigen Mengen, die Elemente von x und von y sind:

$$(1) \qquad \forall z\,(z \in x \cap y \;\leftrightarrow\; z \in x \wedge z \in y).$$

Man erhält hieraus sofort die *Kommutativität von* $\cap$:

$$x \cap y \;=\; y \cap x.$$

Ähnlich ergibt sich die *Assoziativität*:

$$(x \cap y) \cap z \;=\; x \cap (y \cap z),$$

und ebenso schnell sieht man ein, dass

$$x \cap \emptyset \;=\; \emptyset.$$

Eine Verallgemeinerung des Durchschnitts *zweier* Mengen gewinnen wir mit dem Durchschnitt *aller Elemente einer* (möglicherweise unendlichen) *Menge* X. Diesen Durchschnitt schreibt man häufig in der Form $\bigcap_{x \in X} x$.[7] Wir verwenden die kürzere, deshalb jedoch nicht weniger deutliche Bezeichnung $\bigcap X$ und nennen $\bigcap X$ den *Durchschnitt* von X.

Falls $X = \emptyset$, setzen wir $\bigcap X \;:=\; \emptyset$. Falls $X \neq \emptyset$, erwarten wir

$$\bigcap X \;=\; \{z \mid \forall x (x \in X \to\; z \in x)\}.$$

Die Existenz der rechts stehenden Menge sichern wir durch eine typische Anwendung von **Aus**. Sei hierzu $y \in X$. Dann sind alle z, die der Bedingung $\forall x (x \in X \to z \in x)$ genügen, bereits Elemente von y, und wir erhalten

$$\{z \mid \forall x (x \in X \to z \in x)\} \;=\; \{z \in y \mid \forall x\,(x \in X \to z \in x)\}.$$

[7]Spielt bei der Betrachtung einer Menge X die Eigenschaft der Elemente von X, eine Menge zu sein, eine wesentliche Rolle, nennt man X häufig ein *Mengensystem*. Obwohl wir nur Mengen schlechthin betrachten, schließen wir uns aus Gründen der Anschaulichkeit zuweilen dieser Sprechweise an.

Damit können wir festsetzen:

1.6 Definition. $\bigcap X \ := \ \big\{z \mid X \neq \emptyset \wedge \forall x(x \in X \to z \in x)\big\}.$

Ähnlich zu (1) erhalten wir dann für $X \neq \emptyset$:

$$(2) \qquad \forall z \left(z \in \bigcap X \ \leftrightarrow \ \forall x \left(x \in X \to \ z \in x\right)\right).$$

Mengentheoretische Differenz

1.7 Definition. $x \setminus y \ := \ \{z \in x \mid z \notin y\}.$

Die Menge $x \setminus y$ heißt die *mengentheoretische Differenz* von x und y.

Offensichtlich gilt

$$(3) \qquad z \in x \setminus y \ \leftrightarrow \ z \in x \wedge \neg z \in y$$

und daher

$$(x \setminus y) \cap y \ = \ \emptyset.$$

Falls $y \subseteq x$, ist außerdem $(x \setminus y) \cup y = x$.[8] Man nennt $x \setminus y$ dann das *relative Komplement von y bzgl. x.* Keine Menge besitzt ein *absolutes* Komplement, d. h. zu keiner Menge y gibt es eine Menge, die genau aus den Mengen besteht, die nicht Element von y sind. Wäre nämlich die Menge z das absolute Komplement von y, so wäre $y \cup z$ eine Menge, die *alle* Mengen enthält – ein Widerspruch zu Satz 1.3.

(1), (2), (3) spiegeln eine Parallelität zwischen $\cap$ und $\wedge$, $\bigcap$ und $\forall$ und $\setminus$ und $\neg$. Damit lassen sich die bekannten Rechenregeln für $\cap$, $\bigcap$ und $\setminus$ auf Eigenschaften von $\wedge$, $\forall$ und $\neg$ zurückführen. Wir haben das oben ja bereits am Beispiel der Kommutativität und der Assoziativität von $\cap$ kennengelernt. Einige weitere Regeln folgen anschließend als Übungen und in Aufgabe 2.3.2.

1.8 Aufgaben.

1.8.1 Man verwandle $\forall x \, \{z \in x \mid z \notin z\} \notin x$ in einen Ausdruck.

1.8.2 Man zeige: $x = \{z \in x \mid z = z\}$ und $x = \{z \mid z \in x\}$.

1.8.3 Man zeige: (i) $(x \setminus y) \cap z = (x \cap z) \setminus (y \cap z)$;
(ii) $x \setminus (x \setminus y) = x \cap y$.

1.8.4 Es seien X und y beliebige Mengen. Unter Voraussetzung der Existenz von $\{x \cap y \mid x \in X\}$ (vgl. dazu Aufgabe 3.5.4) zeige man:

$$\left(\bigcap X\right) \cap y \ = \ \bigcap \{x \cap y \mid x \in X\}.$$

[8] Zur Bildung der Vereinigungsmenge $x \cup y$ vgl. Definition 2.1.

1.8.5 Unter einer ähnlichen Existenzvoraussetzung wie in der vorangehenden Aufgabe zeige man:

$$\left(\bigcap X\right) \setminus y \;=\; \bigcap\{x \setminus y \mid x \in X\}.$$

1.8.6 Man zeige, dass durch

$$F(X) \;:=\; \{z \mid \forall x\,(x \in X \to z \in x)\}$$

keine Operation definiert wird.

§2 Axiome der Mengenvereinigung

Im vorangehenden Abschnitt haben wir unter wesentlicher Benutzung von **Aus** die Existenz des Durchschnitts und der Differenz von Mengen bewiesen, nicht aber die Existenz der Vereinigung zweier Mengen. Es ist plausibel, dass das mit den bisherigen Axiomen noch nicht geht: Zur Bildung von $x \cup y$ muss man in der Regel sowohl x als auch y „verlassen“, und dann versagt **Aus**, das ja nur die Existenz gewisser *Teilmengen* einer Menge sichert. Genauer können wir uns das auf die im Folgenden geschilderte Weise klar machen.

Wir betrachten das „Universum“ $\mathfrak{U}_0$, das aus den Mengen $\emptyset, \{\emptyset\}$ und $\{\{\emptyset\}\}$ mit der üblichen $\in$-Beziehung besteht. In $\mathfrak{U}_0$ gilt trivialerweise **Ex**, denn es gibt in $\mathfrak{U}_0$ eine Menge. In $\mathfrak{U}_0$ gilt auch **Ext**. Wir müssen dazu prüfen, dass sich je zwei verschiedene Mengen aus $\mathfrak{U}_0$ in einem Element unterscheiden, das zu $\mathfrak{U}_0$ gehört. Was z. B. $\emptyset$ und $\{\emptyset\}$ betrifft, so ist $\emptyset$ ein Element der letzteren, nicht aber der ersteren Menge, und $\emptyset$ gehört zu $\mathfrak{U}_0$. Schließlich gilt **Aus** in $\mathfrak{U}_0$; so kommen z. B. als in $\mathfrak{U}_0$ definierbare Teilmengen von $\{\emptyset\}$ nur $\emptyset$ und $\{\emptyset\}$ in Frage, und die gehören zu $\mathfrak{U}_0$. Würde nun aus **Ex**, **Ext** und aus **Aus** beweisbar sein, dass zu je zwei Mengen die Vereinigungsmenge existiert, müsste dies auch in $\mathfrak{U}_0$ gelten. Doch zu $\{\emptyset\}$ und $\{\{\emptyset\}\}$ gibt es in $\mathfrak{U}_0$ keine Menge, die aus $\emptyset$ und $\{\emptyset\}$ besteht, da $\mathfrak{U}_0$ nur Einermengen enthält.

Um weiterzukommen, benötigen wir also ein neues Axiom:

„Kleines“ Vereinigungsmengenaxiom ($\cup$-Ax):

Zu jeder Menge x und jeder Menge y gibt es eine Menge, welche genau die Elemente von x und von y enthält.

Also:

$$\forall x\, \forall y\, \exists w\, \forall z\, (z \in w \leftrightarrow (z \in x \vee z \in y)).$$

Die zu den Mengen x und y nach **$\cup$-Ax** existierende Menge nennen wir die *Vereinigungsmenge* von x und y. Für ihre Bildung benutzen wir das zweistellige Operationssymbol $\cup$ (gelesen: „vereinigt“):

2.1 Definition. $x \cup y \;:=\; \{z \mid z \in x \vee z \in y\}$.

Dann gilt

$$(1) \qquad z \in x \cup y \;\leftrightarrow\; z \in x \text{ oder } z \in y,$$

und wir erhalten ähnlich wie bei $\cap$, dass $\cup$ *kommutativ* und *assoziativ* ist; ferner, dass $x \cup \emptyset = x$.

Ähnlich wie für $\cup$**-Ax** lässt sich auch für das folgende Axiom zeigen, dass es mit den bisherigen Axiomen nicht gewonnen werden kann (vgl. Aufgabe 2.3.3):

„Großes" Vereinigungsmengenaxiom ($\bigcup$-Ax):

Zu jeder Menge X gibt es eine Menge, welche genau die Elemente der Elemente von X enthält.

Also:

$$\forall X\, \exists y\, \forall z\, \big(z \in y \leftrightarrow \exists x(x \in X \wedge z \in x)\big).$$

Wir nennen die nach $\bigcup$**-Ax** zu X existierende Menge die *Vereinigungsmenge* von X und bezeichnen sie mit $\bigcup X$:

2.2 Definition. $\bigcup X \;:=\; \{z \mid \exists x(x \in X \wedge z \in x)\}$.

Damit gilt

$$(2) \qquad z \in \bigcup X \;\leftrightarrow\; \exists x\,(x \in X \wedge z \in x).$$

Offensichtlich ist $\bigcup \emptyset = \emptyset$.

Für $\cap, \cup, \setminus, \bigcap$ und $\bigcup$ kann man die üblichen Rechenregeln beweisen, indem man sie, ähnlich wie bisher, mit (1), (2) und mit (1), (2), (3) aus §1 auf die entsprechenden Eigenschaften von $\wedge, \vee, \neg, \forall$ und $\exists$ zurückführt. So erhält man z. B. die beiden *Distributivgesetze*

$$(x \cup y) \cap z \;=\; (x \cap z) \cup (y \cap z),$$

$$(x \cap y) \cup z \;=\; (x \cup z) \cap (y \cup z).$$

Gesetzmäßigkeiten, die $\bigcap$ oder $\bigcup$ einschließen, benötigen teilweise das erst im nächsten Abschnitt formulierte *Potenzmengenaxiom*. Sie lassen sich oft besser mit der in IV. 2 kurz diskutierten *Familienschreibweise* formulieren, wie z. B. in der Gleichung

$$(\bigcup_{\imath \in I} x_\imath) \cap y \;=\; \bigcup_{\imath \in I} (x_\imath \cap y).$$

Das Analogon in „indexfreier" Schreibweise lautet

$$(\bigcup X) \cap y \;=\; \bigcup Z,$$

wobei Z aus den Mengen $x \cap y$ mit $x \in X$ besteht. Zur Existenz von Z vgl. man Aufgabe 3.5.4.

2.3 Aufgaben.

2.3.1 Man zeige: $\bigcup(x \cup y) = \left(\bigcup x\right) \cup \left(\bigcup y\right)$. Man überlege ferner naiv, ob stets $\bigcup(x \cap y) = \left(\bigcup x\right) \cap \left(\bigcup y\right)$ gilt (vgl. Aufgabe 3.5.2).

2.3.2 Man zeige für $X \neq \emptyset$ und beliebiges y, dass $y \setminus \bigcap X = \bigcup\{y \setminus x \mid x \in X\}$. Dabei unterstelle man, dass die Menge auf der rechten Seite existiert (vgl. Aufgabe 3.5.4).

Man verfahre ähnlich mit der Gleichung $\left(\bigcup X\right) \cap y = \bigcup\{x \cap y \mid x \in X\}$.

2.3.3 Man zeige mit einem geeigneten „Universum", dass $\bigcup$**-Ax** nicht aus **Ex**, **Ext**, **Aus** und $\cup$**-Ax** bewiesen werden kann.

Abschließend eine konzeptionelle Bemerkung. Oft wählt man statt $\cup$**-Ax** das

Paarmengenaxiom: *Zu jeder Menge x und jeder Menge y gibt es eine Menge, die genau x und y als Elemente enthält.*

Man nennt diese Menge die *Paarmenge* von x und y und bezeichnet sie mit $\{x, y\}$. Dabei ist $\{\ ,\ \}$ ein zweistelliges Operationssymbol. Für alle x, y, z gilt also:

$$z \in \{x, y\} \;\leftrightarrow\; z = x \vee z = y.$$

Aus dem Paarmengenaxiom, dem Schema **Aus** der Aussonderung und $\bigcup$**-Ax** ist $\cup$**-Ax** beweisbar, da $x \cup y = \bigcup\{x, y\}$. Umgekehrt können wir das Paarmengenaxiom noch nicht mit den bisherigen Axiomen beweisen (man zeige das durch Angabe eines geeigneten „Universums"). Dies gelingt erst mit Hilfe des *Potenzmengenaxioms*.

Sehen wir einmal vom trivialen Existenzaxiom ab, erkennen wir bei den restlichen Axiomen deutlich konzeptionelle Unterschiede: **Ext** und **Aus** spiegeln wesentliche Aspekte des Mengenbegriffs: **Ext** beinhaltet den „rein quantitativen" Aspekt, unter dem wir Mengen betrachten, **Aus** mit seinen systematischen Komprehensionsmöglichkeiten den „konstitutiven" Aspekt. Demgegenüber erscheinen $\cup$**-Ax** und $\bigcup$**-Ax** Bedürfnissen zu entspringen, denen wir mehr zufällig begegnet sind. Das zeigt ja auch die gerade geschilderte Alternative mit dem Paarmengenaxiom.

Wie weit wird durch diese „Zufälligkeit" die Mengenlehre in Mitleidenschaft gezogen? Könnten einige der in I. 4 geschilderten Unzulänglichkeiten hier ihre Ursache haben? Eher nicht: Wir werden in X. 3 zeigen, dass das Zermelo-Fraenkelsche Axiomensystem zu einem Axiomensystem äquivalent ist, das solche Zufälligkeiten nicht mehr kennt. Dadurch werden wir den ad-hoc-Charakter mancher Axiome als nur scheinbar entlarven können.

§3 Das Potenzmengenaxiom. Eine methodologische Betrachtung

Das Schema der Aussonderungsaxiome sichert die Existenz gewisser Teilmengen einer Menge. Wie aber steht es mit der *Menge aller Teilmengen* einer Menge x, der sog. *Potenzmenge* von x? Man kann sich klarmachen, dass deren Existenz mit den bisherigen Axiomen nicht allgemein bewiesen werden kann (vgl. Aufgabe 3.5.6). Wir fordern daher das

Potenzmengenaxiom (Pot):

Zu jeder Menge x gibt es eine Menge, die genau die Teilmengen von x enthält.

Also:

$$\forall x \exists y \forall z\,(z \in y \leftrightarrow z \subseteq x).$$

Das Axiom ermöglicht die Definition der *Potenzmengenoperation*:

3.1 Definition. $\mathrm{Pot}(x) \ := \ \{z \mid z \subseteq x\}$.

Es ist stets $\emptyset \in \mathrm{Pot}(x)$ und $x \in \mathrm{Pot}(x)$. Die Potenzmenge der leeren Menge, $\mathrm{Pot}(\emptyset)$, besteht genau aus der leeren Menge. Man schreibt für sie auch $\{\emptyset\}$. Sie ist eine *Einermenge*. Allgemeiner setzen wir

3.2 Definition. $\{x\} \ := \ \{z \in \mathrm{Pot}(x) \mid z = x\}$.

Die Menge $\{x\}$ enthält genau das Element x und heißt die *Einermenge von x*. Die Mengen $\{x\}$ und x müssen sorgfältig voneinander unterschieden werden. Es ist stets $x \in \{x\}$, i. Allg. aber $\{x\} \notin x$, z. B. $\{\emptyset\} \notin \emptyset$. Unsere bisherigen Axiome schließen allerdings nicht aus, dass es Mengen x geben kann mit $x = \{x\}$. Solche „pathologischen“ Mengen spielen eine Rolle bei gewissen Unabhängigkeitsbeweisen (vgl. XI. 3); wir werden sie allerdings in §6 durch das *Fundierungsaxiom* ausschließen.

Wir sind jetzt in der Lage, das *Paarmengenaxiom* zu beweisen: Zu vorgegebenen x und y bilden wir $\{x\}$ und $\{y\}$ und dann $\{x, y\}$ in der Gestalt $\{x\} \cup \{y\}$.

Das Potenzmengenaxiom wird oft als kritisch angesehen. Hierzu einige Argumente. Bei endlichen Mengen können wir die Gesamtheit der Teilmengen gut überschauen, doch bei unendlichen Mengen wie der Menge der natürlichen oder der Menge der reellen Zahlen erscheint dies nur bedingt möglich. Im Gegensatz zu den endlichen Mengen (vgl. Aufgabe 3.5.1) sind wir, wie wir in IX. 4 diskutieren werden, bei unendlichen Mengen noch nicht einmal in der Lage, die *Anzahl* der Teilmengen zu bestimmen. Hiermit hängt ein anderer Aspekt zusammen: Mit der Aufstellung immer weiterer Axiome legen wir unsere Mengenvorstellung stückweise immer weiter fest. Im Gegensatz zu den anderen Axiomen nimmt das Potenzmengenaxiom dabei eine Sonderstellung ein: Indem es *alle* Teilmengen einer Menge x in der Potenzmenge $\mathrm{Pot}(x)$ zusammenbringt, nimmt es schon auf ein *gleichsam fertig beschriebenes* Universum Bezug. Man spricht von der *Imprädikativität* des Potenzmengenaxioms und macht diese für die angedeuteten Schwierigkeiten verantwortlich.

An „kleinen" endlichen Mengen haben wir neben der leeren Menge die Einermengen und die Paarmengen kennengelernt. Den Übergang von den Einermengen zu den Paarmengen in der Form

$$(*) \qquad \{x, y\} \;:=\; \{x\} \cup \{y\}$$

kann man leicht auf *Dreier*mengen ausdehnen:

$$(**) \qquad \{x, y, z\} \;:=\; \{x, y\} \cup \{z\}.$$

In naheliegender Verallgemeinerung kann man dann die Operation der *Vierer*mengenbildung definieren, dann die Operation der *Fünfer*mengenbildung *usf.* Dabei lässt sich das *usf.* dadurch präzisieren, dass man eine *Anweisung* gibt, wie man nacheinander die verschiedenen Operationen zu definieren hat. Die Anweisung kann in Gestalt einer sog. *induktiven Definition* erfolgen:

3.3 Definition. Für $n \geq 2$ sei

$$\{x_1, \ldots, x_n\} \;:=\; \{x_1, \ldots, x_{n-1}\} \cup \{x_n\}.$$

Wir nehmen diese Definition zum Anlass, einige grundlegende Bemerkungen über die naiven natürlichen Zahlen und gewisse mit ihnen verbundene Induktionsprinzipien einzuflechten.

Die *naiven* natürlichen Zahlen sind für uns keine Elemente des Universums; wir werden sie daher streng von den *natürlichen Zahlen im mengentheoretischen Sinn* unterscheiden, die wir in V. 1 einführen. Sie sind für uns ein Hilfsmittel, um *über* unsere Untersuchung des Universums zu sprechen, z. B. *über* die Ausdrücke der mengentheoretischen Sprache, *über* Definitionen in dieser Sprache usf. So haben wir mit Ausdrücken der Gestalt $\varphi(z, \overset{n}{x})$ *über* mit Parametern definierbare Eigenschaften gesprochen. Die Rolle der naiven natürlichen Zahlen ist, wie man sagt, von *metasprachlicher* Art.

Kommt nun mit der Verwendung der naiven natürlichen Zahlen nicht die Unklarheit und Unexaktheit wieder in die Mengenlehre hinein, die wir durch das axiomatische Vorgehen doch gerade vermeiden wollen? Die Sache sieht schlimmer aus, als sie ist. Was haben wir denn z. B. mit Definition 3.3 bezwecken wollen? Wie wir dort angemerkt haben, wollten wir eine *Anweisung* geben, *wie wir aus einer bereits gewonnenen Definition die nächste erhalten können*, wie wir also die Gesamtheit dieser Definitionen „herstellen“ können. Da wir gelernt haben, mit den naiven natürlichen Zahlen umzugehen, tut die Definition 3.3 dies in prägnanter Weise, werden wir für $n = 1, 2, \ldots$ doch unmittelbar zu $(*)$, $(**)$, ... geführt. Leserin und Leser mögen sich überzeugen, dass überall, wo wir von den naiven natürlichen Zahlen Gebrauch machen, eine unmittelbar einsichtige Deutung dieses Gebrauchs möglich ist.

Wir wollen Definition 3.3 noch einmal etwas genauer betrachten. Dazu bezeichnen wir für $n = 2, 3, \ldots$ die entsprechenden Definitionen der Paarmengen, der Dreiermengen, usf. mit $\delta_2, \delta_3, \ldots$. Dann erwarten wir:

Behauptung. Für alle $n \geq 2$:

(a) δ_n ist eine sinnvolle Definition einer n-stelligen Operation.

(b) Für die durch δ_n definierte Operation gilt:

$$z \in \{x_1, \ldots, x_n\} \;\leftrightarrow\; z = x_1 \vee \ldots \vee z = x_n.$$

Wir führen den Beweis durch eine *vollständige Induktion.* Dazu zeigen wir:

(i) Die Behauptung gilt für $n = 2$ (sog. *Induktionsanfang*).

(ii) Für alle $n \geq 2$: Wenn die Behauptung für n gilt, so gilt sie auch für $(n+1)$ (sog. *Induktionsschritt*).

Wir zeigen mit anderen Worten: (a) und (b) gelten für die erste Definition δ_2. Wenn (a) und (b) für eine Definition δ gelten, die wir bereits hergestellt haben, gelten (a) und (b) für die Definition, die wir aus δ herstellen können. Auf Grund eines *unmittelbar einsichtigen Induktionsschlusses* gelten dann (a) und (b) für alle Definitionen $\delta_2, \delta_3, \ldots$.

Zu (i): δ_2, d. h. $(*)$, ist offensichtlich eine korrekte Definition, und wir haben

$$z \in \{x_1, x_2\} \;\leftrightarrow\; z = x_1 \vee z = x_2$$

auf Grund der Eigenschaften der Einermengenbildung und der Vereinigungsmengenbildung.

Zu (ii): Sei $n \geq 2$, und seien (a) und (b) richtig für n (sog. *Induktionsvoraussetzung*). Wir zeigen, dass (a) und (b) für $n + 1$ richtig sind (sog. *Induktionsbehauptung*). Die Definition δ_{n+1} lautet

$$\{x_1, \ldots, x_{n+1}\} \;:=\; \{x_1, \ldots, x_n\} \cup \{x_{n+1}\}.$$

Zu (a): Da δ_n nach Induktionsvoraussetzung eine Operation definiert und da die Vereinigungsmengenbildung und die Einermengenbildung Operationen sind, definiert auch δ_{n+1} eine Operation.

Zu (b): $z \in \{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$

$\leftrightarrow\ z \in \{x_1, \ldots, x_n\} \vee z \in \{x_{n+1}\}$ (nach Definition)

$\leftrightarrow\ z = x_1 \vee \ldots \vee z = x_n \vee z \in \{x_{n+1}\}$ (nach Ind.-Voraussetzung)

$\leftrightarrow\ z = x_1 \vee \ldots \vee z = x_n \vee z = x_{n+1}$.

Mit diesem Induktionsbeweis haben wir ein ganzes Schema mengentheoretischer Aussagen bewiesen. Wir bringen das in der Formulierung des folgenden Satzes – wie auch später bei entsprechenden Sätzen – durch den Hinweis *Schema* zum Ausdruck:

3.4 Satz (Schema)**.** *Für alle* $n \geq 2$ *gilt*:

$$\forall z \big(z \in \{x_1, \ldots, x_n\} \ \leftrightarrow\ z = x_1 \vee \ldots \vee z = x_n\big).$$

Zur Abkürzung nennen wir den zu n gehörenden Ausdruck dieses Schemas φ_n. Streng genommen haben wir die φ_n nicht alle *bewiesen* (wie sollten wir das auch schaffen können!); wir haben uns durch vollständige Induktion davon überzeugt, dass jedes φ_n *beweisbar* ist. Unser Induktionsbeweis ist dabei so angelegt, dass er ein *Konstruktionsverfahren* für konkrete Beweise der φ_n anzugeben gestattet. Um z. B. einen Beweis für φ_{17} zu konstruieren, gebe man zunächst einen Beweis für φ_2 an. Dann konstruiere man einen Beweis für φ_3, indem man wie im Beweis von (ii)(b) für $n = 2$ vorgeht und an der Stelle, wo dort auf die Induktionsvoraussetzung zurückgegriffen wird, den Beweis für φ_2 „einsetzt“. In dieser Weise fahre man fort, bis man einen Beweis für φ_{17} erhalten hat.

Das oben geschilderte Beweisverfahren gehört dem *metasprachlichen* Bereich an. Um es von dem entsprechenden Beweisverfahren auf *objektsprachlicher* Ebene, das wir z. B. in Satz V.1.5 kennenlernen werden, bereits durch die Bezeichnung zu unterscheiden, sprechen wir von *metasprachlichen* Induktionsbeweisen. Analog nennen wir Definition 3.3 eine *Definition durch metasprachliche Induktion*. Einen anderen Typ von Definitionen durch metasprachliche Induktion stellt die Definition der mengentheoretischen Ausdrücke in II. 1 dar: Dort wird gleichsam eine Anweisung gegeben, wie man, ausgehend von den atomaren Ausdrücken, durch Bildung der Negation, der Konjunktion usf. die zusammengesetzten Ausdrücke herstellt. Als metasprachliche Induktionsbeweise korrespondieren dieser Definition die *Beweise durch Induktion über den Aufbau der Ausdrücke*. Um zu beweisen, dass eine gewisse Behauptung $\mathcal{B}(\varphi)$ für alle Ausdrücke φ zutrifft, zeigt man dabei:

Induktionsanfang: $\mathcal{B}(\varphi)$ trifft für alle *atomaren* φ zu.

Induktionsschritt: (a) Wenn $\mathcal{B}(\varphi)$ zutrifft, so auch $\mathcal{B}(\neg\varphi)$.

(b) Wenn $\mathcal{B}(\varphi)$ und $\mathcal{B}(\psi)$ zutreffen, so auch $\mathcal{B}(\varphi \wedge \psi)$, $\mathcal{B}(\varphi \vee \psi)$, $\mathcal{B}(\varphi \rightarrow \psi)$ und $\mathcal{B}(\varphi \leftrightarrow \psi)$.

(c) Wenn $\mathcal{B}(\varphi)$ zutrifft und x eine Variable ist, so treffen auch $\mathcal{B}(\forall x\varphi)$ und $\mathcal{B}(\exists x\varphi)$ zu.

In X. 2 werden wir von diesem Prinzip Gebrauch machen.

3.5 Aufgaben.

3.5.1 Man zeige naiv, dass die Potenzmenge einer n-elementigen Menge 2^n Elemente besitzt. (Hierauf geht die Bezeichnung *Potenzmenge* zurück.)

3.5.2 Man gebe Mengen x und y an mit $\bigcup(x \cap y) \neq (\bigcup x) \cap (\bigcup y)$. Gibt es eine stets gültige Teilmengenbeziehung zwischen $\bigcup(x \cap y)$ und $(\bigcup x) \cap (\bigcup y)$?

3.5.3 Man zeige: $\forall x\, x \subseteq \mathrm{Pot}(\bigcup x)$. Kann Gleichheit eintreten? Kann Ungleichheit eintreten? Wie stehen $\bigcup \mathrm{Pot}(x)$ und $\mathrm{Pot}(\bigcup x)$ zueinander?

3.5.4 Man zeige für $* = \cap, \cup, \setminus$:

$$\forall X \forall y \exists w\, w = \{x * y \mid x \in X\}, \text{ sowie } \forall X \forall y \exists w\, w = \{y \setminus x \mid x \in X\}.$$

3.5.5 Man zeige, dass die Abbildung, die eine Menge x in (i) $\{\{u, v\} \mid u, v \in x\}$, (ii) $\{\mathrm{Pot}(u) \mid u \in x\}$ überführt, eine Operation ist.

3.5.6 Durch Angabe eines geeigneten „Universums" zeige man, dass **Pot** nicht aus **Ex, Ext, Aus,** $\cup$**-Ax** und $\bigcup$**-Ax** beweisbar ist. Es gibt Universen dieser Art mit $1, 2, 4, 8, \ldots$ Elementen.

§4 Das Unendlichkeitsaxiom

Wir kennen jetzt bereits eine Reihe von Mengen, z. B.

$$(*) \qquad \emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \ldots$$

oder auch

$$(**) \qquad \emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots .$$

Hierbei erhält man die Mengen unter $(**)$ aus $\emptyset$ durch den wiederholten Übergang von z nach $z \cup \{z\}$.

In den Aufgabe 4.4.3 und 4.4.4 überzeugen wir uns davon, dass die Mengen in der Reihe $(*)$ untereinander verschieden sind und dass dies auch auf die Mengen der Reihe $(**)$ zutrifft. Bilden nun die unendlich vielen Mengen, die beim Aufbau der Reihe $(*)$ (oder auch der Reihe $(**)$) auftreten, wieder eine Menge? Naiv gesehen ist das der Fall. Doch sollten wir uns bewusst sein, dass unsere Vorstellung hier einen weiten Schritt tut, den Schritt von einer potentiell beliebig lang fortsetzbaren Reihe untereinander verschiedener Mengen zur aktual unendlichen Gesamtheit aller Glieder. Die bisherigen Axiome gestatten es noch nicht, diesen Schritt nachzuvollziehen. Man kann sich das naiv auf folgende Weise klarmachen: Das „Universum“ $\mathfrak{U}_1$ bestehe aus den sog. erblich endlichen Mengen, d. h. den Mengen x, für die gilt: x ist endlich, die Elemente von x sind endlich, die Elemente der Elemente von x sind endlich, usf. So sind die Mengen der Reihe $(*)$, aber auch die der Reihe $(**)$, erblich endlich, gehören also zu $\mathfrak{U}_1$. Ferner gehören mit x und y auch $x \cup y$, $\bigcup x$, jede Teilmenge von x und $\mathrm{Pot}(x)$ zu $\mathfrak{U}_1$. Hieraus ergibt sich leicht, dass die bisherigen Axiome in $\mathfrak{U}_1$ gelten. *Doch alle Mengen, die* $\mathfrak{U}_1$ *enthält, sind endlich*, die Menge $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \ldots\}$ kann also nicht zu $\mathfrak{U}_1$ gehören. Wenn wir im nachfolgenden Unendlichkeitsaxiom die Existenz einer (im naiven Sinn) unendlichen Menge fordern, verstärken wir somit in einschneidender Weise das bisherige Axiomensystem.

Das Unendlichkeitsaxiom sichert die Existenz einer Menge, die $\emptyset$ enthält und mit jedem z auch $z \cup \{z\}$. Eine solche Menge enthält alle Glieder der Reihe $(**)$ und ist daher (im naiven Sinn) *unendlich*. Dass wir uns nicht auf die etwas einfacher gebaute Reihe $(*)$ stützen, hat eine Reihe von Gründen, die später deutlich werden (vgl. z. B. Aufgabe 4.4.4).

Unendlichkeitsaxiom (Inf):

Es gibt eine Menge, die $\emptyset$ enthält und mit jedem z auch $z \cup \{z\}$.

Also:

$$\exists x \left(\emptyset \in x \wedge \forall z \, (z \in x \to z \cup \{z\} \in x)\right).$$

Eine Menge, wie sie in **Inf** gefordert wird, nennt man *induktiv*:

4.1 Definition. x ist *induktiv* $:\leftrightarrow \; \emptyset \in x \wedge \forall z \left(z \in x \to z \cup \{z\} \in x\right)$.

Inf besagt also gerade, dass es eine induktive Menge gibt. Eine einfache Anwendung von **Aus** führt uns auf die kleinste induktive Menge. Sei hierzu w eine – nach **Inf** existierende – induktive Menge. Dann besteht die Menge

$$\left\{z \in w \mid \forall y \, (y \text{ induktiv} \to z \in y)\right\}$$

aus den Mengen, die Element aller induktiven Mengen sind. Sie lässt sich in der Form

$$\left\{z \mid \forall y \, (y \text{ induktiv} \to z \in y)\right\}$$

schreiben. Wir führen für sie das Konstantensymbol ω ein:

4.2 Definition. $\omega \; := \; \{z \mid \forall y \, (y \text{ induktiv} \to z \in y)\}$.

Offenbar ist ω Teilmenge einer jeden induktiven Menge. Eine einfache Überlegung liefert:

4.3 Satz. *Die Menge ω ist induktiv.*

Zunächst ist nämlich $\emptyset$ Element aller induktiven Mengen und daher auch von ω. Und ist z ein Element von ω, so liegt z in allen induktiven Mengen, mithin auch $z \cup \{z\}$, also ist $z \cup \{z\}$ ein Element von ω. $\dashv$[9]

Die Menge ω ist also die im Sinne von $\subseteq$ kleinste induktive Menge. Für die Intuition ist es hilfreich, wenn wir sie uns als die Menge der Mengen $\emptyset, \{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots$ aus $(**)$ vorstellen und damit ihre Definition als eine Präzisierung der Pünktchenschreibweise $\omega = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots\}$.

Bereits in §2 haben wir darauf hingewiesen, dass einige der Axiome, etwa **$\cup$-Ax** und **$\bigcup$-Ax**, pragmatisch bedingt und eher zufällig zu ihrer Rolle gekommen sein mögen. Ein ähnlicher Eindruck mag sich bei **Inf** aufdrängen und als besonders gravierend empfunden werden, wird doch **Inf** das einzige Axiom sein, welches die Existenz unendlicher Mengen sicherstellt und damit die ganze Kraft, aber auch die ganzen Probleme der Mengenlehre im Transfiniten zur Entfaltung bringt. Wie bereits mehrfach angekündigt, werden wir uns in X. 3 bemühen, diese Bedenken zu zerstreuen. Mildernd mag schon hier wirken, dass **Inf** gerade die Existenz der Menge ω sichert, die später, in Kapitel V, sehr zwanglos die Rolle der Menge der natürlichen Zahlen übernehmen wird. Auch die Bevorzugung der Reihe $(**)$ gegenüber der Reihe $(*)$ ist ohne Belang; vgl. hierzu Aufgabe 4.4.2.

4.4 Aufgaben.

4.4.1 Man bringe die Definition 4.2 von ω auf die Form $\omega = y \leftrightarrow \varphi(y)$, wobei $\varphi(y)$ ein (rein mengentheoretischer) Ausdruck ist.

4.4.2 Man formuliere ein auf die Reihe $(*)$ zugeschnittenes Unendlichkeitsaxiom $\mathbf{Inf_Z}$ und zeige damit die Existenz einer bzgl. $\subseteq$ kleinsten „Z-induktiven“ Menge $\omega_{\mathbf{Z}}$. $\mathbf{Inf_Z}$ ist das Unendlichkeitsaxiom, wie es Zermelo in *1908b* formuliert hat. – **Inf** und $\mathbf{Inf_Z}$ lassen sich auf der Basis der restlichen Axiome als gleichwertig nachweisen.

4.4.3 Man zeige durch metasprachliche Induktion, dass die Mengen der Reihe $(*)$ untereinander verschieden sind. Für die Reihe $(**)$ ergibt sich das entsprechende Resultat aus der nächsten Aufgabe.

4.4.4 Es sei $\mathbf{0} := \emptyset$, und für $n \geq 0$ sei $\mathbf{n+1} := \mathbf{n} \cup \{\mathbf{n}\}$, d. h. $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots$ ist gerade die Reihe $(**)$. Man zeige für alle n : $\exists^{=n} x\, x \in \mathbf{n}$.

4.4.5 Man zeige für alle n: $\exists^{=2^n} x\, x \in \mathrm{Pot}(\mathbf{n})$. (Vgl. hierzu Aufgabe 3.5.1).

[9] „$\dashv$“ markiert fortan das Ende eines Beweises.

§5 Ersetzung

Fraenkel und Skolem bemerkten 1922 unabhängig voneinander, dass man mit den bisherigen Axiomen nicht die Existenz einer Menge beweisen kann, welche die Mengen ω, $\mathrm{Pot}(\omega)$, $\mathrm{Pot}(\mathrm{Pot}(\omega))$, ... als Elemente enthält (einen Nachweis verlangt Aufgabe XI.1.5.2(iii)). Sie schlossen diese Lücke durch die Einführung eines neuen Schemas von Axiomen, denen bereits Cantor Aufmerksamkeit geschenkt hatte und die, neben den Axiomen der Aussonderung, weitere Fälle des Fregeschen Komprehensionsaxioms erfassen. Anschaulich besagen sie: *Ersetzt man die Elemente einer Menge durch ihre Werte unter einer (mit Parametern definierbaren) Operation, so entsteht wieder eine Menge.* Denken wir uns die Operation durch den Ausdruck $\varphi(x, y, \overset{n}{x})$ mit Parametern $x_1, \ldots, x_n$ definiert, werden wir zu der folgenden Formulierung geführt:

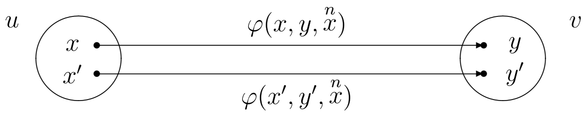
Schema der Ersetzungsaxiome (Ers): Das Schema enthält zu jedem Ausdruck der Gestalt $\varphi(x, y, \overset{n}{x})$ aus der ursprünglichen Mengensprache das Axiom

Für alle $x_1, \ldots, x_n$: Wenn es zu jedem x genau ein y gibt mit $\varphi(x, y, \overset{n}{x})$, so gibt es zu jedem u ein v, das genau aus den y besteht, für die es ein $x \in u$ gibt mit $\varphi(x, y, \overset{n}{x})$.

Also:

$$\forall \overset{n}{x} \Big(\forall x\, \exists^{=1} y\, \varphi(x, y, \overset{n}{x}) \ \to\ \forall u\, \exists v\, \forall y\, \big(y \in v \leftrightarrow \exists x (x \in u \wedge \varphi(x, y, \overset{n}{x}))\big)\Big).$$

Bildlich:



(Es müssen u und v nicht disjunkt sein, und für $x \neq x'$ kann $y = y'$ gelten.)

Also:

5.1 (Schema) Für jedes $\varphi(x, y, \overset{n}{x})$ gilt:

$$\forall \overset{n}{x} \Big(\forall x\, \exists^{=1} y\, \varphi(x, y, \overset{n}{x}) \ \to\ \forall u\, \exists v\ v = \big\{y \mid \exists x \,\big(x \in u \wedge \varphi(x, y, \overset{n}{x})\big)\big\}\Big).$$

Hieraus gewinnen wir die oben gegebene anschauliche Formulierung zurück: Gilt $\forall x \exists^{=1} y\, \varphi(x, y, \overset{n}{x})$ und bezeichnen wir die dadurch (mit den Parametern $x_1, \ldots, x_n$) definierte Operation mit F, so lässt sich die Aussage aus 5.1 schreiben als

$$\forall u \exists v\ v = \{F(x) \mid x \in u\}.$$

Diese Betrachtungsweise erklärt auch den Namen der Axiome. Wählen wir als Operation z. B. die Abbildung, die eine Menge x in $\{x\}$ überführt, oder, für jeweils festes w, die Abbildung, die eine Menge x in $x \cap w$ überführt, erhalten wir:

$$\forall u \exists v\, v = \big\{\{x\} \mid x \in u\big\} \quad \text{und} \quad \forall w\, \forall u \exists v\, v = \big\{x \cap w \mid x \in u\big\}$$

(vgl. Aufgabe 3.5.4). Das motivierende Potenzmengenbeispiel zu Beginn dieses Abschnitts behandeln wir in V. 2; vgl. Aufgabe V.2.5.5.

Das Schema der Ersetzungsaxiome findet sich in der Literatur in mehreren Varianten; vgl. dazu die Aufgabe 5.2.2. Es macht einen Teil der vorangehenden Axiome überflüssig; vgl. dazu die Aufgaben 5.2.3 und 5.2.4.

5.2 Aufgaben.

5.2.1 Man zeige, dass die Ersetzungsaxiome Spezialfälle des Fregeschen Komprehensionsaxioms sind.

5.2.2 Man zeige auf der Basis der bisherigen Axiome ohne **Ers**, dass man zu äquivalenten Formulierungen der Ersetzungsaxiome kommt, wenn man die Bestandteile der Gestalt $\forall x\, \exists^{=1} y \varphi(x, y, \overset{n}{x})$ ersetzt durch
(i) $\forall x\, \exists^{\leq 1} y \varphi(x, y, \overset{n}{x})$;
oder durch
(ii) $\forall x \exists w \forall y \big(\varphi(x, y, \overset{n}{x}) \to y \in w\big)$
(„Zu jedem x gibt es nur „mengen-viele“ y mit $\varphi(x, y, \overset{n}{x})$“).

5.2.3 Man beweise $\bigcup$**-Ax** aus den bisherigen Axiomen ohne $\bigcup$**-Ax**. (Hinweis: Man beweise das Paarmengenaxiom.)

5.2.4 Das Axiomensystem **A** entstehe aus dem System der bisherigen Axiome durch Fortlassen von **Aus** und durch Ersetzen von **Ex** durch $\exists x \neg \exists z\, z \in x$ („Existenz der leeren Menge“). Man zeige, dass **Aus** in **A** beweisbar ist.

§6 Das Fundierungsaxiom

Nach den eher pragmatisch orientierten Ersetzungsaxiomen wenden wir uns im folgenden wieder einem für die Mengenvorstellung wesentlichen Aspekt zu. Trotz der Typenfreiheit, die dem Zermeloschen Vorgehen zugrunde liegt, erwarten wir weiterhin, dass eine Menge ein „höherer Organismus“ ist als die Elemente, die sie bilden. Eine Menge x mit $x \in x$ würde dieser Vorstellung nicht genügen, ebenso wenig würden dies zwei Mengen x und y mit $x \in y$ und $y \in x$ tun. Auch absteigende Ketten $\ldots \in x_2 \in x_1 \in x_0$ würden nicht in dieses Bild passen, dem gemäß sich das Universum hierarchisch gegliedert über einem Fundament „einfachster“ Mengen erheben sollte. Nachweisbar schließen die bisherigen Axiome solche Anomalien nicht aus. Dies leistet erst das auf Dimitri Mirimanow (1917), Fraenkel (1922), von Neumann (1925) und Zermelo (*1930*) zurückgehende

Fundierungsaxiom (**Fund**):

Jede nicht leere Menge besitzt ein $\in$-minimales Element.

Also:

$$\forall X\Big(X \neq \emptyset \;\rightarrow\; \exists x\,\big(x \in X \wedge \neg\exists y\,(y \in X \wedge y \in x)\big)\Big),$$

d. h.

$$\forall X\big(X \neq \emptyset \;\rightarrow\; \exists x\,(x \in X \wedge x \cap X = \emptyset)\big).$$

Dabei präzisiert die genaue Formulierung, was wir unter einem $\in$-minimalen Element einer Menge verstehen. In Bezug auf die motivierenden Überlegungen können wir jetzt zeigen:

6.1 Satz (Schema). *Für alle n gilt*:

$$\neg\exists x_0 \ldots x_n\,(x_0 \in x_1 \wedge \ldots \wedge x_{n-1} \in x_n \wedge x_n \in x_0).$$

Beweis. $n = 0$: Wir müssen zeigen, dass $\forall x\, x \notin x$. Sei dazu x gegeben. Dann hat $\{x\}$ nach **Fund** ein $\in$-minimales Element; dies kann nur x sein. Also ist $x \cap \{x\} = \emptyset$ und daher $x \notin x$.

$n \geq 1$: Wären $x_0, \ldots, x_n$ Mengen mit $x_0 \in x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \in x_0$, so könnte $\{x_0, \ldots, x_n\}$ kein $\in$-minimales Element besitzen; z. B. fiele x_0 als $\in$-minimales Element aus, da $x_n \in x_0 \cap \{x_0, \ldots, x_n\}$. ⊣

Intuitiv ist klar, dass auch keine absteigende Kette $\ldots \in x_2 \in x_1 \in x_0$ existieren kann. Sonst könnten wir ähnlich mit der Menge $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ schließen. In V. 2 sind wir so weit, dass wir dieses anschauliche Vorgehen präzise durchführen können; vgl. dazu Aufgabe V.2.5.4.

In VII. 3 kommen wir noch einmal ausführlich auf das Fundierungsaxiom zurück. Wie wir dort genauer sehen werden, stellt **Fund** sicher, dass das Universum hierarchisch gegliedert und „von unten nach oben“ aufgebaut ist. Es kommt daher voll der Aufgabe nach, die wir ihm zugedacht haben.

Die bisher formulierten Axiome bzw. Axiomenschemata

Ex, **Ext**, **Aus**, $\cup$**-Ax**, $\bigcup$**-Ax**, **Pot**, **Inf**, **Ers** und **Fund**

bilden das *Axiomensystem* **ZF** *der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre ohne Auswahlaxiom.*

§7 Das Auswahlaxiom

Das Auswahlaxiom ist das letzte Axiom, das wir vorstellen. Erst in Kapitel VIII werden wir uns eingehender mit ihm befassen. Zunächst eine intuitive Hinführung.

X_0, X_1, X_2 seien Mengen nicht leerer, zueinander disjunkter Mengen[10] reeller Zahlen,

$$\begin{aligned} X_0 &= \{\ldots, [-2,-1\rangle, [-1,0\rangle, [0,1\rangle, [1,2\rangle, \ldots\}, \\ X_1 &= \{A_0, A_1, A_2\} \text{ mit verschiedenen } A_l \text{ und } A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \mathbb{R}, \\ X_2 &= \{\{s \in \mathbb{R} \mid s - r \text{ ist rational}\} \mid r \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Dabei bezeichne $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen. Wir können X_0, X_1 und X_2 jeweils als die Menge der Äquivalenzklassen einer Äquivalenzrelation über $\mathbb{R}$ auffassen. Für X_2 ist das die Relation, in der zwei reelle Zahlen stehen, wenn ihre Differenz rational ist. Besitzen diese Äquivalenzrelationen Repräsentantensysteme?

Im Falle von X_0 können wir konkret ein Repräsentantensystem angeben, nämlich $\{s \mid s \text{ ist kleinstes Element einer Menge aus } X_0\}$, die Menge der ganzen Zahlen. Auch im Falle von X_1 können wir die Existenz eines Repräsentantensystems zeigen: Da die $A_i \neq \emptyset$ und disjunkt zueinander sind, haben wir

$$\exists z_0 z_1 z_2\, (z_0 \in A_0 \wedge z_1 \in A_1 \wedge z_2 \in A_2)$$

und

$$\begin{aligned} &\forall z_0 z_1 z_2\, (z_0 \in A_0 \ \wedge \ z_1 \in A_1 \ \wedge \ z_2 \in A_2 \\ &\quad \to \{z_0, z_1, z_2\} \cap A_i \text{ ist einelementig für } i = 0, 1, 2), \end{aligned}$$

und damit sofort die Existenz. Sobald wir die reellen Zahlen mengentheoretisch definiert haben werden, können wir diese Betrachtungen sogar exakt auf der Basis von **ZF** durchführen. Anders verhält es sich mit X_2. In diesem Fall kann man auf der Basis von **ZF** nachweislich kein Repräsentantensystem definieren, und auch die bloße Existenz eines Systems kann nicht bewiesen werden. Intuitiv erscheint die Vorstellung, man könne aus jeder Äquivalenzklasse von X_2 ein Element *auswählen* und die ausgewählten Elemente dann zu einer Menge, eben einem Repräsentantensystem, zusammenfassen, dennoch naheliegend. Wir präzisieren sie in einem neuen Axiom, das auf Zermelo (*1904*) zurückgeht. Zermelo spricht von einem „logischen Prinzip, das sich nicht auf ein noch einfacheres zurückführen lässt, aber in der mathematischen Deduktion überall unbedenklich angewendet wird“. In der Fassung von *Zermelo 1908a* lautet es:

[10] Zwei Mengen x und y sind zueinander *disjunkt* genau dann, wenn $x \cap y = \emptyset$.

Auswahlaxiom (**AC**, **A**xiom of **C**hoice):

Zu jeder Menge X von nicht leeren, zueinander disjunkten Mengen gibt es eine Menge, die von jedem Element von X genau ein Element enthält.

Also:

$$\forall X\Big(\forall x \forall y\left(x \in X \wedge y \in X \rightarrow x \neq \emptyset \wedge (x = y \vee x \cap y = \emptyset)\right) \\ \rightarrow \exists Y \forall x\left(x \in X \rightarrow \exists z\, Y \cap x = \{z\}\right)\Big).$$

Sei eine Menge X entsprechend gegeben und Y eine Menge, wie sie durch **AC** garantiert wird. Dann gilt für $Y' := Y \cap (\bigcup X)$, dass $Y' \cap x$ für alle $x \in X$ einelementig ist und dass $Y' = \bigcup\{Y' \cap x \mid x \in X\}$, dass also Y' nur aus den „ausgewählten" Elementen besteht. Wir nennen eine solche Menge Y' eine *Auswahlmenge* für X. (Im Falle von $X = X_2$ ist sie ein Repräsentantensystem, wie wir es suchen.) Damit können wir **AC** so formulieren:

Zu jeder Menge von nicht leeren, zueinander disjunkten Mengen existiert eine Auswahlmenge.

Das Auswahlaxiom gibt keine Auskunft darüber, wie im konkreten Fall, etwa bei X_2, eine Auswahlmenge aussieht. Dieser „inkonstruktive" Charakter hatte zur Folge, dass es nur zögernd akzeptiert wurde. In Kapitel VIII werden wir ausführlich auf die Diskussionen eingehen, die es verursacht hat.

Wir haben jetzt alle Axiome formuliert. Sie bilden das *Zermelo-Fraenkelsche Axiomensystem*

$$\mathbf{ZFC} = \mathbf{ZF} + \mathbf{AC}$$

der Mengenlehre mit Auswahlaxiom, kurz: das *Zermelo-Fraenkelsche Axiomensystem*. Wie wir bereits betont haben, sehen wir eine der wesentlichen Aufgaben darin, dieses System inhaltlich zu rechtfertigen und seine Tragweite abzuschätzen. Zunächst bedarf es dazu natürlich einer Auslotung dessen, was sich auf der Basis von **ZFC** beweisen lässt. So steht denn in den nächsten Kapiteln der Erwerb mengentheoretischer Kenntnisse im Vordergrund.

IV

Relationen und Funktionen

> Wie kann man von einer weitläuftigen Maschine, deren kleinste Teile auf eine einzige große Wirkung berechnet sind, eine Probe geben?

Im Anschluss an die Formulierung des Extensionalitätsaxioms haben wir dargelegt, dass in unserem Universum kein Platz für Urelemente ist und dass wir daher, möchten wir mathematische Fragestellungen behandeln, nicht umhin kommen, für die Urelemente der Mathematik wie die natürlichen oder die reellen Zahlen, aber auch für die übrigen Objekte wie Eigenschaften, Funktionen oder Strukturen, einen adäquaten mengentheoretischen Ersatz zur Verfügung zu stellen. Wir wollen das in diesem Kapitel für einige Begriffe im Umfeld von Relationen und Funktionen tun, im nächsten Kapitel dann für die natürlichen Zahlen und, stärker gerafft, für die restlichen Zahlbereiche.

In diesem Kapitel benötigen wir **Ers**, **Fund** und **AC** nicht.

§1 Relationen

Geordnete Paare

Gewöhnlich stellt man sich in der Mathematik ein *geordnetes Paar* (r, s) reeller Zahlen als einen Punkt der euklidischen Ebene vor. Man bildet aber auch geordnete Paare, z. B. geordnete Paare von Funktionen, mit denen man keine bildhafte Darstellung mehr verbinden kann. *Was aber sind nun geordnete Paare*? In Abschnitt I. 2 haben wir die entsprechende Frage für die natürlichen Zahlen gestellt, und die Antwort, die wir jetzt geben, gleicht derjenigen, die wir dort vorgebracht haben: Es ist für die Mathematik letztlich ohne Bedeutung, was geordnete Paare *wirklich* sind; wichtig ist allein, dass das geordnete Paar (a, b) zweier Objekte a und b diese Objekte und ihre Reihenfolge eindeutig festlegt. Wenn es uns also gelingt, eine zweistellige Operation F zu definieren,

H.-D. Ebbinghaus, *Einführung in die Mengenlehre*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-63866-8_4

für die

$$(*) \qquad \forall xyuv\,\big(F(x,y) = F(u,v) \;\rightarrow\; x = u \wedge y = v\big)$$

gilt, so liefert

$$(**) \qquad (x,y) \;:=\; F(x,y)$$

im Prinzip eine den mathematischen Bedürfnissen genügende Definition von geordneten Paaren, eben einen „adäquaten mengentheoretischen Ersatz“, und wir *können*, wenn wir möchten, $F(x,y)$ als das *wirkliche* geordnete Paar von x und y ansehen. Die Willkür, die darin liegen würde, tritt zutage, wenn wir uns klarmachen (vgl. Aufgabe 1.20.1), dass es viele Operationen F gibt, die der Eindeutigkeitsforderung $(*)$ genügen. Mengentheoretische Definitionen, wie wir sie hier anstreben (und dies gilt auch für das nächste Kapitel), verfolgen also keine ontologischen Ziele.

Wir wählen die Paarmengenbildung nach Kazimierz Kuratowski (1921):

1.1 Definition. $(x,y) \;:=\; \big\{\{x\},\{x,y\}\big\}$.

Das Analogon von $(*)$ ist erfüllt:

1.2 Satz. $(x,y) = (u,v) \;\rightarrow\; x = u \wedge y = v$.

Beweis. Sei $(x,y) = (u,v)$, also $\{\{x\},\{x,y\}\} = \{\{u\},\{u,v\}\}$. Falls $x = y$, ist $\{x\} = \{x,y\} = \{u\} = \{u,v\}$, also $x = u$ und $y = v$. Falls $x \neq y$, ist $\{x\} = \{u\}$ und $\{x,y\} = \{u,v\}$, also $x = u$ und $y = v$. ⊣

Die Eigenschaft, ein geordnetes Paar zu sein, ist ein einstelliges Prädikat:

1.3 Definition. x *ist geordnetes Paar* $\;:\leftrightarrow\; \exists uv\, x = (u,v)$.

Neben der für den Gebrauch allein wesentlichen Beziehung aus Satz 1.2 haben geordnete Paare auf Grund ihrer eigentümlichen Bauweise einige Eigenschaften mehr zufälligen Charakters wie $(x,x) = \{\{x\}\}$, die zuweilen für theoretische Überlegungen von technischem Wert sind. Wir erwähnen hier

1.4 Bemerkung. $u \in x \wedge v \in y \;\rightarrow\; (u,v) \in \mathrm{Pot}(\mathrm{Pot}(x \cup y))$.

Beweis. Seien $u \in x$ und $v \in y$. Dann sind $\{u\},\{u,v\} \subseteq x \cup y$, also $\{u\},\{u,v\} \in \mathrm{Pot}(x \cup y)$ und daher $(u,v) \in \mathrm{Pot}(\mathrm{Pot}(x \cup y))$. ⊣

Die Verallgemeinerung der vorangehenden Überlegungen auf beliebige n-Tupel bereitet keine Schwierigkeiten:

1.5 Definition. (i) $(x) \;:=\; x$.

(ii) Für $n \geq 1$ sei $(x_0,\ldots,x_n) \;:=\; \big((x_0,\ldots,x_{n-1}),x_n\big)$.

Durch metasprachliche Induktion ergibt sich leicht (vgl. Satz III.3.4):

1.6 Satz (Schema)**.** *Für $n \geq 0$ gilt*:

$$(x_0, \ldots, x_n) = (y_0, \ldots, y_n) \ \leftrightarrow\ x_0 = y_0 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n.$$

Wir werden uns im Folgenden meist auf den Fall $n = 2$ beschränken.

Projektionen

Die *Projektionsoperationen*, die jedem geordneten Paar die linke bzw. die rechte Komponente zuordnen, führen wir ein in

1.7 Definition.

(i) $$\pi_l(x) := \begin{cases} u, & \text{falls } \exists v\, x = (u, v), \\ \emptyset, & \text{falls } x \text{ kein geordnetes Paar;} \end{cases}$$

(ii) $$\pi_r(x) := \begin{cases} v, & \text{falls } \exists u\, x = (u, v), \\ \emptyset, & \text{falls } x \text{ kein geordnetes Paar.} \end{cases}$$

Offensichtlich gilt dann

1.8 Bemerkung. $\big(\pi_l(u, v), \pi_r(u, v)\big) = (u, v)$.

In I. 2 haben wir am Beispiel der topologischen Räume gesehen, in welch starkem Maße die Mathematik von mengentheoretischen Begriffen Gebrauch macht. Eine der Aufgaben, die wir uns gestellt haben, besteht darin, diese mengentheoretischen Begriffe auf einer axiomatischen Basis bereitzustellen. Wir wollen nun – wieder am Beispiel der topologischen Räume – demonstrieren, dass wir mit der Arbeit an dieser Aufgabe einen zwar bescheidenen, doch recht brauchbaren Anfang gemacht haben. Hierzu stellen wir einer der üblichen mathematischen Definitionen für topologische Räume eine mengentheoretisch exakte gegenüber.

Die übliche Definition: Ein *topologischer Raum* $(\mathcal{T}, \mathcal{O})$ besteht aus einer Menge $\mathcal{T}$ und einer Menge $\mathcal{O}$ von Teilmengen von $\mathcal{T}$, für die gilt:

(α) $\mathcal{T} \in \mathcal{O}$;
(β) für alle Teilsysteme $\mathcal{O}'$ von $\mathcal{O}$ ist $\bigcup \mathcal{O}' \in \mathcal{O}$;
(γ) mit O_0, $O_1 \in \mathcal{O}$ ist auch $O_0 \cap O_1 \in \mathcal{O}$.

Eine mögliche mengentheoretische Definition:

X ist ein *topologischer Raum* $:\leftrightarrow$ X ist geordnetes Paar

$$\begin{aligned} &\wedge\ \pi_r(X) \subseteq \mathrm{Pot}(\pi_l(X)) \wedge \pi_l(X) \in \pi_r(X) \\ &\wedge\ \forall Z\big(Z \subseteq \pi_r(X) \to \bigcup Z \in \pi_r(X)\big) \\ &\wedge\ \forall xy\big(x \in \pi_r(X) \wedge y \in \pi_r(X) \to x \cap y \in \pi_r(X)\big). \end{aligned}$$

Die Eigenschaft, ein topologischer Raum zu sein, ist also ein einstelliges mengentheoretisches Prädikat.

Kartesische Produkte

1.9 Definition. $x \times y := \{z \in \mathrm{Pot}(\mathrm{Pot}(x \cup y)) \mid z$ ist geordnetes Paar mit $\pi_l(z) \in x \wedge \pi_r(z) \in y\}$.

Nach Bemerkung 1.4 ist $x \times y = \{(u, v) \mid u \in x, v \in y\}$. Wir nennen $x \times y$ das *kartesische* oder *direkte Produkt* von x und y und die Mengen $x^1 := x$ und $x^{n+1} := x^n \times x$ (für $n \geq 1$) *kartesische Potenzen* von x. Falls $x = \emptyset$ oder $y = \emptyset$, ist $x \times y = \emptyset$.

Relationen

Die $\in$- und die $\subseteq$-Beziehung sind Beziehungen (sogar Prädikate) über dem Universum; sie sind selbst keine Mengen. Anders verhält es sich z. B. bei der (vorerst naiv aufgefassten) Kleiner-Beziehung $<_{\mathbb{Q}}$ über der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen. Sie ist eine Beziehung *über einer Menge*, nämlich über $\mathbb{Q}$, und zudem ein Objekt einer mathematischen Theorie, z. B. der Theorie der Ordnungen. Wenn wir die mengentheoretische Darstellung der Mathematik konsequent weiterentwickeln wollen, werden wir $<_{\mathbb{Q}}$ wie alle Objekte der Mathematik als eine *Menge* auffassen müssen. Wie soll diese Menge aussehen? Der extensionale Standpunkt erschließt einen natürlichen Weg zu einer Antwort. Extensional gesehen interessiert ja lediglich der *Umfang* von $<_{\mathbb{Q}}$, und der ist bestimmt durch die Paare (ϱ, σ) rationaler Zahlen ϱ und σ mit $\varrho <_{\mathbb{Q}} \sigma$. Wir können daher $<_{\mathbb{Q}}$ mit der Menge dieser Paare gleichsetzen, oder besser: als die Menge dieser Paare *definieren*. Wir nennen $<_{\mathbb{Q}}$ dann eine *Relation*. Entsprechend setzen wir fest:

1.10 Definition. (i) Die Menge x *ist eine Relation* $:\leftrightarrow$ x ist eine Menge von geordneten Paaren.

(ii) Die Menge x *ist eine Relation über der Menge* y $:\leftrightarrow$ $x \subseteq y \times y$.

Relationen sind also Mengen und von daher streng zu unterscheiden von den (Prädikaten als beschreibbaren) *Beziehungen zwischen den Mengen des Universums*. Es bestehen allerdings gewisse Zusammenhänge, auf die wir am Ende dieses Abschnitts zurückkommen werden.

Genauer sollten wir von Relationen als von *zweistelligen* Relationen sprechen und dann auch *n-stellige* Relationen als Mengen von n-Tupeln definieren. Die Stellenzahl 2 spielt jedoch bei unseren zukünftigen Überlegungen eine dominierende Rolle.

Beispiele für Relationen sind die „leere Relation“ $\emptyset$, die Menge $\{(\emptyset, \mathrm{Pot}(\emptyset))\}$ oder die „Allrelation“ $x \times x$ über der Menge x und allgemeiner kartesische

Produkte. Die *Identitätsrelation* id_x und die $\in$-*Relation* $\in_x$ über einer Menge x legen wir fest durch

1.11 Definition. (i) $\mathrm{id}_x := \big\{z \in x \times x \mid \pi_l(z) = \pi_r(z)\big\}$;

(ii) $\in_x := \big\{z \in x \times x \mid \pi_l(z) \in \pi_r(z)\big\}$.

Suggestiver können wir schreiben:

$$\mathrm{id}_x = \big\{(u,u) \mid u \in x\big\} \text{ und } \in_x = \big\{(u,v) \mid u \in x \wedge v \in x \wedge u \in v\big\}.$$

Jede Relation ist Teilmenge eines kartesischen Produktes. Um das einzusehen, nutzen wir aus, dass zu jeder Relation r die Menge ihrer linken Komponenten (das *Vorfeld* oder der *Definitionsbereich von* r, $\mathrm{Def}(r)$) und die Menge ihrer rechten Komponenten (das *Nachfeld* oder der *Bildbereich* von r, $\mathrm{Bild}(r)$) existieren. Wir setzen fest:

1.12 Definition.

(i) $$\mathrm{Def}(x) := \begin{cases} \{\pi_l(z) \mid z \in x\}, & \text{falls } x \text{ eine Relation ist,} \\ \emptyset, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(ii) $$\mathrm{Bild}(x) := \begin{cases} \{\pi_r(z) \mid z \in x\}, & \text{falls } x \text{ eine Relation ist,} \\ \emptyset, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(iii) $$\mathrm{Feld}(x) := \mathrm{Def}(x) \cup \mathrm{Bild}(x).$$

Mit **Ers** sehen wir sofort, dass in (i) und (ii) einstellige Operationen definiert werden. Doch lässt sich dies auch ohne Benutzung von **Ers** zeigen. Leicht ergibt sich:

$$(u,v) \in x \rightarrow u, v \in \bigcup\bigcup x;$$

also ist $\{\pi_l(z) \mid z \in x\} = \{u \in \bigcup\bigcup x \mid \exists v\,(u,v) \in x\}$, falls x eine Relation ist; entsprechend können wir bei $\mathrm{Bild}(x)$ argumentieren.

Offensichtlich gilt:

1.13 Bemerkung. (i) $x, y \neq \emptyset \rightarrow \mathrm{Def}(x \times y) = x \wedge \mathrm{Bild}(x \times y) = y$.

(ii) r *Relation* $\rightarrow r \subseteq \mathrm{Def}(r) \times \mathrm{Bild}(r)$, also r *Relation über* $\mathrm{Feld}(r)$.

Ordnungsrelationen

Sie gehören zu den wichtigsten Relationen. Man unterscheidet solche im Sinne von „kleiner" (kurz: i.S.v. $<$) und solche im Sinne von „kleiner oder gleich" (kurz: i.S.v. $\leq$). In der Definition schreiben wir, wie auch häufig später, „urv" statt „$(u,v) \in r$". Man vgl. hierzu die gebräuchliche Schreibweise „$\rho <_{\mathbb{Q}} \sigma$" statt „$(\rho,\sigma) \in <_{\mathbb{Q}}$".

1.14 Definition. (i) r ist eine *Ordnungsrelation i.S.v.* $<$ *über* a
$:\leftrightarrow$ r ist eine Relation über a mit den folgenden Eigenschaften:

(α) r ist *irreflexiv* , d. h. es gibt kein u mit uru;
(β) r ist *transitiv*, d. h. für alle u, v, w mit urv und vrw ist urw;
(γ) r ist *konnex über* a, d. h. für je zwei Elemente u und v von a gilt urv oder $u = v$ oder vru, d. h. je zwei Elemente von a sind bzgl. r *vergleichbar.*

(ii) r ist eine *Ordnungsrelation i.S.v.* $<$, wenn r eine Ordnungsrelation i.S.v. $<$ über Feld(r) ist.

Die Relation $<_{\mathbb{Q}}$ ist ein naives Beispiel für eine Ordnungsrelation i.S.v. $<$; sie *ordnet* $\mathbb{Q}$. Die leere Menge $\emptyset$ ist eine Ordnungsrelation i.S.v. $<$ über $\{\emptyset\}$ und über $\emptyset$.

1.15 Definition. (i) r ist eine *Ordnungsrelation i.S.v.* $\leq$ *über* a
$:\leftrightarrow$ r ist eine Relation über a mit den folgenden Eigenschaften:

(α) r ist *reflexiv über* a, d. h. es ist $\mathrm{id}_a \subseteq r$;
(β) r ist *antisymmetrisch*, d. h. für alle u, v mit urv und vru ist $u = v$;
(γ) r ist *transitiv*;
(δ) r ist *konnex über* a.

(ii) r ist eine *Ordnungsrelation i.S.v.* $\leq$, wenn r eine Ordnungsrelation i.S.v. $\leq$ über Feld(r) ist.

Die Punkte (α) und (δ) in (i) besagen gerade, dass je zwei Elemente u und v von a in dem Sinne vergleichbar sind, dass $urv \vee vru$ gilt.

Die Relation $\leq_{\mathbb{Q}}$ ist ein naives Beispiel für eine Ordnungsrelation i.S.v. $\leq$; sie *ordnet* $\mathbb{Q}$. Die leere Menge $\emptyset$ ist eine Ordnungsrelation i.S.v. $\leq$ über $\emptyset$, und $\{(\emptyset, \emptyset)\}$ ist eine solche über $\{\emptyset\}$.

Äquivalenzrelationen

Auch sie lassen sich jetzt zwanglos in unserem mengentheoretischen Rahmen präzisieren:

1.16 Definition. (i) r ist eine *Äquivalenzrelation über* a
$:\leftrightarrow$ r ist eine Relation über a mit den folgenden Eigenschaften:

(α) r ist *reflexiv über* a;
(β) r ist *symmetrisch*, d. h. für alle u, v mit urv gilt vru;
(γ) r ist *transitiv.*

(ii) r ist eine *Äquivalenzrelation*, wenn r eine Äquivalenzrelation über Feld(r) ist.

Beispiele für Äquivalenzrelationen sind $x \times x$ und id_x. Ein naives Beispiel ist die Relation über $\mathbb{R}$, die aus den geordneten Paaren $(\rho, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ besteht, für die $(\rho - \sigma)$ rational ist (vgl. X_2 in III. 7).

Es sei r eine Äquivalenzrelation über a, insbesondere also $a = \mathrm{Feld}(r)$. Dann können wir zu *jedem* x die Menge $[x]_r := \{y \in a \mid xry\}$ bilden. Für $x \in a$ heißt $[x]_r$ die *Äquivalenzklasse* von x bzgl. r (sie ist eine Menge). Man kann jetzt leicht zeigen:

1.17 Bemerkung. (i) $x \in a \to x \in [x]_r$.
(ii) $[x]_r \cap [y]_r \neq \emptyset \to [x]_r = [y]_r$.
(iii) *Es existiert die Menge* $a/r := \{[x]_r \mid x \in a\}$.

Wir verschieben den Beweis in die Aufgabe 1.20.8.

Die Bemerkung 1.17 zeigt, dass eine Äquivalenzrelation r über einer Menge a eine *Zerlegung* von a in zueinander disjunkte, nicht leere Teilmengen (nämlich die Mengen $[x]_r$ für $x \in a$), eine sog. *Partition*, induziert. Ist umgekehrt A eine Zerlegung von a in zueinander disjunkte, nicht leere Teilmengen, gilt also

(α) $\bigcup A = a$,
(β) $\forall uv\,(u \in A \land v \in A \land u \neq v \to u \cap v = \emptyset)$,
(γ) $\forall u\,(u \in A \to u \neq \emptyset)$,

so wird dadurch in natürlicher Weise eine Äquivalenzrelation r über a induziert: Für x, y gelte xry genau dann, wenn x und y in demselben Element von A liegen, also:

$$r = \big\{z \in a \times a \mid \exists y\,\big(y \in A \land \pi_l(z) \in y \land \pi_r(z) \in y\big)\big\}.$$

Die Frage nach der Existenz von *Repräsentantensystemen*, d. h. von Auswahlmengen über der Menge der Äquivalenzklassen, haben wir bereits in III. 7 im Zusammenhang mit dem Auswahlaxiom angesprochen. Wir kommen darauf noch einmal in VIII. 1 zurück.

Relationale Strukturen

Eine Menge zusammen mit einer oder auch mehreren auf ihr gegebenen Relationen nennt man eine (algebraische) *Struktur*, genauer eine *relationale* Struktur. Wir präzisieren den für uns wichtigsten Typ:

1.18 Definition. x ist *binäre Struktur* $:\leftrightarrow$ x ist von der Form (a, r), wobei r eine (zweistellige) Relation über a ist. Man nennt a die *Trägermenge* von x.

Ist r eine Ordnungsrelation i.S.v. $<$ (bzw. $\leq$) über a, so ist (a, r) eine binäre Struktur, nämlich eine *Ordnung* (oft auch: *totale Ordnung, lineare Ordnung*) *i.S.v.* $<$ (bzw. $\leq$).

Im Gegensatz zum üblichen Sprachgebrauch lassen wir Strukturen mit leerer Trägermenge zu. Strukturen allgemeineren Typs behandeln wir im zweiten Abschnitt dieses Kapitels.

Relationen und Prädikate

Wir haben bereits betont, dass Relationen Mengen sind, Prädikate dagegen Beziehungen über dem Universum. Die Relationen id_x und ϵ_x weisen jedoch auf Zusammenhänge hin; sie zeigen, dass man die Beschränkung des Gleichheits- und des $\in$-Prädikats auf eine Menge durch eine Relation „einfangen" kann. Für $u, v \in a$ gilt nämlich

$$u = v \;\leftrightarrow\; (u, v) \in \mathrm{id}_a \;\text{ und }\; u \in v \;\leftrightarrow\; (u, v) \in \in_a .$$

Dieser Sachverhalt lässt sich auf beliebige Prädikate verallgemeinern:

1.19 Satz (Schema). *Für alle $\varphi(u, v, \overset{n}{x})$ gilt:*

$$\forall \overset{n}{x}\, \forall a\, \exists r\; r = \big\{(u, v) \mid u \in a \wedge v \in a \wedge \varphi(u, v, \overset{n}{x})\big\}.$$

Zum Beweis vgl. die Definition 1.11. $\dashv$

Das gesamte Gleichheitsprädikat etwa kann nicht in eine Relation eingefangen werden. Gäbe es nämlich eine Relation r, die aus allen geordneten Paaren (u, u) besteht, wäre $\mathrm{Feld}(r)$ eine Menge, die alle Mengen enthält.

1.20 Aufgaben.

1.20.1 Welche der zweistelligen Operationen (i) $x, y \mapsto \{\{\{x\}, \emptyset\}, \{\{y\}\}\}$, (ii) $x, y \mapsto \{\{x, \emptyset\}, \{y\}\}$, (iii) $x, y \mapsto \{x, x \cup y\}$ lassen sich zur Definition geordneter Paare verwenden?

1.20.2 Für alle x ist $\mathrm{Def}(\in_x) = x \cap \big(\bigcup x\big)$.

1.20.3 Man schreibe die Beziehung „r ist Ordnungsrelation i.S.v. $<$ über a" als zweistelliges Prädikat.

1.20.4 Für welche x gilt $\forall r\, \big((x, r) \text{ Ordnung i.S.v.} < \rightarrow \mathrm{Feld}(r) = x\big)$?

1.20.5 (i) Ist (a, r) eine Ordnung i.S.v. $<$, so ist $(a, r \cup \mathrm{id}_a)$ eine Ordnung i.S.v. $\leq$.
(ii) Ist (a, r) eine Ordnung i.S.v. $\leq$, so ist $(a, r \setminus \mathrm{id}_a)$ eine Ordnung i.S.v. $<$.

1.20.6 Sind a und b zueinander disjunkt und (a, r) und (b, s) Ordnungen i.S.v. $<$, so ist mit $t := r \cup s \cup (a \times b)$ auch $(a \cup b, t)$ eine Ordnung i.S.v. $<$, die *Summe* der Ordnungen (a, r) und (b, s).

1.20.7 Es seien (a, r) und (b, s) Ordnungen i.S.v. $<$. Die Relation t sei definiert durch $t := \{((u, v), (u', v')) \in (a \times b)^2 \mid vsv' \vee (v = v' \wedge uru')\}$. Man zeige, dass

$(a \times b, t)$ eine Ordnung i.S.v. $<$ ist, das *lexikografische Produkt* der Ordnungen (a, r) und (b, s).

1.20.8 Man beweise Bemerkung 1.17.

1.20.9 Eine Klasse heißt *komprehensibel*, falls es eine Menge gibt, die aus den gleichen Elementen besteht. Man prüfe, ob die folgenden Klassen komprehensibel sind. (i) $[x \mid x$ ist geordnetes Paar$]$; (ii) $[x \mid x$ ist zweistellige Relation über $\mathrm{Pot}(\omega)]$; (iii) $[x \mid x$ ist Potenzmenge$]$.

1.20.10 Das Analogon von **Ers** für zweistellige Operationen, $\mathbf{Ers}_2$ enthält – in anschaulicher Schreibweise – für jede zweistellige Operation F das Axiom $\forall u'u'' \,\exists v\, v = \{F(x', x'') \mid x' \in u' \wedge x'' \in u''\}$. Man gebe eine exakte Formulierung dieses Schemas und einen Beweis auf der Basis von **ZF**.

§2 Funktionen und Familien

Funktionen

Einer der wichtigsten Begriffe der Mathematik ist der *Funktionsbegriff*. Nach verbreiteter Ansicht steht er als *Grundbegriff* gleichberechtigt neben dem Mengenbegriff. Der extensionale Standpunkt öffnet jedoch einen Weg, den Funktionsbegriff in zwangloser Weise *mengentheoretisch zu präzisieren* und damit dem Mengenbegriff unterzuordnen.

Wir schicken einige motivierende Bemerkungen voraus. Nach mathematischer Auffassung wird eine Funktion f durch drei Daten charakterisiert: eine Menge, die man ihren *Definitionsbereich* nennt, eine Menge, die man ihren *Zielbereich* nennt, und eine *Zuordnung*, der zufolge jedem Element x des Definitionsbereichs genau ein Element $f(x)$ des Zielbereichs als *Funktionswert* zugeordnet ist. Man schreibt

$$f : X \to Y,$$

um anzudeuten, dass f eine Funktion mit dem Definitionsbereich X und dem Zielbereich Y ist. Die Menge $\{f(x) \mid x \in X\}$ nennt man den *Bild-* oder *Wertebereich* von f. Im mathematischen Sprachgebrauch heißen Funktionen auch *Abbildungen*. Wir werden uns dieser Sprechweise *nicht* anschließen, weil wir den Namen *Abbildung* für Abbildungen des Universums vorbehalten haben. Eine Abbildung (in unserem Sinne) unterscheidet sich von einer Funktion insbesondere dadurch, dass ihr Definitionsbereich keine Menge, sondern das ganze Universum ist. Wir werden im Folgenden überdies versuchen, die Funktionen – ähnlich wie die Relationen – *als gewisse Mengen zu definieren.*

Vorbereitend hierzu einige naive Beispiele. Es sei

$$\begin{array}{lll} f_1 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} & \text{mit } f_1(\rho) & = \text{ 7 für alle } \rho \in \mathbb{Q}; \\ f_2 : \mathbb{Q} \to \{7\} & \text{mit } f_2(\rho) & = \text{ 7 für alle } \rho \in \mathbb{Q}; \\ f_3 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} & \text{mit } f_3(\rho) & = \text{ Anzahl der Primteiler von 510510} \\ & \text{für alle } \rho \in \mathbb{Q}. & \end{array}$$

Nach mathematischer Auffassung ist $f_1 \neq f_2$, da f_1 und f_2 verschiedene Zielbereiche haben. Ist $f_1 = f_3$? Sicherlich werden wir mit der Beantwortung der Frage zunächst zögern – selbst dann, wenn wir wissen, dass 510510 genau 7 Primteiler besitzt. Der Grund für unser Zögern liegt darin, dass die Zuordnungen von f_1 und f_3 eine andere *Bedeutung* haben. Wenn wir hinsichtlich der Zuordnungen den extensionalen Standpunkt vertreten, d. h. wenn wir von den Eigentümlichkeiten ihrer jeweiligen Definition absehen und nur berücksichtigen, welchem Element des Definitionsbereichs sie welches Element des Zielbereichs zuordnen, sind die Zuordnungen von f_1 und f_3 und daher auch f_1 und f_3 selbst gleich. Extensional gesehen wird die Zuordnung einer Funktion $f : X \to Y$ vollständig beschrieben durch die Menge der geordneten Paare $(x, f(x))$ mit $x \in X$. Diese Menge nennt man den *Graphen* von f. Da man aus ihm den Definitionsbereich (als Menge der linken Komponenten) und den Bildbereich (als Menge der rechten Komponenten) zurückerhalten kann, birgt er bis auf den Zielbereich alle wesentlichen Informationen über f.

Der Graph einer Funktion ist eine Relation, die zu keinem geordneten Paar (x, y) ein Paar (x, y') mit $y \neq y'$ enthält. Umgekehrt ist jede Relation, die einer solchen Bedingung genügt, Graph einer Funktion und legt damit den Definitionsbereich, die Zuordnung (in extensionaler Sicht) und den Bildbereich einer Funktion fest. Daher vereinbaren wir:

2.1 Definition. f ist eine *Funktion* (kurz: Fkn f) $:\leftrightarrow$ f ist eine Relation, und für alle x, y, y' gilt:

$$(x, y) \in f \wedge (x, y') \in f \to y = y'.$$

Ist f eine Funktion, so ist $\mathrm{Def}(f)$ ihr Definitionsbereich und entsprechend $\mathrm{Bild}(f)$ ihr Bildbereich. Um Anschluss an die übliche mathematische Bezeichnungsweise zu erhalten, setzen wir daher fest:

2.2 Definition. $f : X \to Y \;:\leftrightarrow\; \text{Fkn } f \wedge \mathrm{Def}(f) = X \wedge \mathrm{Bild}(f) \subseteq Y.$

Wir haben also mit der Präzisierung des Funktionsbegriffs in Definition 2.1 (aus extensionaler Sicht) keines der Charakteristika des mathematischen Funktionsbegriffs verloren.

Offensichtlich gilt $\emptyset : \emptyset \to \emptyset$ und $\mathrm{id}_x : x \to x$, und für alle X und a ist $X \times \{a\}$ eine Funktion, die auf X definiert ist und für alle Argumente den Wert a annimmt.

Falls $f : X \to Y$, ist $f \in \text{Pot}(X \times Y)$, und wir können die Menge ${}^XY$ aller Funktionen f mit $f : X \to Y$ folgendermaßen definieren:

2.3 Definition. ${}^XY \ := \ \{f \in \text{Pot}(X \times Y) \mid f : X \to Y\}$.

Für eine Funktion f und $x \in \text{Def}(f)$ sei wie üblich $f(x)$ der *Funktionswert von x unter f*. Formaler führen wir $\cdot\,(\cdot)$ als Symbol für eine zweistellige Operation ein (die Punkte deuten die Argumentstellen an):

2.4 Definition.

$$f(x) \ := \ \begin{cases} \text{das eindeutig bestimmte } y \text{ mit } (x, y) \in f, \\ \quad \text{falls Fkn } f \wedge x \in \text{Def}(f); \\ \emptyset, \ \text{sonst.} \end{cases}$$

Als Funktion hat id_x die Eigenschaft, dass verschiedene Elemente von x auch verschiedene Funktionswerte besitzen. Eine solche Funktion nennt man eine *Injektion*. Wir definieren genauer:

2.5 Definition.

(i) f ist eine *Injektion*
$:\leftrightarrow$ Fkn $f \wedge \forall xy\, \big(x, y \in \text{Def}(f) \wedge x \neq y \to f(x) \neq f(y)\big)$.

(ii) f ist eine *Injektion von X in Y* (kurz: $f : X \overset{inj}{\to} Y$)
$:\leftrightarrow$ $f : X \to Y \wedge f$ ist Injektion.

Anstatt von Injektionen spricht man häufig von *umkehrbar eindeutigen* Funktionen.

Einige weitere Eigenschaften von Funktionen präzisieren wir in

2.6 Definition.

(i) f ist eine *Funktion von X auf Y* (kurz: $f : X \overset{auf}{\to} Y$)
$:\leftrightarrow$ $f : X \to Y \wedge \text{Bild}(f) = Y$.

(ii) f ist eine *Bijektion von X auf Y* (kurz: $f : X \overset{bij}{\to} Y$)
$:\leftrightarrow$ $f : X \overset{inj}{\to} Y \wedge f : X \overset{auf}{\to} Y$.

(iii) f ist eine *Permutation* von X $:\leftrightarrow$ $f : X \overset{bij}{\to} X$.

Eine Funktion von X auf Y nennt man oft eine *Surjektion* (*von X auf Y*). Dieser Sprachgebrauch erklärt die Herkunft des Kunstwortes *Bijektion*: „Bijektion = Injektion + Surjektion“.

Eine wichtige Operation bildet die *Hintereinanderschaltung* oder *Komposition* von Funktionen. Sind f und g Funktionen und gilt $\text{Bild}(f) \subseteq \text{Def}(g)$, kann man auf $\text{Def}(f)$ eine Funktion $g \circ f$ definieren durch $g \circ f(x) := g(f(x))$ für alle $x \in \text{Def}(f)$:

2.7 Definition.

$$g \circ f \;:=\; \begin{cases} \bigl\{\bigl(u, g(f(u))\bigr) \mid u \in \operatorname{Def}(f)\bigr\}, \\ \quad \text{falls } f \text{ und } g \text{ Funktionen sind mit } \operatorname{Bild}(f) \subseteq \operatorname{Def}(g); \\ \emptyset, \ \text{sonst.} \end{cases}$$

Man beachte, dass die Menge $\{(u, g(f(u))) \mid u \in \operatorname{Def}(f)\}$ in der ersten Zeile der Definition in der Form $\{z \in \operatorname{Def}(f) \times \operatorname{Bild}(g) \mid \pi_r(z) = g(f(\pi_l(z)))\}$ geschrieben werden kann.

Falls $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$, ist $g \circ f : X \to Z$.

Wir nennen die Funktion f eine *Fortsetzung* der Funktion g, wenn $\operatorname{Def}(g) \subseteq \operatorname{Def}(f)$ und $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \operatorname{Def}(g)$. Offensichtlich ist f genau dann eine Fortsetzung von g, wenn $g \subseteq f$. Die Funktion id_x ist genau dann eine Fortsetzung von id_y, wenn $y \subseteq x$. Falls f eine Fortsetzung von g ist, nennen wir g auch eine *Restriktion* von f. Wichtig ist für uns in diesem Zusammenhang die sog. *Restriktionsoperation*:

2.8 Definition.

$$f{\restriction}Y \;:=\; \begin{cases} f \cap (Y \times \operatorname{Bild}(f)), \ \text{falls Fkn } f \wedge Y \subseteq \operatorname{Def}(f), \\ \emptyset, \ \text{sonst.} \end{cases}$$

Die anschauliche Bedeutung dieser zweistelligen Operation erhellt

2.9 Satz. *Falls f eine Funktion ist und $Y \subseteq \operatorname{Def}(f)$, so gilt*:

(i) $f{\restriction}Y \subseteq f \wedge \text{Fkn } f{\restriction}Y$;

(ii) $\operatorname{Def}(f{\restriction}Y) = Y \wedge \forall x \,\bigl(x \in Y \to (f{\restriction}Y)(x) = f(x)\bigr)$.

$f{\restriction}Y$ ist also die Restriktion von f mit dem Definitionsbereich Y.

Beweis. Sei Fkn $f \wedge Y \subseteq \operatorname{Def}(f)$. Zu (i) beachte man, dass mit Fkn f und $g \subseteq f$ auch Fkn g gilt. Ähnlich einfach ergibt sich (ii). ⊣

Bemerkung: Wir haben bislang nur *einstellige* Funktionen betrachtet, d. h. Funktionen, die je *einem* Element des Definitionsbereichs einen Funktionswert zuordnen. Der Begriff der n-stelligen Funktion kann jedoch (für beliebiges $n \geq 1$) zwanglos unter den Begriff der einstelligen Funktion subsumiert werden. Z. B. kann man die *zweistellige* Addition $+_{\mathbb{Q}}$ über $\mathbb{Q}$ als eine einstellige Funktion auffassen, die jedem geordneten Paar (ϱ, σ) rationaler Zahlen die Summe $\varrho +_{\mathbb{Q}} \sigma$ der beiden Komponenten zuordnet. In diesem Zusammenhang definieren wir allgemeiner:

2.10 Definition. Sei $n \geq 1$.

$$f \text{ ist eine } \textit{n-stellige Verknüpfung über } x \quad :\leftrightarrow \quad f : x^n \to x.$$

Funktionen und Operationen

Mit Satz 1.19 haben wir festgestellt, dass man ein Prädikat, sofern man es nur für die Elemente einer vorgegebenen Menge X betrachtet, durch eine Relation über X „einfangen" kann. Ein ähnlicher Sachverhalt gilt auch für Operationen. Um ihn zu zeigen, *benötigen wir allerdings das Schema der Ersetzungsaxiome.*

2.11 Satz (Schema)**.** *Sei F eine einstellige Operation. Dann gilt*:

$$\forall X\, \exists f\; f = \big\{(x, F(x)) \mid x \in X\big\}.$$

Beweis. Die Voraussetzungen seien erfüllt. Dann wird durch $G(x) := (x, F(x))$ eine Operation definiert. Die Behauptung ergibt sich damit aus III.5.1. ⊣

Die der Menge X zugeordnete Funktion f beschreibt die Restriktion von F auf X. Wir bezeichnen diese Restriktionsoperation mit $F{\restriction}$, setzen also:

2.12 Definition. $F{\restriction}X \;:=\; \{(x, F(x)) \mid x \in X\}$.

Bemerkung. Wir haben in Satz 2.11 und in Definition 2.12 die anschauliche Operationsschreibweise verwandt. Dabei sind auch Operationen zugelassen, die unter Benutzung von Parametern definiert sind. Die exakte Formulierung etwa von Satz 2.11 kann dann in Form eines Schemas erfolgen, das für jedes $\varphi(x, y, \overset{n}{x})$ den Ausdruck

$$\begin{aligned}&\forall \overset{n}{x} \Big(\forall x \exists^{=1} y\, \varphi(x, y, \overset{n}{x}) \to \\ &\forall X\, \exists f\, \big(\mathrm{Fkn}\ f \wedge \mathrm{Def}(f) = X \wedge \forall x\, \big(x \in X \to \varphi(x, f(x), \overset{n}{x})\big)\big)\Big)\end{aligned}$$

enthält. Wir werden uns bei Operationen mit Parametern auch weiterhin der bequemen Operationsschreibweise bedienen, wie wir das ja bereits bei der Einführung des Ersetzungsschemas im Anschluss an III.5.1 gemacht haben. Die Einführung neuer Operationssymbole haben wir allerdings nur für parameterfrei definierbare Operationen erlaubt. Ist also F ein bereits definiertes Symbol für eine ohne Parameter definierbare Operation, führt Definition 2.12 zur Definition eines neuen einstelligen Operationssymbols $F{\restriction}$.

Familien

Es sei f eine auf der Menge X definierte Funktion. In gewissen Zusammenhängen schreibt man für die Funktion f auch

$$(*) \qquad (f_x)_{x \in X}.$$

Dabei ist f_x eine andere Schreibweise für $f(x)$. Man nennt $(f_x)_{x \in X}$ eine *Familie*; falls X die Menge der natürlichen Zahlen ist, auch eine *Folge*. Familien und Folgen sind also gewöhnliche Funktionen, die unter Kenntlichmachung ihres Definitionsbereichs in einer eigentümlichen Weise notiert werden. Meist verwendet man andere Symbole, z. B. I für X und ι für x. Dann gewinnt $(*)$ die vertrautere Gestalt

$$(f_\iota)_{\iota\in I}.$$

Man nennt I die *Indexmenge* der Familie $(f_\iota)_{\iota\in I}$. Sind $(f_\iota)_{\iota\in I}$ und $(g_\iota)_{\iota\in I}$ zwei Familien mit der gleichen Indexmenge I, so gilt

$$(f_\iota)_{\iota\in I} = (g_\iota)_{\iota\in I} \leftrightarrow \forall\iota\,(\iota \in I \to f_\iota = g_\iota).$$

Zwei Familien $(f_\iota)_{\iota\in I}$ und $(g_\iota)_{\iota\in I}$ sind also genau dann gleich, wenn sie „gliedweise" übereinstimmen. Das legt nahe, eine Familie mit der Indexmenge I anschaulich als ein „I-Tupel" aufzufassen, und motiviert die folgende Verallgemeinerung des kartesischen Produkts.

2.13 Definition. $Z = (Z_\iota)_{\iota\in I}$ sei eine Familie, $\bigcup_{\iota\in I} Z_\iota$ die gebräuchliche Schreibweise für die Vereinigungsmenge aller Z_ι, d. h. für $\bigcup \mathrm{Bild}(Z)$. Dann setzen wir

$$\bigtimes_{\iota\in I} Z_\iota := \{f \in {}^I\bigcup_{\iota\in I} Z_\iota \mid \forall\iota\,(\iota \in I \to f(\iota) \in Z_\iota)\}.$$

$\bigtimes_{\iota\in I} Z_\iota$ besteht also genau aus denjenigen auf I definierten Funktionen, deren Wert für $\iota \in I$ in Z_ι liegt, d. h. aus den Familien („I-Tupeln") $(f_\iota)_{\iota\in I}$ mit $f_\iota \in Z_\iota$.

Seien x und y gegeben. Wir können jetzt auf verschiedene Weise ein kartesisches Produkt von x und y bilden: einmal nach Definition 1.9 das Produkt $x \times y$, sodann mit Definition 2.13 und $Z := \{(\emptyset, x), (\{\emptyset\}, y)\}$ das Produkt

$$\bigtimes_{\iota\in\{\emptyset,\{\emptyset\}\}} Z_\iota.$$

In Aufgabe 2.15.5 soll gezeigt werden, dass beide Produkte sich in naheliegender Weise entsprechen. Falls die $Z_\iota \neq \emptyset$, ist auch $\bigtimes_{\iota\in\{\emptyset,\{\emptyset\}\}} Z_\iota \neq \emptyset$. Das Analogon für *alle* Produkte der Form $\bigtimes_{\iota\in I} Z_\iota$ erfordert das Auswahlaxiom; wir kommen in VIII. 1 darauf zurück.

Strukturen

Wir haben oben bereits den Begriff der binären Struktur eingeführt. Allgemeiner versteht man unter einer *algebraischen Struktur* ein Quadrupel der Form

$$(**) \qquad (a, (r_\iota)_{\iota\in I_1}, (f_\iota)_{\iota\in I_2}, (c_\iota)_{\iota\in I_3}).$$

Dabei sind die c_ι Elemente der Trägermenge a; die r_ι sind Relationen und die f_ι Verknüpfungen über a einer jeweils von ι abhängigen Stellenzahl. Ist z. B.

$I_3 = \emptyset$ und sind I_1 und I_2 einelementig, benutzt man statt $(**)$ meist die einfachere Darstellung

$$(***) \qquad (a, r, f).$$

Entsprechend sind wir ja bereits bei den binären Strukturen verfahren (vgl. Definition 1.18). Eine *Gruppe* z. B. ist in vereinfachter Form eine Struktur der Gestalt $(a, \cdot)$, bei der $\cdot$ eine zweistellige Verknüpfung über a ist, die den beiden folgenden Bedingungen genügt:

(1) $\cdot$ ist *assoziativ*, d. h. $\forall xyz\,(x, y, z \in a \rightarrow (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$.

(2) Es existieren ein *rechtsneutrales Element* und *Rechtsinverse* dazu, d. h. $\exists x\,\forall z\,(z \cdot x = z \wedge \exists y\, z \cdot y = x)$.

Die Eigenschaft, eine Gruppe zu sein, ist also ein einstelliges Prädikat. – Zuweilen fasst man eine Gruppe als eine Struktur der Gestalt $(a, \cdot, e)$ auf, bei der e das (eindeutig bestimmte) rechtsneutrale Element ist.

Isomorphismen

Zunächst ein *naives* Beispiel.

$$\mathfrak{N} := (\mathbb{N}, \mathrm{S}, 0)$$

sei die Struktur über der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen mit der *Nachfolgerfunktion* S als einstelliger Verknüpfung. S ordnet jeder Zahl n die Zahl $n+1$ zu.

$$\mathfrak{N}^* := (\mathbb{N}^*, \mathrm{S}^*, 1)$$

sei die Struktur über der Menge $\mathbb{N}^*$ der *ungeraden* natürlichen Zahlen mit S^* als einstelliger Verknüpfung. S^* ordnet jeder ungeraden Zahl n die Zahl $n+2$ zu. $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}^*$ haben, wie die folgende Darstellung zeigt, den gleichen strukturellen Aufbau.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "\mathrm{S}"] \arrow[d, leftrightarrow] & 1 \arrow[r, "\mathrm{S}"] \arrow[d, leftrightarrow] & 2 \arrow[r, "S"] \arrow[d, leftrightarrow] & 3 \arrow[r, "\mathrm{S}"] \arrow[d, leftrightarrow] & 4 \cdots \arrow[d, leftrightarrow] \\
1 \arrow[r, "\mathrm{S}^*"'] & 3 \arrow[r, "\mathrm{S}^*"'] & 5 \arrow[r, "\mathrm{S}^*"'] & 7 \arrow[r, "\mathrm{S}^*"'] & 9 \cdots
\end{tikzcd}$$

Man sagt, dass die durch Doppelpfeile angedeutete Beziehung zwischen den Elementen von $\mathbb{N}$ und den Elementen von $\mathbb{N}^*$ – etwa in der Richtung von oben nach unten – einen *Isomorphismus von* $\mathfrak{N}$ auf $\mathfrak{N}^*$ darstellt.

Wir geben jetzt am Beispiel zweier Strukturen eines etwas komplizierteren Typs eine exakte Definition.

2.14 Definition. $\mathfrak{A} = (a, r, f, c)$ und $\mathfrak{B} = (b, s, g, d)$ mit $r \subseteq a \times a$, $s \subseteq b \times b$, $f : a \to a$, $g : b \to b$ und $c \in a$, $d \in b$ seien Strukturen.

(i) π ist ein *Isomorphismus von* $\mathfrak{A}$ *auf* $\mathfrak{B}$, kurz: $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \;:\leftrightarrow$

$$\pi : a \overset{bij}{\to} b \wedge$$
$$\forall uv \big(u, v \in a \to (urv \leftrightarrow \pi(u) s \pi(v))\big) \wedge$$
$$\forall u \big(u \in a \to \pi(f(u)) = g(\pi(u))\big) \wedge$$
$$\pi(c) = d.$$

(ii) $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind *isomorph*, kurz: $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \;:\leftrightarrow\; \exists \pi\, \pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

Die Isomorphie von Strukturen eines festen Typs ist ein zweistelliges Prädikat.

Insgesamt sehen wir – und die folgenden Aufgaben werden weiter zu dieser Einsicht beitragen –, dass sich die mit dem Funktionsbegriff zusammenhängenden Begriffe und Redeweisen zwanglos mengentheoretisch darstellen lassen.

2.15 Aufgaben.

2.15.1 Man bringe Definition 2.4 auf die Form $v(x) = y :\leftrightarrow \varphi(v, x, y)$ mit funktionalem $\varphi(v, x, y)$.

2.15.2 Die Funktionen f und g seien *kompatibel* genau dann, wenn $f(u) = g(u)$ für alle $u \in \mathrm{Def}(f) \cap \mathrm{Def}(g)$. Für eine Menge X von Funktionen zeige man: $\bigcup X$ ist Funktion $\leftrightarrow$ Für alle f, $g \in X$ sind f und g kompatibel.

2.15.3 Es seien $(I, <)$ eine Ordnung i.S.v. $<$ mit $I \neq \emptyset$ und $(X_\iota)_{\iota \in I}$ eine Familie von Ordnungen i.S.v. $<$ mit zueinander disjunkten Trägermengen. Analog zu Aufgabe 1.20.6 definiere man die Summe der Ordnungen X_ι.

2.15.4 Man zeige ohne Benutzung des Ersetzungsschemas:

(i) $\forall X \exists f\, (\mathrm{Fkn}\ f \wedge \mathrm{Def}(f) = X \wedge \forall x\, (x \in X \to f(x) = \mathrm{Pot}(x)))$;

(ii) $\forall X \exists f\, (f$ ist zweistellige Verknüpfung über $\mathrm{Pot}(X) \wedge$
$\forall xy\, (x, y \subseteq X \to f(x, y) = x \cap y))$.

2.15.5 Für vorgegebene Mengen x, y und $Z := \{(\emptyset, x), (\{\emptyset\}, y)\}$ definiere man eine natürliche Bijektion von $x \times y$ auf $\displaystyle\bigtimes_{\iota \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}} Z_\iota$.

2.15.6 (i) Man definiere eine Operation $^{-1}$ mit der folgenden Eigenschaft: Wenn r eine Relation ist, so ist $r^{-1} = \{(v, u) \mid (u, v) \in r\}$.

(ii) Für $f : X \overset{bij}{\to} Y$ zeige man: $\exists^{=1} g\, (g : Y \to X \wedge g \circ f = \mathrm{id}_X)$.

(iii) Falls $f, g : X \to X$ und $f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}_X$, so sind f und g Permutationen von X mit $f = g^{-1}$.

(iv) Sind f, g, h Funktionen mit $\mathrm{Bild}(h) \subseteq \mathrm{Def}(g)$ und $\mathrm{Bild}(g) \subseteq \mathrm{Def}(f)$, so ist $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

2.15.7 Die Permutationen einer Menge bilden unter der Komposition eine Gruppe.

2.15.8 Es sei $f : X \to Y$. Man definiere eine Relation r über X mit der Eigenschaft, dass $\forall uv\,(u, v \in X \to (urv \leftrightarrow f(u) = f(v)))$. Man zeige, dass r eine Äquivalenzrelation über X ist. Sodann beweise man, dass g und h mit den folgenden Eigenschaften existieren:

(α) $g : X \overset{auf}{\to} X/r$ (vgl. Bemerkung 1.17(iii));

(β) $h : X/r \overset{inj}{\to} Y$;

(γ) $f = h \circ g$.

2.15.9 Zu einer gegebenen Menge X definiere man eine Struktur $\mathcal{B}(X) := (\mathrm{Pot}(X), \mathbb{0}, \mathbb{1}, {}^c, \sqcap, \sqcup)$ über $\mathrm{Pot}(X)$ mit $\mathbb{0}, \mathbb{1} \in \mathrm{Pot}(X)$, ${}^c : \mathrm{Pot}(X) \to \mathrm{Pot}(X)$ und $\sqcap, \sqcup : \mathrm{Pot}(X) \times \mathrm{Pot}(X) \to \mathrm{Pot}(X)$ so, dass $\mathcal{B}(X)$ die Bedingungen an eine sog. *Boolesche Algebra* erfüllt, dass also für alle x, y, $z \in \mathrm{Pot}(X)$ gilt:

(α) $x \sqcap y = y \sqcap x$ und ähnlich für $\sqcup$ (*Kommutativität* von $\sqcap$, $\sqcup$);

(β) $(x \sqcap y) \sqcap z = x \sqcap (y \sqcap z)$ und ähnlich für $\sqcup$ (*Assoziativität* von $\sqcap$, $\sqcup$);

(γ) $x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$ und ähnlich für $\sqcup$, $\sqcap$ anstelle von $\sqcap$, $\sqcup$ (*Distributivität* von $\sqcap$, $\sqcup$);

(δ) $x \sqcap (x \sqcup y) = x$ und $x \sqcup (x \sqcap y) = x$ (*Verschmelzung*);

(ϵ) $\mathbb{0} \sqcap x = \mathbb{0}$, $\mathbb{1} \sqcup x = \mathbb{1}$, $x \sqcap x^c = \mathbb{0}$, $x \sqcup x^c = \mathbb{1}$ (Gesetze über das *minimale Element* $\mathbb{0}$, das *maximale Element* $\mathbb{1}$ und über die *Komplementbildung* ^{c}).

2.15.10 Man zeige, dass die Isomorphie zwischen Strukturen des gleichen Typs die Eigenschaften einer Äquivalenzrelation hat (die Isomorphie ist ein Prädikat!), dass also für Strukturen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ des gleichen Typs gilt:

(α) $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}$;

(β) $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \to \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$;

(γ) $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \wedge \mathfrak{B} \cong \mathfrak{C} \to \mathfrak{A} \cong \mathfrak{C}$.

2.15.11 Man zeige: $\forall x \exists y \exists f\,(x \cap y = \emptyset \wedge f : x \overset{bij}{\to} y)$.

V

Natürliche Zahlen und Zahlbereiche

> Wer hier nicht Zwei zählen kann, muss nicht *wollen*.

Bislang haben wir auf der in Kapitel III geschaffenen axiomatischen Basis eine Reihe geläufiger mathematischer Begriffe definiert. Zugleich haben wir damit einen bescheidenen Teil des Rüstzeugs bereitgestellt, das für Untersuchungen in der Mengenlehre selbst unerlässlich ist. Beiden Gesichtspunkten dient in besonderer Weise eine mengentheoretische Formulierung des *Zahlbegriffs*, der wir uns jetzt zuwenden.

Bis auf den Beweis des beiläufig eingebrachten Satzes 2.4 werden wir auch in diesem Kapitel keinen Gebrauch von **Ers**, **Fund** und **AC** machen.

§1 Natürliche Zahlen und Peano-Strukturen

Die naiven natürlichen Zahlen kann man unter zwei Aspekten betrachten:

(a) Man kann mit ihnen *zählen*. Der *Zählprozess* besteht darin, dass man, beginnend mit der Zahl 0, wiederholt von einer bereits erreichten natürlichen Zahl n zu deren *Nachfolger* $(n + 1)$ übergeht. Er begründet eine *Reihenfolge* oder *Ordnung* der natürlichen Zahlen (*ordinaler Aspekt*).

(b) Man kann die natürlichen Zahlen verwenden, um die *Anzahl der Elemente* (oder, wie man sagt, die *Mächtigkeit*) endlicher Mengen anzugeben (*kardinaler Aspekt*).

Beide Aspekte kann man benutzen, um eine mengentheoretische Definition der natürlichen Zahlen zu motivieren. Woran aber kann man dann deren „Güte“ messen? Wir holen zur Beantwortung dieser Frage ein wenig weiter aus. Die

H.-D. Ebbinghaus, *Einführung in die Mengenlehre*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-63866-8_5

(naive) Struktur $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, \mathrm{S}, 0)$ aus IV. 2 genügt den folgenden Bedingungen (P1) bis (P3), die das sog. *Peanosche Axiomensystem* bilden.

(P1) Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn $\mathrm{S}(m) = \mathrm{S}(n)$, so $m = n$.

(P2) Für alle $m \in \mathbb{N}$ ist $\mathrm{S}(m) \neq 0$.

(P3) Für alle Eigenschaften E über $\mathbb{N}$ gilt: Falls E auf 0 zutrifft und falls E stets auf $\mathrm{S}(m)$ zutrifft, wenn E auf m zutrifft, trifft E auf alle $n \in \mathbb{N}$ zu.

Man kann zeigen, dass je zwei Strukturen desselben Typs wie $\mathfrak{N}$, die die Analoga von (P1) bis (P3) erfüllen, zueinander isomorph sind *und damit die gleichen strukturellen Eigenschaften haben.* Wie wir bereits in I. 2 angedeutet haben, leistet daher jede solche Struktur für die Mathematik die gleichen Dienste wie die Struktur $\mathfrak{N}$. Um eine mengentheoretische Definition der natürlichen Zahlen zu rechtfertigen, reicht es also, wenn wir über die Definition der Zahlen hinaus eine Zahl als *Null* und eine Verknüpfung als *Nachfolgerfunktion* so auszeichnen, dass eine Struktur entsteht, welche die Analoga von (P1) bis (P3) erfüllt. Wir wollen nun eine entsprechende Definition motivieren, *die sowohl dem ordinalen als auch dem kardinalen Aspekt Rechnung trägt.*

Wenn man einen Gegenstand wiegen will, so hat man im Grunde nichts anderes zu tun, als einen Satz von Gewichtsstücken zusammenzustellen, der jenem Gegenstand die Waage hält. Sätze von Gewichtsstücken spielen dabei die Rolle von *Standardgewichten.* Ähnlich wollen wir – in Befolgung des kardinalen Aspekts – in den natürlichen Zahlen *Standardmaße für die Mächtigkeiten endlicher Mengen* sehen. Als Standardmaß z. B. für die Mächtigkeit 17 werden wir „konkret“ eine Menge mit 17 Elementen wählen, die dann die natürliche Zahl 17 verkörpern wird. Wir gehen dabei so vor, dass wir *nacheinander* auf zwanglose Weise Mengen mit 0, 1, 2, ... Elementen auszeichnen, welche die Rolle der Standardmaße übernehmen sollen. In dem Fortschreiten dieser Konstruktion schlägt sich gerade der *ordinale* Aspekt nieder.

Als Maß für die Mengen der Mächtigkeit 0, also für die leere Menge, bietet sich nur die leere Menge selbst an. Wir definieren die mengentheoretische Null daher durch die leere Menge:

$$\mathbf{0} \;:=\; \emptyset.$$[1]

Als Maß für Einermengen benötigen wir eine Einermenge. Hier bietet sich die Menge an, die aus dem einen Maß besteht, das wir bereits definiert haben:

$$\mathbf{1} \;:=\; \{\mathbf{0}\}, \quad \text{d. h.} \quad \mathbf{1} \;=\; \{\emptyset\}.$$

Entsprechend gelangen wir zu

$$\mathbf{2} \;:=\; \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}, \quad \text{d. h.} \quad \mathbf{2} \;=\; \{\emptyset, \{\emptyset\}\},$$

[1] $\mathbf{0}$ ist ein neues Konstantensymbol unserer mengentheoretischen Sprache, 0 die metasprachliche Bezeichnung für die naive Null. Entsprechendes gilt für $\mathbf{1}$, 1; $\mathbf{2}$, 2 usf.

und allgemein zu

$$\mathbf{n+1} :=\ \{\mathbf{0},\ \mathbf{1},\ \ldots,\ \mathbf{n}\}.$$

Zusammenfassend:

1.1 Definition. (i) $\mathbf{0} \ := \ \emptyset$;
(ii) für $n \geq 0 : \mathbf{n+1} \ := \ \mathbf{n} \cup \{\mathbf{n}\}$.

Die Aufgaben III.4.4.3 und III.4.4.4 zeigen uns, dass wir den richtigen Weg eingeschlagen haben. Indem wir, mit (i) der Definition beginnend, gemäß (ii) fortschreiten, durchmessen wir, naiv gesehen, alle endlichen Mächtigkeiten. Dies veranlasst uns, die Mengen, die wir so erreichen, als natürliche Zahlen im mengentheoretischen Sinn zu wählen, mithin ω, die bzgl. der Inklusion kleinste induktive Menge (vgl. III. 4), *als Menge der natürlichen Zahlen im mengentheoretischen Sinn.* Als *Null* bietet sich die Menge $\mathbf{0}$, also die leere Menge, an und als *Nachfolgerfunktion* die Funktion $\mathbf{S}$, die wir folgendermaßen einführen:

1.2 Definition. $\mathbf{S} \ := \ \big\{z \in \omega \times \omega \mid \pi_r(z) = \pi_l(z) \cup \{\pi_l(z)\}\big\}$.

Da ω induktiv ist, gilt mit $x \in \omega$ auch $x \cup \{x\} \in \omega$. Daher ist $\mathbf{S} : \omega \to \omega$ und $\mathbf{S}(x) = x \cup \{x\}$ für alle $x \in \omega$. Ein Beweis durch metasprachliche Induktion liefert überdies, dass $\mathbf{S}(\mathbf{n}) = \mathbf{n+1}$ für alle n. Damit haben wir als mengentheoretisches Analogon von $\mathfrak{N}$ die Struktur $(\omega, \mathbf{S}, \mathbf{0})$ erhalten. Um diese Wahl zu rechtfertigen, wie wir das oben geschildert haben, übersetzen wir zunächst die Peanoschen Axiome in unseren mengentheoretischen Rahmen. Für (P3) berücksichtigen wir, dass die Eigenschaften über einer Menge dabei durch die Teilmengen dieser Menge nachgebildet werden.

1.3 Definition. Eine *Peano-Struktur* ist eine Struktur (a, σ, ν) mit Trägermenge a, $\sigma : a \to a$ und $\nu \in a$, die den folgenden Bedingungen genügt:

(**P1**) $\sigma : a \overset{inj}{\to} a$;

(**P2**) $\nu \notin \mathrm{Bild}(\sigma)$;

(**P3**) $\forall b \big(b \subseteq a \wedge \nu \in b \wedge \forall x (x \in b \to \sigma(x) \in b) \to b = a\big)$.

Der nächste Satz zeigt als ersten Schritt in unserer Rechtfertigung, dass die Struktur $(\omega, \mathbf{S}, \mathbf{0})$ die mengentheoretisch formulierten Peanoschen Axiome erfüllt.

1.4 Satz. $(\omega, \mathbf{S}, \mathbf{0})$ *ist eine Peano-Struktur.*

Bevor wir mit dem Beweis beginnen, treffen wir die folgende Konvention. Wenn wir Mengenvariablen $i, j, \ldots$ verwenden, sollen sich diese stillschweigend auf Elemente von ω beziehen. So stehen $\varphi(i)$ für das ausführlichere $\varphi(i) \wedge i \in \omega$, $\forall i\, \varphi(i)$ für $\forall i\, (i \in \omega \to \varphi(i))$ und $\exists i\, \varphi(i)$ für $\exists i\, (i \in \omega \wedge \varphi(i))$.

Beweis von 2.2 in der Reihenfolge (**P2**), (**P3**), (**P1**):

$(\omega,\ \mathbf{S},\ \mathbf{0})$ erfüllt (**P2**), d. h. $\emptyset \notin \mathrm{Bild}(\mathbf{S})$. Sei nämlich $x \in \mathrm{Bild}(\mathbf{S})$. Dann hat x die Gestalt $y \cup \{y\}$, ist also nicht leer.

$(\omega,\ \mathbf{S},\ \mathbf{0})$ erfüllt (**P3**), d. h. $\forall b\,(b \subseteq \omega \wedge b \text{ induktiv} \rightarrow b = \omega)$. Dies ergibt sich sofort aus der Definition von ω.

Zum Beweis, dass $(\omega,\ \mathbf{S},\ \mathbf{0})$ die Bedingung (**P1**) erfüllt, benötigen wir das folgende Induktionsprinzip und Teile des anschließenden Hilfssatzes.

1.5 Satz von der vollständigen Induktion über ω.

(i) Mengenform: $\forall b\,\big(\mathbf{0} \in b \wedge \forall i\,(i \in b \rightarrow \mathbf{S}(i) \in b) \rightarrow \omega \subseteq b\big)$.

(ii) Prädikatsform (Schema): *Sei P ein einstelliges Prädikat. Dann gilt*:

$$P\mathbf{0} \wedge \forall i\,\big(Pi \rightarrow P\mathbf{S}(i)\big) \rightarrow \forall i\, Pi.$$

Zur Kontrolle für das Verständnis sei eine exakte Formulierung von (ii) angefügt:

$(\mathrm{ii})_{\mathrm{exakt}}$: Für jeden Ausdruck $\varphi(x, \overset{n}{x})$ gilt:

$$\varphi(\mathbf{0}, \overset{n}{x}) \wedge \forall i\,\big(\varphi(i, \overset{n}{x}) \rightarrow \varphi(\mathbf{S}(i), \overset{n}{x})\big) \rightarrow \forall i\, \varphi\,(i, \overset{n}{x}).$$

Satz 1.5 ist ein *mengentheoretisches* Analogon des *metasprachlichen* Induktionsprinzips für die naiven natürlichen Zahlen, das wir in III. 3 diskutiert haben. Während wir jenes Prinzip anschaulich gerechtfertigt haben, können wir das mengentheoretische Analogon *beweisen*. Der *Beweis* ist sehr einfach: (i) ergibt sich unmittelbar aus der Gültigkeit von (**P3**) für $(\omega, \mathbf{S}, \mathbf{0})$, und (ii) lässt sich mit $b := \{i \in \omega \mid Pi\}$ sofort auf (i) zurückführen. ⊣

1.6 Hilfssatz. (i) $x \in i \rightarrow x \in \omega \wedge x \subseteq i$.

(ii) $(x \in i \rightarrow x \subseteq i) \wedge (x \in \omega \rightarrow x \subseteq \omega)$.

(iii) $i \notin i$.

(iv) $\mathrm{Bild}(\mathbf{S}) \cup \{\mathbf{0}\} = \omega$.

Beweis: (i) zeigen wir mit Hilfe von Satz 1.5, d. h. durch vollständige Induktion über ω; wir setzen $Pz :\leftrightarrow \forall x\,(x \in z \rightarrow x \in \omega \wedge x \subseteq z)$ und beweisen

(α) P$\mathbf{0}$ (*Induktionsanfang*);

(β) $\forall i\,(Pi \rightarrow P\mathbf{S}(i))$ (*Induktionsschritt*).

Satz 1.5(ii) liefert dann $\forall i\, Pi$, d. h. die Behauptung.

Zu (α): $P\mathbf{0}$ gilt, weil es kein x gibt mit $x \in \mathbf{0}$.
Zu (β): Gelte Pi (*Induktionsvoraussetzung*). Wir müssen $P\mathbf{S}(i)$ zeigen (*Induktionsbehauptung*). Sei hierzu $x \in \mathbf{S}(i) = i \cup \{i\}$. Dann gilt $x \in i \vee x = i$. Falls

$x \in i$, liefert die Induktionsvoraussetzung $x \in \omega \wedge x \subseteq i$, also $x \in \omega \wedge x \subseteq \mathbf{S}(i)$. Falls $x = i$, gilt $x \in \omega \wedge x \subseteq i$, also ebenfalls $x \in \omega \wedge x \subseteq \mathbf{S}(i)$.

(ii) ist eine unmittelbare Konsequenz aus (i).

(iii) folgt sofort aus **Fund** (vgl. Satz III.6.1). Ohne **Fund** können wir den Beweis mit $Pz :\leftrightarrow z \notin z$ durch vollständige Induktion führen: Der Induktionsanfang ist trivial. Sei – im Induktionsschritt – $i \notin i$. Gälte $\mathbf{S}(i) \in \mathbf{S}(i)$, so $i \cup \{i\} \in i \vee i \cup \{i\} = i$, mit (i) also $i \cup \{i\} \subseteq i$ und daher $i \in i$ im Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung.

(iv) ergibt sich sofort mit (**P3**). $\dashv$

Wir wenden uns im Beweis von Satz 1.4 nun der Bedingung (**P1**) zu. Sei daher $\mathbf{S}(i) = \mathbf{S}(j)$, also $i \cup \{i\} = j \cup \{j\}$. Dann gilt $j \in i \vee j = i$, mit Hilfssatz 1.6(ii) also $j \subseteq i$. Ähnlich ergibt sich $i \subseteq j$, insgesamt also $i = j$. $\dashv$

Wir beenden die Rechtfertigung der Wahl von $(\omega, \mathbf{S}, \mathbf{0})$ mit dem auf Dedekind zurückgehenden Eindeutigkeitssatz:

1.7 Satz. *Je zwei Peano-Strukturen sind isomorph.*

Beweis. Sei (a, σ, ν) eine Peano-Struktur. Wir zeigen, dass es ein (sogar eindeutig bestimmtes) f gibt mit

$$f : (\omega, \mathbf{S}, \mathbf{0}) \;\cong\; (a, \sigma, \nu).$$

Im Vorgriff auf den nächsten Abschnitt (vgl. Satz 2.1) benutzen wir dazu, dass es ein (sogar eindeutig bestimmtes) f gibt mit

(1) $f : \omega \to a$;
(2) $f(\mathbf{0}) = \nu$;
(3) $\forall i \; f\big(\mathbf{S}(i)\big) = \sigma(f(i)\big)$.

Wir sind fertig, wenn wir zeigen können, dass f eine *Bijektion* von ω auf a ist; denn dann ist f wegen (2) und (3) ein Isomorphismus von $(\omega, \mathbf{S}, \mathbf{0})$ auf (a, σ, ν). Nach (1) ist f eine Bijektion von ω auf a, wenn (4) $\mathrm{Bild}(f) = a$ und (5) f eine Injektion ist.

Zu (4): Sei $b := \mathrm{Bild}(f)$. Dann ist $b \subseteq a$ und $\nu = f(\mathbf{0}) \in b$, und wenn $x \in b$, etwa $x = f(i)$, ist $\sigma(x) = \sigma(f(i)) = f(\mathbf{S}(i)) \in b$. Nach (**P3**), angewandt auf (a, σ, ν), ist daher $b = a$, d. h. $\mathrm{Bild}(f) = a$.

Zu (5): Wir beweisen induktiv, dass für alle i gilt:

$$(*) \qquad \forall j \; \big(i \neq j \to f(i) \neq f(j)\big).$$

$i = \mathbf{0}$: Wenn $\mathbf{0} \neq j$, ist nach Hilfssatz 1.6(iv) $j = \mathbf{S}(j')$ für ein geeignetes j' und daher $f(j) \underset{(3)}{=} \sigma(f(j')) \underset{(\mathbf{P2})}{\neq} \nu \underset{(2)}{=} f(\mathbf{0})$. Gelte, im Induktionsschritt, $(*)$ für i und sei $\mathbf{S}(i) \neq j$. Wir müssen zeigen, dass $f(\mathbf{S}(i)) \neq f(j)$. Falls $j = \mathbf{0}$, schließen wir wie im Induktionsanfang. Sei $j \neq \mathbf{0}$, also $j = \mathbf{S}(j')$ für ein geeignetes j'. Da $\mathbf{S}(i) \neq \mathbf{S}(j')$, ist $i \neq j'$. Nach Induktionsvoraussetzung ist also $f(i) \neq f(j')$ und daher schließlich $f(\mathbf{S}(i)) \underset{(3)}{=} \sigma(f(i)) \underset{\textbf{(P1)}}{\neq} \sigma(f(j')) \underset{(3)}{=} f(\mathbf{S}(j')) = f(j)$. $\dashv$

Bis auf die Lücke beim Nachweis der Existenz einer Funktion f mit den Eigenschaften (1)–(3) haben wir die angekündigte Rechtfertigung erbracht. Haben wir mit der Definition der mengentheoretischen natürlichen Zahlen, dem Beweis der Sätze 1.4 und 1.7 und der vorangehenden Motivation für die Wahl von ω den Begriff der natürlichen Zahl *begründet*? *Sicherlich nicht.* Selbst wenn man dazu bereit ist, den Mengenbegriff intuitiv für sehr einsichtig zu halten, wird man kaum willens sein, in der Auszeichnung der Elemente von ω als natürliche Zahlen mehr zu sehen als eine zweckdienliche Konvention. Es sei noch einmal wiederholt: Mengentheoretische Definitionen verfolgen keine ontologischen Zwecke! Selbstverständlich ist es uns freigestellt, die naiven mit den mengentheoretischen Zahlen zu identifizieren. Wie wir mehrfach betont haben, hat eine solche Entscheidung auf die Mathematik keinen Einfluss. Manchen jedoch dürfte es im Falle einer Identifizierung vom intuitiven Standpunkt her befremdlich erscheinen, dass die natürlichen Zahlen Mengen sein sollen, die zudem noch mengentheoretisch interessante, zahlentheoretisch jedoch bedeutungslose Eigenschaften besitzen.

Der *konventionelle* Charakter der mengentheoretischen Präzisierung des Zahlbegriffs wird noch durch die Tatsache untermauert, *dass die natürlichen Zahlen mengentheoretisch in verschiedener Weise definiert worden sind.* Unsere Definition geht auf von Neumann (1923) zurück. Zermelo stützt sich bei seiner Definition von 1908 auf die Mengen $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}, \ldots$ (vgl. Aufgabe III.4.4.2), hat aber bereits um 1915 auch den von Neumannschen Weg beschritten. Wir erwähnen eine weitere Möglichkeit, die auf Frege zurückgeht. In einer von Neumann-Bernays-Gödelschen Klassen-Mengen-Lehre kann man z. B. die Zahl 1 definieren als die *Klasse aller Einermengen.* Mit dieser Definition macht man sich von der Willkür frei, die in der Auszeichnung einer *bestimmten* Einermenge liegt. Andererseits erhält man so als mengentheoretische Eins eine echte Klasse (entsprechend dem bei uns beweisbaren Sachverhalt, dass die Einermengen keine Menge bilden).

Das Nebeneinander der naiven und der mengentheoretischen natürlichen Zahlen, das unsere weiteren Betrachtungen durchzieht, bedarf vielleicht doch noch einer klärenden Bemerkung. Daher grenzen wir noch einmal ab: Die *naiven* natürlichen Zahlen gehören dem *metasprachlichen Bereich* an. Wir präzisieren sie nicht, sondern benutzen sie in intuitiv einsichtiger Weise, wenn wir über die mengentheoretische Sprache, die Beweisbarkeit mengentheoretischer Ausdrücke usf. sprechen. Ihre Bedeutung in diesem Zusammenhang haben wir in III. 3 beleuchtet. Die *mengentheoretischen* natürlichen Zahlen sind gewisse *Mengen*. Wir sprechen über sie in der *mengentheoretischen* Sprache. Sie leisten all das, was man in der Mathematik von den natürlichen Zahlen erwartet. In einer mengentheoretisch aufgefassten Mathematik, in der alle Objekte, die eine Rolle spielen, Mengen sind und alle Betrachtungen, die durchgeführt werden, in der mengentheoretischen Sprache erfolgen, können sie also adäquat die Rolle der natürlichen Zahlen übernehmen.

Die Reihe $\mathbf{0} = \emptyset$, $\mathbf{1} = \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{2} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, $\mathbf{3} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}\}, \ldots$ legt nahe, dass der üblichen Ordnung der naiven natürlichen Zahlen als Ordnung der mengentheoretischen natürlichen Zahlen die $\in$-Beziehung entspricht. Wir zeigen:

1.8 Satz. $(\omega, \in_\omega)$ *ist eine Ordnung* i.S.v. $<$.

Beweis. Nach Hilfssatz 1.6(iii) gilt stets $i \notin i$. (Man beachte, dass „$i \in j$" dasselbe besagt wie „$i \in_\omega j$".) Die Transitivität gewinnen wir mit Teil (ii) des Hilfssatzes 1.6: Mit $i \in j \wedge j \in k$ gilt $i \in j \wedge j \subseteq k$, also $i \in k$. Für die Konnexität zeigen wir induktiv über i:

$$(*) \qquad \forall j\, \big(i \in j \vee i = j \vee j \in i\big).$$

Zum Induktionsanfang vgl. Aufgabe 1.11.1. Für den Induktionsschritt gelte $(*)$ für i. Wir zeigen $(*)$ für $\mathbf{S}(i)$ anstelle von i, d. h.

$$(**) \qquad \forall j\, \big(\mathbf{S}(i) \in j \vee \mathbf{S}(i) = j \vee j \in \mathbf{S}(i)\big).$$

Sei dazu j gegeben. Nach Induktionsannahme, d. h. nach $(*)$ für i, haben wir $i \in j \vee i = j \vee j \in i$. Falls $i = j$, gilt $j \in \mathbf{S}(i)$, also $(**)$; falls $j \in i$, ebenso. Für den Fall $i \in j$ beweisen wir induktiv über j:

$$(***) \qquad i \in j \to \big(\mathbf{S}(i) = j \vee \mathbf{S}(i) \in j\big).$$

Für den Induktionsanfang $j = \mathbf{0}$ ist dies klar. Im Schritt von j nach $\mathbf{S}(j)$ schließen wir aus $i \in \mathbf{S}(j)$, also $i \in j \vee i = j$, mit der Induktionsvoraussetzung für j zunächst auf $(\mathbf{S}(i) = j \vee \mathbf{S}(i) \in j) \vee \mathbf{S}(i) = \mathbf{S}(j)$, und von da dann auf $\mathbf{S}(i) \in \mathbf{S}(j) \vee \mathbf{S}(i) = \mathbf{S}(j)$. ⊣

1.9 Satz. *Für die* $(\omega, \in_\omega)$ *entsprechende Ordnung i.S.v.* $\leq$, $(\omega, \in_\omega \cup\, id_\omega)$, *ist* $(\omega, \in_\omega \cup\, id_\omega) = (\omega, \subseteq_\omega)$. Dabei sei $\subseteq_x := \{(u, v) \mid u, v \in x \text{ und } u \subseteq v\}$, d. h. $\subseteq_x = \{z \in x \times x \mid \pi_l(z) \subseteq \pi_r(z)\}$.

Beweis. Ist $i \in j \vee i = j$, so liefert Hilfssatz 1.6(ii), dass $i \subseteq j$. Ist $i \notin j \wedge i \neq j$, so gilt wegen der Konnexität von $\in_\omega$, dass $j \in i$, und wir erhalten $i \not\subseteq j$, da sonst $j \in j$ gälte. ⊣

Insbesondere fällt auf ω die $\in$-Beziehung mit der Beziehung $\subset$ der *echten Inklusion* zusammen (es gelte also $x \subset y \;\; :\leftrightarrow \;\; x \subseteq \wedge\, x \neq y$). Für alle i ist demnach $\mathbf{S}(i) = i \cup \{i\}$ das im Sinne der Ordnungsrelation $\in_\omega$ unmittelbar auf i folgende Element von ω.

In Aufgabe 1.11.2 zeigen wir:

1.10 Satz. *Jede nicht leere Teilmenge von ω besitzt ein bzgl. $\in_\omega$ kleinstes Element*, d. h.

$$\forall b \Big(b \neq \emptyset \wedge b \subseteq \omega \rightarrow \exists i \, (i \in b \wedge \forall j \, (j \in i \rightarrow j \notin b)) \Big).$$

In der Terminologie von VI. 1 ist $\in_\omega$ eine *Wohlordnungsrelation über* ω und $(\omega, \in_\omega)$ eine *Wohlordnung*. Ähnlich wie bei Satz 1.5 kann man der Mengenform aus Satz 1.10 auch eine Prädikatsform zur Seite stellen.

Üblichen Bezeichnungsweisen folgend, schreiben wir fortan für „$i \in j$" oder „$i \in_\omega j$" häufig „$i < j$" und für „$i \subseteq j$" oder „$i \subseteq_\omega j$" häufig „$i \leq j$".

Den Möglichkeiten induktiver Beweise, die $(\omega, \mathbf{S}, \mathbf{0})$ uns bietet, wollen wir anschließend entsprechende Möglichkeiten zur induktiven (oder: rekursiven) Definition von Funktionen auf ω hinzufügen. Damit werden wir dann auch die noch bestehende Lücke im Beweis von Satz 1.7 schließen können.

1.11 Aufgaben.

1.11.1 Man zeige: $\forall j \, (\emptyset \in j \vee \emptyset = j)$.

1.11.2 Ist b eine nicht leere Teilmenge von ω, so ist $\bigcap b$ das $\in_\omega$-kleinste Element von b.

1.11.3 Ist b eine nicht leere Teilmenge von ω, so ist $\bigcup b = \omega$ oder $\bigcup b$ das $\in_\omega$-größte Element von b.

1.11.4 Man zeige, dass man bei der Definition der Peano-Strukturen auf keine der Bedingungen (**P1**), (**P2**), (**P3**) verzichten kann, ohne dass Satz 1.7 seine Gültigkeit verliert.

§2 Rekursionen über ω

Wir beginnen mit einem Beispiel für die naiven natürlichen Zahlen. Die Funktion $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, welche die geraden Zahlen auf 0 und die ungeraden Zahlen auf 1 abbildet, können wir *induktiv* oder *rekursiv* durch die folgenden Gleichungen definieren:

(G1) $g(0) := 0;$

(G2) $g(\mathrm{S}(n)) := 1 - g(n).$

(G1) gibt den Wert von g für 0 an, und (G2) legt fest, wie der Wert an einer Stelle S(n) auf den Wert an der *Vorgängerstelle* n zurückgeführt werden kann. Intuitiv gesehen legen (G1) und (G2) genau eine Funktion, eben g, fest. Wir wollen im Folgenden zeigen, dass auf der Basis unserer Axiome ähnliche Definitionen für Funktionen auf ω gerechtfertigt werden können. Bei den entsprechenden Sachverhalten handelt es sich um die sog. ω-*Rekursionstheoreme*, die auf Dedekind zurückgehen und wichtige Spezialfälle der *Rekursionstheoreme* aus Kapitel VII sind. Wir beweisen sie bereits hier, um unseren Ausführungen über natürliche Zahlen eine gewisse Geschlossenheit zu geben und gleichzeitig das Verständnis für rekursive Definitionen zu fördern.

2.1 Einfaches ω-Rekursionstheorem.

Sei $c \in X$ und $h : X \to X$. Dann gibt es genau ein f mit:

$$(*) \qquad \begin{aligned} f : \omega &\to X, \\ f(\mathbf{0}) &= c, \\ \forall i\, f(\mathbf{S}(i)) &= h(f(i)). \end{aligned}$$

Wir sprechen von einer *rekursiven Definition* von f. Dabei stellt die Funktion h die *Rekursionsvorschrift* dar, die den Wert von f an einer Stelle $\mathbf{S}(i)$ auf den Wert an der Stelle i zurückführt.

Bevor wir Satz 2.1 beweisen, bringen wir einige Anwendungen.

Zunächst schließen wir die Lücke im Beweis von Satz 1.7: Mit $X := a$, $c := \nu$ und $h := \sigma$ erhalten wir aus Satz 2.1, dass genau eine Funktion f existiert, die den dort genannten Bedingungen (1), (2), (3) genügt.

Im Hinblick auf die eingangs betrachtete naive Funktion g erhalten wir ähnlich mit $X := \omega$, $c := \mathbf{0}$ und $h(i) := \mathbf{1}\backslash i$ für $i \in \omega$, dass genau eine Funktion $f : \omega \to \omega$ existiert mit $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ und $f(\mathbf{S}(i)) = \mathbf{1}\backslash f(i)$ für alle $i \in \omega$. Man beachte dabei, dass $\mathbf{1} \setminus \mathbf{0} = \mathbf{1}$ und $\mathbf{1} \setminus \mathbf{1} = \mathbf{0}$.

Beweis von Satz 2.1. Seien c und h gegeben.

(a) *Es gibt höchstens eine auf ω definierte Funktion f, die* $(*)$ *genügt.* Seien hierzu f und f' auf ω definierte Funktionen, die $(*)$ erfüllen. Dann ergibt sich durch Induktion über i leicht, dass $f(i) = f'(i)$ für alle $i \in \omega$.

(b) *Es gibt eine auf ω definierte Funktion, die* $(*)$ *genügt.* Intuitiv erhalten wir ein solches f, indem wir nacheinander die „Anfänge“ $f{\restriction}\mathbf{1} = \{(\mathbf{0}, c)\}$, $f{\restriction}\mathbf{2} = \{(\mathbf{0}, c), (\mathbf{1}, h(c))\}, \ldots$ bilden und dann deren gemeinsame Fortsetzung. Exakt: Wir nennen g einen *Anfang*, falls es ein j mit folgenden Eigenschaften gibt:

$$(\dagger) \qquad \begin{aligned} & g : \mathbf{S}(j) \to X, \\ & g(\mathbf{0}) = c, \\ & \forall i\, \big(i < j \to g(\mathbf{S}(i)) = h(g(i))\big). \end{aligned}$$

Man beachte, dass $\mathbf{S}(j) = \{\mathbf{0}, \dots j\}$. Die Definitionsbereiche von Anfängen sind also bzgl. $\subseteq$ vergleichbar. Ähnlich zu (a) zeigt man leicht, dass zwei Anfänge auf dem Durchschnitt ihrer Definitionsbereiche übereinstimmen. Mithin gilt

$$\forall g g' \big(g, g' \text{ Anfänge} \to g \subseteq g' \vee g' \subseteq g\big). \tag{1}$$

Durch Induktion über j ergibt sich leicht

$$\forall j \exists g \big(g \text{ Anfang } \wedge \mathrm{Def}(g) = \mathbf{S}(j)\big); \tag{2}$$

denn für $j = \mathbf{0}$ wählt man $g = \{(\mathbf{0}, c)\}$, und ist g ein Anfang mit $\mathrm{Def}(g) = \mathbf{S}(j)$, so ist $g \cup \{(\mathbf{S}(j), h(g(j)))\}$ ein Anfang mit dem Definitionsbereich $\mathbf{S}(\mathbf{S}(j))$.

Es sei

$$Y := \{g \in \mathrm{Pot}(\omega \times X) \mid g \text{ Anfang}\}$$

die Menge aller Anfänge. Nach (1) und (2) ist dann $\bigcup Y$ eine auf ω definierte Funktion, die, wie man leicht sieht, den Bedingungen von $(*)$ genügt. $\dashv$

Satz 2.1 gestattet es noch nicht unmittelbar, die rekursive Definition von *Folgen* (d. h. von auf ω definierten Funktionen) zu rechtfertigen, bei der der Funktionswert an einer Stelle auf *mehrere* vorangehende Funktionswerte zurückgeführt wird. Ein naives Beispiel ist die Fibonacci-Folge fib, definiert durch

$$\mathrm{fib}(0) = \mathrm{fib}(1) = 1; \text{ für alle } n\text{: } \mathrm{fib}(n+2) = \mathrm{fib}(n) + \mathrm{fib}(n+1).$$

Auf einem kleinen Umweg aber ist dies möglich (vgl. Aufgabe 2.5.6). Am Ende dieses Abschnitts kommen wir auf rekursive Definitionen einer solchen Art zurück.

Keine Schwierigkeit bereitet die Definition der arithmetischen Verknüpfungen.

2.2 Satz. *Es gibt eindeutig bestimmte zweistellige Verknüpfungen* $+$ (die *Addition*), $\cdot$ (die *Multiplikation*) *und hoch* (die *Exponentiation*) *über* ω, *die den folgenden Bedingungen genügen* (wir verwenden die übliche Schreibweise):

(i) $\mathbf{S}(i) = i + \mathbf{1}$.

(ii) $i + \mathbf{0} = i$ und $i + (j + \mathbf{1}) = (i + j) + \mathbf{1}$.

(iii) $i \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ und $i \cdot (j + \mathbf{1}) = (i \cdot j) + i$.

(iv) $i^{\mathbf{0}} = \mathbf{1}$ und $i^{j+\mathbf{1}} = i^j \cdot i$.

Beweis. Wir beschränken uns auf die Addition. Nach Satz 2.2 gibt es zu gegebenem i genau eine Funktion $\mathrm{plus}_i : \omega \to \omega$ mit

$$\mathrm{plus}_i(\mathbf{0}) \;=\; i,$$
$$\forall j \; \mathrm{plus}_i(\mathbf{S}(j)) = \mathbf{S}(\mathrm{plus}_i(j)).$$

Anschaulich ist plus_i der „Teil“ von $+$ mit festem ersten Argument i. Wir erhalten dann $+$ durch „Zusammensetzen“ der plus_i:

$$+ \;:=\; \big\{\big((i,j),k\big) \mid k = \;\mathrm{plus}_i(j)\big\},$$

d. h.

$$+ \;:=\; \big\{\big((i,j),k\big) \mid \exists f \,\big(f \in {}^{\omega}\omega \wedge f(\mathbf{0}) = i \wedge \forall j\, f(\mathbf{S}(j)) = \mathbf{S}(f(j)) \wedge k = f(j)\big)\big\}.$$

Wegen

$$i + \mathbf{1} \;=\; \mathrm{plus}_i(\mathbf{S}(\mathbf{0})) \;=\; \mathbf{S}(\mathrm{plus}_i(\mathbf{0})) \;=\; \mathbf{S}(i)$$

gilt (i) und nach Definition von $+$ auch (ii). Für alle i ist $+\restriction(\{i\}\times\omega)$ eindeutig bestimmt (nämlich als plus_i) und daher auch $+$ selbst. $\dashv$

2.3 Satz. *Für die arithmetischen Verknüpfungen der Addition, der Multiplikation und der Exponentiation über ω gelten die üblichen Rechenregeln, solche, die Ungleichungen betreffen, eingeschlossen.*

Der *Beweis* erfolgt jeweils durch vollständige Induktion. Wir begnügen uns hier mit einem einfachen Beispiel; andere Beispiele folgen in den Aufgaben.

Behauptung. $\forall ijk\,(i < j \to i + k < j + k)$.

Beweis durch Induktion über k. Der Fall $k = \mathbf{0}$ ist trivial. Sei, im Induktionsschritt, $i < j$ und nach Induktionsannahme $i + k < j + k$. Dann ist $\mathbf{S}(i + k) < \mathbf{S}(j + k)$ und daher $i + \mathbf{S}(k) = \mathbf{S}(i + k) < \mathbf{S}(j + k) = j + \mathbf{S}(k)$. $\dashv$

Damit haben wir unseren Plan, einen mengentheoretischen Ersatz für die naiven natürlichen Zahlen und den rechnerischen Umgang mit ihnen zu finden, in zufriedenstellender Weise erfüllt.

Wir vervollständigen abschließend unsere Betrachtungen, indem wir zwei Varianten des einfachen ω-Rekursionstheorems geben, bei denen die Rekursionsvorschrift nicht durch eine Funktion, sondern durch eine Operation formuliert wird. Ihr Beweis macht von **Ers** Gebrauch.

2.4 ω-Rekursionstheorem (Schema)**.** *Es sei F eine einstellige Operation. Dann gilt*:

(i) *Für alle c gibt es genau eine auf ω definierte Funktion f mit*

$$\begin{aligned} f(\mathbf{0}) &= c,\\ \forall i\, f(\mathbf{S}(i)) &= F(f(i)). \end{aligned}$$

(ii) *Es gibt genau eine auf ω definierte Funktion f mit $\forall i\, f(i) = F(f\restriction i)$.*

Variante (i) ist eine Verallgemeinerung des einfachen ω-Rekursionstheorems. Sie gestattet es, mit $F :=$ Pot und $c := \omega$ die Existenz einer Menge zu beweisen, die ω, Pot(ω), Pot(Pot$(\omega)), \ldots$ enthält, und damit die zu Beginn von III. 5 geschilderte Lücke zu schließen (vgl. Aufgabe 2.5.5). Variante (ii) erlaubt rekursive Definitionen, bei denen – ähnlich wie bei der Definition von fib oder in noch weiterem Maß – im Rekursionsschritt auf vorangehende Funktionswerte zurückgegriffen wird. Zu fib vgl. Aufgabe 2.5.6.

Beweis. Wir zeigen Variante (i). Der Beweis verläuft zunächst genau wie der von Satz 2.1 mit F anstelle von h, wobei man (†) abändert zu

$$\begin{aligned}&g \text{ ist eine auf } \mathbf{S}(j) \text{ definierte Funktion,}\\ &g(\mathbf{0}) = c,\\ &\forall i\,\big(i < j \to g(\mathbf{S}(i)) = F(g(i))\big).\end{aligned}$$

Nach dem Erreichen von (1) und (2) definert man anstelle von Y eine Operation H durch

$$H(x) \;:=\; \begin{cases} g(x), & \text{wobei } g \text{ ein Anfang ist mit } x \in \mathrm{Def}(g)\text{, falls } x \in \omega;\\ \emptyset, & \text{sonst}\end{cases}$$

Es ist nicht schwer zu sehen, dass die auf ω definierte Funktion $f := H{\restriction}\omega$ (hier geht **Ers** ein) der Behauptung genügt.

Variante (ii) ist ein Spezialfall des lokalen Rekursionstheorems VII.1.2 für Ordinalzahlen. In Aufgabe 2.5.9 führen wir sie auf die Variante (i) zurück. ⊣

2.5 Aufgaben.

2.5.1 Man zeige, dass $\mathbf{2} + \mathbf{2} = \mathbf{4}$ und $\mathbf{1} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1}$ ist.

2.5.2 Die Addition über ω ist kommutativ, d. h. $\forall ij\; i + j = j + i$.

2.5.3 Es sei $a \subseteq \omega$, und es gelte $\forall i\; a \backslash i \neq \emptyset$. Dann existiert eine Funktion f mit $f : \omega \overset{bij}{\to} a$.

2.5.4 Unter Benutzung von **Fund** zeige man: Es gibt keine Funktion f auf ω mit $f(i + \mathbf{1}) \in f(i)$ für alle $i \in \omega$.

2.5.5 Unter Benutzung von **Ers** zeige man: Es gibt eine Menge, die ω enthält und mit jeder Menge auch deren Potenzmenge.

2.5.6 Es gibt genau eine Funktion fib : $\omega \to \omega$ mit fib$(\mathbf{0})$ = fib$(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ und fib$(i + \mathbf{2})$ = fib(i) + fib$(i + \mathbf{1})$ für alle $i \in \omega$.

2.5.7 Es sei $(a, r) \cong (i, \in_i)$ und $(b, s) \cong (j, \in_j)$, ferner sei $a \cap b = \emptyset$ und (c, t) die Summe der Ordnungen (a, r) und (b, s) im Sinne von Aufgabe IV.1.20.6. Dann ist $(c, t) \cong (i + j, \in_{i+j})$.

2.5.8 Man verfahre ähnlich mit dem lexikografischen Produkt von Ordnungen (vgl. Aufgabe IV.1.20.7) und der Multiplikation auf ω.

2.5.9 Man führe die Variante (ii) des ω-Rekursionstheorems 2.4 auf die Variante (i) zurück.

§3 Endliche Mengen

Wir wollen in diesem Abschnitt den Begriff der endlichen Menge präzisieren und eine kardinale Deutung der arithmetischen Operationen geben. Vorbereitend dazu einige Bemerkungen zum Begriff der *Gleichmächtigkeit*.

Naiv gesehen haben zwei endliche Mengen genau dann die gleiche Anzahl von Elementen (d. h. die gleiche *Mächtigkeit*), wenn man die Elemente der einen Menge umkehrbar eindeutig den Elementen der anderen Menge zuordnen kann. Hiervon macht etwa ein Zirkusdirektor Gebrauch, der die Anzahl der Besucher seiner Vorstellung ermitteln möchte und zu diesem Zweck nicht die Zuschauer zählt, sondern die Zahl der verkauften Eintrittskarten ermittelt, in der – vielleicht idealisierenden – Annahme, dass jeder Besucher genau eine Eintrittskarte besitzt und jeder Käufer einer Karte der Vorstellung beiwohnt.

Hinsichtlich unendlicher Mengen verfügen wir über keinen intuitiven Anzahlbegriff. Wieviele Elemente besitzt die Menge $\mathbb{N}$? Hat die Menge $\mathbb{N}$ mehr Elemente als die Menge $2\mathbb{N}$ der geraden natürlichen Zahlen?

Auf Cantor geht der Vorschlag zurück, *allgemein* zwei Mengen die gleiche Zahl von Elementen, d. h. die gleiche Mächtigkeit, zuzuschreiben, wenn sich die Elemente der einen Menge umkehrbar eindeutig den Elementen der anderen Menge zuordnen lassen. Für endliche Mengen ändert sich dadurch nichts. Wie dieser Vorschlag zum Aufbau einer Mächtigkeitstheorie auch für unendliche Mengen benutzt werden kann, werden wir in Kapitel IX aufweisen. Wir präzisieren nun.

3.1 Definition.
x ist *gleichmächtig mit* y (kurz: $x \sim y$) $\;:\leftrightarrow\; \exists f\, f : x \overset{bij}{\to} y$.
Statt „$f : x \overset{bij}{\to} y$“ schreiben wir im Folgenden kürzer „$f : x \sim y$“.

Das Prädikat der Gleichmächtigkeit hat formal die Eigenschaften einer Äquivalenzrelation:

3.2 Satz. (i) $x \sim x$ (*Reflexivität*).
(ii) $x \sim y \to y \sim x$ (*Symmetrie*).
(iii) $x \sim y \wedge y \sim z \to x \sim z$ (*Transitivität*).

Beweis: Zu (i): Es ist $\mathrm{id}_x : x \sim x$. *Zu* (ii): Mit $f : x \sim y$ ist $f^{-1} : y \sim x$. *Zu* (iii) : Mit $f : x \sim y$ und $g : y \sim z$ ist $g \circ f : x \sim z$. ⊣

Eine Reihe von Verträglichkeitsaussagen formulieren wir in

3.3 Hilfssatz.

(i) $x \sim x' \wedge y \sim y' \wedge x \cap y = \emptyset \wedge x' \cap y' = \emptyset \to x \cup y \sim x' \cup y'$.

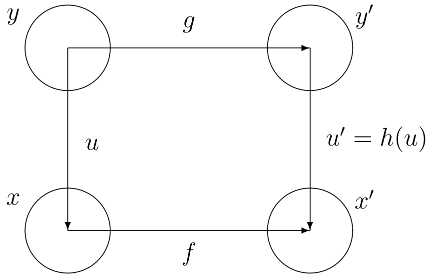
(ii) $x \sim x' \wedge y \sim y' \to x \times y \sim x' \times y'$.

(iii) $x \sim x' \wedge y \sim y' \to {}^{y}x \sim {}^{y'}x'$.

Zur Erinnerung: ${}^{y}x$ ist die Menge der f mit $f : y \to x$. Wir skizzieren einen *Beweis* zu (i) und zu (iii).

Zu (i): Sei $f : x \sim x'$, $g : y \sim y'$ und $x \cap y = \emptyset$, $x' \cap y' = \emptyset$. Dann gilt $f \cup g : x \cup y \sim x' \cup y'$.

Zu (iii): Sei $f : x \sim x'$, $g : y \sim y'$. Die Funktion $h : {}^{y}x \sim {}^{y'}x'$ werde folgendermaßen definiert:



Für $u \in {}^{y}x$ sei also $h(u)$ die Funktion $u' \in {}^{y'}x'$ mit $u'(z') = (f \circ u \circ g^{-1})(z')$ für alle $z' \in y'$. ⊣

Wir kommen nun zur Präzisierung des *Endlichkeitsbegriffs*. Anschaulich gesehen fallen unter die endlichen Mengen gerade die Mengen mit null Elementen, die Mengen mit einem Element, die Mengen mit zwei Elementen *usf.*, also die zu $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}, \ldots$ gleichmächtigen Mengen. Das legt folgende Definition nahe:

3.4 Definition. (i) x ist *endlich* $:\leftrightarrow \ \exists i\, x \sim i$.

(ii) x ist *unendlich* $:\leftrightarrow \ x$ ist nicht endlich.

Teil 3.4(i) präzisiert die Vorstellung von den natürlichen Zahlen als den Maßstäben für die Mächtigkeiten endlicher Mengen. Verschiedene Elemente von ω repräsentieren verschiedene Mächtigkeiten:

3.5 Satz. $i \sim j \to i = j$.

Beweis. Wir zeigen durch Induktion, dass für alle i gilt:

$$(*) \qquad \forall j\,(i \sim j \;\rightarrow\; i = j).$$

Falls $i = \mathbf{0}$ und $i \sim j$, ist $i = j = \mathbf{0}$. Gelte, im Induktionsschritt, $(*)$ für i und sei $f : \mathbf{S}(i) \sim j$. Dann ist $j \neq \mathbf{0}$, also $j = \mathbf{S}(j')$ für ein geeignetes j'. Es sei g diejenige Permutation von j, die $f(i)$ und j' vertauscht (die Identität id_j, falls $f(i) = j'$). Offenbar ist $g \circ f : \mathbf{S}(i) \sim j$ und $(g \circ f)(i) = j'$, also $g \circ f \backslash \{(i, j')\} : i \sim j'$. Nach Induktionsvoraussetzung ist daher $i = j'$, also $\mathbf{S}(i) = \mathbf{S}(j') = j$. ⊣

Satz 3.5 ermöglicht es, die Mächtigkeit $|x|$ einer endlichen Menge x als den eindeutig bestimmten „Maßstab“ aus ω zu definieren, der mit ihr gleichmächtig ist.

3.6 (Vorläufige) **Definition.**

$$|x| := \begin{cases} \text{das eindeutig bestimmte } i \text{ mit } x \sim i, \text{ falls } x \text{ endlich;} \\ ?, \ \text{sonst.} \end{cases}$$

Eine Festlegung für den „sonst“-Fall, d. h. für unendliche Mengen, können wir erst später geben (vgl. Definition IX.2.4).

Es ist stets $|i| = i$, und zwei endliche Mengen haben genau dann die gleiche Mächtigkeit, wenn sie gleichmächtig sind:

$$x, y \text{ endlich} \;\rightarrow\; (|x| = |y| \leftrightarrow x \sim y).$$

Mit dem folgenden Satz zeigen wir, dass die Teilmengen einer endlichen Menge y wieder endlich sind und dass sie eine kleinere Mächtigkeit als y haben, sofern es sich um *echte*, d. h. um von y verschiedene Teilmengen von y handelt. Wie bereits vereinbart, schreiben wir $x \subset y$ für $x \subseteq y \wedge x \neq y$.

3.7 Satz. y *endlich* $\wedge\, x \subset y \;\rightarrow\; x$ *endlich* $\wedge\, |x| < |y|$.

Beweis. Wir zeigen durch Induktion über i:

$$(**) \qquad \forall x\,(x \subset i \;\rightarrow\; x \text{ endlich} \wedge |x| < i).$$

Daraus folgt dann leicht die Aussage des Satzes.

Der Fall $i = \mathbf{0}$ ist trivial. Gelte im Induktionsschritt $(**)$ für i und sei $x \subset \mathbf{S}(i)$. Sei zunächst $i \notin x$. Dann ist $x \subseteq i$. Wenn $x = i$, ist x endlich und $|x| = i < \mathbf{S}(i)$; wenn $x \neq i$, ist nach Induktionsvoraussetzung x endlich und $|x| < i$, also erst recht $|x| < \mathbf{S}(i)$. Falls $i \in x$, verfahre man ähnlich mit der zu x gleichmächtigen Menge $(x \backslash \{i\}) \cup \{k\}$, wobei k das kleinste Element von $i \backslash x$ ist. ⊣

Wir haben im vorangehenden Abschnitt die arithmetischen Operationen durch rekursive Definitionen, also unter Betonung des ordinalen Aspektes, eingeführt. Ihre kardinalen Eigenschaften können wir jetzt beweisen. Umgekehrt kann man die kardinalen Eigenschaften zur Definition benutzen und dann die Rekursionsgleichungen aus Satz 2.2 beweisen (vgl. Aufgabe 3.11.8). Beide Zugänge, der kardinale und der ordinale, führen also zu denselben Verknüpfungen.

3.8 Satz. *Es seien x und y endliche Mengen. Dann sind $x \cup y$, $x \times y$ und ${}^y x$ endlich, und es gilt*:

(i) $|x \cup y| \leq |x| + |y|$, *und „=“ gilt genau dann, wenn* $x \cap y = \emptyset$;

(ii) $|x \times y| = |x| \cdot |y|$;

(iii) $|{}^y x| = |x|^{|y|}$.

Beweis. Wir zeigen (i), (ii) und (iii). Daraus ergibt sich dann auch die Endlichkeit von $x \cup y$, $x \times y$ und ${}^y x$.

Zu (i): Wegen $x \cup y = x \cup (y \backslash (x \cap y))$ und Satz 3.7 reicht der Nachweis von

$$x \cap y = \emptyset \;\rightarrow\; |x \cup y| = |x| + |y|,$$

nach Hilfssatz 3.3(i) daher mit $x \sim i$ und $y \sim j$ wegen $i \sim i \times \{\mathbf{0}\}$ und $j \sim j \times \{\mathbf{1}\}$ der von

$$(\dagger) \qquad (i \times \{\mathbf{0}\}) \cup (j \times \{\mathbf{1}\}) \sim i + j,$$

den wir – für festes i – durch Induktion über j führen. Falls, im Induktionsanfang, $j = \mathbf{0}$, so ist $(i \times \{\mathbf{0}\}) \cup (j \times \{\mathbf{1}\}) = i \times \{\mathbf{0}\} \sim i = i + \mathbf{0}$. Sei, im Induktionsschritt, (†) gültig. Wegen

$$\big(i \times \{\mathbf{0}\}\big) \cup \big((j \cup \{j\}) \times \{\mathbf{1}\}\big) \;=\; \big((i \times \{\mathbf{0}\}) \cup (j \times \{\mathbf{1}\})\big) \cup \big(\{j\} \times \{\mathbf{1}\}\big)$$

ist, mit Hilfssatz 3.3(i) und (†), diese Menge gleichmächtig zu $(i+j) \cup \{i+j\}$, also zu $\mathbf{S}(i+j)$, d. h. zu $i + \mathbf{S}(j)$.

Zu (ii): Nach Hilfssatz 3.3(ii) reicht der Nachweis von $\forall i \, \forall j \; i \times j \sim i \cdot j$. Wieder führen wir – für festes i – Induktion über j durch. Falls $j = \mathbf{0}$, ist $i \times j = \emptyset = i \cdot \mathbf{0}$. Der Induktionsschritt: Zunächst gilt $i \times (j \cup \{j\}) = (i \times j) \cup (i \times \{j\})$. Nach Induktionsannahme und nach (i) (man beachte, dass $(i \times j) \cap (i \times \{j\}) = \emptyset$) ergibt sich hieraus $i \times (j \cup \{j\}) = i \cdot j + i = i \cdot \mathbf{S}(j)$.

Zu (iii): Man verfährt ähnlich mit Hilfssatz 3.3(iii). ⊣

Wir schließen mit einigen Bemerkungen zum Endlichkeitsbegriff. Satz 3.7 zeigt uns, dass keine endliche Menge zu einer echten Teilmenge gleichmächtig ist. Hinsichtlich unendlicher Mengen kennen wir Gegenbeispiele. So ist $\omega \setminus \{\mathbf{0}\}$

gleichmächtig zu ω, nach Aufgabe 2.5.3 sogar jede unbeschränkte Teilmenge von ω. Auch ist – ein naives Beispiel – die Menge $\mathbb{R}^+$ der positiven reellen Zahlen zum Einheitsintervall $\langle 0, 1\rangle$ (ohne 0 und 1) gleichmächtig. Man ordne, um dies einzusehen, jedem $r \in \mathbb{R}^+$ die Zahl $\frac{1}{1+r}$ zu. Wir gelangen damit zu der Vermutung, dass *jede* unendliche Menge zu einer ihrer echten Teilmengen gleichmächtig ist. Hierauf beruht eine von Dedekind vorgeschlagene Präzisierung des Endlichkeitsbegriffs:

3.9 Definition. x ist *Dedekind-endlich* $\;:\leftrightarrow\;\; \forall y\,(y \subset x \rightarrow \neg y \sim x)$.

Während der Endlichkeitsbegriff gemäß Definition 3.4(i) „aus dem Endlichen geboren worden ist“, hat, wie die Vorüberlegung erkennen lässt, der Begriff der Dedekind-Endlichkeit nur unter Einbeziehung des Unendlichen das Licht der Welt erblickt. Sind die beiden Begriffe dennoch gleichwertig? Satz 3.7 zeigt:

3.10 Satz. *Jede endliche Menge ist Dedekind-endlich.* $\dashv$

Die Umkehrung zeigen wir später unter Benutzung des Auswahlaxioms (vgl. Aufgabe VIII.1.5.3). (Man kann zeigen, dass dieser Gebrauch unter der Annahme der Widerspruchsfreiheit unseres Axiomensystems notwendig ist.)

3.11 Aufgaben.

3.11.1 Für alle n gilt: $|\{x_1, \ldots, x_n\}| \leq \mathbf{n}$.

3.11.2 ω ist nicht endlich.

3.11.3 Ist $y \subseteq x$ und $x \sim \omega$, so ist y endlich oder $y \sim \omega$.

3.11.4 $\mathrm{Pot}(\omega)$ ist nicht Dedekind-endlich.

3.11.5 Die Menge x ist nicht Dedekind-endlich $\leftrightarrow \exists y\,(y \subseteq x \wedge y \sim \omega)$.

3.11.6 Ist x endlich, so auch $\mathrm{Pot}(x)$, und es gilt $|\mathrm{Pot}(x)| = \mathbf{2}^{|x|}$.

3.11.7 Man zeige, dass $\omega \sim \omega \times \omega$.

3.11.8 Die arithmetischen Verknüpfungen lassen sich auch kardinal definieren durch

$$\begin{aligned} i + j &:= |(i \times \{\mathbf{0}\}) \cup (j \times \{\mathbf{1}\})|, \\ i \cdot j &:= |i \times j|, \\ i^j &:= |{}^j i|. \end{aligned}$$

Man zeige hierzu, dass mit diesen Definitionen die Rekursionsgleichungen in Satz 2.2 gelten, also Übereinstimmung mit der ordinalen Definition vorliegt.

§4 Zahlbereiche

In den vorangehenden Abschnitten haben wir den Dedekindschen Weg eingeschlagen und dem naiven Halbring $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, <)$ der natürlichen Zahlen mit $(\omega, +, \cdot, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \in_\omega)$ eine präzis definierte mengentheoretische Struktur zur Seite gestellt. Es ist nicht schwer, diesen Weg weiter zu gehen und in Übereinstimmung mit der üblichen mathematischen Vorgehensweise die Zahlbereichserweiterungen mengentheoretisch zu definieren, und zwar nacheinander

den *geordneten Ring* $\mathfrak{Z} := (\mathbb{Z}, +_\mathbb{Z}, \cdot_\mathbb{Z}, 0_\mathbb{Z}, 1_\mathbb{Z}, <_\mathbb{Z})$ *der ganzen Zahlen*,
den *geordneten Körper* $\mathfrak{Q} := (\mathbb{Q}, +_\mathbb{Q}, \cdot_\mathbb{Q}, 0_\mathbb{Q}, 1_\mathbb{Q}, <_\mathbb{Q})$ *der rationalen Zahlen*,
den *geordneten Körper* $\mathfrak{R} := (\mathbb{R}, +_\mathbb{R}, \cdot_\mathbb{R}, 0_\mathbb{R}, 1_\mathbb{R}, <_\mathbb{R})$ *der reellen Zahlen*,
den *Körper* $\mathfrak{C} := (\mathbb{C}, +_\mathbb{C}, \cdot_\mathbb{C}, 0_\mathbb{C}, 1_\mathbb{C})$ *der komplexen Zahlen.*

Wir deuten das mit zunehmender Kürze an.

Der geordnete Ring $\mathfrak{Z}$ der ganzen Zahlen

Naiv gesehen lässt sich eine ganze Zahl als Differenz $m - n$ zweier natürlicher Zahlen m und n darstellen; m und n bzw. m' und n' stellen dabei die gleiche ganze Zahl dar, wenn $m - n = m' - n'$, d. h. wenn $m + n' = n + m'$ ist. Dies führt zu einer Äquivalenzrelation zwischen Paaren (m, n) natürlicher Zahlen, wobei die Zahlenpaare einer Äquivalenzklasse die gleiche ganze Zahl und Zahlenpaare verschiedener Äquivalenzklassen verschiedene ganze Zahlen darstellen. Wir können also die Äquivalenzklassen selbst als ganze Zahlen auffassen. Sind zwei ganze Zahlen in dieser Weise durch Äquivalenzklassen $[(m, n)]$ und $[(k, l)]$ gegeben, so wird z. B. ihre Summe durch die Äquivalenzklasse $[(m + k, n + l)]$ gegeben. Dabei spielt es keine Rolle, auf welche Repräsentanten (m, n) und (k, l) wir zurückgreifen. Sind nämlich (m, n) und (m', n') bzw. (k, l) und (k', l') äquivalent, gilt also $m + n' = n + m'$ und $k + l' = l + k'$, so sind $(m + k, n + l)$ und $(m' + k', n' + l')$ ebenfalls äquivalent, da dann $(m + k) + (n' + l') = (n + l) + (m' + k')$.

Es bereitet keine Schwierigkeiten, diese Überlegungen mengentheoretisch für $(\omega, +, \cdot, \mathbf{0}, \mathbf{1}, <)$ nachzuvollziehen. Zunächst sei

$$r \;:=\; \big\{\big((i, j), (i', j')\big) \in (\omega \times \omega) \times (\omega \times \omega) \mid i + j' = j + i'\big\}.$$

Die Relation r ist eine Äquivalenzrelation über $\omega \times \omega$. Daher können wir festsetzen:

$$\mathbb{Z} \;:=\; (\omega \times \omega)/r.$$

Man weist leicht nach, dass die Verknüpfungen über $\mathbb{Z}$, die Elemente von $\mathbb{Z}$ und die zweistellige Relation $<_\mathbb{Z}$ über $\mathbb{Z}$, die wir nachfolgend angeben, sinnvoll,

d. h. repräsentantenunabhängig, definiert sind und existieren. (Wir bezeichnen mit $i \ominus j$ die Äquivalenzklasse von (i, j) bzgl. r.)

$$\begin{aligned}
(i \ominus j) +_{\mathbb{Z}} (k \ominus l) &:= (i + k) \ominus (j + l);\\
(i \ominus j) \cdot_{\mathbb{Z}} (k \ominus l) &:= (i \cdot k + j \cdot l) \ominus (j \cdot k + i \cdot l);\\
0_{\mathbb{Z}} &:= \mathbf{0} \ominus \mathbf{0};\\
1_{\mathbb{Z}} &:= \mathbf{1} \ominus \mathbf{0};\\
(i \ominus j) <_{\mathbb{Z}} (k \ominus l) &:\leftrightarrow i + l \in_\omega j + k.
\end{aligned}$$

Gleichermaßen einfach ist es, die üblichen Rechengesetze nachzuweisen, welche $\mathfrak{Z} := (\mathbb{Z}, +_{\mathbb{Z}}, \cdot_{\mathbb{Z}}, 0_{\mathbb{Z}}, 1_{\mathbb{Z}}, <_{\mathbb{Z}})$ zu einem geordneten Ring machen; sie ergeben sich unmittelbar aus den entsprechenden Rechengesetzen für $(\omega, +, \cdot, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \in_\omega)$ und den Definitionen.

Unser Vorgehen hat einen Schönheitsfehler: Da die Elemente von $\mathbb{Z}$ unendlich, die von ω aber endlich sind, ist kein Element von ω eine ganze Zahl. Man kann jedoch leicht eine Bijektion von $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{Z}' := (\mathbb{Z} \backslash \{i \ominus \mathbf{0} \mid i \in \omega\}) \cup \omega$ angeben, die auf $\mathbb{Z} \backslash \{i \ominus \mathbf{0} \mid i \in \omega\}$ die Identität ist und die $i \ominus \mathbf{0}$ auf i abbildet. Überträgt man damit die algebraische Struktur von $\mathfrak{Z}$ auf $\mathbb{Z}'$, entsteht eine zu $\mathfrak{Z}$ isomorphe Struktur $\mathfrak{Z}'$, die $(\omega, +, \cdot, \mathbf{0}, \mathbf{1}, <)$ als geordneten Unterhalbring enthält.

Der Leserin und dem Leser sei es überlassen, die hier eingebrachten Behauptungen exemplarisch zu beweisen.

In den folgenden Betrachtungen der weiteren Zahlbereiche beschränken wir uns auf die Definitionen.

Der geordnete Körper $\mathfrak{Q}$ der rationalen Zahlen

Mit $\gamma, \delta, \ldots$ deuten wir ganze Zahlen an. Die Motivation für die Definition von $\mathbb{Q}$ gewinnen wir ähnlich wie bei $\mathbb{Z}$ dadurch, dass wir eine rationale Zahl als Quotient $\frac{\gamma}{\delta}$ zweier ganzer Zahlen γ, δ mit $\delta \neq 0_{\mathbb{Z}}$ schreiben können. Das führt mit $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} \backslash \{0_{\mathbb{Z}}\}$ und dem Kriterium für die Gleichheit von Brüchen zu der Äquivalenzrelation s über $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)$ und zu $\mathbb{Q}$ gemäß

$$\begin{aligned}
s &:= \big\{\big((\gamma, \delta), (\gamma', \delta')\big) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*) \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*) \mid \gamma \cdot_{\mathbb{Z}} \delta' = \delta \cdot_{\mathbb{Z}} \gamma'\big\};\\
\mathbb{Q} &:= (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/s.
\end{aligned}$$

Indem wir die Äquivalenzklasse von (γ, δ) bzgl. s als $[\frac{\gamma}{\delta}]$ schreiben, gelangen wir zu folgender Definition der Addition:

$$\Big[\frac{\gamma}{\delta}\Big] +_{\mathbb{Q}} \Big[\frac{\gamma'}{\delta'}\Big] := \left[\frac{\gamma \cdot_{\mathbb{Z}} \delta' +_{\mathbb{Z}} \delta \cdot_{\mathbb{Z}} \gamma'}{\delta \cdot_{\mathbb{Z}} \delta'}\right].$$

Für $\cdot_{\mathbb{Q}}$, $0_{\mathbb{Q}}$, $1_{\mathbb{Q}}$ und $<_{\mathbb{Q}}$ verfährt man ähnlich.

Der geordnete Körper $\mathfrak{R}$ der reellen Zahlen

Mit $\rho, \sigma, \ldots$ deuten wir im Folgenden rationale Zahlen an. Die Motivation für die Definition von $\mathbb{R}$ gewinnen wir dadurch, dass wir eine reelle Zahl mit Dedekind auffassen als die Menge aller kleineren rationalen Zahlen, d. h. als die nach oben offene Unterklasse eines *Dedekindschen Schnitts* im Körper der rationalen Zahlen. Wir setzen also

$$\mathbb{R} := \big\{x \in \mathrm{Pot}(\mathbb{Q}) \mid \emptyset \neq x \wedge x \neq \mathbb{Q} \wedge \forall \rho \, \big(\rho \in x \leftrightarrow \exists \rho'(\rho <_{\mathbb{Q}} \rho' \wedge \rho' \in x)\big)\big\}.$$

Elemente von $\mathbb{R}$ deuten wir durch $a, b, \ldots$ an und definieren weiter:

$$\begin{aligned} a <_{\mathbb{R}} b &\;:\leftrightarrow\; a \subset b\,; \\ a +_{\mathbb{R}} b &\;:=\; \{\rho +_{\mathbb{Q}} \sigma \mid \rho \in a \wedge \sigma \in b\}; \\ 0_{\mathbb{R}} &\;:=\; \{\rho \in \mathbb{Q} \mid \rho <_{\mathbb{Q}} 0_{\mathbb{Q}}\}; \\ 1_{\mathbb{R}} &\;:=\; \{\rho \in \mathbb{Q} \mid \rho <_{\mathbb{Q}} 1_{\mathbb{Q}}\}. \end{aligned}$$

Zur Festlegung von $\cdot_{\mathbb{R}}$ unterscheiden wir, ob $a <_{\mathbb{R}} 0_{\mathbb{R}}$ und ob $b <_{\mathbb{R}} 0_{\mathbb{R}}$ oder nicht. Wir geben die Definition für einen der vier möglichen Fälle: Falls $0_{\mathbb{R}} \leq_{\mathbb{R}} a$ und $0_{\mathbb{R}} \leq_{\mathbb{R}} b$, setzen wir

$$a \cdot_{\mathbb{R}} b := 0_{\mathbb{R}} \cup \big\{\rho \cdot_{\mathbb{Q}} \sigma \mid 0_{\mathbb{Q}} \leq_{\mathbb{Q}} \rho \wedge 0_{\mathbb{Q}} \leq_{\mathbb{Q}} \sigma \wedge \rho \in a \wedge \sigma \in b\big\}.$$

Die Vollständigkeit des Körpers $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +_{\mathbb{R}}, \cdot_{\mathbb{R}}, 0_{\mathbb{R}}, 1_{\mathbb{R}}, <_{\mathbb{R}})$ ist leicht zu zeigen: Ist A eine nicht leere, bzgl. $<_{\mathbb{R}}$ nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen, so ist $\bigcup A$ ihr Supremum.

Der Körper $\mathfrak{C}$ der komplexen Zahlen

Wir setzen mit einer natürlichen Definition der Minusbildung $-_{\mathbb{R}}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\;:=\; \mathbb{R} \times \mathbb{R}\,; \\ (a, b) +_{\mathbb{C}} (a', b') &\;:=\; (a +_{\mathbb{R}} a', b +_{\mathbb{R}} b'); \\ (a, b) \cdot_{\mathbb{C}} (a', b') &\;:=\; (a \cdot_{\mathbb{R}} a' -_{\mathbb{R}} b \cdot_{\mathbb{R}} b', a \cdot_{\mathbb{R}} b' +_{\mathbb{R}} b \cdot_{\mathbb{R}} a'); \\ 0_{\mathbb{C}} &\;:=\; (0_{\mathbb{R}}, 0_{\mathbb{R}}); \\ 1_{\mathbb{C}} &\;:=\; (1_{\mathbb{R}}, 0_{\mathbb{R}}). \end{aligned}$$

Damit haben wir das Dedekindsche Programm nachvollzogen. Algebraische Details zu den angegebenen Konstruktionen finden sich z. B. in *Ebbinghaus, Hermes, et al. 1992*.

Unter *natürlichen Zahlen* verstehen wir im Folgenden immer *Elemente von* ω, und wenn wir von ganzen, rationalen, reellen oder komplexen Zahlen sprechen, so verstehen wir diese nicht länger naiv, sondern in dem präzisen mengentheoretischen Sinn, den wir gerade angedeutet haben.

VI

Fundierte Strukturen und Ordinalzahlen

> Allerdings ist diese meine allgemeine Äußerung aus Induktion entstanden, und zwar aus einer so vollständigen, so genau erwogenen Induktion, als ich in meiner Verfassung zu machen, nur im Stande gewesen.

Die Ordnung $(\omega, \in_\omega)$ genügt dem Prinzip vom kleinsten Element: Jede nicht leere Teilmenge von ω besitzt eine kleinste Zahl (vgl. Satz V.1.10). Diese Eigenschaft steht in enger Beziehung zu der Möglichkeit, induktive Beweise zu führen und rekursive Definitionen zu rechtfertigen. Wir stellen solche Möglichkeiten jetzt in einem allgemeineren Rahmen bereit. Dabei stehen in diesem Kapitel die induktiven Beweise im Vordergrund, im nächsten dann die rekursiven Definitionen. Recht schnell stoßen wir auf eine Verallgemeinerung der natürlichen Zahlen, die Ordinalzahlen. Sie sind unentbehrlich für viele mengentheoretische Untersuchungen. Ihnen ist der zweite Teil dieses Kapitels gewidmet. – Wir machen keinen Gebrauch von **Fund** und **AC**.

§1 Fundierte Strukturen und Wohlordnungen

Die folgende Operation liefert für eine zweistellige Relation r und $u \in \mathrm{Feld}(r)$ die Menge der r*-Vorgänger* von u:

1.1 Definition. $r[u] := \{v \in \mathrm{Def}(r) \mid vru\}$.

Die oben angesprochene Verallgemeinerung von Ordnungen, die dem Prinzip vom kleinsten Element genügen, lautet nun:

1.2 Definition. Die Relation r ist eine *fundierte Relation über* der Menge a und (a, r) ist eine *fundierte Struktur* $:\leftrightarrow$ (a, r) ist eine binäre Struktur, in der

H.-D. Ebbinghaus, *Einführung in die Mengenlehre*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-63866-8_6

die folgende Variante des Prinzips vom kleinsten Element gilt:

$$\forall b\,\big(\emptyset \neq b \wedge b \subseteq a \to \exists u\,(u \in b \wedge b \cap r[u] = \emptyset)\big),$$

d. h. jede nicht leere Teilmenge von a besitzt ein r-minimales Element.

1.3 Definition. Die Relation r ist eine *Wohlordnungsrelation über* der Menge a und (a, r) ist eine *Wohlordnung* $:\leftrightarrow$ (a, r) ist eine Ordnung i.S.v. $<$ und eine fundierte Struktur.

Wir wissen bereits, dass $(\omega, \in_\omega)$ und die $(i, \in_i)$ Wohlordnungen sind. Dagegen ist $(\omega, \in_\omega^{-1})$ keine Wohlordnung,[1] weil z. B. ω selbst kein $\in_\omega^{-1}$-minimales Element besitzt. Im Sinne der Definitionen ist, mit natürlich definiertem $\subseteq_\omega$, auch $(\omega, \subseteq_\omega)$ keine Wohlordnung (weil es keine Ordnung i.S.v. $<$ ist) und keine fundierte Struktur (weil $\{i\} \cap \subseteq_\omega [i] = \{i\}$ für alle i).

Bei Wohlordnungen haben nicht leere Teilmengen des Trägers stets genau ein minimales Element; für fundierte Strukturen allgemein gilt dies nicht unbedingt. Sei etwa

$$\begin{aligned} a &:= \{x \in \mathrm{Pot}(\omega) \mid x \text{ ist endlich}\}, \\ r &:= \{(u, v) \in a \times a \mid u \subset v\}. \end{aligned}$$

(a, r) ist eine fundierte Struktur. Sei nämlich b eine nicht leere Teilmenge von a und i die $\in_\omega$-minimale Zahl unter den Mächtigkeiten der Elemente von b. Dann ist jedes $x \in b$ mit $|x| = i$ ein r-minimales Element von b. Ist z. B. $b = \{x \in a \mid |x| = \mathbf{17}\}$, so ist jedes Element von b r-minimales Element von b.

Ein naives Beispiel für eine fundierte Relation ist diejenige Relation über der Menge der Ausdrücke, die zwischen zwei Ausdrücken φ und ψ genau dann besteht, wenn φ ein echter Teilausdruck von ψ ist.

Satz V.1.5 besitzt jetzt die folgende Verallgemeinerung:

1.4 Satz von der vollständigen Induktion in fundierten Strukturen.

(i) Mengenform:
(a, r) *fundierte Struktur*
$\to\ \forall b\,\big(\forall u\,(u \in a \wedge r[u] \subseteq b \to u \in b) \to a \subseteq b\big).$

(ii) Prädikatsform (Schema): *Für einstellige Prädikate P gilt*:
(a, r) *fundierte Struktur*
$\to\ \big(\forall u\,(u \in a \wedge \forall v\,(vru \to Pv) \to Pu) \to \forall u\,(u \in a \to Pu)\big).$

Wenn wir diesen Satz mit Satz V.1.5, dem Satz von der vollständigen Induktion über ω, vergleichen, fällt auf, dass wir hier nicht von einem Element auf

[1] Zu $\in_\omega^{-1}$ vgl. Aufgabe IV.2.15.6.

spätere schließen, sondern von allen Vorgängern eines Elements auf es selbst. Das Analogon des Induktionsanfangs fehlt nur scheinbar: Ist u ein r-minimales Element von a, so ist $r[u] = \emptyset$; die Behauptung für u, d. h. $u \in b$ bzw. Pu, muss also wirklich erbracht werden. Induktionsbeweise nach V.1.5 lassen sich sofort auf die hier diskutierte Form zurückführen: Sie entsprechen Induktionsbeweisen in der Struktur $(\omega, \mathbf{S})$, wobei wir $\mathbf{S} = \{(i, \mathbf{S}(i)) \mid i \in \omega\}$ als die Nachfolger*relation* über ω auffassen; als Teilrelation der Wohlordnungsrelation $\in_\omega$ ist sie eine fundierte Relation (vgl. Aufgabe 1.10.2).

Zum *Beweis* von Satz 1.4: Teil (ii) ergibt sich mit $b := \{u \in a \mid Pu\}$ unmittelbar aus Teil (i), und für diesen schließt man unter den entsprechenden Voraussetzungen: Wäre $a \setminus b \neq \emptyset$ und etwa u ein r-minimales Element von $a \setminus b$, so gälte $r[u] \subseteq b$, nach Voraussetzung also auch $u \in b$, ein Widerspruch. $\dashv$

Für nicht fundierte Strukturen gilt ein solches Induktionsprinzip nicht. So genügt ja für die inverse Ordnung $(\omega, \in_\omega^{-1})$ der natürlichen Zahlen die leere Menge der Bedingung $\forall i(\in_\omega^{-1}[i] \subseteq \emptyset \to i \in \emptyset)$, ohne dass $\omega \subseteq \emptyset$. Wir werden das Prinzip in erster Linie für Wohlordnungen verwenden. Ein für die Mengenlehre wichtiger Fall ist außerdem noch der der Induktionen über die $\in$-Beziehung. Wir setzen hierzu fest:

1.5 Definition. Die Menge x ist *fundiert* $:\leftrightarrow$ $(x, \in_x)$ ist fundierte Struktur.

Man kann sich schnell davon überzeugen, dass auf der Basis der restlichen Axiome das Fundierungsaxiom gerade besagt, dass alle Mengen fundiert sind. **Fund** garantiert also die Möglichkeit, Beweise dafür, dass alle Elemente einer vorgegebenen Menge x eine gewisse Eigenschaft haben, induktiv über $\in_x$ zu führen.

Wir schließen mit einigen Bemerkungen über Isomorphismen zwischen Wohlordnungen. Zuvor noch einige Begriffe.

Im Sinne der folgenden Definition ist jedes $i \in \omega$ ein *Anfangsstück* von ω bzgl. $\in_\omega$, und $(i, \in_i)$ ist ein *Anfangsabschnitt* von $(\omega, \in_\omega)$.

1.6 Definition. (i) b ist ein *Anfangsstück* von a bzgl. r

$:\leftrightarrow$ $r \subseteq a \times a \wedge b \subseteq a \wedge \forall u\,(u \in b \to r[u] \subseteq b)$.

(ii) (b, s) ist ein *Anfangsabschnitt* von (a, r)

$:\leftrightarrow$ b ist Anfangsstück von a bzgl. r und $s = r \cap (b \times b)$.

Wenn r eine transitive Relation über a ist, so ist für alle $u \in a$ die Vorgängermenge $r[u]$ ein Anfangsstück von a bzgl. r. Für andere Relationen gilt das i. Allg. nicht, z. B. gilt es nicht für die *Vorgängerrelation* $\mathbf{S}^{-1}$ über ω.

1.7 Satz. *(a, r) und (b, s) seien Wohlordnungen. Sind dann f und g Isomorphismen von (a, r) auf Anfangsabschnitte von (b, s), so gilt $f = g$.*

1.8 Korollar.

(i) *Zwischen zwei Wohlordnungen gibt es höchstens einen Isomorphismus.*

(ii) *Wohlordnungen sind zu keinem ihrer echten Anfangsabschnitte isomorph.*

(iii) *Wohlordnungen sind starr*, d. h. *sie besitzen außer der Identität keinen Automorphismus*, d. h. *keinen Isomorphismus auf sich selbst.* ⊣

Beweis von Satz 1.7. Unter den angegebenen Voraussetzungen lässt sich leicht durch Induktion zeigen, dass

$$\forall u\,(u \in a \to f(u) = g(u)).$$

Stimmen nämlich für gegebenes $u \in a$ die Funktionen f und g auf $r[u]$ überein, ist $b \setminus \mathrm{Bild}(f{\restriction}r[u]) = b \setminus \mathrm{Bild}(g{\restriction}r[u])$ und daher $f(u) =$ das s-kleinste Element von $b \setminus \mathrm{Bild}(f{\restriction}r[u]) =$ das s-kleinste Element von $b \setminus \mathrm{Bild}(g{\restriction}r[u]) = g(u)$. ⊣

Wohlordnungen sind in dem folgenden Sinn vergleichbar:

1.9 Satz. *Es seien (a, r) und (b, s) Wohlordnungen. Dann ist (a, r) isomorph zu einem Anfangsabschnitt von (b, s) oder (b, s) isomorph zu einem Anfangsabschnitt von (a, r).*

Beweis. Seien (a, r) und (b, s) Wohlordnungen, und sei

$$w := \{f \in \mathrm{Pot}(a \times b) \mid f \text{ ist ein Isomorphismus von einem Anfangsabschnitt von } (a,r) \text{ auf einen Anfangsabschnitt von } (b,s)\}.$$

Sind f, $g \in w$, so sind $\mathrm{Def}(f)$ und $\mathrm{Def}(g)$ bzgl. $\subseteq$ vergleichbar, mithin auch f und g. Gilt nämlich z. B. $\mathrm{Def}(f) \subseteq \mathrm{Def}(g)$, so liefert Satz 1.7, dass $g{\restriction}\mathrm{Def}(f) = f$ und daher $f \subseteq g$. Somit ist (vgl. Aufgabe IV.2.15.2) $h := \bigcup w$ eine Funktion, offenbar sogar $h \in w$. Falls $\mathrm{Def}(h) = a$ (oder $\mathrm{Bild}(h) = b$), ist h (oder h^{-1}) ein Isomorphismus der gesuchten Art. Einer dieser Fälle muss eintreten. Wären nämlich $a' := a \setminus \mathrm{Def}(h)$ und $b' := b \setminus \mathrm{Bild}(h)$ nicht leer, könnte man h „verlängern", indem man das r-minimale Element von a' auf das s-minimale Element von b' abbildet. Für die entstehende Funktion h' gälte $h \subset h'$ und, da offenbar $h' \in w$, auch $h' \subseteq h$, ein Widerspruch. ⊣

1.10 Aufgaben.

1.10.1 Es seien r eine fundierte Relation über a und $s \subseteq r$. Dann ist auch s eine fundierte Relation über a.

1.10.2 Man führe Satz V.1.5 auf Satz 1.4 zurück.

1.10.3 Für fundierte Strukturen (a, r) gilt:

$$\forall b\,\Big(\forall uv\,\big(u, v \in a \wedge r[u] \times r[v] \subseteq b \to (u, v) \in b\big) \;\to\; a \times a \subseteq b\Big).$$

1.10.4 Es sei (a, r) eine Wohlordnung und A die Menge der von a verschiedenen Anfangsstücke von a bzgl. r. Dann ist $(a, r) \cong (A, \subset_A)$. Gilt dies auch für beliebige Ordnungen i.S.v. $<$?

1.10.5 Man beweise ohne **Fund**: Ist x eine fundierte Menge, so gilt:
(i) $\forall u\,(u \in x \to \neg u \in u)$;
(ii) $\forall u \forall v\,(u, v \in x \to \neg(u \in v \wedge v \in u))$;
(iii) $\forall u \forall v \forall w\,(u, v, w \in x \to \neg(u \in v \wedge v \in w \wedge w \in u))$.

1.10.6 Ist a endlich und (a, r) eine Ordnung i.S.v. $<$, so ist $(a, r) \cong (|a|, \in_{|a|})$; insbesondere ist also (a, r) eine Wohlordnung.

1.10.7 Eine Menge a heiße *wohlordenbar*, wenn es eine Wohlordnungsrelation über a gibt, also ein r, für das (a, r) eine Wohlordnung ist. Man zeige, dass mit a und b auch die Mengen $a \cup b$ und $a \times b$ wohlordenbar sind, sowie ${}^b a$ und $\mathrm{Pot}(b)$, falls b endlich ist.

1.10.8 Zwei Wohlordnungen, von denen jede zu einem Anfangsabschnitt der anderen isomorph ist, sind zueinander isomorph.

§2 Ordinalzahlen

Wir haben die Definition der mengentheoretischen natürlichen Zahlen über einen Zählprozess motiviert, der von **0** nach **1**, **2**, ... führt und schließlich jedes Element von ω erfasst. Einem Zählakt entspricht dabei der Übergang von einem bereits erreichten i zu dessen Nachfolger $\mathbf{S}(i) = i \cup \{i\}$. Intuitiv gesehen liegt es nahe, diesen Zählprozess nach dem Durchlaufen der Elemente von ω in das Transfinite fortzusetzen, und zwar zunächst mit ω weiterzuzählen, dann mit $\omega \cup \{\omega\}$, $\omega \cup \{\omega\} \cup \{\omega \cup \{\omega\}\}$, ..., nach dem Durchlaufen all dieser Mengen – ähnlich wie bei ω – mit der Menge aller bislang erreichten Mengen in der Zählung fortzufahren, usf. Die Mengen **0**, **1**, **2**, ..., ω, $\omega \cup \{\omega\}$, ..., zu denen wir so gelangen, wollen wir *Ordinalzahlen* nennen.

Diese anschauliche Beschreibung lässt vermuten, dass jede Ordinalzahl aus denjenigen Ordinalzahlen besteht, die ihr im Zählprozess vorangehen, dass also die durch den Zählprozess induzierte Ordnungsbeziehung mit der Elementbeziehung zusammenfällt. Da die einzelnen Zählakte jeweils zu größeren Ordinalzahlen führen, wird jede nicht leere Menge von Ordinalzahlen ein kleinstes Element haben, nämlich das Element von ihr, welches wir beim Zählen zuerst erreichen. Für Ordinalzahlen x erwarten wir daher:

$(*)$ $\quad (x, \in_x)$ ist eine Wohlordnung, und es gilt $\forall u\,(u \in x \to \in_x[u] = u)$.

Tatsächlich gilt $(*)$ für $x \in \omega$, $x = \omega$ und auch für $x = \omega \cup \{\omega\}$. Wir legen daher fest:

2.1 Definition. Die Menge x ist eine *Ordinalzahl* (kurz: Oz x)
$:\leftrightarrow$ $(x, \in_x)$ ist eine Wohlordnung $\wedge \forall u\, (u \in x \rightarrow \in_x[u] = u)$.

In ähnlicher Weise, wie wir i, j, ... als Mengenvariablen gebrauchen, um Elemente von ω anzudeuten, verwenden wir α, β, ... als Mengenvariablen, um *Ordinalzahlen* anzudeuten.

Definition 2.1 geht auf Zermelo (etwa 1915) und auf von Neumann (1923) zurück. Die Überlegungen dieses und des folgenden Abschnitts dienen dazu, darzulegen, dass sie der eingangs geschilderten intuitiven Vorstellung gerecht wird. Zunächst notieren wir einige Beispiele:

(1) Oz i für $i \in \omega$.
(2) Oz ω.
(3) Oz $x \rightarrow$ Oz $x \cup \{x\}$, d. h. Oz $\alpha \cup \{\alpha\}$.

Zu (3) bemerken wir: Falls $(x, \in_x)$ eine Wohlordnung ist, ist $\in_x$ irreflexiv und transitiv, also $x \notin x$ und $x \notin y$ für $y \in x$. Daher ist auch $(x \cup \{x\}, \in_{x\cup\{x\}})$ eine Wohlordnung (es wird ja lediglich „am rechten Ende“ von $(x, \in_x)$ das Element x angefügt); und mit x genügt auch $x \cup \{x\}$ der zweiten Bedingung in $(*)$ (insbesondere ist ja $\in_{x\cup\{x\}}[x] = x$). $\dashv$

Wir wollen zunächst versuchen, die Definition 2.1 zu vereinfachen. Eine erste Möglichkeit bietet sich sofort an: Nach **Fund** würde es genügen, von $(x, \in_x)$ die *Ordnungs*- statt die *Wohl*ordnungseigenschaft zu verlangen. Aus methodischen Gründen, die später offensichtlich werden, wollen wir uns jedoch bemühen, die Ordinalzahltheorie ohne Benutzung von **Fund** und **AC** aufzubauen.

Für eine Menge x bedeutet

$$\forall u\, (u \in x \rightarrow \in_x[u] = u)$$

gerade, dass

$$\forall u\, (u \in x \rightarrow u \subseteq x),$$

und damit, dass

$$\forall u \forall v\, (v \in u \wedge u \in x \rightarrow v \in x)$$

gilt. Solche Mengen nennt man wegen der letzten Umformulierung *transitiv*. Schließlich heiße eine Menge x *konnex*, wenn $\in_x$ eine konnexe Relation über x ist. Damit können wir die versprochene Vereinfachung jetzt folgendermaßen formulieren:

2.2 Satz. Oz $x \leftrightarrow$ *x ist fundiert, konnex und transitiv.*

Zum *Beweis* bedarf es nur der Richtung von rechts nach links. Sie ergibt sich sofort mit

(α) Ist x fundiert, so ist (nach Definition 1.5) $(x, \in_x)$ eine fundierte Struktur, und es ist $\in_x$ irreflexiv.

(β) Ist x fundiert und konnex, so ist $\in_x$ transitiv (als Relation).

Zu (α) vgl. Aufgabe 1.10.5(i). Sei, zum Beweis von (β), x fundiert und konnex, und seien u, v, $w \in x$ mit $u \in v$ und $v \in w$. Da x konnex ist, haben wir $u \in w \vee u = w \vee w \in u$. Wir erreichen unser Ziel $u \in w$, wenn wir $u = w$ und $w \in u$ ausschließen. Wäre $u = w$, so $u \in v \wedge v \in u$, und wäre $w \in u$, so gälte $u \in v \wedge v \in w \wedge w \in u$. In beiden Fällen ergäbe sich ein Widerspruch (vgl. Aufgabe 1.10.5(ii), (iii)). ⊣

Sind die Elemente von Ordinalzahlen wieder Ordinalzahlen, wie es die eingangs angestellten intuitiven Überlegungen erkennen lassen? Hierzu der folgende

2.3 Hilfssatz. *Es sind äquivalent*:

(α) $x \in \alpha$;

(β) *x ist echtes* (d. h. *von α verschiedenes*) *Anfangsstück von α bzgl.* $\in_\alpha$;

(γ) *x ist transitiv und echte Teilmenge von α.*

Beweis. Offensichtlich gilt $(\beta) \leftrightarrow (\gamma)$. *Zu* „$(\alpha) \rightarrow (\beta)$“: Ist $x \in \alpha$, so ist $x = \in_\alpha[x]$ ein Anfangsstück von α bzgl. $\in_\alpha$, da $\in_\alpha$ eine transitive Relation ist; wegen $x \notin x$ ist $x \neq \alpha$.
Zu „$(\beta) \rightarrow (\alpha)$“: Ist x echtes Anfangsstück von α bzgl. $\in_\alpha$ und u das $\in_\alpha$-minimale Element aus $\alpha \setminus x$, so ist $\in_\alpha[u] = u$, da Oz α, und $\in_\alpha[u] = x$ nach Definition von u; also gilt $u = x$ und daher $x \in \alpha$. ⊣

2.4 Satz. $x \in \alpha \rightarrow \mathrm{Oz}\ x$.

Beweis. Ist $x \in \alpha$, so ist x nach Hilfssatz 2.3(γ) eine transitive Teilmenge von α. Nach 2.3(β) ist x ein Anfangsstück von α bzgl. $\in_\alpha$. Da $\in_x = \in_\alpha \cap (x \times x)$, ist x also auch konnex und fundiert. ⊣

Wir übertragen nun die Ordnungseigenschaften der $(\alpha, \in_\alpha)$ auf die Gesamtheit der Ordinalzahlen.

2.5 Satz. *Für alle* α, β, γ *gilt*:

(i) $\alpha \notin \alpha$.

(ii) $\alpha \in \beta \wedge \beta \in \gamma \rightarrow \alpha \in \gamma$.

(iii) $\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha$.

(iv) $\alpha \subseteq \beta \leftrightarrow \alpha \in \beta \vee \alpha = \beta$.

(v) $\alpha \subseteq \beta \vee \beta \subseteq \alpha$.

Zusammen mit Satz 2.4 sehen wir, dass eine Ordinalzahl gerade aus den im Sinne von $\in$ kleineren Ordinalzahlen besteht, und Teil (iv) zeigt uns, dass die der $\in$-Beziehung entsprechende $\leq$-Beziehung gerade durch die Teilmengenbeziehung gegeben wird.

Beweis von 2.5. Teil (i) ergibt sich mit Hilfssatz 2.3, Teil (ii) aus der Transitivität von γ. – *Zu* (iii): Mit α und β ist auch $x := \alpha \cap \beta$ transitiv. Nach Hilfssatz 2.3 gilt daher $x \in \alpha \vee x = \alpha$ und $x \in \beta \vee x = \beta$. Der Fall $x \in \alpha \wedge x \in \beta$ scheidet aus; denn dann gälte $x \in_\alpha x$. Also ist $x = \alpha \vee x = \beta$ und daher $\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha$. – *Zu* (iv): „$\leftarrow$" ergibt sich aus der Transitivität von β. Ist umgekehrt $\alpha \subseteq \beta$, erhalten wir mit der Transitivität von α und Hilfssatz 2.3, dass $\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta$. – (v) ergibt sich sofort aus (iii) und (iv). $\dashv$

Um den Ordnungseigenschaften von $\in$ auf den Ordinalzahlen Ausdruck zu verleihen, schreiben wir fortan statt „$\alpha \in \beta$" oft „$\alpha < \beta$"; „$\alpha \leq \beta$" steht dann nach Satz 2.5(iv) für „$\alpha \subseteq \beta$".

Der Fundiertheit der einzelnen Ordinalzahlen entspricht „global" das folgende Prinzip vom kleinsten Element:

2.6 Satz vom kleinsten Element für Ordinalzahlen.

(i) Mengenform: *Jede nicht leere Menge von Ordinalzahlen besitzt ein kleinstes Element.*

(ii) Prädikatsform (Schema): *Sei P ein einstelliges Prädikat. Dann gilt*:

$$\exists\alpha\, P\alpha \;\rightarrow\; \exists\alpha \big(P\alpha \wedge \forall\beta(\beta < \alpha \rightarrow \neg P\beta)\big).$$

Beweis. Zu (i): Sei b eine nicht leere Menge von Ordinalzahlen und $\alpha \in b$. Ist $\alpha \cap b = \emptyset$, so ist α die kleinste Ordinalzahl in b. Im anderen Fall sei β das $\in_\alpha$-minimale Element von $\alpha \cap b$. Ist $\gamma \in \beta$, so ist $\gamma \in_\alpha \beta$ und daher $\gamma \notin b$. Also ist β die kleinste Ordinalzahl in b. *Zu* (ii): Gilt etwa $P\alpha$, wendet man (i) auf $\{\beta \in \alpha \cup \{\alpha\} \mid P\beta\}$ an. $\dashv$

Aus Satz 2.6 lässt sich ein Prinzip für Induktionsbeweise gewinnen, das dem „lokalen" Prinzip aus Satz 1.4 entspricht:

2.7 Satz von der transfiniten Induktion für Ordinalzahlen (Schema). *Sei P ein einstelliges Prädikat. Dann gilt*:

$$\forall\alpha \big(\forall\beta\,(\beta < \alpha \rightarrow P\beta) \rightarrow P\alpha\big) \;\rightarrow\; \forall\alpha\, P\alpha.$$

Um also zu zeigen, dass ein Prädikat auf alle Ordinalzahlen zutrifft, reicht der Nachweis, dass es auf eine beliebige Ordinalzahl zutrifft, sofern es auf alle kleineren zutrifft. Eine Form der transfiniten Induktion, die stärker der vollständigen Induktion über ω (Satz V.1.5) entspricht, lernen wir weiter unten mit Satz 2.10 kennen.

Beweis von Satz 2.7. Es gelte das Vorderglied der Implikation. Gäbe es dann ein γ mit $\neg P\gamma$, so nach Satz 2.6(ii) ein kleinstes, etwa α. Nach Wahl von α ergäbe sich $\forall\beta\,(\beta < \alpha \to P\beta) \wedge \neg P\alpha$, ein Widerspruch. $\dashv$

Das anschauliche Bild, das wir eingangs von den Ordinalzahlen entwickelt haben, hat sich, fußend auf Definition 2.1, in den bisher bewiesenen Sätzen voll bestätigt. Wir wollen jetzt den Zählprozess selbst noch einer Klärung unterziehen. Er besteht aus drei verschiedenen Akten: dem Setzen des *Anfangs*, d. h. der Zahl $\mathbf{0}$, dem Weiterzählen als dem Übergang von einer Ordinalzahl α zu ihrem *Nachfolger* $\alpha \cup \{\alpha\}$ (vgl. (3) nach Definition 2.1) und dem Setzen eines neuen Anfangs, wenn sich der Zählprozess „totgelaufen" hat, indem man mit der Menge der bis dahin gezählten Ordinalzahlen als neuer Zahl fortfährt. (Dies ist der Fall bei ω.) Zahlen der letzten Art nennen wir Limeszahlen.

2.8 Definition. (i) (*Nachfolgeroperation:*) $S(x) \;:=\; x \cup \{x\}$.

(ii) x ist *Nachfolgerzahl* $\;:\leftrightarrow\;\; \exists\alpha\; x = S(\alpha)$.

(iii) x ist *Limeszahl* $\;:\leftrightarrow\;$ Oz $x \wedge x \neq \mathbf{0} \wedge x$ ist keine Nachfolgerzahl.

Für $i \in \omega$ gilt $S(i) = \mathbf{S}(i)$. Wegen $\alpha < \beta \leftrightarrow \alpha \subset \beta$ ist $\alpha \cup \{\alpha\}$, also $S(\alpha)$, die nächstgrößere Ordinalzahl hinter α, und α ist ihr unmittelbarer *Vorgänger*; Limeszahlen haben keinen unmittelbaren Vorgänger, sie sind (vgl. Aufgabe 2.11.6) ihr eigenes Supremum. Wir deuten sie hinfort durch $\delta, \ldots$ an.

Es ist ω die kleinste Limeszahl, aber nicht die einzige, deren Existenz wir beweisen können. Es gibt sogar beliebig große Limeszahlen:

2.9 Satz. $\forall\alpha\,\exists\delta\,(\alpha < \delta \wedge \delta$ *ist Limeszahl*$)$.

Beweis. Anschaulich: Wir wählen als δ das Supremum der Ordinalzahlmenge $\{\alpha,\, S(\alpha),\, S(S(\alpha)),\, \ldots\}$. Genauer: Wir definieren die Funktion f auf ω nach dem ω-Rekursionstheorem V.2.4(i) rekursiv durch

$$f(\mathbf{0}) = \alpha, \;\; \forall i\, f(\mathbf{S}(i)) = S(f(i)).$$

Es ist nicht schwer zu sehen (vgl. Aufgabe 2.11.4), dass $\bigcup \mathrm{Bild}(f)$ eine Ordinalzahl ist, etwa β. Da $\alpha \in f(\mathbf{1})$, ist $\alpha < \beta$. Ferner ist β keine Nachfolgerzahl. Ist nämlich $\gamma \in \beta$, etwa $\gamma \in f(i)$, so ist $S(\gamma) \in S(f(i)) = f(\mathbf{S}(i))$, also $S(\gamma) \in \beta$. Demnach ist β eine Limeszahl. $\dashv$

Den Anfang der Ordinalzahlenreihe können wir jetzt folgendermaßen veranschaulichen:

$$(\Omega) \qquad \begin{aligned} &\mathbf{0},\, S(\mathbf{0}), \ldots, \omega,\, S(\omega), \ldots, \boldsymbol{\delta_1},\, S(\boldsymbol{\delta_1}), \ldots, \\ &\boldsymbol{\delta_2},\, S(\boldsymbol{\delta_2}), \ldots, \boldsymbol{\delta}_\omega,\, S(\boldsymbol{\delta}_\omega), \ldots, \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{\delta}_1},\, S(\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{\delta_1}}), \ldots, \\ &\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{\omega}}},\, S(\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{\omega}}}), \ldots . \end{aligned}$$

Jede Ordinalzahl ist entweder gleich $\mathbf{0}$, eine Nachfolgerzahl oder eine Limeszahl. Dieser Einteilung entspricht die Möglichkeit, Behauptungen für alle Ordinalzahlen durch eine entsprechende Fallunterscheidung zu beweisen. Als Beispiel hierzu bringen wir eine Variante von Satz 2.7, die in besonderer Weise den unterschiedlichen Zählakten angepasst ist.

2.10 Satz (Variante der transfiniten Induktion für Ordinalzahlen; Schema). *Sei P ein einstelliges Prädikat. Dann gilt*:

$$P\mathbf{0} \wedge \forall\alpha\,\big(P\alpha \to PS(\alpha)\big) \wedge \forall\delta\,\big(\forall\beta\,(\beta < \delta \to P\beta) \to P\delta\big) \;\to\; \forall\alpha\, P\alpha.$$

Beweis. Das Vorderglied möge gelten. Gäbe es dann ein α mit $\neg P\alpha$, so ein kleinstes, etwa γ. Je nachdem, ob $\gamma = \mathbf{0}$, γ eine Nachfolgerzahl oder γ eine Limeszahl ist, erhalten wir einen Widerspruch zum ersten, zweiten oder dritten Konjunktionsglied der linken Seite. $\dashv$

Den Sätzen über die transfinite Induktion für Ordinalzahlen stehen Sätze gegenüber, die die Möglichkeit rekursiver Definitionen von Funktionen und Operationen ähnlich der ω-Rekursion eröffnen. Solchen Sätzen wenden wir uns, wie bereits angekündigt, im nächsten Kapitel zu.

2.11 Aufgaben.

2.11.1 (i) Eine Menge x ist transitiv genau dann, wenn $\bigcup x \subseteq x$.
(ii) Sind alle Elemente von x transitiv, so auch $\bigcap x$ und $\bigcup x$.

2.11.2 Eine Menge ist genau dann transitiv, wenn ihre Potenzmenge transitiv ist.

2.11.3 Man untersuche die folgenden Äquivalenzen auf ihre Gültigkeit hin:
(i) x ist transitiv $\leftrightarrow$ $\forall y(y \in x \to y$ ist transitiv$)$.
(ii) x ist transitiv $\leftrightarrow$ $\in_x$ ist eine transitive Relation.

2.11.4 X sei eine nicht leere Menge von Ordinalzahlen. Dann ist $\bigcap X$ die kleinste Ordinalzahl in X und $\bigcup X$ das *Supremum* der Ordinalzahlen aus X, d. h. die kleinste Ordinalzahl, die $\geq$ allen Elementen aus X ist.

2.11.5 Für alle x und α mit $S(x) = S(\alpha)$ ist $x = \alpha$.

2.11.6 Für alle α ist α eine Limeszahl genau dann, wenn $\alpha \neq \mathbf{0}$ und $\alpha = \bigcup \alpha$.

2.11.7 Jede Limeszahl ist Supremum einer Menge von Nachfolgerzahlen.

2.11.8 Es gibt eine Limeszahl δ, die das Supremum einer Menge von Limeszahlen $< \delta$ ist.

2.11.9 Es sei (a, r) eine fundierte Struktur, und für die Funktion $f : \alpha \to a$ gelte $\forall\beta\gamma\,(\beta, \gamma \in \alpha \wedge \beta < \gamma \to f(\gamma) r f(\beta))$. Man zeige, dass $\alpha \in \omega$ ist.

2.11.10 Es sei $\alpha \geq \omega$ und die Funktion f auf ω gegeben durch $f(\mathbf{0}) = \alpha$ und $f(\mathbf{S}(i)) = \bigcup f(i)$. Man zeige: Es gibt ein $i \in \omega$, für das $\delta := f(i)$ eine Limeszahl ist; δ ist eindeutig bestimmt und die größte Limeszahl $\leq \alpha$.

2.11.11 Man zeige, dass es zu jeder Menge x eine Menge y mit folgenden Eigenschaften gibt:

(α) $x \subseteq y$;

(β) y ist transitiv;

(γ) ist w eine transitive Obermenge von x, so ist $y \subseteq w$.

Damit ist y die eindeutig bestimmte kleinste transitive Obermenge von x, die sog. *transitive Hülle* von x, $\mathrm{TC}(x)$.

2.11.12 Eine einstellige Operation F heißt *normal*, wenn sie Ordinalzahlen auf Ordinalzahlen abbildet und wenn sie auf den Ordinalzahlen echt monoton und in den Limeszahlen *stetig* ist, d. h. wenn gilt:

$$\forall\alpha\, \mathrm{Oz}\, F(\alpha) \wedge \forall\alpha\beta\big(\alpha < \beta \rightarrow F(\alpha) < F(\beta)\big) \wedge \forall\delta\, F(\delta) = \bigcup\{F(\beta)|\beta < \delta\}.$$

Man zeige für normales F:

(i) F bildet Limeszahlen auf Limeszahlen ab.

(ii) Ist w eine nicht leere Menge von Ordinalzahlen, so ist $\bigcup\{F(\alpha) \mid \alpha \in w\} = F(\bigcup w)$.

(iii) Ist $\alpha \geq F(\mathbf{0})$, so gibt es eine größte Ordinalzahl γ mit $F(\gamma) \leq \alpha$.

2.11.13 Die Komposition zweier normaler Operationen ist wieder normal.

2.11.14 F sei eine normale Operation. Ist w eine nicht leere Menge von Ordinalzahlen, die aus *Fixpunkten* von F (d. h. aus Ordinalzahlen α mit $F(\alpha) = \alpha$) besteht, so ist $\bigcup w$ ein Fixpunkt von F.

2.11.15 Eine normale Operation hat beliebig große Fixpunkte.

2.11.16 Für Ordinalzahlen $\beta < \beta'$ sei $\langle\beta, \beta'\rangle := \{\gamma \mid \beta < \gamma < \beta'\}$ und $[\beta, \beta'\rangle := \{\gamma \mid \beta \leq \gamma < \beta'\}$. Sei nun die Ordinalzahl α gegeben und

$$B_\alpha := \{[0, \beta\rangle \mid \beta \leq \alpha\} \cup \{\langle\beta, \beta'\rangle \mid \beta < \beta' \leq \alpha\}.$$

Man zeige:

(i) B_α ist Basis einer Hausdorffschen Topologie $(\alpha, \mathcal{O}_\alpha)$ auf α; deren nicht isolierte Punkte fallen mit den Limeszahlen aus α zusammen.

(ii) $(S(\omega), \mathcal{O}_{S(\omega)})$ ist kompakt, $(\omega, \mathcal{O}_\omega)$ nicht.

(iii) $(\alpha, \mathcal{O}_\alpha)$ ist kompakt $\leftrightarrow$ α ist keine Limeszahl.

§3 Es gibt viele Ordinalzahlen

Intuitiv ist dem Zählprozess, wie wir ihn zu Beginn des vorangehenden Abschnitts geschildert haben, keine Grenze gesetzt. Als präzises Gegenstück zu diesem Eindruck erwarten wir daher:

3.1 Satz. *Die Ordinalzahlen bilden keine Menge*, d. h. $\neg\exists x\,\forall u\,(u \in x \leftrightarrow \mathrm{Oz}\ u)$.

Beweis. Wir nehmen an, es gäbe die Menge Ω aller Ordinalzahlen. Nach Satz 2.6(i) ist Ω fundiert, nach Satz 2.5(iii) konnex und nach Satz 2.4 transitiv, also nach Satz 2.2 eine Ordinalzahl. Damit gilt $\Omega \in \Omega$, ein Widerspruch zu Satz 2.5(i). $\dashv$

In einer Mengenlehre, die das weitreichende Komprehensionsprinzip akzeptiert, wie wir es in I. 3 formuliert haben, führt also die Bildung der Menge aller Ordinalzahlen, ähnlich wie die Russellsche Komprehension, zu einem Widerspruch, der sog. *Antinomie von Burali-Forti*; sie findet sich nach einer Beobachtung von Russell (1903) implizit in einer Arbeit von Cesare Burali-Forti aus dem Jahre 1897 (vgl. *Moore 1982*, S. 59). 1899 hat Cantor sie in einem Brief an Dedekind hergeleitet.

Satz 3.1 liefert den Schlüssel für zwei weitere Aussagen, welche den Reichtum an Ordinalzahlen belegen. Die Beweise machen *nicht* vom Auswahlaxiom Gebrauch.

Nehmen wir an, es sei eine Menge a gegeben und ein Verfahren, mit Hilfe von Ordinalzahlen eine Aufzählung $a_{\mathbf{0}}, a_{\mathbf{1}}, \ldots, a_\omega, \ldots$ der Elemente von a herzustellen. Die Aufzählung sei *frei von Wiederholungen*, und die entsprechende Zuordnung $\gamma \mapsto a_\gamma$ sei, wenn sie bis zu einer Ordinalzahl α (ausschließlich) fortgetrieben sei, durch eine auf α definierte Funktion beschreibbar. Eine solche Funktion ist wegen der Wiederholungsfreiheit der Aufzählung eine Injektion von α in a. Kann es nun vorkommen, dass alle Ordinalzahlen verbraucht werden, um a auszuschöpfen, oder dass gar alle Ordinalzahlen verbraucht sind, bevor a ausgeschöpft ist? In einem solchen Fall gäbe es zu jedem α eine auf α definierte Injektion von α in a. Nach Satz 3.1 ist so etwas schwer vorstellbar. In der Tat gilt:

3.2 Satz von Hartogs. $\forall x\,\exists\alpha\,\neg\exists f\ f : \alpha \overset{inj}{\to} x$.

Wir schicken dem Beweis voraus:

(1) $(\alpha, \in_\alpha) \cong (\beta, \in_\beta) \ \to\ \alpha = \beta$.

Sei nämlich $(\alpha, \in_\alpha) \cong (\beta, \in_\beta)$, und sei etwa $\alpha \subseteq \beta$. Dann ist $(\alpha, \in_\alpha)$ ein zu $(\beta, \in_\beta)$ isomorpher Anfangsabschnitt von $(\beta, \in_\beta)$, also ist nach Korollar 1.8(ii) $(\alpha, \in_\alpha) = (\beta, \in_\beta)$, d. h. $\alpha = \beta$.

Beweis von Satz 3.2 indirekt. Wir nehmen an, x sei eine Menge mit

$$\forall\alpha\,\exists f\; f:\alpha \overset{inj}{\to} x.$$

Es sei $W := \{w \in \mathrm{Pot}(x) \times \mathrm{Pot}(x \times x) \mid w \textit{ ist Wohlordnung}\}$ die Menge aller Wohlordnungen, deren Träger eine Teilmenge von x ist. Wir behaupten:

(2) Zu jedem α existiert ein $w \in W$ mit $(\alpha, \in_\alpha) \cong w$.

Wenn dies bewiesen ist, erhalten wir für die durch

$$F(w) := \begin{cases} \textit{das}\ \alpha \text{ mit } (\alpha, \in_\alpha) \cong w, \text{falls } w \in W \\ \qquad \text{und ein } \beta \text{ mit } (\beta, \in_\beta) \cong w \text{ existiert;} \\ \emptyset, \text{ sonst} \end{cases}$$

definierte Operation F (zur Eindeutigkeit von α vgl. (1)), dass die Menge $\mathrm{Bild}(F{\restriction}W)$ die Menge aller Ordinalzahlen ist, ein Widerspruch.

Sei, um (2) einzusehen, α gegeben. Nach Annahme über x sei etwa $f:\alpha \overset{inj}{\to} x$. Dann ist $(\alpha, \in_\alpha) \cong (\mathrm{Bild}(f), s)$ mit

$$s = \{(f(\beta), f(\gamma)) \in x \times x \mid \beta, \gamma \in \alpha \text{ und } \beta < \gamma\},$$

und $(\mathrm{Bild}(f), s)$ ist ein Element von W. ⊣

Wir schließen mit einer Aussage, die den Reichtum an Ordinalzahlen im Hinblick auf Wohlordnungen darlegt: Zusammen mit der $\in$-Beziehung repräsentieren sie modulo Isomorphie auf eindeutige Weise alle Wohlordnungen.

3.3 Satz. *Für jede Wohlordnung w gilt: Es gibt genau eine Ordinalzahl α mit $w \cong (\alpha, \in_\alpha)$.*

Beweis. Die Eindeutigkeit ergibt sich mit (1). Zur Existenz: Sei $w = (a, r)$ eine Wohlordnung und α nach Satz 3.2 so gewählt, dass es keine Injektion von α nach a gibt. Nach Satz 1.9 ist $(\alpha, \in_\alpha)$ isomorph zu einem Anfangsabschnitt von (a, r) oder umgekehrt (a, r) isomorph zu einem Anfangsabschnitt von $(\alpha, \in_\alpha)$. Nach Wahl von α scheidet die erste Möglichkeit aus. Daher gibt es ein $\beta \leq \alpha$ mit $(a, r) \cong (\beta, \in_\beta)$. ⊣

3.4 Aufgaben.

3.4.1 Die Limeszahlen bilden keine Menge.

3.4.2 Es sei x eine unendliche Menge und α die kleinste Ordinalzahl, die keine Injektion von α in x zulässt. Man zeige, dass α eine Limeszahl ist.

VII

Rekursionen und Fundiertheit

> Die Schönheit des Ganzen, in dieser, in dieser will ich dich preisen, lieber Baumeister! Preisen, auch wenn es möglich wäre, dass die ganze schöne Masse gar keinen Grund hätte.

Im vorangehenden Kapitel haben wir eine Reihe von Möglichkeiten kennengelernt, induktiv Beweise zu führen. Ihnen stellen wir in diesem Kapitel Methoden zur Seite, induktiv oder rekursiv Funktionen und Operationen zu definieren. Zunächst wenden wir uns Funktionen zu, dann Operationen. Dabei machen wir von **Fund** und **AC** keinen Gebrauch. Eine erste wichtige Anwendung, die von Neumannsche Hierarchie, wird uns jedoch Gelegenheit geben, die Rolle des Fundierungsaxioms in der Mengenlehre zu klären.

§1 Das lokale Rekursionstheorem

Wir verallgemeinern das einfache ω-Rekursionstheorem V.2.1 in zwei Richtungen: Wir lassen anstelle von $(\omega, \in_\omega)$ beliebige fundierte Strukturen (a, r) zu (vgl. VI.1.2), und wir erlauben bei der Definition an einer Stelle $u \in a$ den Rückgriff auf die Definition an allen Stellen, die u im Sinne von r vorangehen, ähnlich wie wir das beim ω-Rekursionstheorem V.2.4 getan haben.

Die Einbeziehung beliebiger fundierter Strukturen (a, r) stellt uns vor ein neues Phänomen: Während in Ordnungen jedes Element durch die Menge seiner Vorgänger eindeutig bestimmt wird, können jetzt verschiedene Elemente von a die gleiche Menge von r-Vorgängern besitzen; z. B. ist für alle r-minimalen Elemente u von a die Menge $r[u]$ leer. Wollen wir verschiedenen r-minimalen Elementen bei der rekursiven Definition einer Funktion dennoch verschiedene Werte zuweisen, müssen wir die Stelle, an der wir definieren, als zusätzlichen Parameter in die Rekursionsvorschrift aufnehmen. Damit gelangen wir zur allgemeinsten Form rekursiver Definitionen.

H.-D. Ebbinghaus, *Einführung in die Mengenlehre*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-63866-8_7

1.1 Lokales Rekursionstheorem (Schema)**.** *Es sei F eine zweistellige Operation. Dann gilt*:

$$(a, r) \textit{ fundierte Struktur} \to \exists^{=1} f \big(f \textit{ ist auf } a \textit{ definierte Funktion} \wedge \\ \forall u\, (u \in a \to f(u) = F(u, f{\restriction} r[u]))\big).$$

Lokal nennen wir das Theorem deshalb, weil im Gegensatz zum *globalen* Theorem 2.1 nicht eine *Operation*, sondern eine *Funktion* rekursiv definiert wird.

Für Ordinalzahlwohlordnungen $(\alpha, \in_\alpha)$ gilt für $u \in \alpha$, dass $\in_\alpha [u] = u$; wir können also auf den zusätzlichen Parameter u wieder verzichten und erhalten als Spezialfall von Theorem 1.1 die folgende Verallgemeinerung des ω-Rekursionstheorems V.2.4(ii):

1.2 Lokales Rekursionstheorem für Ordinalzahlen (Schema)**.** *Es sei F eine einstellige Operation. Dann gilt*:

$$\forall \alpha\, \exists^{=1} f \big(f \textit{ ist auf } \alpha \textit{ definierte Funktion} \\ \wedge \forall \beta\, (\beta < \alpha \to f(\beta) = F(f{\restriction}\beta))\big).$$

Beweis von Theorem 1.1. Es sei F eine zweistellige Operation und (a, r) eine fundierte Struktur. Wir definieren

$$\begin{aligned} g \text{ ist ein } \textit{Anfang} \ :\leftrightarrow \ & g \text{ ist Funktion} \\ & \wedge \operatorname{Def}(g) \text{ ist Anfangsstück von } a \text{ bzgl. } r \\ & \wedge \forall u\, (u \in \operatorname{Def}(g) \to g(u) = F(u, g{\restriction} r[u])). \end{aligned}$$

Wir zeigen zunächst, dass zwei Anfänge auf dem Durchschnitt ihrer Definitionsbereiche übereinstimmen. Hieraus ergibt sich unmittelbar, dass es höchstens eine Funktion f geben kann, die den Bedingungen von Theorem 1.1 genügt. Andererseits ist, wie wir beweisen werden, die gemeinsame Fortsetzung aller Anfänge eine Funktion mit den gewünschten Eigenschaften.

(1) $$g, h \text{ Anfänge } \wedge u \in \operatorname{Def}(g) \cap \operatorname{Def}(h) \ \to \ g(u) = h(u).$$

Zum Beweis von (1) argumentieren wir indirekt und nehmen dazu an, es sei $u \in \operatorname{Def}(g) \cap \operatorname{Def}(h)$ mit $g(u) \neq h(u)$. Es ist $r[u] \subseteq \operatorname{Def}(g) \cap \operatorname{Def}(h)$. Wegen der Fundiertheit von (a, r) können wir u r-minimal wählen und erhalten weiter, dass $g{\restriction} r[u] = h{\restriction} r[u]$. Hieraus ergibt sich $g(u) = F(u, g{\restriction} r[u]) = F(u, h{\restriction} r[u]) = h(u)$, ein Widerspruch.

Nun zur *Existenz* einer Funktion f. Es sei

$$b \ := \ \big\{u \in a \mid u \in \operatorname{Def}(g) \text{ für einen Anfang } g\big\}.$$

Offensichtlich ist b ein Anfangsstück von a bzgl. r; denn ist $u \in b$ und g ein Anfang mit $u \in \mathrm{Def}(g)$, so ist $r[u] \subseteq \mathrm{Def}(g)$, also $r[u] \subseteq b$. Wir definieren eine Operation H durch

$$H(u) \ := \begin{cases} g(u), & \text{falls } u \in b \text{ und } g \text{ ein} \\ & \text{Anfang mit } u \in \mathrm{Def}(g); \\ \emptyset, & \text{falls } u \notin b. \end{cases}$$

Nach (1) ist H wohldefiniert. Für $f := H \restriction b$ gilt dann (damit sind wir fertig):

(2) $$f \text{ ist Anfang;}$$

(3) $$\mathrm{Def}(f) \ = \ a.$$

Zu (2): $\mathrm{Def}(f) = b$ ist Anfangsstück von a bzgl. r, und ist $u \in b$ und g ein Anfang mit $u \in \mathrm{Def}(g)$, so gilt $f(u) = g(u) = F(u, g \restriction r[u]) = F(u, f \restriction r[u])$. *Zu* (3): Wäre $a \setminus b \neq \emptyset$, so wäre für ein r-minimales $u \in a \setminus b$ die Funktion $h := f \cup \{(u, F(u, f \restriction r[u]))\}$ ein Anfang, also wäre $u \in b$, und wir hätten einen Widerspruch. ⊣

Als Beispiel für eine Anwendung des lokalen Rekursionstheorems bringen wir ein Lemma, das in der weiterführenden Mengenlehre methodisch von Nutzen ist, das *Lemma von Mostowski*. Hierzu ein neuer Begriff: Nach dem Extensionalitätsaxiom ist eine Menge durch ihre Elemente, ihre „$\in$-Vorgänger“, eindeutig bestimmt. Das motiviert die Bezeichnung *extensional* für Strukturen (a, r), bei denen die Elemente von a durch ihre r-Vorgänger bestimmt sind.

1.3 Definition. (a, r) ist eine *extensionale Struktur*
$:\leftrightarrow$ (a, r) ist eine binäre Struktur und $\forall uv\, (u, v \in a \wedge r[u] = r[v] \ \rightarrow \ u = v)$.

Jede Ordnung i.S.v. $<$ oder i.S.v. $\leq$ ist eine extensionale Struktur. Falls a eine transitive Menge ist, so ist die Struktur $(a, \in_a)$ extensional; denn dann ist $\in_a[u] = u$ für alle $u \in a$.

Das Lemma von Mostowski besagt, dass eine fundierte und extensionale Struktur auf genau eine Weise isomorph auf eine Struktur $(b, \in_b)$ mit transitivem b abgebildet werden kann:

1.4 Lemma von Mostowski. *Ist* (a, r) *eine fundierte und extensionale Struktur, so gibt es genau eine Funktion* f *mit*

$$f : (a, r) \cong \big(\mathrm{Bild}(f), \in_{\mathrm{Bild}(f)}\big),$$

für die $\mathrm{Bild}(f)$ *transitiv ist.*

Beweis. Es sei (a, r) eine fundierte und extensionale Struktur. Intuitiv gesehen, erhalten wir den gesuchten Isomorphismus f rekursiv auf folgende Weise:

Zunächst besitzt (a, r) ein eindeutig bestimmtes r-minimales Element, das wir auf $\emptyset$ abbilden. Ist dann $v \in a$ und für alle u mit urv der Wert von u unter f bereits definiert, so setzen wir, um die Verträglichkeit von f mit r und $\in$ zu garantieren, $f(v) = \{f(u) \mid urv\}$. (Ist v das r-minimale Element von (a, r), stimmt diese Festlegung mit der vorangehenden überein.) Die Transitivität von $\mathrm{Bild}(f)$ liegt jetzt auf der Hand. Die Injektivität von f wird sich daraus ergeben, dass aufgrund der Extensionalität von (a, r) verschiedene Elemente v von a auch verschiedene Vorgängermengen $\{u \,|\, urv\}$ haben.

Nun die exakte Argumentation: Die Funktion f genüge den Bedingungen des Lemmas. Dann ist f eindeutig bestimmt. Sei nämlich $u \in a$. Wegen der Isomorphieeigenschaft von f gilt

$$\mathrm{Bild}(f{\restriction}r[u]) \;=\; \in_{\mathrm{Bild}(f)}[f(u)], \tag{1}$$

und die Transitivität von $\mathrm{Bild}(f)$ liefert

$$\in_{\mathrm{Bild}(f)}[f(u)] \;=\; f(u). \tag{2}$$

Somit gilt für alle $u \in a$:

$$f(u) \;=\; \mathrm{Bild}(f{\restriction}r[u]). \tag{3}$$

Das lokale Rekursionstheorem zeigt daher mit $F(x, y) := \mathrm{Bild}(y)$, dass es höchstens ein solches f gibt. Sei umgekehrt f die nach dem lokalen Rekursionstheorem existierende Funktion auf a, die für alle $u \in a$ die Bedingung (3) erfüllt. Wir zeigen, dass f den Bedingungen des Lemmas genügt, und haben damit den Existenzbeweis erbracht.

$\mathrm{Bild}(f)$ ist transitiv, da für $u \in a$ nach (3) $f(u) = \mathrm{Bild}(f \restriction r[u]) \subseteq \mathrm{Bild}(f)$ gilt. Ferner besitzt f die Isomorphieeigenschaft. Zunächst zeigen wir für alle u, $v \in a$:

$$\begin{aligned} &\forall u'v' \big(u'ru \wedge v'rv \wedge f(u') = f(v') \to u' = v'\big) \\ &\qquad \to \big(f(u) = f(v) \to u = v\big). \end{aligned} \tag{4}$$

Hieraus ergibt sich dann leicht die *Injektivität* (vgl. Aufgabe VI.1.10.3). Gelte also für u und v das Vorderglied der Implikation in (4) und sei $f(u) = f(v)$, also, nach (3), $\{f(u') \mid u'ru\} = \{f(v') \mid v'rv\}$. Zu $u' \in r[u]$ existiert dann ein $v' \in r[v]$ mit $f(u') = f(v')$, also, nach Voraussetzung, mit $u' = v'$, d. h. u' gehört zu $r[v]$. Aus Symmetriegründen erhalten wir insgesamt, dass $r[u] = r[v]$, wegen der Extensionalität von (a, r) also $u = v$. Zur *Verträglichkeit*: Mit urv gilt nach (3), dass $f(u) \in f(v)$, und ist umgekehrt $f(u) \in f(v) = \{f(w) \mid wrv\}$, so liefert die Injektivität von f, dass urv. $\dashv$

Das Lemma von Mostowski liefert einen anderen Zugang zu Satz VI.3.3: Jede Wohlordnung ist als fundierte und extensionale Struktur zu genau einer Wohlordnung der Gestalt $(x, \in_x)$ mit transitivem x isomorph, d. h. zu genau einer Wohlordnung der Gestalt $(\alpha, \in_\alpha)$. Das Lemma verallgemeinert also Satz VI.3.3 von Wohlordnungen und Ordinalzahlen auf fundierte, extensionale Strukturen und fundierte transitive Mengen.

1.5 Aufgaben.

1.5.1 Es sei x eine Menge von Ordinalzahlen. Dann gibt es genau eine Ordinalzahl α mit $(x, \in_x) \cong (\alpha, \in_\alpha)$.

1.5.2 (Schema) Für eine einstellige Operation F gilt:

$$\begin{aligned} & \forall \alpha c\, \exists^{=1} f\, \big(f \text{ ist auf } \alpha \text{ definierte Funktion} \wedge f(\mathbf{0}) = c \\ \wedge\ \ & \forall \beta\, (S(\beta) \in \alpha \to f(S(\beta)) = F(f(\beta))) \\ \wedge\ \ & \forall \delta\, (\delta \in \alpha \wedge \delta \text{ Limeszahl } \to f(\delta) = F(f{\restriction}\delta))\big). \end{aligned}$$

1.5.3 Man beweise die Existenz von $\omega_{\mathbf{Z}}$ (vgl. Aufgabe III.4.4.2). Man zeige, dass $(\omega_{\mathbf{Z}}, \in_{\omega_{\mathbf{Z}}})$ eine fundierte und extensionale Struktur ist, und bestimme ihr Bild unter dem Mostowski-Isomorphismus.

1.5.4 Man schreibe das lokale Rekursionstheorem exakt als Schema.

1.5.5 (Naiv). Es sei par die auf der Menge der Ausdrücke definierte Funktion, die einem Ausdruck die Menge der in ihm vorkommenden Parameter zuordnet. Z. B. ist $\mathrm{par}(\exists x\, y \in x) = \{y\}$. Man definiere par rekursiv über die Beziehung „*– ist echter Teilausdruck von –*“.

§2 Das globale Rekursionstheorem

Das *lokale* Rekursionstheorem gibt uns die Möglichkeit, auf einer *Menge*, über der eine fundierte *Relation* gegeben ist, rekursiv *Funktionen* zu definieren. Das *globale* Rekursionstheorem befähigt uns in ähnlicher Weise dazu, auf dem *Universum* rekursiv *Operationen* zu definieren. Dabei wird die Rolle der fundierten Relationen durch geeignete fundierte *Prädikate* übernommen. Wir verschieben den allgemeinen Fall auf eine Übungsaufgabe (Aufgabe 2.2.9) und bringen ausführlich den wichtigsten Sonderfall.

2.1 Globales Rekursionstheorem für Ordinalzahlen (Schema)**.**

Es sei F eine einstellige Operation. Dann wird durch

$$(*) \qquad G(x) = \begin{cases} \emptyset, & \textit{falls } \neg \mathrm{Oz}\, x \\ F(G{\restriction}x), & \textit{falls } \mathrm{Oz}\, x \end{cases}$$

genau eine Operation definiert.

Zum *Beweis* zeigen wir, dass sich eine Definition für eine Operation G so angeben lässt, dass G die Bedingung $(*)$ erfüllt, und dass je zwei solcher Definitionen die gleiche Operation festlegen; mit anderen Worten: dass wir $(*)$ auf eindeutige Weise in die korrekte Definition einer Operation verwandeln können, wie wir das in einfacheren Fällen, so bei der Definition einer Operation durch Fallunterscheidung (vgl. etwa Definition IV.1.7), bereits eingesehen haben. Neu ist hier, dass die zu definierende Operation auf beiden Seiten der definierenden Gleichungen auftreten kann.[1]

„*Eindeutigkeit*": Die Operationen G und G' mögen der Bedingung $(*)$ genügen. Falls $\neg\mathrm{Oz}\ x$, ist $G(x) = G'(x) = \emptyset$. Die Gleichheit von $G(\alpha)$ und $G'(\alpha)$ beweisen wir durch transfinite Induktion über α. Sei dazu $G(\beta) = G'(\beta)$ für alle $\beta < \alpha$. Dann ist $G{\restriction}\alpha = G'{\restriction}\alpha$ und daher $G(\alpha) = F(G{\restriction}\alpha) = F(G'{\restriction}\alpha) = G'(\alpha)$.

„*Existenz*": Wir nennen g einen *Anfang*, falls es eine Ordinalzahl α mit den folgenden Eigenschaften gibt:

$$g \text{ ist auf } \alpha \text{ definierte Funktion} \wedge \forall\beta\,\big(\beta \in \alpha \to g(\beta) = F(g{\restriction}\beta)\big).$$

Nach dem lokalen Rekursionstheorem 1.2 für Ordinalzahlen gilt:

(1) $$\forall\alpha\,\exists g\,\big(g \text{ Anfang} \wedge \mathrm{Def}(g) = \alpha\big);$$

(2) $$\forall gh\,\big(g, h \text{ Anfänge} \to g \subseteq h \vee h \subseteq g\big).$$

Wir definieren nun G auf den Ordinalzahlen als die gemeinsame Fortsetzung aller Anfänge:

$$G(x) \;:=\; \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } \neg\mathrm{Oz}\ x; \\ g(x), & \text{falls } \mathrm{Oz}\ x,\ g \text{ Anfang und } x \in \mathrm{Def}(g). \end{cases}$$

Nach (1) und (2) ist G eine wohldefinierte Operation. Schließlich genügt G der Bedingung $(*)$. Ist nämlich α gegeben und g ein Anfang mit $\alpha \in \mathrm{Def}(g)$, so gilt $G(\alpha) = g(\alpha) = F(g{\restriction}\alpha) = F(G{\restriction}\alpha)$. $\dashv$

[1] Für skeptische Leserinnen und Leser sei noch einmal genauer beschrieben, was wir beweisen: Zu jedem Ausdruck $\varphi(x, y, \overset{n}{x})$ (der F entspricht) gibt es einen Ausdruck $\psi(x, y, \overset{n}{x})$ (der G entspricht), so dass für alle Ausdrücke $\chi(x, y, \overset{n}{x})$ (ohne **Fund** und ohne **AC**) beweisbar ist:

$$\begin{aligned}&\forall \overset{n}{x}\,\big(\forall x \exists^{=1} y\, \varphi(x, y, \overset{n}{x}) \to \\ &\varphi\text{-}\mathit{Rek}(\psi(x, y, \overset{n}{x})) \wedge \big(\varphi\text{-}\mathit{Rek}(\chi(x, y, \overset{n}{x})) \to \forall xy\,(\psi(x, y, \overset{n}{x}) \leftrightarrow \chi(x, y, \overset{n}{x}))\big)\big).\end{aligned}$$

Dabei stehe z. B. $\varphi\text{-}\mathit{Rek}(\psi(x, y, \overset{n}{x}))$ für

$$\begin{aligned}&\forall x \exists^{=1} y\, \psi(x, y, \overset{n}{x}) \wedge \forall x\,(\neg\mathrm{Oz}\ x \to \psi(x, \emptyset, \overset{n}{x})) \\ &\wedge \forall\alpha \exists y \exists z\,\big(\psi(\alpha, y, \overset{n}{x}) \wedge z = \{(\beta, v) \mid \beta < \alpha \wedge \psi(\beta, v, \overset{n}{x})\} \wedge \varphi(z, y, \overset{n}{x})\big).\end{aligned}$$

Den meisten Anwendungen von Satz 2.1 liegt das folgende Definitionsschema zugrunde:

$$(**) \qquad \begin{cases} G(x) &:= \emptyset, \text{ falls } \neg \mathrm{Oz}\ x\,; \\ G(\mathbf{0}) &:= \ldots; \\ G(S(\alpha)) &:= \ldots G(\alpha)\ldots; \\ G(\delta) &:= \ldots (G(\beta))_{\beta<\delta} \ldots. \end{cases}$$

Wir geben ein Beispiel; bei ihm ist es üblich, die Argumente als untere Indizes zu schreiben.

$$(***) \qquad \begin{cases} V_x &:= \emptyset, \text{ falls } \neg \mathrm{Oz}\ x\,; \\ V_{\mathbf{0}} &:= \emptyset\,; \\ V_{S(\alpha)} &:= \mathrm{Pot}(V_\alpha)\,; \\ V_\delta &:= \bigcup\{V_\beta \mid \beta < \delta\}. \end{cases}$$

Die Operation, die hierdurch bestimmt wird, heißt die *von Neumannsche Hierarchie*; sie wird uns im nächsten Abschnitt eingehend beschäftigen und später entscheidend dabei helfen, die Struktur des Universums zu erhellen. Wir wollen an ihr exemplarisch sehen, dass Definitionsschemata des Typs $(**)$ durch das globale Rekursionstheorem 2.1 erfasst werden. Dazu setzen wir

$$F(x) := \begin{cases} \emptyset, \quad \text{falls } x = \emptyset\,; \\ \mathrm{Pot}(x(\alpha)), \text{ falls } x \text{ Funktion mit } \mathrm{Def}(x) = S(\alpha)\,; \\ \bigcup\{x(\beta) \mid \beta < \delta\}, \quad \text{falls } x \ \text{ Funktion mit } \mathrm{Def}(x) = \delta\,; \\ \emptyset, \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann lässt sich – für die Ordinalzahlen durch transfinite Induktion – leicht nachweisen, dass die Bedingung $(***)$ zu der Bedingung $(*)$ aus Satz 2.1 (mit V anstelle von G) äquivalent ist (vgl. dazu auch Aufgabe 1.5.2).

Da bei der Definition von Operationen Parameter zugelassen sind, können mit dem globalen Rekursionstheorem auch mehrstellige Operationen rekursiv definiert werden. Die folgenden Aufgaben enthalten dazu Beispiele: die *ordinale Addition*, die *ordinale Multiplikation* und die *ordinale Exponentiation*. Sie setzen die entsprechenden arithmetischen Verknüpfungen über ω ins Transfinite fort.

2.2 Aufgaben.

2.2.1 Es gibt genau eine zweistellige Operation $\oplus$, die *ordinale Addition*, mit

$$\begin{aligned} x \oplus y &= \emptyset, \text{ falls } \neg \mathrm{Oz}\ x \vee \neg \mathrm{Oz}\ y\,; \\ \alpha \oplus \mathbf{0} &= \alpha\,; \\ \alpha \oplus S(\beta) &= S(\alpha \oplus \beta)\,; \\ \alpha \oplus \delta &= \bigcup\{\alpha \oplus \beta \mid \beta < \delta\}. \end{aligned}$$

2.2.2 (i) Für $i, j \in \omega$ ist $i \oplus j = i + j$.
(ii) $\mathbf{0} \oplus \alpha = \alpha$.
(iii) $S(\alpha) = \alpha \oplus \mathbf{1}$.
(iv) $\mathbf{1} \oplus \omega \neq \omega \oplus \mathbf{1}$; $\oplus$ ist also *nicht* kommutativ.

2.2.3 Für $\alpha < \beta$ ist $\gamma \oplus \alpha < \gamma \oplus \beta$. Gilt auch $\alpha \oplus \gamma < \beta \oplus \gamma$?

2.2.4 Für festes γ ist die Operation F mit $F(x) = \gamma \oplus x$ normal.

2.2.5 Für $\alpha \leq \beta$ gibt es genau ein γ mit $\alpha \oplus \gamma = \beta$. Gibt es stets ein γ mit $\gamma \oplus \alpha = \beta$?

2.2.6 (Vgl. Aufgabe V.2.5.7). Es sei $(a, r) \cong (\alpha, \in_\alpha)$ und $(b, s) \cong (\beta, \in_\beta)$; ferner sei $a \cap b = \emptyset$ und (c, t) die Summe der Ordnungen (a, r) und (b, s) im Sinne von Aufgabe IV.1.20.6. Dann ist $(c, t) \cong (\alpha \oplus \beta, \in_{\alpha \oplus \beta})$.

2.2.7 Die ordinale Addition ist assoziativ.

2.2.8 Man definiere in naheliegender Weise eine ordinale Multiplikation und eine ordinale Exponentiation und untersuche die üblichen arithmetischen Gesetze auf ihre Gültigkeit hin. Ferner diskutiere man den Zusammenhang mit Ordnungen (vgl. Aufgaben IV.1.20.7 und V.2.5.8).

2.2.9 R sei ein zweistelliges *lokal-fundiertes* Prädikat, d. h. es gelte:

(1) $\forall x \exists y\, y = \{z \mid Rzx\}$;
(2) $\forall x \left(x \neq \emptyset \rightarrow \exists y\, (y \in x \wedge x \cap R[y] = \emptyset)\right)$.

Dabei stehe $R[y]$ für $\{z \mid Rzy\}$. Ferner sei F eine zweistellige Operation. Dann gibt es genau eine Operation G mit

$$\forall x\, G(x) = F(x, G{\restriction}R[x]).$$

Dies ist das sog. *globale Rekursionstheorem.*

2.2.10 Man zeige, dass Satz 2.1 ein Spezialfall des globalen Rekursionstheorems ist.

2.2.11 Es sei G eine normale Operation. Man zeige, dass es eine normale Operation gibt, deren Werte auf den Ordinalzahlen genau die Fixpunkte von G sind.

2.2.12 Die Operation G sei definiert durch $G(x) = \omega \oplus x$. Man definiere eine normale Operation, deren Werte auf den Ordinalzahlen genau die Fixpunkte von G sind.

§3 Die von Neumannsche Hierarchie und das Fundierungsaxiom

Als eine Anwendung des globalen Rekursionstheorems 2.1 haben wir oben die von Neumannsche Hierarchie V folgendermaßen definiert:

3.1 Definition.

$$\begin{array}{rcl} V_x & := & \emptyset, \text{ falls } \neg \mathrm{Oz}\, x\,; \\ V_{\mathbf{0}} & := & \emptyset\,; \\ V_{\alpha+\mathbf{1}} & := & \mathrm{Pot}(V_\alpha)\,; \\ V_\delta & := & \bigcup\{V_\beta \mid \beta < \delta\}. \end{array}$$

Dabei stehe $\alpha+\mathbf{1}$ für $S(\alpha)$, also für $\alpha \oplus \mathbf{1}$ (vgl. Aufgabe 2.2.2(iii)). Bevor wir auf die Bedeutung von V eingehen, sammeln wir einige Eigenschaften.

3.2 Satz. (i) *V_α ist transitiv.*
(ii) $\beta < \alpha \to V_\beta \in V_\alpha$.
(iii) $\beta \leq \alpha \to V_\beta \subseteq V_\alpha$.

Beweis. Zu (i). Wir führen Induktion über α durch. Für $\alpha = \mathbf{0}$ ist $V_\alpha = \emptyset$, also V_α transitiv. Sei, im Nachfolgerschritt, V_α transitiv. Dann erhalten wir mit $y \in x$ und $x \in V_{\alpha+\mathbf{1}} = \mathrm{Pot}(V_\alpha)$, dass $x \subseteq V_\alpha$, also $y \in V_\alpha$, somit $y \subseteq V_\alpha$ und daher $y \in V_{\alpha+\mathbf{1}}$. Im Limesschritt verwenden wir, dass die Vereinigung transitiver Mengen wieder transitiv ist.

Zu (ii). Sei β gegeben. Wir nehmen an, es sei α die minimale Ordinalzahl mit $\beta < \alpha$ und $V_\beta \notin V_\alpha$. Da α keine Limeszahl sein kann, ist α von der Gestalt $\alpha = \gamma + \mathbf{1}$ mit $\beta \leq \gamma$, also $V_\beta = V_\gamma$ oder $V_\beta \in V_\gamma$. Da $V_\gamma \in V_{\gamma+\mathbf{1}}$ und nach (i) daher $V_\gamma \subseteq V_{\gamma+\mathbf{1}}$, ist $V_\beta \in V_{\gamma+\mathbf{1}} = V_\alpha$. Widerspruch. – Schließlich ergibt sich (iii) sofort aus (i) und (ii). $\dashv$

3.3 Definition. $\mathbf{V}x \;:\leftrightarrow\; \exists\alpha\; x \in V_\alpha$.

Statt „$\mathbf{V}x$" benutzen wir oft die Klassenschreibweise „$x \in \mathbf{V}$". Entsprechend schreiben wir häufig „$x \subseteq \mathbf{V}$" für „$\forall y\,(y \in x \to y \in \mathbf{V})$."

Die Klasse $\mathbf{V}$ besteht also aus genau denjenigen Mengen, die Element eines V_α, einer sog. *von Neumannschen Stufe*, sind. Um uns ihre inhaltliche Bedeutung klarzumachen, greifen wir auf die Russellsche Vorstellung einer gestuften Mengenwelt zurück, die wir in I. 3 diskutiert haben. Im einfachsten Fall gliedern sich nach dieser Vorstellung die Mengen des Universums in Urelemente (Mengen nullter Stufe), Mengen von Urelementen (Mengen erster Stufe), usf. Wir sind jedoch – nicht Russell, sondern Zermelo folgend – von einer ungestuften oder typenfreien Mengenvorstellung ausgegangen. Dennoch lassen sich gewisse Parallelen zur Russellschen Hierarchie der Mengen aufweisen: Den Mengen nullter

Stufe entspricht bei uns einzig die leere Menge, der Gesamtheit der Mengen nullter Stufe die Menge $V_{\mathbf{1}} = \{\emptyset\}$; den Mengen erster Stufe korrespondieren bei uns die Teilmengen von $V_{\mathbf{1}}$, der Gesamtheit der Mengen erster Stufe die Menge $V_{\mathbf{2}}$, usf. Trotz dieser Ähnlichkeit besteht ein entscheidender Unterschied: In der Russellschen Hierarchie sind Mengen verschiedener Stufen verschieden; die von Neumannsche Hierarchie jedoch ist nach Satz 3.2(iii) in dem Sinne *kumulativ*, als jedes V_α alle vorangehenden V_β umfasst. Die Notwendigkeit dafür entspringt letztlich der Allgemeinheit, mit der wir, der typenfreien Vorstellung folgend, das Extensionalitätsaxiom formuliert haben. Nach der Russellschen Auffassung gibt es z. B. eine leere Menge $\emptyset_1$ erster Stufe und eine davon verschiedene leere Menge $\emptyset_2$ zweiter Stufe. Unsere Auffassung dagegen kennt nur eine leere Menge, nämlich $\emptyset$, und jedes V_α (mit $\alpha > \mathbf{0}$) enthält dementsprechend ein und dieselbe leere Menge $\emptyset$. Insbesondere ist also $V_{\mathbf{1}} \subseteq V_{\mathbf{2}}$. Führt man diese Überlegung weiter, erkennt man, dass der kumulative Charakter der von Neumannschen Hierarchie in besonderer Weise der typenfreien, extensionalen Mengenvorstellung entspricht.

Ähnlich, wie in der Russellschen Vorstellung die Mengen der verschiedenen Stufen das Universum bilden, kann man im Rahmen unseres Mengenbildes zu der Annahme neigen, dass die V_α das Universum ausschöpfen, dass mithin

$$(*) \qquad \forall x\, x \in \mathbf{V}$$

gilt. Wir werden sehen (vgl. Satz 3.7), dass diese Forderung auf der Basis von **ZF** ohne **Fund** mit **Fund** äquivalent ist. *Das Fundierungsaxiom sichert also den kumulativ-hierarchischen Aufbau des Universums, wie er sich in der von Neumannschen Hierarchie niederschlägt.* Die Hierarchie ist – in einem überwiegend technischen Kontext – in *von Neumann 1929* eingeführt worden; eine erste Darstellung, welche ihre Bedeutung für die Struktur des Mengenuniversums herausstellt, findet sich in *Zermelo 1930*.

Ist $x \in \mathbf{V}$, so ist das minimale α mit $x \in V_\alpha$ stets eine Nachfolgerzahl. Hat dieses α die Gestalt $\gamma + \mathbf{1}$, fassen wir γ als ein Maß für die Höhe auf, in der die Menge x in der von Neumannschen Hierarchie liegt. Wir nennen γ den *Rang* von x, kurz: $\mathrm{Rg}(x)$. Genauer:

3.4 Definition.

$$\mathrm{Rg}(x) \;:=\; \begin{cases} \text{das kleinste } \gamma \text{ mit } x \in V_{\gamma+\mathbf{1}}, & \text{falls } x \in \mathbf{V}; \\ \emptyset, & \text{sonst.} \end{cases}$$

3.5 Satz. (i) $\alpha \in \mathbf{V} \wedge \mathrm{Rg}(\alpha) = \alpha$.

(ii) $x, y \in \mathbf{V} \wedge x \in y \rightarrow \mathrm{Rg}(x) < \mathrm{Rg}(y)$.

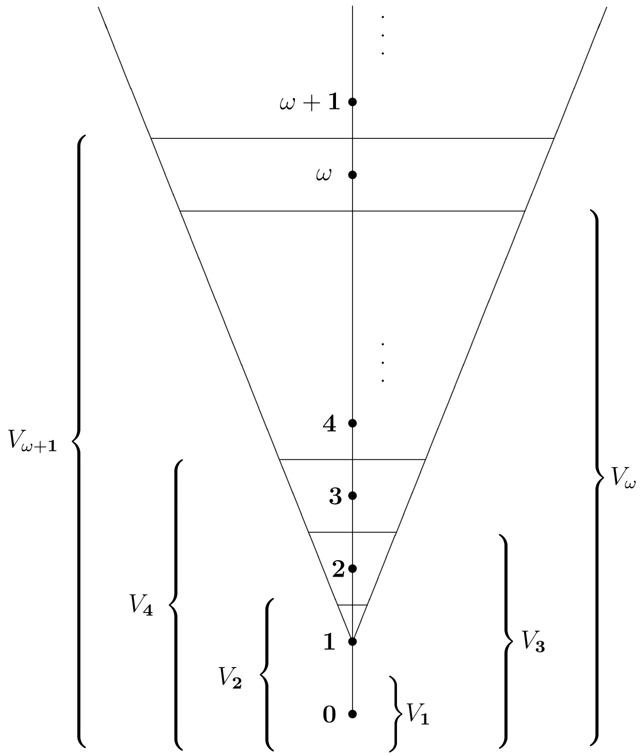
(iii) $x \in \mathbf{V} \leftrightarrow x \subseteq \mathbf{V}$.

Beweis. Zu (i). Induktiv über α zeigt man leicht, dass $\alpha \subseteq V_\alpha$, also $\alpha \in V_{\alpha+\mathbf{1}}$ und daher $\alpha \in \mathbf{V}$ und $\mathrm{Rg}(\alpha) \leq \alpha$. Für die umgekehrte Richtung zeigt man durch Induktion über α, dass $\alpha \notin V_\alpha$. Im Nachfolgerschritt schließt man so: Gälte $\alpha + \mathbf{1} = \alpha \cup \{\alpha\} \in V_{\alpha+\mathbf{1}}$, so wäre $\alpha \cup \{\alpha\} \subseteq V_\alpha$, also $\alpha \in V_\alpha$. Wäre – im Limesschritt – $\delta \in V_\delta$, so für ein $\alpha < \delta$ schon $\delta \in V_\alpha$, also $\delta \subseteq V_\alpha$ und $\alpha \in V_\alpha$.

Zu (ii). Mit $x \in y$ und $y \in \mathbf{V}$ ist $x \in V_{\mathrm{Rg}(y)}$, also $\mathrm{Rg}(x) < \mathrm{Rg}(y)$.

Zu (iii). „$\rightarrow$“ ergibt sich aus der Transitivität der V_α. Ist umgekehrt $x \subseteq \mathbf{V}$ und $\beta := \bigcup\{\mathrm{Rg}(y) + \mathbf{1} \mid y \in x\}$, so ist $x \subseteq V_\beta$, also $x \in V_{\beta+\mathbf{1}}$, mithin $x \in \mathbf{V}$. ⊣

Die hierarchische Gliederung, die $\mathbf{V}$ durch die von Neumannsche Hierarchie erfährt, lässt sich jetzt gut veranschaulichen: Das Universum hat die Gestalt eines Trichters, dessen nach oben wachsende Breite die zunehmende Mächtigkeit der Potenzmengen spiegelt. Auf seiner Mittelachse liegen die Ordinalzahlen gleichsam als Höhenmarken, und die V_α füllen den Trichter gerade bis unter die zugehörigen Höhenmarken α aus.



Wir wenden uns nun der bereits kurz beschriebenen Rolle des Fundierungsaxioms zu. In der in III. 6 angegebenen Formulierung von Zermelo, „*Jede nicht leere Menge besitzt ein* $\in$*-minimales Element*“, entspricht **Fund** der *Mengenform* eines Prinzips vom $\in$-kleinsten Element. Diese ist auf der Basis von **ZF** ohne **Fund** mit der entsprechenden *Prädikatsform* äquivalent, die wir das *Schema der Fundierung* nennen wollen. Die nicht-triviale Richtung dieser Äquivalenz enthält

3.6 Satz (Schema der Fundierung). *Es sei P ein einstelliges Prädikat. Dann gilt in* **ZF** *ohne* **Fund**:

$$\mathbf{Fund} \;\to\; \big(\exists x Px \;\to\; \exists x\,\big(Px \wedge \forall y\,(y \in x \to \neg Py)\big)\big),$$

d. h., *in* **ZF** *gilt*

$$\exists x Px \;\to\; \exists x\,\big(Px \wedge \forall y\,(y \in x \to \neg Py)\big).$$

Beweis. Gelte Px und sei y eine transitive Menge mit $x \in y$. Als y können wir z. B. die transitive Hülle $\mathrm{TC}(\{x\})$ von $\{x\}$ nehmen; vgl. Aufgabe VI.2.11.11: Wir definieren auf ω rekursiv eine Funktion f durch $f(\mathbf{0}) = \{x\}$ und $f(i+\mathbf{1}) = \bigcup f(i)$ und setzen $y = \bigcup \mathrm{Bild}(f)$. Sei jetzt $w := \{z \in y \mid Pz\}$. Da $x \in y$, ist $w \neq \emptyset$. Nach **Fund** besitzt w ein $\in$-minimales Element, etwa u. Dann gilt Pu, und ist $v \in u$, so wegen $u \in y$ auch $v \in y$. Wegen der Minimalität von u ist $v \notin w$, und daher gilt $\neg Pv$. ⊣

3.7 Satz. *In* **ZF** *ohne* **Fund** *gilt*: $\mathbf{Fund} \leftrightarrow \forall x\, x \in \mathbf{V}$.

Beweis. „$\to$“: Es gelte **Fund**. Wir nehmen an, es gäbe ein x mit $x \notin \mathbf{V}$. Nach Satz 3.6 können wir x $\in$-minimal wählen. Dann ist $x \subseteq \mathbf{V}$, nach Satz 3.5(iii) also $x \in \mathbf{V}$, ein Widerspruch.

„$\leftarrow$“: Es gelte $\forall x\, x \in \mathbf{V}$, und x sei eine nicht leere Menge. Sei weiter α die minimale Ordinalzahl, die Rang eines Elements von x ist, und sei $y \in x$ mit $\mathrm{Rg}(y) = \alpha$. Dann ist nach Satz 3.5(ii) y ein $\in$-minimales Element von x. ⊣

Wir wissen damit, dass **ZF** mit einem entscheidenden Beitrag des Fundierungsaxioms die kumulativ-hierarchische Struktur des Mengenuniversums festlegt, die wir in der obigen Zeichnung veranschaulicht haben. Als weiteren Charakterzug dieser Hierarchie werden wir in X. 2 ihre *unbeschreibliche Größe* kennenlernen. Wie wir in X. 3 sehen werden, ist **ZF** gerade so stark, dass es diese beiden Grundzüge des Universums sicherstellt. Diese Einsicht wird es uns ermöglichen, das System **ZF** vom Eindruck des Zufälligen zu befreien, den die Wahl seiner Axiome hervorrufen könnte und auf den wir bereits in III. 2 hingewiesen haben.

Betrachtungen über eine Mengenlehre, die das Fundierungsaxiom verletzt, findet man in *Devlin 1993.*

3.8 Aufgaben.

3.8.1 Man beweise in **ZF** das *Schema von der $\in$-Induktion*: Es sei P ein einstelliges Prädikat. Dann gilt:

$$\forall x \left(\forall y \,(y \in x \to Py) \to Px\right) \;\to\; \forall x Px.$$

3.8.2 Für alle β ist $\{x \in V_\beta \mid \mathrm{Oz}\; x\} = \beta$.

3.8.3 (i) $\mathrm{Rg}(x) = \alpha + \mathbf{1} \to \exists y(y \in x \wedge \mathrm{Rg}(y) = \alpha)$.
(ii) Ist $\mathrm{Rg}(x)$ eine Limeszahl, so ist x unendlich.

3.8.4 (i) Für alle i ist V_i endlich.
(ii) $V_\omega \sim \omega$.

3.8.5 Eine Menge x heißt *erblich endlich*, wenn ihre transitive Hülle endlich ist. Man zeige: Ist x erblich endlich, so sind auch die Elemente von x erblich endlich.

3.8.6 Eine Menge $x \in \mathbf{V}$ ist erblich endlich genau dann, wenn sie Element von V_ω ist.

3.8.7 (i) Für alle x, $y \in V_\alpha$ ist $x \times y \in V_{\alpha+\mathbf{2}}$.
(ii) Es gibt ein n mit $\mathbb{R} \in V_{S^n(\omega)}$. Dabei sei $S^0(x) = x$, $S^1(x) = S(x)$, $S^2(x) = S(S(x))$, usf. Man kann diesen Sachverhalt als einen Hinweis darauf verstehen, dass sich die „konkrete“ Mathematik in $\mathbf{V}$ nachvollziehen lässt und daher das Fundierungsaxiom nicht benötigt.

3.8.8 Man beweise in **ZF** das *Schema der Sammlung*:
Es sei $\varphi(x, y, \overset{n}{x})$ gegeben. Dann gilt:

$$\forall u \left(\forall x \big(x \in u \to \exists y\, \varphi(x, y, \overset{n}{x})\big) \to \exists v\, \forall x \big(x \in u \to \exists y\, (y \in v \wedge \varphi(x, y, \overset{n}{x}))\big)\right).$$

3.8.9 Auf der Basis von **ZF** ohne **Ers** und **Fund** erhält man aus dem Schema der Sammlung die Ersetzungsaxiome zurück.

3.8.10 Man zeige in **ZF** ohne **Fund**, dass für alle x gilt:

$$x \in \mathbf{V} \;\leftrightarrow\; \mathrm{TC}(x) \text{ ist fundiert.}$$

VIII

Das Auswahlaxiom

Dass man sich so etwas doch als möglich denken muss : Was veranlasst offenbarer dazu, als unsere kunstreichen Harmonien?

§1 Das Axiom

Motiviert durch die Frage nach der Existenz von Repräsentantensystemen für Äquivalenzrelationen haben wir in III. 7 das Auswahlaxiom **AC** folgendermaßen formuliert:

Zu jeder Menge von nicht leeren, zueinander disjunkten Mengen gibt es eine Auswahlmenge. Also: *Zu jeder Äquivalenzrelation gibt es ein Repräsentantensystem.*

Für die mit den Anfängen der Analysis vertrauten Leserinnen und Leser wollen wir eine andere Fassung des Axioms motivieren.

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\rho_0 \in \mathbb{R}$. Die Funktion f heißt in ρ_0 *stetig*, wenn es zu jedem positiven $\epsilon \in \mathbb{R}$ ein positives $\delta \in \mathbb{R}$ gibt mit $|f(\rho) - f(\rho_0)| < \epsilon$ für alle $\rho \in \mathbb{R}$ mit $|\rho - \rho_0| < \delta$. (Die Variablen ϵ, δ, ... stehen hier ausnahmsweise für reelle Zahlen, nicht für Ordinalzahlen.) Ein Satz der Analysis besagt:

1.1 Bemerkung. *Wenn für jede Folge $(\sigma_i)_{i\in\omega}$ reeller Zahlen, die gegen ρ_0 konvergiert, die Folge $(f(\sigma_i))_{i\in\omega}$ gegen $f(\rho_0)$ konvergiert* (kurz: *wenn f in ρ_0* folgenstetig *ist*), *so ist f in ρ_0 stetig.*

Wir skizzieren einen *indirekten Beweis*: Sei, unter den Voraussetzungen des Satzes, f in ρ_0 *nicht* stetig. Dann gilt für ein geeignetes positives $\epsilon \in \mathbb{R}$: Zu jedem $i \in \omega$ gibt es ein $\sigma \in \mathbb{R}$ mit $|\sigma - \rho_0| < (i + \mathbf{1})^{-1}$ und $|f(\sigma) - f(\rho_0)| \geq \epsilon$. *Man wähle für jedes $i \in \omega$ ein derartiges σ aus* und bezeichne es mit σ_i. Dann konvergiert die Folge $(\sigma_i)_{i\in\omega}$ gegen ρ_0, jedoch die Folge $(f(\sigma_i))_{i\in\omega}$ nicht gegen $f(\rho_0)$, ein Widerspruch.

H.-D. Ebbinghaus, *Einführung in die Mengenlehre*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-63866-8_8

Die Handlungsanweisung des *„Man wähle...“* können wir dabei durch Benutzung des Funktionsbegriffs präzisieren, indem wir das Auswählen einer Funktion übertragen. Dazu legen wir eine auf $\mathrm{Pot}(\mathbb{R})$ definierte Funktion g mit $g(x) \in x$ für alle nicht leeren Teilmengen x von $\mathbb{R}$ zugrunde. Für eine solche *Auswahlfunktion g auf* $\mathrm{Pot}(\mathbb{R})$ konvergiert die Folge

$$\Big(g\big(\{\sigma \in \mathbb{R} \mid |\sigma - \rho_0| < (i + \mathbf{1})^{-1} \textit{ und } |f(\sigma) - f(\rho_0)| \geq \epsilon\}\big)\Big)_{i\in\omega}$$

gegen ρ_0, jedoch die zugehörige Folge der f-Werte nicht gegen $f(\rho_0)$, ein Widerspruch.

Wie können wir die Existenz einer solchen Auswahlfunktion beweisen? Der folgende Satz zeigt, dass sie durch das Auswahlaxiom garantiert wird. Man weiß außerdem (vgl. *Jech 1973*, Abschnitt 10.1), dass Bemerkung 1.1 auf der Basis von **ZF**, also ohne **AC**, nicht beweisbar ist. (Die Umkehrung, der zufolge die Stetigkeit in ρ_0 die Folgenstetigkeit in ρ_0 impliziert, kann bereits ohne Benutzung von **Ers**, **Fund** und **AC** gezeigt werden.)

1.2 Definition. f ist eine *Auswahlfunktion auf* X $:\leftrightarrow$ f ist eine Funktion mit $\mathrm{Def}(f) = X$ und $\forall x\,(x \in X \wedge x \neq \emptyset \rightarrow f(x) \in x)$.

1.3 Satz. *Auf der Basis von* **ZF** *sind äquivalent*:

(i) **AC**.

(ii) *Auf der Potenzmenge einer jeden Menge gibt es eine Auswahlfunktion.*

(iii) *Auf jeder Menge gibt es eine Auswahlfunktion.*

(iv) *Ist* $(X_\iota)_{\iota\in I}$ *eine Familie von nicht leeren Mengen, so ist das direkte Produkt* $\bigtimes_{\iota\in I} X_\iota$ *nicht leer.*

Beweis. „(i) $\rightarrow$ (ii)“: Es gelte das Auswahlaxiom **AC**, und x sei gegeben. Wir setzen $y := \{\{u\} \times u \mid u \in \mathrm{Pot}(x) \setminus \{\emptyset\}\}$. Da y aus nicht leeren, zueinander disjunkten Mengen besteht, gibt es zu y eine Auswahlmenge, etwa a. Dann ist $a \cup \{(\emptyset, \emptyset)\}$ eine Auswahlfunktion auf $\mathrm{Pot}(x)$.

„(ii) $\rightarrow$ (iii)“: Sei X gegeben und, nach (ii), g eine Auswahlfunktion auf $\mathrm{Pot}(\bigcup X)$. Da $\mathrm{Pot}(\bigcup X) \supseteq X$, ist $g \restriction X$ eine Auswahlfunktion auf X.

„(iii) $\rightarrow$ (iv)“: Ist $(X_\iota)_{\iota\in I}$ eine Familie von nicht leeren Mengen, so ist für jede Auswahlfunktion f auf $\{\{\iota\} \times X_\iota \mid \iota \in I\}$ die Menge $\mathrm{Bild}(f)$ ein Element von $\bigtimes_{\iota\in I} X_\iota$.

„(iv) $\rightarrow$ (i)“: Sei X eine Menge von nicht leeren, zueinander disjunkten Mengen. Mit $f \in \bigtimes_{u\in X} u$ ist $\mathrm{Bild}(f)$ eine Auswahlmenge zu X. $\dashv$

In einigen Fällen kann man die Existenz von Auswahlfunktionen bereits ohne Benutzung von **AC** beweisen. Wir bringen hierzu zwei einfache Beispiele:

1.4 Satz. *In* **ZF** *gilt*:

(i) *Auf jeder endlichen Menge a gibt es eine Auswahlfunktion.*

(ii) *Ist a wohlordenbar, so gibt es eine Auswahlfunktion auf* $\mathrm{Pot}(a)$.

Dabei heißt (vgl. Aufgabe VI.1.10.7) eine Menge *wohlordenbar*, wenn es eine Wohlordnungsrelation über ihr gibt.

Beweis. (i) ergibt sich induktiv über $|a|$: Die leere Menge besitzt $\emptyset$ als Auswahlfunktion, und ist f eine Auswahlfunktion auf a und $x \notin a$, so ist $f \cup \{(x, u)\}$ eine Auswahlfunktion auf $a \cup \{x\}$, sofern $x \neq \emptyset$ und $u \in x$ oder sofern $x = u = \emptyset$.

(ii) Sei (a, r) eine Wohlordnung. Dann ist die Funktion $\{(u, v) \in \mathrm{Pot}(a) \times a \mid u \neq \emptyset$ und v r-minimales Element von $u\} \cup \{(\emptyset, \emptyset)\}$ eine Auswahlfunktion auf $\mathrm{Pot}(a)$. $\dashv$

Obwohl uns das Auswahlaxiom heute – intuitiv gesehen – nicht minder einsichtig erscheint als die übrigen Axiome von **ZFC**, ist es, nach der ersten expliziten Formulierung durch Zermelo 1904 (in der Form von Satz 1.3(iii)), nur zögernd aufgenommen worden. Die Kritik an „unendlich vielen freien Wahlen aus beliebigen Mengen“, die bereits gegen 1890 im Kreis um Guiseppe Peano eingesetzt hatte, wurde durch die Zermelosche Formulierung des Axioms und seinen Gebrauch beim Beweis des Wohlordnungssatzes (vgl. Abschnitt 2) sogar erheblich verstärkt. David Hilbert spricht 1926 von dem „in der mathematischen Literatur am meisten angefochtenen“ Axiom, und in *Fraenkel, Bar-Hillel und Levy 1973* wird es (auf S. 56) als das „vermutlich interessanteste und trotz seines späten Auftretens meistdiskutierte Axiom nach Euklids Parallelenaxiom“ vorgestellt. Wir können die Kritik in unserem Rahmen klar an einen Umstand knüpfen, der das Auswahlaxiom von allen anderen Axiomen abhebt: Abgesehen vom Extensionalitätsaxiom und vom Fundierungsaxiom, die grundlegende Aspekte betreffen, nämlich den extensionalen Charakter der $\in$-Beziehung und den hierarchischen Aufbau des Universums, fordern die übrigen Axiome von **ZF**, ähnlich wie das Auswahlaxiom, die Existenz von Mengen, doch im Kern nur von solchen Mengen, die sich *definieren* lassen, wobei etwaige Ausgangsmengen als Parameter auftreten. So stellt $\bigcup$**-Ax** für jede Menge x die Existenz von $\bigcup x$ sicher, **Pot** die der Potenzmenge und **Inf** die von ω, der Menge der mengentheoretischen natürlichen Zahlen. Diese Form der Definierbarkeit ermöglicht es ja gerade, entsprechende Operationen und Konstanten wie $\bigcup$, Pot, ω einzuführen. Anders das Auswahlaxiom: Im allgemeinen ist es nicht möglich, zu einer vorgegebenen Menge X eine Auswahlfunktion (durch einen Ausdruck mit X als Parameter) zu definieren. Und diese „Inkonstruktivität“ überträgt sich auf die Mengen, zu deren Existenzbeweis das Auswahlaxiom herangezogen wird, z. B. auf Basen von Vektorräumen (vgl. Abschnitt 2). Es ist auch möglich, mit **AC** die Existenz nicht messbarer Mengen zu beweisen. Beispiele für nicht messbare Mengen sind etwa die Auswahlmengen zur Menge

X_2 aus III. 7. Verblüffend ist in diesem Zusammenhang das sog. *Kugelparadoxon* von Stefan Banach und Alfred Tarski (1924): Die dreidimensionale abgeschlossene Einheitskugel lässt sich so in endlich viele Teile (natürlich nicht alle messbar) zerlegen, dass man aus diesen Teilen *zwei* zur Ausgangskugel kongruente Kugeln zusammensetzen kann. Nach Raphael Robinson (1947) gibt es entsprechende Zerlegungen, die aus nur fünf Teilen bestehen.

Die oben angedeutete Kritik Peanos setzt an der „Inkonstruktivität" des Auswahlaxioms an. Peano schreibt, dass man nicht unendlich oft eine *willkürliche Regel* anwenden könne, welche einer Menge eines ihrer Elemente zuordnet. Im Jahr 1905 schließt Emile Borel aus ähnlichen Gründen Auswahlfunktionen wie solche auf $\mathrm{Pot}(\mathbb{R})$ explizit aus der Mathematik aus. In *Zermelo 1908a* setzt sich Zermelo scharf mit dieser Kritik auseinander. Um der Vorstellung zu begegnen, das Auswahlaxiom besage, unendlich viele Auswahlen wirklich vornehmen zu können, formuliert er das Axiom jetzt mit der Existenz von Auswahl*mengen*, wie wir es auch getan haben. Details finden sich in *Hallett 2010*.

Trotz der anfänglichen Bedenken hat sich das Auswahlaxiom in der Mathematik durchgesetzt. Der Grund dafür liegt nicht zuletzt in den methodischen Möglichkeiten, die es eröffnet, etwa in der Form des *Zornschen Lemmas*, das wir in Abschnitt 3 behandeln werden. Insbesondere war es die Algebra, in der die methodische Stärke des Axioms überzeugte. So schreibt der Algebraiker Ernst Steinitz bereits im Jahre 1910:

> Noch stehen viele Mathematiker dem Auswahlaxiom ablehnend gegenüber. Mit der zunehmenden Erkenntnis, *dass es Fragen in der Mathematik gibt, die ohne dieses Prinzip nicht entschieden werden können*, dürfte der Widerstand gegen dasselbe mehr und mehr verschwinden.

Beruhigend mag es in diesem Zusammenhang sein, dass für etwaige Widersprüche, die in **ZFC** beweisbar sein sollten, nicht das Auswahlaxiom verantwortlich gemacht werden kann: Nach einem Resultat von Gödel (1938) ist mit **ZF** auch **ZFC** widerspruchsfrei (und nach Paul Cohen (1963) überdies eine echte Verstärkung von **ZF**). Wir beweisen das Gödelsche Resultat in XI.2.

Eine Darstellung der Geschichte des Auswahlaxioms findet man in *Moore 1982*, eine Fülle von (zumeist anspruchsvolleren) mengentheoretischen Resultaten im Umkreis des Axioms in *Jech 1973*.

1.5 Aufgaben.

1.5.1 Es sei $(*)$ die Aussage: Zu jeder zweistelligen Relation r gibt es eine Funktion f mit $\mathrm{Def}(f) = \mathrm{Def}(r)$ und $f \subseteq r$. Man zeige in **ZF**, dass $(*)$ mit **AC** äquivalent ist.

1.5.2 Es sei $(*)$ die Aussage: Für alle f mit $f : x \overset{auf}{\to} y$ gibt es ein g mit $g : y \to x$ und $f \circ g = \mathrm{id}_y$. Man zeige in **ZF**, dass $(*)$ mit **AC** äquivalent ist.

1.5.3 Man zeige mit **AC**, dass jede unendliche Menge eine zu ω gleichmächtige Teilmenge enthält und dass daher jede Dedekind-endliche Menge endlich ist.

1.5.4 **DC**, das *Axiom der abhängigen Auswahlen* („***D**ependent **C**hoices*"), besagt: *Für alle binären Strukturen* (a, r) *mit* $a \neq \emptyset$ *und* $\forall u\, (u \in a \to \exists v\, urv)$ *gibt es eine Funktion* $f \colon \omega \to a$ mit $\forall i\, f(i) r f(i + \mathbf{1})$.

DC* entstehe aus **DC** durch Verstärkung von „*gibt es eine Funktion* $f \ldots$" zu „*gibt es für alle* $u \in a$ *eine Funktion* $f : \omega \to a$ *mit* $\forall i\, f(i) r f(i + \mathbf{1})$ *und* $f(\mathbf{0}) = u$".

Man zeige in **ZF**: (i) **AC** $\to$ **DC***;
(ii) **DC*** $\to \forall x\, (x \sim \omega \to \exists f\ f$ ist Auswahlfunktion auf $x)$.

1.5.5 Es sei $(*)$ die Aussage: Ist (a, r) eine nicht fundierte binäre Struktur, so gibt es ein $f : \omega \to a$ mit $\forall i\, f(i + \mathbf{1}) r f(i)$. Man zeige in **ZF**, dass **DC** $\to (*)$ und $(*) \to$ **DC**.

1.5.6 Man zeige in **ZF**, dass **DC** $\to$ **DC*** (und damit **DC** $\leftrightarrow$ **DC***).

1.5.7 Man zeige in **ZF** + **DC**, dass eine Funktion über $\mathbb{R}$ in einem Punkt, in dem sie folgenstetig ist, auch stetig ist.

§2 Der Wohlordnungssatz

Wir schicken eine Bemerkung voraus.

2.1 Hilfssatz. *In* **ZF** *gilt*: *Eine Menge ist wohlordenbar genau dann, wenn sie zu einer Ordinalzahl gleichmächtig ist.*

Beweis. Ist (a, r) eine Wohlordnung und, nach Satz VI.3.3, $(a, r) \cong (\alpha, \in_\alpha)$, so ist $a \sim \alpha$. Ist umgekehrt f eine Bijektion von α auf a, so gibt es ein s mit $f : (\alpha, \in_\alpha) \cong (a, s)$ (nämlich $s = \{(f(\beta), f(\gamma)) \mid \beta, \gamma \in \alpha \text{ und } \beta < \gamma\}$), also ist a wohlordenbar. $\dashv$

2.2 Wohlordnungssatz. *In* **ZFC** *gilt*: *Jede Menge ist wohlordenbar.*

Der Wohlordnungssatz, WOS, ist im Jahre 1883 durch Cantor formuliert worden (*Cantor 1932*, S. 169), jedoch zunächst nicht als ein beweisbedürftiges Theorem, sondern als ein „grundlegendes und folgenreiches, durch seine Allgemeingültigkeit besonders merkwürdiges Denkgesetz". Einen ersten Beweis gab Zermelo im Jahre 1904. Für uns ergibt sich WOS in **ZFC** unmittelbar aus der folgenden Äquivalenz in **ZF**:

2.3 Satz. *In* **ZF** *gilt*: **AC** $\leftrightarrow$ WOS.

Beweis. Zu „$\leftarrow$“: Nach Satz 1.4(ii) erhalten wir mit WOS, dass es auf jeder Potenzmenge eine Auswahlfunktion gibt, nach Satz 1.3 also auf jeder Menge.

Zu „$\rightarrow$“: Es gelte **AC**, und a sei eine vorgegebene Menge. Nach Hilfssatz 2.1 reicht es zu zeigen, dass eine zu a gleichmächtige Ordinalzahl existiert, d. h.

$$\exists \alpha \, \exists f \; f : \alpha \overset{bij}{\to} a.$$

Hierzu gehen wir folgendermaßen vor: Falls $a \neq \emptyset$, ordnen wir der Zahl $\mathbf{0}$ ein Element $f(\mathbf{0}) \in a$ zu. Falls dann $a \neq \{f(\mathbf{0})\}$, ordnen wir der Zahl $\mathbf{1}$ ein Element $f(\mathbf{1})$ aus $a \setminus \{f(\mathbf{0})\}$ zu usf. Die Auswahlen treffen wir mit einer Auswahlfunktion auf $\mathrm{Pot}(a)$. Der Satz VI.3.2 von Hartogs garantiert, dass wir bei diesem Vorgehen a schließlich ausschöpfen.

Sei jetzt also h eine Auswahlfunktion auf $\mathrm{Pot}(a)$. Wir können annehmen, dass $h(\emptyset) \notin a$. (Die übrigen Funktionswerte von h liegen in a). Sei ferner, nach dem Satz von Hartogs, β eine Ordinalzahl, die nicht injektiv in a abgebildet werden kann. Nach dem lokalen Rekursionstheorem VII.1.2 für Ordinalzahlen existiert eine auf β definierte Funktion g mit

$$g(\gamma) = h\big(a \setminus \mathrm{Bild}(g\restriction\gamma)\big)$$

für alle $\gamma \in \beta$. Es ist $g(\mathbf{0}) = h(a)$, $g(\mathbf{1}) = h(a \setminus \{g(\mathbf{0})\})$ usf. Somit entspricht die Menge $a \setminus \mathrm{Bild}(g\restriction\gamma)$, falls sie nicht leer ist, dem jeweils noch vorhandenen Rest von a. Ist $a \setminus \mathrm{Bild}(g\restriction\gamma) = \emptyset$, also a erschöpft, erscheint mit $g(\gamma) = h(\emptyset)$ die (nicht zu a gehörende) „Marke“ $h(\emptyset)$.

Offenbar ist $\mathrm{Bild}(g) \subseteq a \cup \{h(\emptyset)\}$. Ferner haben wir:

(1) Für alle $\gamma \leq \beta$: Ist $h(\emptyset) \notin \mathrm{Bild}(g\restriction\gamma)$, so ist $g\restriction\gamma$ injektiv.
(2) Es gibt ein $\gamma < \beta$ mit $g(\gamma) = h(\emptyset)$.

Zu (1): Ist $h(\emptyset) \notin \mathrm{Bild}(g\restriction\gamma)$, so erhalten wir für $\gamma_0, \gamma_1 \in \gamma$ mit $\gamma_0 < \gamma_1$, dass $\mathrm{Bild}(g\restriction\gamma_1) \subset a$ und daher $g(\gamma_1) \notin \mathrm{Bild}(g\restriction\gamma_1)$, also $g(\gamma_1) \neq g(\gamma_0)$. Zu (2): Wäre $h(\emptyset) \notin \mathrm{Bild}(g)$, so wäre g nach (1) eine Injektion von β in a, ein Widerspruch.

Sei nun, nach (2), α das kleinste Element von β mit $g(\alpha) = h(\emptyset)$. Nach (1) ist dann $g\restriction\alpha\colon \alpha \overset{inj}{\to} a$. Da wegen $g(\alpha) = h(\emptyset)$ offenbar $\mathrm{Bild}(g\restriction\alpha) = a$, ist schließlich $g\restriction\alpha\colon \alpha \overset{bij}{\to} a$. ⊣

Der Beweis des Wohlordnungssatzes gibt keine Auskunft darüber, ob und gegebenenfalls wie man z. B. über der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen eine Wohlordnungsrelation „konkret“ angeben kann. Denn wir können keine Auswahlfunktion auf $\mathrm{Pot}(\mathbb{R})$ „konkret“ angeben. Letztlich vererbt sich also der inkonstruktive Charakter des Auswahlaxioms auf den Wohlordnungssatz. Dennoch gibt uns der Wohlordnungssatz die Möglichkeit zu recht anschaulichen Beweisen. Exemplarisch zeigen wir dazu:

2.4 Basis-Existenzsatz. *In* **ZFC** *gilt: Jeder Vektorraum hat eine Basis.*

Beweisskizze. Es sei $\mathfrak{W}$ ein Vektorraum mit der Trägermenge W der Vektoren. Mit WOS gewinnen wir α und f so, dass $f : \alpha \overset{bij}{\to} W$. Wir definieren die Funktion $B : \alpha \to \mathrm{Pot}(W)$ rekursiv, indem wir für $\beta \in \alpha$ setzen:

$$B(\beta) := \begin{cases} \bigcup\{B(\gamma) \mid \gamma < \beta\} \cup \{f(\beta)\}, & \text{falls diese Menge linear} \\ & \text{unabhängig ist;} \\ \bigcup\{B(\gamma) \mid \gamma < \beta\}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit transfiniter Induktion ergibt sich, dass für $\beta, \gamma \in \alpha$ mit $\beta \leq \gamma$ stets $B(\beta) \subseteq B(\gamma)$ und dass die $B(\beta)$ und $b := \bigcup \mathrm{Bild}(B) = \bigcup\{B(\beta) \mid \beta \in \alpha\}$ linear unabhängige Mengen sind. Ferner ist b eine Basis. Denn ist $\beta < \alpha$ und $f(\beta) \notin b$, so ist bereits $B(\beta) \cup \{f(\beta)\}$ linear abhängig. ⊣

Nach Andreas Blass (1984) ist der Basis-Existenzsatz in **ZF** sogar mit dem Auswahlaxiom äquivalent.

2.5 Aufgaben.

2.5.1 (**ZF**) Jede Menge von Ordinalzahlen ist wohlordenbar.

2.5.2 Eine Menge a heißt *von endlichem Charakter*, wenn für alle Mengen x gilt: $x \in a \leftrightarrow$ jede endliche Teilmenge von x ist ein Element von a. Man zeige in **ZF**: Ist $\emptyset \in a$, ist a von endlichem Charakter und b eine Teilmenge von a so, dass je zwei Elemente von b bzgl. $\subseteq$ vergleichbar sind, so ist $\bigcup b \in a$.

2.5.3 Man beweise den Wohlordnungssatz ohne Benutzung von **Ers** und **Fund**. Hierzu betrachte man für eine Auswahlfunktion h auf $\mathrm{Pot}(a)$ die Menge W, die aus den zweistelligen Relationen r über a besteht, für die gilt: (1) $(\mathrm{Feld}(r), r)$ ist eine Wohlordnung; (2) $\forall u(u \in \mathrm{Feld}(r) \to u = h(a \setminus r[u]))$.

2.5.4 Man beweise den Basis-Existenzsatz ohne Benutzung von Ordinalzahlen. Dazu gehe man von einer Wohlordnung der Trägermenge des Vektorraums aus.

§3 Das Zornsche Lemma

In der heutigen Mathematik wird statt des Wohlordnungssatzes meist das sog. *Zornsche Lemma* verwendet. Um es zu formulieren, benötigen wir noch einige Begriffe.

Eine irreflexive und transitive Relation über a nennen wir eine *Halbordnungsrelation i.S.v.* $<$ über a, eine über a reflexive, antisymmetrische und transitive

Relation eine *Halbordnungsrelation i.S.v.* $\leq$. Entsprechend sind *Halbordnungen i.S.v.* $<$ bzw. *i.S.v.* $\leq$ definiert. Wir werden im Folgenden Halbordnungen i.S.v. $\leq$ zugrunde legen. Eine Übertragung auf Halbordnungen i.S.v. $<$ bereitet keine Schwierigkeiten.

Es sei (a, r) eine Halbordnung i.S.v. $\leq$. Sind je zwei Elemente u, v einer Teilmenge b von a bzgl. r vergleichbar (d. h. gilt urv oder vru), so heißt b eine *Kette in* (a, r). Ein Element $u \in a$ heißt eine *obere Schranke* der Kette b in (a, r), wenn vru für alle $v \in b$, und u heißt ein *maximales Element von* (a, r), wenn $urv \to u = v$ für alle $v \in a$ gilt.

Für alle a ist $(\mathrm{Pot}(a), \subseteq_{\mathrm{Pot}(a)})$ eine Halbordnung i.S.v. $\leq$. In dieser Halbordnung besitzt eine Kette b z. B. die obere Schranke $\bigcup b$, und a ist ein maximales Element. Mit $a := \mathrm{Pot}(\omega) \setminus \{\emptyset\}$ ist auch $(a, \subseteq_a^{-1})$ eine Halbordnung i.S.v. $\leq$; in ihr sind gerade die Elemente der Gestalt $\{i\}$ maximal.

3.1 Zornsches Lemma. *In* **ZFC** *gilt*:

Eine Halbordnung i.S.v. $\leq$*, in der jede Kette eine obere Schranke hat, besitzt ein maximales Element.*

Das Zornsche Lemma, ZL, hat als eines der vielen *Maximalprinzipien* eine reiche Geschichte (vgl. auch hier *Moore 1982*). Es geht zurück auf Felix Hausdorff (1909); das Verdienst von Max Zorn (1935) ist es, den methodischen Nutzen des Lemmas für die Algebra aufgewiesen und ihm damit zum Durchbruch verholfen zu haben. Die Bezeichnung „Zornsches Lemma“ findet sich zuerst in *Bourbaki 1939*, S. 36/37.

Das Lemma ergibt sich in **ZFC** unmittelbar aus

3.2 Satz. *In* **ZF** *gilt*: **AC** $\leftrightarrow$ ZL.

Beweis. Es gelte ZL, und a sei eine Menge von nicht leeren, zueinander disjunkten Mengen. Wir zeigen, dass es eine Auswahlmenge zu a gibt. Sei hierzu

$$A := \big\{ b \in \mathrm{Pot}(\textstyle\bigcup a) \mid b \text{ ist Auswahlmenge zu einer Teilmenge von } a \big\}.$$

In $(A, \subseteq_A)$ besitzt jede Kette B eine obere Schranke, nämlich $\bigcup B$. Sei, nach ZL, b ein maximales Element in $(A, \subseteq_A)$. Dann ist b eine Auswahlmenge für a; denn wäre $x \in a$ und $x \cap b = \emptyset$, so könnte man b um ein Element von x vergrößern und erhielte so in A eine echte Obermenge von b.

Gelte nun umgekehrt **AC** und damit WOS, und (a, r) sei eine Halbordnung i.S.v. $\leq$, in der jede Kette eine obere Schranke besitzt. Wir zeigen:

$(*)$ Es gibt in (a, r) eine bzgl. $\subseteq$ maximale Kette.

Sei dann b eine solche Kette und u eine obere Schranke von b in (a, r). Wegen der Maximalität von b ist u „letztes“ Element von b und maximales Element von (a, r).

Zum Beweis von (∗) imitieren wir den Beweis von Satz 2.4. Sei, nach WOS, $f : \alpha \overset{bij}{\to} a$, und sei die Funktion B auf α rekursiv definiert durch

$$B(\beta) \;:=\; \begin{cases} \bigcup\{B(\gamma) \mid \gamma < \beta\} \cup \{f(\beta)\}, & \text{falls diese Menge eine Kette ist;} \\ \bigcup\{B(\gamma) \mid \gamma < \beta\}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Durch Induktion ergibt sich auch hier leicht, dass für $\beta, \beta' \in \alpha$ mit $\beta < \beta'$ stets $B(\beta) \subseteq B(\beta')$ und dass die Mengen $B(\beta)$ und $b := \bigcup \mathrm{Bild}(B)$ Ketten in (a, r) sind. Offensichtlich ist b eine maximale Kette. ⊣

In der Mathematik hat das Zornsche Lemma den Wohlordnungssatz verdrängt, benötigt man doch, um es zu handhaben, keinerlei Instrumentarium über Wohlordnungen und Ordinalzahlen. Wir verdeutlichen dies mit einem überzeugenden Beispiel, einem alternativen Beweis des Basis-Existenzsatzes 2.4. Sei dazu wieder $\mathfrak{W}$ ein Vektorraum mit der Trägermenge W der Vektoren, und sei

$$U \;:=\; \big\{u \in \mathrm{Pot}(W) \mid u \text{ ist linear unabhängig}\big\}.$$

Dann besitzt jede Kette b in $(U, \subseteq_U)$ eine obere Schranke, nämlich $\bigcup b$. Nach dem Zornschen Lemma hat $(U, \subseteq_U)$ daher ein maximales Element, und jedes maximale Element ist eine Basis. ⊣

3.3 Aufgaben.

3.3.1 Man beweise in **ZFC** das sog. *Lemma von Teichmüller und Tukey*: Ist a eine nicht leere Menge von endlichem Charakter, so besitzt $(a, \subseteq_a)$ ein maximales Element.

3.3.2 Es sei x eine Menge und $\mathcal{F}$ eine Teilmenge von $\mathrm{Pot}(x)$. $\mathcal{F}$ heißt *Filter* über x, wenn gilt:

(α) $\emptyset \notin \mathcal{F}$ und $x \in \mathcal{F}$;

(β) mit u und v ist auch $u \cap v \in \mathcal{F}$;

(γ) mit $u \in \mathcal{F}$ und $u \subseteq v \subseteq x$ ist auch $v \in \mathcal{F}$.

$\mathcal{F}$ heißt *Ultrafilter* über x, wenn $\mathcal{F}$ ein Filter über x ist und jeder Filter über x, der $\mathcal{F}$ umfasst, mit $\mathcal{F}$ identisch ist. Man zeige in **ZFC**, dass es zu jedem Filter $\mathcal{F}$ über x einen $\mathcal{F}$ umfassenden Ultrafilter über x gibt.

3.3.3 Eine Menge b heißt eine *Fast-Auswahlmenge* zu a, wenn $b \subseteq \bigcup a$ und wenn für alle $u \in a$ die Menge $b \cap u$ höchstens einelementig ist. Man zeige in **ZF**, dass **AC** mit der Aussage äquivalent ist, dass es zu jeder Menge eine bzgl. $\subseteq$ maximale Fast-Auswahlmenge gibt.

3.3.4 Es sei (a, r) eine Halbordnung i.S.v. $\leq$. Man zeige in **ZF**, dass es für alle $u, v \in a$ ein $s \supseteq r$ gibt, für das $(u, v) \in s$ oder $(v, u) \in s$ und (a, s) eine Halbordnung i.S.v. $\leq$ ist.

3.3.5 Man beweise in **ZFC** den sog. *Ordnungserweiterungssatz:* Zu jeder Halbordnung (a, r) i.S.v. $\leq$ gibt es ein $s \supseteq r$, für das (a, s) eine Ordnung i.S.v. $\leq$ ist.

3.3.6 Man beweise das Zornsche Lemma direkt mit dem Auswahlaxiom und ohne Benutzung von **Ers**. Hinweis: Die Halbordnung (a, r) i.S.v. $\leq$ genüge den Bedingungen des Zornschen Lemmas, und g sei eine Auswahlfunktion auf $\mathrm{Pot}(a)$. Man betrachte Ketten b in (a, r) mit den beiden folgenden Eigenschaften: (1) b mit der durch r induzierten Ordnung i.S.v. $<$ ist eine Wohlordnung; (2) für $u \in b$ gilt $u = g(\{v \in a \mid v \text{ verlängert } (r[u] \cap b) \setminus \{u\}\})$.

IX

Mächtigkeiten

> Oh Armseligkeit aller Armseligkeit! Für Den mit Engeln so zu knickern, dem sie legionweise zu Diensten stunden!

In Definition V.3.6 haben wir den endlichen Mengen eine *Mächtigkeit* zugewiesen, nämlich die eindeutig bestimmte natürliche Zahl, zu der sie gleichmächtig sind. Im vorliegenden Kapitel dehnen wir diese Betrachtungen auf beliebige Mengen aus, indem wir die Mächtigkeit unendlicher Mengen durch geeignete unendliche Ordinalzahlen messen. Den Schlüssel dazu liefert das Auswahlaxiom, stellt es doch sicher, dass jede Menge zu einer Ordinalzahl gleichmächtig ist. Wir beginnen mit Betrachtungen über den Vergleich von Mächtigkeiten. Für sie benötigen wir **AC** noch nicht.

§1 Der Vergleich von Mächtigkeiten

Wir argumentieren in **ZF**.

In Definition V.3.1 haben wir, einem Vorschlag Cantors folgend, zwei Mengen x und y *gleichmächtig* genannt (symbolisch: $x \sim y$), wenn es eine Bijektion von x auf y gibt. Das Prädikat $\sim$ hat formal ähnliche Eigenschaften wie eine Äquivalenzrelation. Natürliche Verallgemeinerungen von $\sim$ enthält

1.1 Definition. (i) x ist *höchstens so mächtig wie* y (kurz: $x \preceq y$)

$:\leftrightarrow \quad \exists f\ f : x \overset{inj}{\to} y.$

(ii) x ist *schmächtiger als* y oder y ist *mächtiger als* x (kurz: $x \prec y$)

$:\leftrightarrow \quad x \preceq y \wedge \neg x \sim y.$

Eine Menge x ist also schmächtiger als eine Menge y, wenn es eine Injektion von x in y, aber keine Bijektion von x auf y gibt. Nützlich ist die folgende Verträglichkeitsaussage, die wir häufig stillschweigend verwenden werden:

H.-D. Ebbinghaus, *Einführung in die Mengenlehre*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-63866-8_9

1.2 Satz. *Mit* $x \sim x'$ *und* $y \sim y'$ *gilt* $(x \preceq y \leftrightarrow x' \preceq y')$ *und* $(x \prec y \leftrightarrow x' \prec y')$.

Ist nämlich z. B. $f : x \sim x'$, $g : y \sim y'$ und $h : x \preceq y$ (d. h. $h : x \overset{inj}{\to} y$), so gilt $g \circ h \circ f^{-1} : x' \preceq y'$. $\dashv$

Mit $x \subseteq y$ ist $x \preceq y$. Doch ergibt sich aus $x \subset y$ i. Allg. nicht, dass $x \prec y$. So ist für $\alpha \geq \omega$ stets $\alpha \subset S(\alpha)$, aber $S(\alpha) \sim \alpha$ via $\mathbf{S} \cup \{(\alpha, \mathbf{0})\} \cup \mathrm{id}_{\alpha \setminus \omega}$. Da stets $\alpha \subseteq \beta$ oder $\beta \subseteq \alpha$, erhalten wir:

1.3 Bemerkung. *Für alle* α *und* β *gilt* $\alpha \preceq \beta$ *oder* $\beta \preceq \alpha$. Daher gilt für alle α und β auch: $\alpha \prec \beta$ *oder* $\alpha \sim \beta$ *oder* $\beta \prec \alpha$. $\dashv$

Während für natürliche Zahlen i, j stets $(i < j \leftrightarrow i \prec j)$ gilt (vgl. die Sätze V.3.5 und V.3.7), zeigt z. B. die Gleichmächtigkeit von ω und $S(\omega)$, dass wir allgemein nur über die Implikationen $\alpha \prec \beta \to \alpha < \beta$ (sie ergibt sich leicht mit Satz 1.5(i), (ii)) und $\alpha \leq \beta \to \alpha \preceq \beta$ verfügen können.

1.4 Satz (Ordnungseigenschaften von $\preceq$)**.**

(i) $x \preceq x$.

(ii) $x \preceq y \wedge y \preceq z \to x \preceq z$.

(iii) $x \preceq y \wedge y \preceq x \to x \sim y$.

(iv) $\forall x \forall y\, (x \preceq y \vee y \preceq x) \leftrightarrow \mathbf{AC}$.

Teil (iii) ist bekannt als *Äquivalenzsatz von Bernstein, Cantor und Schröder*.[1] Teil (iv) sagt uns, dass wir die vollen Ordnungseigenschaften (mit $\sim$ anstelle von $=$) erst in **ZFC** zur Verfügung haben. Aufgrund der Definition von $\prec$ erhalten wir als Korollar:

1.5 Satz (Ordnungseigenschaften von $\prec$).

(i) $\neg x \prec x$.

(ii) $x \prec y \wedge y \prec z \to x \prec z$.

(iii) $\forall x \forall y\, (x \prec y \vee x \sim y \vee y \prec x) \leftrightarrow \mathbf{AC}$. $\dashv$

Beweis von Satz 1.4. Die Teile (i) und (ii) sind trivial.

Zu (iv): Gelte zunächst **AC**. Zu gegebenen x, y existieren dann nach dem Wohlordnungssatz (vgl. Satz VIII.2.2 und Hilfssatz VIII.2.1) Ordinalzahlen α und β mit $x \sim \alpha$ und $y \sim \beta$. Aus $\alpha \preceq \beta \vee \beta \preceq \alpha$ erhalten wir $x \preceq y \vee y \preceq x$. Seien umgekehrt je zwei Mengen bzgl. $\preceq$ vergleichbar. Sei dann x gegeben. Wir wählen nach dem Satz VI.3.2 von Hartogs ein α mit $\neg \alpha \preceq x$ und erhalten aus $\alpha \preceq x \vee x \preceq \alpha$, dass $x \preceq \alpha$. Für $f : x \preceq \alpha$ ist $(x, \{(u, v) \in x \times x \mid f(u) \in_\alpha f(v)\})$ eine Wohlordnung. Insgesamt sehen wir, dass jede Menge wohlordenbar ist; also gilt **AC**.

[1] Der erste Beweis stammt von Dedekind (1887).

Zu (iii): Sei $f : x \preceq y$ und $g : y \preceq x$. Da $x \sim \mathrm{Bild}(f)$, brauchen wir nur zu zeigen, dass $\mathrm{Bild}(f) \sim y$. Wegen $\mathrm{Bild}(f) \subseteq y$ und $f \circ g : y \preceq \mathrm{Bild}(f)$ läuft dies darauf hinaus, dass wir die Behauptung $x \sim y$ für den Fall $f = \mathrm{id}_x$, d. h. für $x \subseteq y$ zeigen.

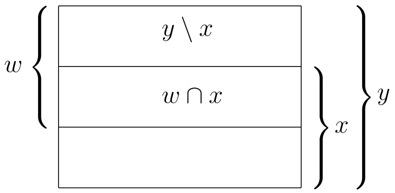
Sei also jetzt $x \subseteq y$ und $g : y \preceq x$. Ferner sei w die bzgl. $\subseteq$ kleinste Teilmenge von y, die $y \setminus x$ umfasst und die gegen g abgeschlossen ist (d. h. für die $\mathrm{Bild}(g\restriction w) \subseteq w$). Wir können w schreiben als

$$w \;=\; \bigcap \big\{ b \in \mathrm{Pot}(y) \mid (y \setminus x) \subseteq b \text{ und } \mathrm{Bild}(g\restriction b) \subseteq b \big\}.$$

Denn dann ist $(y \setminus x) \subseteq w$ (die hinter $\bigcap$ stehende Menge ist nicht leer, da sie y als Element hat), und man sieht leicht, dass $\mathrm{Bild}(g\restriction w) \subseteq w$ und dass für alle $b \in \mathrm{Pot}(y)$

$$(*) \qquad (y \setminus x) \subseteq b \subseteq w \wedge \mathrm{Bild}(g\restriction b) \subseteq b \;\rightarrow\; b = w.$$

Bildlich:



Mit $h := g\restriction w$ ist $h : w \preceq w \cap x$. Überdies ist $\mathrm{Bild}(h) = w \cap x$. Wäre nämlich $u \in (w \cap x) \setminus \mathrm{Bild}(h)$, so wäre $w \setminus \{u\}$ unter g abgeschlossen, also nach $(*)$ $w \setminus \{u\} = w$, ein Widerspruch. Insgesamt gilt $h : w \sim w \cap x$ und daher $h \cup \mathrm{id}_{x \setminus w} : y \sim x$. (Vgl. auch Aufgabe 1.12.5.) $\dashv$

Gibt es zu jeder Menge eine mächtigere? Für endliche Mengen wissen wir, dass dies der Fall ist. Der folgende Satz enthält eine Verallgemeinerung.

1.6 Satz von Cantor. *Für alle x gilt $x \prec \mathrm{Pot}(x)$.*

Beweis. Die auf x definierte Funktion g mit $g(u) = \{u\}$ für $u \in x$ ist eine Injektion von x in $\mathrm{Pot}(x)$. Wir zeigen, dass es keine Funktion von x auf $\mathrm{Pot}(x)$ geben kann. Dann ist $\neg\, x \sim \mathrm{Pot}(x)$, und wir sind fertig. Wäre f eine Funktion von x auf $\mathrm{Pot}(x)$, so wäre die Menge $z := \{u \in x \mid u \notin f(u)\}$ Element von $\mathrm{Bild}(f)$. Also gälte für ein geeignetes $v \in x$, dass $z = f(v)$. Nach Definition von z ergäbe sich $v \in z \leftrightarrow v \notin z$, also ein Widerspruch. (Es war dieser Beweis Cantors, der Russell die Idee zu seiner Antinomie lieferte: Man ersetze x durch das Universum und f durch die Identitätsoperation.) $\dashv$

Gibt es zu jeder Ordinalzahl eine mächtigere? Satz 1.6 liefert eine positive Antwort, wenn wir **AC** benutzen; denn dann ist die Potenzmenge einer Ordinalzahl wieder zu einer Ordinalzahl äquivalent. Ohne **AC** hilft der Satz VI.3.2 von Hartogs weiter:

1.7 Satz. $\forall\alpha\,\exists\beta\,\alpha \prec \beta$.

Beweis. Sei α gegeben. Man wähle β so, dass $\neg\beta \preceq \alpha$. Dann gilt nach Bemerkung 1.3, dass $\alpha \prec \beta$. ⊣

Satz 1.7 ermöglicht die Definition der sog. Aleph-Operation. (*Aleph*, geschrieben $\aleph$, ist der erste Buchstabe des hebräischen Alphabets.) Bei der Definition stützen wir uns auf das globale Rekursionstheorem VII.2.1 für Ordinalzahlen. Ähnlich wie bei der von Neumannschen Hierarchie schreibt man die Argumente als Indizes.

1.8 Definition. $\aleph_x := \emptyset$, falls $\neg \mathrm{Oz}\ x$;

$$\begin{aligned} \aleph_{\mathbf{0}} &:= \omega\,; \\ \aleph_{\alpha+\mathbf{1}} &:= \text{das kleinste } \gamma \text{ mit } \aleph_\alpha \prec \gamma \ \ \text{(das nach Satz 1.7 existiert)}; \\ \aleph_\delta &:= \bigcup\{\aleph_\beta \mid \beta < \delta\}. \end{aligned}$$

Eine anschauliche Vorstellung:

$$\mathbf{0} \prec \mathbf{1} \prec \mathbf{2} \prec \cdots \prec \omega = \aleph_{\mathbf{0}} \sim \omega{+}\mathbf{1} \sim \ldots \sim \omega \oplus \omega \sim \ldots$$

$$\ldots \prec \aleph_{\mathbf{1}} \sim \aleph_{\mathbf{1}}{+}\mathbf{1} \sim \ldots \prec \aleph_{\mathbf{2}} \sim \aleph_{\mathbf{2}}{+}\mathbf{1} \sim \ldots\ldots \prec \aleph_\omega \sim \aleph_\omega{+}\mathbf{1} \ldots.$$

Die Alephs, d. h. die $\aleph_\alpha$, eröffnen jeweils einen Abschnitt der „Ordinalzahlgeraden“, der aus untereinander gleichmächtigen (unendlichen) Ordinalzahlen besteht und unmittelbar vor dem nächsten Aleph endet. Man nennt einen solchen Abschnitt eine *Zahlklasse* und die Alephs selbst oft *Anfangszahlen*. Es ist üblich, die Klasse $\{\alpha \in \aleph_{\mathbf{1}} \mid \aleph_{\mathbf{0}} \leq \alpha \wedge \alpha < \aleph_{\mathbf{1}}\}$ die *zweite* Zahlklasse zu nennen (und überdies ω die *erste* Zahlklasse).

Mit den folgenden Betrachtungen stellen wir dieses Bild auf eine exakte Basis. Durch Induktion sieht man sofort, dass die Alephs Ordinalzahlen sind und dass stets $\omega \leq \aleph_\alpha$ und $\alpha \leq \aleph_\alpha$ gilt.

1.9 Satz. *Für alle* α, β *sind äquivalent:*

(i) $\alpha < \beta$.

(ii) $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$.

(iii) $\aleph_\alpha \prec \aleph_\beta$.

Wir sehen hieraus zusammen mit $\aleph_\delta = \bigcup\{\aleph_\beta \mid \beta < \delta\}$, dass die $\aleph$-Operation normal ist (vgl. Aufgabe VI.2.11.12); es gibt daher beliebig große Ordinalzahlen β mit $\aleph_\beta = \beta$ (vgl. Aufgabe VI.2.11.15).

Beweis. Offenbar reicht es, wenn wir zeigen:

$$(*) \qquad \alpha < \beta \to \aleph_\alpha < \aleph_\beta \land \aleph_\alpha \prec \aleph_\beta.$$

Wir führen für festes α Induktion über β. Für $\beta = \mathbf{0}$ gilt $(*)$. Sei, im Nachfolgerschritt, $(*)$ gültig für β. Wir können annehmen, dass $\beta \geq \alpha$. Dann ist nach Induktionsvoraussetzung $\aleph_\alpha \preceq \aleph_\beta$, wegen $\aleph_\beta \prec \aleph_{\beta+\mathbf{1}}$ also $\aleph_\alpha \prec \aleph_{\beta+\mathbf{1}}$ und daher auch $\aleph_\alpha < \aleph_{\beta+\mathbf{1}}$. Sei schließlich im Limesschritt $(*)$ gültig für alle $\beta < \delta$. Wir können entsprechend annehmen, dass $\delta > \alpha$. Dann ist $\alpha + \mathbf{1} < \delta$ und daher $\aleph_\alpha \prec \aleph_{\alpha+\mathbf{1}} \subseteq \aleph_\delta$, mithin $\aleph_\alpha \prec \aleph_{\alpha+\mathbf{1}} \preceq \aleph_\delta$, also $\aleph_\alpha \prec \aleph_\delta$, und somit auch $\aleph_\alpha < \aleph_\delta$. ⊣

1.10 Satz. (i) $\omega \leq \alpha \to \exists^{=1}\beta\ \alpha \sim \aleph_\beta$.

(ii) $\alpha \sim \aleph_\beta \to \alpha \geq \aleph_\beta$.

(iii) $\aleph_\alpha$ *ist eine Limeszahl.*

Beweis. Zu (i): Sei $\omega \leq \alpha$. Nach Satz 1.9 brauchen wir nur zu zeigen, dass es ein β mit $\alpha \sim \aleph_\beta$ gibt.

Da $\alpha \leq \aleph_\alpha < \aleph_{\alpha+\mathbf{1}}$, existiert ein γ mit $\alpha < \aleph_\gamma$. Wir wählen γ minimal mit dieser Eigenschaft. Dann ist γ offensichtlich eine Nachfolgerzahl, also von der Gestalt $\gamma = S(\beta)$. Mithin ist $\aleph_\beta \leq \alpha < \aleph_{\beta+\mathbf{1}}$, also $\alpha \sim \aleph_\beta$.

Dies zeigt zugleich auch Teil (ii). *Zu* (iii) beachten wir, dass für $\omega \leq \alpha$ stets $\alpha \sim S(\alpha)$. ⊣

Wir schließen diesen Abschnitt mit einem Ergebnis, dem in der Kardinalzahlarithmetik eine große Bedeutung zukommt.

1.11 Satz von Hessenberg. *Für alle α ist $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha \sim \aleph_\alpha$.*

Da jede unendliche Ordinalzahl zu einem Aleph äquivalent ist, gilt dieser Satz nicht nur für Alephs, sondern für alle unendlichen Ordinalzahlen. Eine Ausdehnung auf beliebige unendliche Mengen ist erst mit dem Auswahlaxiom möglich.

Beweis. Da $\{(\beta, (\beta, \mathbf{0})) \mid \beta \in \aleph_\alpha\} : \aleph_\alpha \preceq \aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$, reicht es, wenn wir zeigen, dass

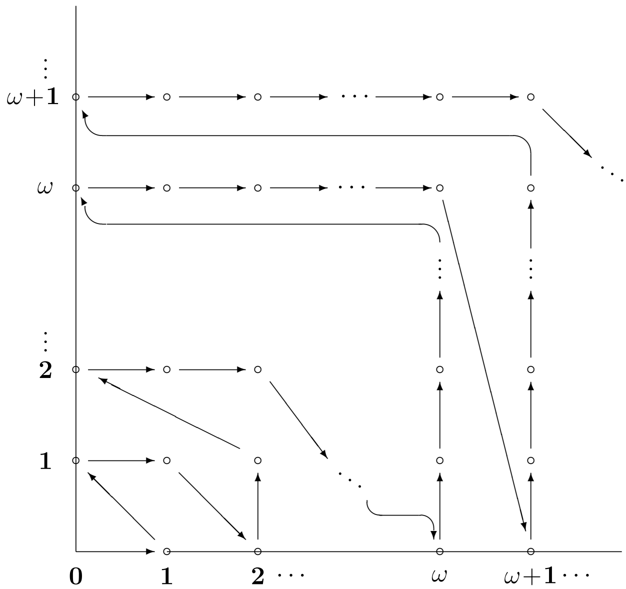
$$(*) \qquad \aleph_\alpha \times \aleph_\alpha \preceq \aleph_\alpha.$$

Wir führen den Beweis induktiv über α. Sei dazu $(*)$ gültig für alle $\beta < \alpha$. Wir ordnen $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$ in einer solchen Weise wohl, dass die entstehende Wohlordnung nicht länger ist als die Wohlordnung $(\aleph_\alpha, \in_{\aleph_\alpha})$. Daraus wird dann $(*)$ folgen.

Wir definieren eine Relation r über $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$ durch

$$\begin{aligned}
&(\beta, \gamma) r (\beta', \gamma') \quad :\leftrightarrow \\
&\qquad \max\{\beta, \gamma\} \ < \ \max\{\beta', \gamma'\} \text{ oder} \\
&\qquad \big(\max\{\beta, \gamma\} \ = \ \max\{\beta', \gamma'\} \text{ und } (\gamma < \gamma' \lor (\gamma = \gamma' \land \beta < \beta'))\big).
\end{aligned}$$

Eine grafische Veranschaulichung:



Es ist nicht schwer zu sehen, dass die Struktur $(\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha, r)$ eine Ordnung i.S.v. $<$ ist. Sie ist sogar eine Wohlordnung. Sei dazu b_0 eine nicht leere Teilmenge von $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$. Wir zeigen, dass b_0 ein r-minimales Element enthält. Sei α_0 die kleinste Ordinalzahl, für die es ein Paar $(\beta, \gamma) \in b_0$ gibt mit $\max\{\beta, \gamma\} = \alpha_0$, und sei $b_1 = \{(\beta, \gamma) \in b_0 \mid \max\{\beta, \gamma\} = \alpha_0\}$. Für alle $u \in b_1$ und alle $v \in b_0 \setminus b_1$ ist dann urv. Nun sondern wir aus b_1 die Menge b_2 aus, die aus den Elementen von b_1 mit minimaler zweiter Komponente besteht. Dann gilt für alle $u \in b_2$ und alle $v \in b_1 \setminus b_2$, dass urv. Sei schließlich u_2 das Element aus b_2 mit minimaler erster Komponente. Dann ist u_2 r-minimales Element von b_2, also von b_0.

Jetzt seien (vgl. Satz VI.3.3) die Ordinalzahl ϵ und die Funktion f so gewählt, dass

$$f : (\epsilon, \in_\epsilon) \cong (\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha, r).$$

Wir zeigen, dass $(\epsilon, \in_\epsilon)$ und damit $(\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha, r)$ höchstens so lang wie $(\aleph_\alpha, \in_{\aleph_\alpha})$ ist, mit anderen Worten, dass

$$(**) \qquad \epsilon \leq \aleph_\alpha.$$

Dann ist $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha \sim \epsilon \preceq \aleph_\alpha$, also die Induktionsbehauptung $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha \preceq \aleph_\alpha$ bewiesen.

Sei $\eta < \epsilon$. Wir schließen hieraus auf $\eta < \aleph_\alpha$ (das liefert dann offensichtlich (**)). Mit $f(\eta) = (\beta, \gamma)$ ist $\eta \sim r[(\beta, \gamma)]$. Nach Definition von r gilt mit $\eta' := \max\{\beta, \gamma\} + 1$, dass $r[(\beta, \gamma)] \subseteq \eta' \times \eta'$. Da $\eta' < \aleph_\alpha$ (denn $\aleph_\alpha$ ist eine Limeszahl), ist η' endlich oder $\eta' \sim \aleph_{\alpha'}$ für ein $\alpha' < \alpha$. Im ersten Fall ist $\eta' \times \eta'$ endlich, also $\prec \aleph_\alpha$, im zweiten Fall ist $\eta' \times \eta' \sim \aleph_{\alpha'} \times \aleph_{\alpha'}$, daher nach Induktionsvoraussetzung $\eta' \times \eta' \preceq \aleph_{\alpha'}$, also ebenfalls $\eta' \times \eta' \prec \aleph_\alpha$. Mithin ist $r[(\beta, \gamma)] \prec \aleph_\alpha$, also auch $\eta \prec \aleph_\alpha$ und somit schließlich $\eta < \aleph_\alpha$. $\dashv$

1.12 Aufgaben.

1.12.1 Für alle x, y, z gilt: $x \preceq y \to {}^z x \preceq {}^z y$. Gilt das Analogon für $\prec$ anstelle von $\preceq$?

1.12.2 Für alle x, y, z gilt: $x \preceq y \to {}^x z \preceq {}^y z$. Gilt das Analogon für $\prec$ anstelle von $\preceq$?

1.12.3 Man beweise die folgende Verschärfung des Satzes von Hartogs: Zu jedem x gibt es ein α mit $\alpha \preceq \mathrm{Pot}(\mathrm{Pot}(x \times x))$ und $\neg\, \alpha \preceq x$.

1.12.4 Ist (a, r) eine binäre Struktur, so sind *Teilstrukturen von* (a, r) gerade die Strukturen $(b, r \cap (b \times b))$ mit $b \subseteq a$. Man beweise den folgenden Sachverhalt vom Bernstein-Cantor-Schröder-Typ: Es seien (a, r) und (b, s) Wohlordnungen. Ist (a, r) isomorph zu einer Teilstruktur von (b, s) und ist (b, s) isomorph zu einer Teilstruktur von (a, r), so sind (a, r) und (b, s) isomorph. Gilt dies auch für beliebige Ordnungen?

1.12.5 Man beweise den Äquivalenzsatz 1.4(iii) anschaulicher, indem man in der Situation $x \subseteq y$ und $g : y \preceq x$ mit der auf ω definierten Funktion h argumentiert, die definiert ist durch $h(\mathbf{0}) = g{\restriction}(y \backslash x)$ und $h(i{+}\mathbf{1}) = g{\restriction}\mathrm{Bild}(h(i))$.

1.12.6 Für $X, Y \subseteq \mathbb{R}^3$ besage $X \equiv Y$, dass es eine Zerlegung von X in endlich viele Teile gibt, aus denen man Y zusammensetzen kann, genauer: Es gibt eine Partition $X = \bigcup\{X_i \mid i < j\}$ mit nicht leeren, paarweise disjunkten X_i und Bewegungen h_i des $\mathbb{R}^3$, d. h. Produkte aus Rotationen und Translationen des $\mathbb{R}^3$, so dass die Bilder der $h_i{\restriction}X_i$ eine Partition von Y bilden.

Es seien X eine abgeschlossene Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$ und Y eine nicht leere Vereinigung endlich vieler nicht notwendig zueinander disjunkter abgeschlossener Einheitskugeln im $\mathbb{R}^3$. Mit Hilfe des auf Seite 116 erwähnten Kugelparadoxons zeige man, dass $X \equiv Y$. Dazu modifiziere man den Äquivalenzsatz 1.4(iii) geeignet.

1.12.7 Es seien X und Y beschränkte Teilmengen des $\mathbb{R}^3$, die je einen inneren Punkt enthalten. Beispielsweise habe X die Gestalt des Kopfes der Nofretete und Y die Gestalt des Kölner Doms. Man beweise mit Hilfe des Kugelparadoxons, dass $X \equiv Y$.

§2 Kardinalzahlen

Nachdem wir im vorangehenden Abschnitt einige Eigenschaften der Prädikate $\sim$, $\prec$ und $\preceq$ betrachtet haben, suchen wir jetzt nach *Maßstäben* für gleichmächtige Mengen, wie wir sie für endliche Mengen bereits in den Elementen von ω gefunden haben. Für unendliche Ordinalzahlen bieten sich dazu die Alephs an. Wie sieht es bei unendlichen Mengen aus, die keine Ordinalzahlen sind? Ein natürlicher Weg öffnet sich, wenn wir das Auswahlaxiom zulassen; dann ist nach dem Wohlordnungssatz jede Menge zu einer Ordinalzahl gleichmächtig, also jede unendliche Menge zu einem Aleph. Wir nehmen diese Annehmlichkeit zum Anlass, bei den folgenden Mächtigkeitsbetrachtungen das Auswahlaxiom zu benutzen. *Wir argumentieren in diesem Abschnitt also auf der Grundlage von* **ZFC**.

Die Elemente von ω und die Alephs bilden jetzt einen vollständigen Satz von Mächtigkeitsmaßstäben; wir nennen sie *Kardinalzahlen.*

2.1 Definition. x ist eine *Kardinalzahl* $:\leftrightarrow\ x \in \omega \vee \exists\alpha\ x = \aleph_\alpha$.

Im Folgenden verwenden wir κ, λ, μ, $\nu, \ldots$, um Kardinalzahlen anzudeuten. Für Kardinalzahlen fällt $\prec$ mit $<$ und $\preceq$ mit $\leq$ zusammen (vgl. Satz 1.9):

2.2 Bemerkung. (i) $\kappa < \lambda \leftrightarrow \kappa \prec \lambda$.
(ii) $\kappa \leq \lambda \leftrightarrow \kappa \preceq \lambda$. $\dashv$

Die Rolle der Kardinalzahlen als Mächtigkeitsmaßstäbe können wir jetzt so ausdrücken:

2.3 Satz. $\forall x \exists^{=1} \kappa\ x \sim \kappa$. $\dashv$

Damit können wir in Erweiterung von Definition V.3.6 festsetzen:

2.4 Definition. $|x|\ :=$ das κ mit $x \sim \kappa$, d. h.

$$|x|\ := \begin{cases} \text{das } i \text{ mit } x \sim i, \text{ falls } x \text{ endlich,} \\ \text{das } \aleph_\alpha \text{ mit } x \sim \aleph_\alpha, \text{ falls } x \text{ unendlich.} \end{cases}$$

Wir sprechen auch hier von $|x|$ als von der *Mächtigkeit von x*. Es ist stets $|\kappa| = \kappa$.

Die Prädikate $\prec$ und $\preceq$ haben jetzt die Eigenschaften von Ordnungsrelationen (vgl. die Sätze 1.4 und 1.5), und offenbar gilt:

2.5 Satz. (i) $x \sim y \leftrightarrow |x| = |y|$.
(ii) $x \prec y \leftrightarrow |x| < |y|$.
(iii) $x \preceq y \leftrightarrow |x| \leq |y|$. $\dashv$

Einige Redeweisen führen wir ein in

2.6 Definition. (i) x ist *abzählbar* $:\leftrightarrow\ |x| \le \aleph_{\mathbf{0}}$.
(ii) x ist *abzählbar unendlich* $:\leftrightarrow\ |x| = \aleph_{\mathbf{0}}$.
(iii) x ist *überabzählbar* $:\leftrightarrow\ |x| \ge \aleph_{\mathbf{1}}$.

Einige Beispiele:
(a) $\omega \times \omega$ ist abzählbar unendlich, ein Spezialfall von Satz 1.11.
(b) Nach dem Satz 1.6 von Cantor ist $\mathrm{Pot}(\omega)$ überabzählbar.
(c) Die Vereinigung einer abzählbaren Menge abzählbarer Mengen ist abzählbar. Wir beweisen diesen Sachverhalt allgemeiner:

2.7 Satz. *Die Vereinigung von höchstens $\aleph_\alpha$ vielen Mengen einer Mächtigkeit $\le \aleph_\alpha$ hat eine Mächtigkeit $\le \aleph_\alpha$*, d. h.

$$|X| \le \aleph_\alpha \wedge \forall y\,(y \in X \to |y| \le \aleph_\alpha) \ \to\ |\bigcup X| \le \aleph_\alpha.$$

Beweis. Es sei $|X| \le \aleph_\alpha$ und $g : X \preceq \aleph_\alpha$, und für alle $y \in X$ sei $|y| \le \aleph_\alpha$, also $\{f \mid f : y \preceq \aleph_\alpha\} \ne \emptyset$. Zu jedem $y \in X$ wählen wir eine Injektion von y in $\aleph_\alpha$, indem wir von einer Auswahlfunktion h auf

$$\big\{\{f \in {}^{y}\aleph_\alpha \mid f \text{ Injektion}\} \mid y \in X\big\}$$

ausgehen. Für $h(\{f \in {}^{y}\aleph_\alpha \mid f \text{ Injektion}\})$, also die zu y gewählte Injektion von y in $\aleph_\alpha$, schreiben wir kurz h_y. Wir definieren nun eine Injektion f von $\bigcup X$ in $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$ dadurch, dass wir für $z \in \bigcup X$

$$f(z) \ = \ (\gamma_0, \gamma_1)$$

setzen; hierbei sei γ_0 die kleinste Ordinalzahl γ mit $z \in g^{-1}(\gamma)$, und es sei $\gamma_1 = h_{g^{-1}(\gamma_0)}(z)$. Damit ist $\bigcup X \preceq \aleph_\alpha \times \aleph_\alpha \sim \aleph_\alpha$, also $|\bigcup X| \le \aleph_\alpha$. (Vgl. auch Aufgabe 2.16.4.) $\dashv$

Das Analogon mit „$\prec$“ anstelle von „$\preceq$“ gilt i. Allg. nicht mehr; vgl. Satz 3.5.

Satz V.3.8 zeigt, dass die arithmetischen Verknüpfungen über ω uns Möglichkeiten an die Hand geben, um die Mächtigkeit endlicher Mengen zu bestimmen. Wir wollen diese Möglichkeiten auf beliebige Mengen ausdehnen und erweitern dazu die arithmetischen Verknüpfungen zu Operationen, die auf allen Kardinalzahlen definiert sind. Wir tun dies gerade so, dass das Analogon von Satz V.3.8 gilt. Anschließend weisen wir für die so definierten Operationen nach, dass sie die entsprechenden Rechengesetze erfüllen. Diese bezeugen, dass wir jetzt über ein nützliches Werkzeug verfügen, die Mächtigkeit *beliebiger* Mengen zu bestimmen. Allerdings treten im Zusammenhang mit der Exponentiation Schwierigkeiten auf. Von diesen berichtet der nächste Abschnitt. – Auf die ordinalen Verknüpfungen (Aufgaben VII.2.2) kommen wir unten zurück.

2.8 Definition. Die *kardinale Addition* $+$, die *kardinale Multiplikation* $\cdot$ und die *kardinale Exponentiation* „hoch" seien definiert durch:

(i) $\kappa{+}\mu := |(\kappa \times \{\mathbf{0}\}) \cup (\mu \times \{\mathbf{1}\})|$,

(ii) $\kappa{\cdot}\mu := |\kappa \times \mu|$,

(iii) $\kappa^{\mu} := |{}^{\mu}\kappa|$,

sowie $x{+}y := \emptyset$, $x{\cdot}y := \emptyset$ und $x^y := \emptyset$, falls x oder y keine Kardinalzahl ist.

Offenbar stimmen die kardinalen Operationen über ω mit den entsprechenden arithmetischen Verknüpfungen überein, und leicht ergibt sich:

2.9 Bemerkung. (i) $|x \cup y| \ \leq \ |x|{+}|y|$.

(ii) $x \cap y = \emptyset \ \rightarrow \ |x \cup y| = |x|{+}|y|$;

$x \cup y$ *unendlich* $\rightarrow \ |x \cup y| = |x|{+}|y| = \max\{|x|, |y|\}$.

(iii) $|x \times y| = |x|{\cdot}|y|$.

(iv) $|{}^{y}x| = |x|^{|y|}$.

Wir *beweisen* (i) und (ii).
Zu (i): $x \cup y = x \cup (y \setminus x) \preceq (|x| \times \{\mathbf{0}\}) \cup (|y| \times \{\mathbf{1}\}) \sim |x|{+}|y|$.
Zu (ii): Ist $x \cap y = \emptyset$, argumentiert man wie zu (i) und beachtet, dass $y \setminus x = y$. Ist $x \cup y$ unendlich und etwa $|y| \leq |x|$, schließt man so:

$$\begin{aligned} x \ &\preceq \ x \cup y \ \preceq \ \text{(nach (i))} \ (x \times \{\mathbf{0}\}) \cup (y \times \{\mathbf{1}\}) \\ &\preceq \ \text{(wegen } y \preceq x\text{)} \ (x \times \{\mathbf{0}\}) \cup (x \times \{\mathbf{1}\}) \\ &\preceq \ x \times x \ \preceq \ \text{(Satz 1.11; x ist unendlich)} \ x, \end{aligned}$$

also $x \cup y \ \sim \ (x \times \{\mathbf{0}\}) \cup (y \times \{\mathbf{1}\}) \ \sim \ x$, d. h. $|x \cup y| \ = \ |x|{+}|y| \ = \ |x| \ = \max\{|x|, |y|\}$. $\dashv$

Anders als bei endlichen Mengen kann man also bei unendlichen Mengen aus der Gleichung $|x \cup y| = |x|{+}|y|$ nicht mehr darauf schließen, dass $x \cap y = \emptyset$ sein muss.

In den Aufgaben VII.2.2.1 bis 2.2.8 haben wir uns mit der *ordinalen* Addition $\oplus$, der *ordinalen* Multiplikation und der *ordinalen* Exponentiation befasst. Sie unterscheiden sich außerhalb von ω grundlegend von den entsprechenden kardinalen Operationen. So ist die ordinale Addition $\oplus$ im Gegensatz zur kardinalen Addition $+$ nicht kommutativ (vgl. Satz 2.10(i)). Auch ist die kardinale Addition nicht für alle Ordinalzahlen (nichttrivial) definiert, und i. Allg. ist die ordinale Summe von Kardinalzahlen keine Kardinalzahl mehr. Beispielsweise ist $\aleph_{\mathbf{0}} \oplus \mathbf{1} = S(\aleph_{\mathbf{0}})$ keine Kardinalzahl.

Allgemein gilt für unendliches κ, dass $\kappa{+}\mathbf{1} \sim S(\kappa) = \kappa{+}\mathbf{1} \sim \kappa$, dass also $\kappa{+}\mathbf{1} = \kappa$. Mithin ist dann $\kappa{+}\mathbf{1}$ nicht die nächstgrößere Kardinalzahl nach κ. Die nächstgrößere Kardinalzahl nach κ, der *kardinale* Nachfolger von κ, wird oft mit κ^{+} bezeichnet. Es ist $i^{+} = \mathbf{S}(i)$ und $\aleph_{\alpha}^{+} = \aleph_{\alpha+\mathbf{1}}$.

Um die Mächtigkeiten von Vereinigungen, kartesischen Produkten und Mengen von Abbildungen zu bestimmen, sind nach Bemerkung 2.9 die kardinalen Operationen von Nutzen. Die grundlegenden Rechenregeln sammeln wir in den folgenden drei Sätzen.

2.10 Satz von der kardinalen Addition.

(i) $+$ *ist kommutativ und assoziativ.*

(ii) $\mu \leq \nu \to \kappa + \mu \leq \kappa + \nu$.

(iii) *Mit* $\kappa \geq \aleph_0$ *ist* $\kappa + \mu = \max\{\kappa, \mu\}$, *insbesondere also* $\kappa + i = \kappa$.

Beweis. (i) ergibt sich leicht unter Zuhilfenahme geeigneter Bijektionen, (ii) daraus, dass mit $\mu \leq \nu$ auch $(\kappa \times \{\mathbf{0}\}) \cup (\mu \times \{\mathbf{1}\}) \preceq (\kappa \times \{\mathbf{0}\}) \cup (\nu \times \{\mathbf{1}\})$, und (iii) ist ein Teil von Bemerkung 2.9(ii). ⊣

2.11 Satz von der kardinalen Multiplikation.

(i) $\cdot$ *ist kommutativ und assoziativ.*

(ii) $\kappa \cdot (\mu + \nu) = (\kappa \cdot \mu) + (\kappa \cdot \nu)$.

(iii) $\mu \leq \nu \to \kappa \cdot \mu \leq \kappa \cdot \nu$.

(iv) $\kappa \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

(v) *Mit* $\kappa \geq \aleph_{\mathbf{0}}$ *und* $\mu \neq \mathbf{0}$ *ist* $\kappa \cdot \mu = \max\{\kappa, \mu\}$, *also* $\kappa \cdot i = \kappa$ *für* $i \neq \mathbf{0}$.

Beweis. Wir beschränken uns auf (iv) und (v).
Zu (iv): $\kappa \cdot \mathbf{0} \sim \kappa \times \emptyset = \emptyset$.
Zu (v): Sei $\kappa \geq \aleph_{\mathbf{0}}$ und, aus Symmetriegründen, etwa $\mathbf{1} \leq \mu \leq \kappa$. Dann ist $\kappa \sim \kappa \times \{\mathbf{0}\} \preceq \kappa \times \mu \preceq \kappa \times \kappa \sim \kappa$, also $\kappa \cdot \mu = \kappa = \max\{\kappa, \mu\}$. ⊣

2.12 Satz von der kardinalen Exponentiation.

(i) $\kappa^{\mu + \nu} = \kappa^\mu \cdot \kappa^\nu$.

(ii) $\kappa^{\mu \cdot \nu} = (\kappa^\mu)^\nu$.

(iii) $(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$.

(iv) *Mit* $\mu \leq \nu$ *ist* $\kappa^\mu \leq \kappa^\nu$ *und* $\mu^\kappa \leq \nu^\kappa$.

(v) $\mathbf{0}^{\mathbf{0}} = \mathbf{1}$ *und* $\mathbf{0}^\kappa = \mathbf{0}$ *für* $\kappa \neq \mathbf{0}$.

(vi) $\kappa^{\mathbf{0}} = \mathbf{1}$ *und* $\kappa^i = \kappa$ *für* $i \neq \mathbf{0}$ *und* $\kappa \geq \aleph_{\mathbf{0}}$.

(vii) $|\mathrm{Pot}(x)| = \mathbf{2}^{|x|}$.

(viii) $\kappa \geq \aleph_{\mathbf{0}} \wedge \mathbf{2} \leq \mu \leq \kappa \to \mu^\kappa = \mathbf{2}^\kappa$.

Beweis. Wir zeigen exemplarisch einige Teile.

Zu (ii): Es ist $\kappa^{\mu \cdot \nu} \sim {}^{\mu \cdot \nu}\kappa \sim {}^{\mu \times \nu}\kappa \sim {}^{\nu}({}^{\mu}\kappa)$. Um die letzte Gleichmächtigkeitsbeziehung zu bestätigen, ordnet man einer Funktion

$$f = \big\{\big((\alpha, \beta), f(\alpha, \beta)\big) \mid \alpha \in \mu, \beta \in \nu\big\} \in {}^{\mu \times \nu}\kappa$$

die Funktion

$$\{(\beta, \{(\alpha, f(\alpha,\beta)) \mid \alpha \in \mu\}) \mid \beta \in \nu\} \in {}^{\nu}({}^{\mu}\kappa)$$

zu.

Zu (vi): Zunächst ist ${}^{\emptyset}\kappa = \{\emptyset\}$, also $\kappa^{\mathbf{0}} = \mathbf{1}$, und $\kappa^{\mathbf{1}} \sim {}^{\{\emptyset\}}\kappa \sim \kappa$, also $\kappa^{\mathbf{1}} = \kappa$. Ist $i \geq 1$ und bereits $\kappa^i = \kappa$, so haben wir auch $\kappa^{i+\mathbf{1}} =$ (nach (i)) $\kappa^i \cdot \kappa^{\mathbf{1}} = \kappa \cdot \kappa = \kappa$.

Zu (vii): Man erhält eine Bijektion von $\mathrm{Pot}(x)$ auf ${}^{x}\mathbf{2}$, indem man einer Teilmenge y von x die Funktion $\{(u,\mathbf{1}) \mid u \in y\} \cup \{(u,\mathbf{0}) \mid u \in x \setminus y\}$, ihre sog. *charakteristische Funktion*, zuordnet.

Zu (viii): Unter den genannten Bedingungen haben wir $\mathbf{2}^{\kappa} \leq \mu^{\kappa} \leq \kappa^{\kappa} \leq |\mathrm{Pot}(\kappa)|^{\kappa} = (\mathbf{2}^{\kappa})^{\kappa} = \mathbf{2}^{\kappa\cdot\kappa} = \mathbf{2}^{\kappa}$, also $\mu^{\kappa} = \mathbf{2}^{\kappa}$. ⊣

Aus Satz 2.10(iii) und Satz 2.11(v) erhalten wir das

2.13 Korollar. $\aleph_{\alpha} + \aleph_{\beta} = \aleph_{\alpha} \cdot \aleph_{\beta} = \aleph_{\max\{\alpha,\beta\}}$. ⊣

Insbesondere ist also $\aleph_{\mathbf{1}} + \aleph_{\mathbf{0}} = \aleph_{\mathbf{1}} + \aleph_{\mathbf{1}}$ und $\aleph_{\mathbf{1}} \cdot \aleph_{\mathbf{0}} = \aleph_{\mathbf{1}} \cdot \aleph_{\mathbf{1}}$; die Analoga von Satz 2.10(ii) und Satz 2.11(iii) für „$<$“ anstelle von „$\leq$“ sind also falsch. Entsprechendes gilt für Satz 2.12(iv), wie die Gleichungen $\aleph_{\mathbf{0}}^{\aleph_{\mathbf{1}}} = \aleph_{\mathbf{1}}^{\aleph_{\mathbf{1}}}$ und $(\mathbf{2}^{\aleph_{\mathbf{1}}})^{\aleph_{\mathbf{0}}} = (\mathbf{2}^{\aleph_{\mathbf{1}}})^{\aleph_{\mathbf{1}}}$ zeigen.

Mit den Ergebnissen dieses und des letzten Abschnitts haben wir Möglichkeiten gewonnen, eine Reihe von Mächtigkeiten zu bestimmen. Wir demonstrieren das an einigen Beispielen und in Form von Aufgaben. Weitergehende Hilfsmittel lernen wir im nächsten Abschnitt kennen.

2.14 Satz. (i) $|\mathbb{Z}| = \aleph_{\mathbf{0}}$.
(ii) $|\mathbb{Q}| = \aleph_{\mathbf{0}}$.

Beweis. Zu (i). Durch $i \mapsto i \ominus \mathbf{0}$ (vgl. V. 4) wird eine Injektion von ω in $\mathbb{Z}$ definiert; also gilt $\aleph_{\mathbf{0}} \leq |\mathbb{Z}|$. Indem wir einer Äquivalenzklasse $i \ominus j$ aus $\mathbb{Z}$ das eindeutig bestimmte Paar $(i_0, j_0) \in i \ominus j$ zuordnen mit $i_0 = \mathbf{0} \vee j_0 = \mathbf{0}$, erhalten wir eine Injektion von $\mathbb{Z}$ in $\omega \times \omega$; also ist $|\mathbb{Z}| \leq |\omega \times \omega| = \aleph_{\mathbf{0}}$. – *Zu* (ii) argumentiert man ähnlich; vgl. auch Aufgabe 2.16.2. ⊣

2.15 Satz. (i) $|\mathbb{R}| = \mathbf{2}^{\aleph_{\mathbf{0}}}$.
(ii) $|\{x \in \mathrm{Pot}(\mathbb{R}) \mid x \text{ offen}\}| = |\mathbb{R}|$.

Beweis. Zu (i): $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$f(r) := \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{falls} \quad r = \mathbf{0}\,, \\ \dfrac{\mathbf{1}}{r+\mathbf{1}}, & \text{falls} \quad r > \mathbf{0}\,, \\ \dfrac{\mathbf{1}}{r-\mathbf{1}}, & \text{falls} \quad r < \mathbf{0}\,; \end{cases}$$

$$g(r) := \frac{r+\mathbf{1}}{\mathbf{2}}.$$

Dann ist $g \circ f$ eine Bijektion von $\mathbb{R}$ auf das Intervall $\langle \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ der Zahlen zwischen $\mathbf{0}$ und $\mathbf{1}$ (ohne Randpunkte). Daher ist

$$(*) \qquad \mathbb{R} \sim \langle \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle.$$

Indem wir einer reellen Zahl aus $\langle \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ ihre nicht-abbrechende Dualdarstellung zuordnen und dieser die Folge ihrer Dualziffern, erkennen wir, dass $\langle \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle \preceq {}^{\aleph_\mathbf{0}}\mathbf{2}$, also, mit $(*)$, dass $|\mathbb{R}| \leq \mathbf{2}^{\aleph_\mathbf{0}}$. Umgekehrt ergibt sich $\mathbf{2}^{\aleph_\mathbf{0}} \leq |\mathbb{R}|$ dadurch, dass wir einem $f \in {}^{\aleph_\mathbf{0}}\mathbf{2}$ die reelle Zahl $\sum\limits_{i=\mathbf{0}}^{\infty} \frac{f(i)}{\mathbf{2}^{\mathbf{2}i+\mathbf{1}}}$ zuordnen. (Weil wir die reellen Zahlen als Unterklassen Dedekindscher Schnitte im Körper der rationalen Zahlen definiert haben (vgl. V. 4), gewinnen wir die Beziehung $\mathbb{R} \leq \mathbf{2}^{\aleph_\mathbf{0}}$ auch sofort aus $\mathbb{R} \subseteq \mathrm{Pot}(\mathbb{Q})$ und Satz 2.14(ii).)

Zu (ii): Es sei $|\{x \in \mathrm{Pot}(\mathbb{R}) \mid x \text{ offen}\}| =: \kappa$. Die auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion g mit $g(r) = \langle r - \mathbf{1},\, r + \mathbf{1} \rangle$ für $r \in \mathbb{R}$ zeigt uns, dass $|\mathbb{R}| \leq \kappa$. Die Abschätzung $\kappa \leq |\mathbb{R}|$ gewinnen wir mit (i) aus der folgenden Behauptung ($\mathbb{Q}^+$ sei die Menge der positiven rationalen Zahlen):

$$(**) \qquad \kappa \leq |\mathrm{Pot}(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+)|.$$

Denn da $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Q}^+| = \aleph_\mathbf{0}$ (vgl. Aufgabe 2.16.2), ist dann $\kappa \leq \mathbf{2}^{\aleph_\mathbf{0} \cdot \aleph_\mathbf{0}} = \mathbf{2}^{\aleph_\mathbf{0}} = |\mathbb{R}|$. Zum Beweis von $(**)$ benutzen wir, dass sich jede offene Menge reeller Zahlen als Vereinigung von offenen Intervallen mit (rationalem Mittelpunkt und) rationalen Endpunkten schreiben lässt. Indem wir einer Teilmenge w von $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+$ die offene Menge $\bigcup\{\langle \rho - \sigma,\, \rho + \sigma \rangle \mid (\rho, \sigma) \in w\}$ zuordnen, erhalten wir also eine Surjektion von $\mathrm{Pot}(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+)$ auf $\{x \in \mathrm{Pot}(\mathbb{R}) \mid x \text{ offen}\}$, und dies liefert die Behauptung $(**)$. Vgl. auch Aufgabe 2.16.4. $\dashv$

2.16 Aufgaben.

2.16.1 Es sei X eine Menge von Kardinalzahlen. Dann ist $\bigcup X$ eine Kardinalzahl.

2.16.2 Es ist $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Q}^+| = \aleph_\mathbf{0}$.

2.16.3 Man zeige ausführlich, dass ${}^u(x \times y) \sim {}^u x \times {}^u y$ für alle Mengen x, y und u (vgl. Satz 2.12(iii)).

2.16.4 Es gibt eine Surjektion von x auf y genau dann, wenn $|y| \leq |x|$. (Für die Richtung von rechts nach links sei $y \neq \emptyset$.) Ist also $f : x \to y$, so ist $|\mathrm{Bild}(f)| \leq |x|$, und ist r eine Äquivalenzrelation über a, so ist $|a/r| \leq |a|$. Man benutze die Äquivalenz zu einem neuen Beweis von Satz 2.7.

2.16.5 Es sei $\aleph_\mathbf{0} \leq \mu \leq |X|$. Dann ist X zerlegbar in μ viele zueinander disjunkte Teilmengen der Mächtigkeit $|X|$.

2.16.6 Für alle Familien $(X_\iota)_{\iota\in I}$ und alle μ, κ gilt: Ist $|I| \leq \mu$ und $|X_\iota| \leq \kappa$ für $\iota \in I$, so ist $|\bigtimes_{\iota\in I} X_\iota| \leq \kappa^\mu$.

2.16.7 Es seien X und Y unendlich und $Y \subseteq X$, sowie $f : X \to X$. Man zeige: Es gibt eine Menge Z mit $Y \subseteq Z \subseteq X$, $|Z| = |Y|$, und Z ist abgeschlossen unter f, d. h. für alle $u \in Z$ ist $f(u) \in Z$.

2.16.8 Es sei (a, r) eine Ordnung i.S.v. $<$ oder $\leq$, und für alle $u \in a$ sei $|r[u]| \leq \aleph_\alpha$. Dann ist $|a| \leq \aleph_{\alpha+1}$.

2.16.9 Für eine Kardinalzahl κ sei $\mathrm{Pot}_\kappa(x) = \{y \in \mathrm{Pot}(x) \mid |y| < \kappa\}$ und $\mathrm{Seq}_\kappa(x) = \bigcup\{{}^\alpha x \mid \alpha < \kappa\}$. Insbesondere ist $\mathrm{Pot}_\omega(x)$ die Menge der endlichen Teilmengen von x und $\mathrm{Seq}_\omega(x)$ die Menge der endlichen Folgen über x. Man zeige für unendliches x, dass $|\mathrm{Pot}_\omega(x)| = |\mathrm{Seq}_\omega(x)| = |x|$.

2.16.10 Für $\aleph_\mathbf{0} \leq \mu \leq \kappa$ ist $|\mathrm{Pot}_{\mu^+}(\kappa)| = |\mathrm{Pot}_{\mu^+}(\kappa) \setminus \mathrm{Pot}_\mu(\kappa)| = \kappa^\mu$.

2.16.11 Es sei $\mathrm{Perm}(X) := \{f \mid f : X \overset{bij}{\to} X\}$ die Menge der Permutationen von X. Man zeige für $|X| \geq \aleph_\mathbf{0}$, dass $|\mathrm{Perm}(X)| = 2^{|X|}$.

2.16.12 Es sei $|a| \geq \aleph_\mathbf{0}$ und $Y := \{r \mid (a, r) \text{ ist Ordnung i.S.v. } <\}$. Man bestimme $|Y|$.

2.16.13 Es sei $|a| \geq \aleph_\mathbf{0}$. Dann gibt es höchstens $2^{|a|}$ viele Gruppen mit a als Träger. Ist diese Schranke scharf?

2.16.14 Es gibt beliebig große *starke* Kardinalzahlen κ, d. h. Kardinalzahlen κ mit $\forall\mu\,(\mu < \kappa \to \mathbf{2}^\mu < \kappa)$.

§3 Kofinalität und Exponentiation

Aufgrund der Sätze 2.10 und 2.11 kennen wir die kardinale Addition und die kardinale Multiplikation vollständig. Ganz anders verhält es sich mit der kardinalen Exponentiation: Was ist das β mit $\aleph_\mathbf{5}^{\aleph_\mathbf{7}} = \aleph_\beta$? Was das β mit $2^{\aleph_\mathbf{0}} = \aleph_\beta$? Zwar wissen wir, dass für $\mathbf{2} \leq \mu \leq \aleph_\alpha$ stets $\mu^{\aleph_\alpha} = \aleph_\alpha^{\aleph_\alpha}$. Doch unser weiteres Wissen erschöpft sich bislang darin, dass nach dem Satz von Cantor $\aleph_\alpha^{\aleph_\alpha} = \mathbf{2}^{\aleph_\alpha} \geq \aleph_{\alpha+\mathbf{1}}$ ist. Wir wollen in diesem Abschnitt das Bild etwas aufhellen. Mit den gewonnenen Informationen wollen wir dann im nächsten Abschnitt der Frage nach der Größe der Zweierpotenzen $\mathbf{2}^{\aleph_\alpha}$ intensiver nachgehen. Wir werden dort sehen, dass wir zu gegebenen α und γ das β mit $\aleph_\alpha^{\aleph_\gamma} = \aleph_\beta$ leicht bestimmen können, wenn wir die *Allgemeine Kontinuumshypothese* unterstellen, der zufolge stets $\mathbf{2}^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+\mathbf{1}}$ ist.

Den Schlüssel für unser Vorgehen liefert die Beobachtung, dass man Kardinalzahlen unterschiedlich schnell „durchwandern" kann, z. B. $\aleph_\omega$ in ω (und damit weniger als $\aleph_\omega$) vielen Schritten, $\aleph_{\mathbf{1}}$ nur in $\aleph_{\mathbf{1}}$ vielen Schritten. Es gilt nämlich:

(∗) $f : \omega \to \aleph_\omega$ sei definiert durch $f(i) = \aleph_i$ für $i \in \omega$.
Dann ist $\bigcup \mathrm{Bild}(f) = \aleph_\omega$.

(∗∗) Mit $f : \alpha \to \aleph_{\mathbf{1}}$ und $\bigcup \mathrm{Bild}(f) = \aleph_{\mathbf{1}}$ gilt $\alpha \geq \aleph_{\mathbf{1}}$.

Dabei ergibt sich (∗∗) indirekt so: Wäre $\alpha < \aleph_{\mathbf{1}}$, also $|\alpha| \leq \aleph_{\mathbf{0}}$, und gälte für $f : \alpha \to \aleph_{\mathbf{1}}$, dass $\bigcup \mathrm{Bild}(f) = \aleph_{\mathbf{1}}$, so wäre wegen $|\mathrm{Bild}(f)| \leq \aleph_{\mathbf{0}}$ und $|f(\beta)| \leq \aleph_{\mathbf{0}}$ für $\beta < \alpha$ dann $|\bigcup \mathrm{Bild}(f)| \leq \aleph_{\mathbf{0}}$ (vgl. Satz 2.7), ein Widerspruch.

Diese Beobachtung führt uns zum Begriff der Kofinalität:

3.1 Definition der *Kofinalitätsoperation* cof**.** Falls x keine Limeszahl ist, sei $\mathrm{cof}(x) := \emptyset$. Für eine Limeszahl δ sei

$$\begin{aligned}\mathrm{cof}(\delta) \ := \ & \text{das kleinste } \beta\text{, für das eine Funktion } f : \beta \to \delta \text{ existiert,}\\ & \text{die } \textit{unbeschränkt} \text{ in } \delta \text{ ist, d.h. für die } \textstyle\bigcup \mathrm{Bild}(f) = \delta.\end{aligned}$$

Es ist stets $\mathrm{cof}(\delta) \leq \delta$. Man sieht leicht (vgl. (∗), (∗∗)), dass

$$\mathrm{cof}(\omega) \ = \ \omega, \ \ \mathrm{cof}(\aleph_\omega) \ = \ \omega, \ \ \mathrm{cof}(\aleph_{\mathbf{1}}) \ = \ \aleph_{\mathbf{1}}$$

und allgemeiner

$$\mathrm{cof}(\aleph_{\alpha+\mathbf{1}}) \ = \ \aleph_{\alpha+\mathbf{1}} \text{ für alle } \alpha.$$

3.2 Bemerkung. *Für eine Limeszahl δ gilt*:

(i) $\mathrm{cof}(\delta)$ *ist eine Kardinalzahl* $\geq \aleph_{\mathbf{0}}$.

(ii) $\mathrm{cof}(\delta)$ *ist das kleinste β, für das eine Funktion $f : \beta \to \delta$ existiert, die unbeschränkt in δ ist und schwach monoton* (d.h. für $\gamma_0 \leq \gamma_1 \in \beta$ ist $f(\gamma_0) \leq f(\gamma_1)$). (Vgl. auch Aufgabe 3.9.1.)

Beweis. Zu (i). Annahme: Für eine Limeszahl δ sei $\kappa := |\mathrm{cof}(\delta)| < \mathrm{cof}(\delta)$. Wir wählen ein $g : \kappa \sim \mathrm{cof}(\delta)$ und ein $f : \mathrm{cof}(\delta) \to \delta$, das unbeschränkt in δ ist. Dann ist auch $f \circ g : \kappa \to \delta$ unbeschränkt in δ, ein Widerspruch wegen $\kappa < \mathrm{cof}(\delta)$. Da eine endliche Teilmenge von δ in δ beschränkt ist, gilt $\mathrm{cof}(\delta) \geq \aleph_{\mathbf{0}}$.

Zu (ii). Offenbar reicht es zu zeigen: Es gibt ein $f : \mathrm{cof}(\delta) \to \delta$, das unbeschränkt in δ und schwach monoton ist. Sei dazu $h : \mathrm{cof}(\delta) \to \delta$ unbeschränkt in δ. Wir definieren f auf $\mathrm{cof}(\delta)$ durch

$$f(\gamma) \ := \ \bigcup \mathrm{Bild}(h\restriction(\gamma + \mathbf{1})).$$

Da $\mathrm{cof}(\delta)$ eine Limeszahl ist (vgl. (i)), ist für $\gamma < \mathrm{cof}(\delta)$ auch $\gamma + \mathbf{1} < \mathrm{cof}(\delta)$ und daher $\bigcup \mathrm{Bild}(h\restriction(\gamma + \mathbf{1})) < \delta$. Damit ist $f : \mathrm{cof}(\delta) \to \delta$, und offenbar ist f unbeschränkt in δ und schwach monoton. ⊣

3.3 Definition. Es sei κ eine Kardinalzahl $\geq \aleph_{\mathbf{0}}$.
(i) κ ist *regulär* $:\leftrightarrow\ \operatorname{cof}(\kappa) = \kappa$.
(ii) κ ist *singulär* $:\leftrightarrow\ \operatorname{cof}(\kappa) < \kappa$.

Zum Beispiel sind $\aleph_{\mathbf{0}}$ und alle $\aleph_{\alpha+\mathbf{1}}$ regulär, $\aleph_\omega$ ist singulär. Kardinalzahlen der Form $\aleph_\delta$ heißen *Limeskardinalzahlen.* Die Kardinalzahlen $\aleph_\omega$ und $\aleph_{\aleph_{\mathbf{1}}}$ sind singuläre Limeskardinalzahlen. Die Frage, ob es reguläre Limeskardinalzahlen, sog. *schwach unerreichbare* Kardinalzahlen, geben kann, ist offen: Ihre Existenz kann auf der Basis von **ZFC** (sofern **ZFC** widerspruchsfrei ist) nicht bewiesen werden; ob sie widerlegt werden kann, weiß man nicht. Reguläre Limeskardinalzahlen müssen, sofern sie existieren, sehr groß sein; sie sind erste Beispiele von *großen Kardinalzahlen.*

3.4 Bemerkung. *Für eine Limeszahl δ gilt:*
(i) $\operatorname{cof}(\delta)$ *ist eine reguläre Kardinalzahl* $\geq \aleph_{\mathbf{0}}$.
(ii) $\operatorname{cof}(\operatorname{cof}(\delta)) = \operatorname{cof}(\delta)$.
(iii) $\operatorname{cof}(\delta) = \delta \leftrightarrow \delta$ *ist eine reguläre Kardinalzahl.*

Beweis. Zu (i). Nach Bemerkung 3.2(i) ist $\operatorname{cof}(\delta)$ eine unendliche Kardinalzahl. Falls $\operatorname{cof}(\operatorname{cof}(\delta)) < \operatorname{cof}(\delta)$, wählen wir

$$g : \operatorname{cof}(\operatorname{cof}(\delta)) \to \operatorname{cof}(\delta) \quad \text{und} \quad f : \operatorname{cof}(\delta) \to \delta$$

jeweils unbeschränkt (in $\operatorname{cof}(\delta)$ bzw. δ) und f überdies schwach monoton. Wir zeigen, dass die Funktion

$$f \circ g : \operatorname{cof}(\operatorname{cof}(\delta)) \to \delta \text{ unbeschränkt in } \delta$$

ist, und haben dann einen Widerspruch. Sei dazu $\beta \in \delta$. Für ein geeignetes $\alpha_0 \in \operatorname{cof}(\delta)$ ist $f(\alpha) \geq \beta$ für alle α mit $\alpha_0 \leq \alpha < \operatorname{cof}(\delta)$, und für ein geeignetes $\gamma_0 \in \operatorname{cof}(\operatorname{cof}(\delta))$ ist $g(\gamma_0) \geq \alpha_0$. Insgesamt ist also $(f \circ g)(\gamma_0) \geq \beta$.

Die Teile (ii) und (iii) ergeben sich leicht mit (i). $\dashv$

Reguläre Kardinalzahlen lassen sich dadurch charakterisieren, dass das Analogon von Satz 2.7 für $\prec$ anstelle von $\preceq$ gültig ist:

3.5 Satz. *Für unendliches κ gilt:*

$$\kappa \textit{ ist regulär } \leftrightarrow \forall X \left(|X| < \kappa \wedge \forall y\, (y \in X \to |y| < \kappa) \to |\textstyle\bigcup X| < \kappa\right).$$

Beweis. Gelte zunächst die rechte Seite. Wir zeigen, dass $\operatorname{cof}(\kappa) = \kappa$ ist. Sei dazu $\beta < \kappa$ und $f : \beta \to \kappa$. Dann ist nach Voraussetzung $|\bigcup \operatorname{Bild}(f)| < \kappa$, also $\bigcup \operatorname{Bild}(f) < \kappa$. Daher ist $\beta < \operatorname{cof}(\kappa)$, demnach $\kappa \leq \operatorname{cof}(\kappa)$, also $\kappa = \operatorname{cof}(\kappa)$.

Sei umgekehrt κ regulär. Sei weiter $\mu := |X| < \kappa$ und $|y| < \kappa$ für alle $y \in X$. Wir müssen zeigen, dass $|\bigcup X| < \kappa$. Hierzu reicht es, ein $\nu < \kappa$ zu finden, so dass $|y| \leq \nu$ für alle $y \in X$. Setzen wir dann $\lambda := \max\{\mu, \nu\}$, so ergibt sich die Behauptung für $\lambda < \aleph_\mathbf{0}$ sofort wegen $\kappa \geq \aleph_\mathbf{0}$, und für $\lambda \geq \aleph_\mathbf{0}$ liefert Satz 2.7, dass $|\bigcup X| \leq \lambda$; also ist auch in diesem Fall $|\bigcup X| < \kappa$.

Um ein entsprechendes ν zu finden, sei $g : \mu \sim X$ und f auf μ definiert durch

$$f(\beta) \ := \ |g(\beta)|.$$

Es ist $f : \mu \to \kappa$, und da $\mu < \kappa$ und κ regulär ist, ist $\bigcup \mathrm{Bild}(f) < \kappa$. Als Supremum einer Menge von Kardinalzahlen ist $\bigcup \mathrm{Bild}(f)$ eine Kardinalzahl (vgl. dazu Aufgabe 2.16.1). Wir setzen $\nu := \bigcup \mathrm{Bild}(f)$. Ist dann $y \in X$, etwa $y = g(\beta)$, so ist $|y| = f(\beta) \leq \nu$. ⊣

Einen technischen Schlüssel zu einer weitergehenden Untersuchung der kardinalen Exponentiation bekommen wir mit der folgenden Verallgemeinerung der kardinalen Addition und der kardinalen Multiplikation auf unendliche Summen und Produkte in die Hand.

3.6 Definition. Für eine Familie $(\kappa_\iota)_{\iota \in I}$ von Kardinalzahlen sei

$$\sum_{\iota \in I} \kappa_\iota \ := \ |\bigcup\{\kappa_\iota \times \{\iota\} \mid \iota \in I\}|,$$

$$\prod_{\iota \in I} \kappa_\iota \ := \ |\bigtimes_{\iota \in I} \kappa_\iota|.$$

(Genauer definieren wir hier Operationen $\sum$ und $\prod$, welche für Familien von Kardinalzahlen die angegebenen Werte haben und welche Mengen, die keine Familien von Kardinalzahlen sind, etwa auf die leere Menge abbilden.)

$\sum$ und $\prod$ verallgemeinern die kardinale Addition und die kardinale Multiplikation; denn für $I := \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ ist $\sum_{\iota \in I} \kappa_\iota = \kappa_\mathbf{0} + \kappa_\mathbf{1}$ und $\prod_{\iota \in I} \kappa_\iota = \kappa_\mathbf{0} \cdot \kappa_\mathbf{1}$.

Der folgende Satz stellt eine zentrale Ungleichung bereit:

3.7 Ungleichung von Zermelo und König. *Es sei $I \neq \emptyset$, und $(\kappa_\iota)_{\iota \in I}$ und $(\mu_\iota)_{\iota \in I}$ seien Familien von Kardinalzahlen mit $\kappa_\iota < \mu_\iota$ für $\iota \in I$. Dann gilt:*

$$\sum_{\iota \in I} \kappa_\iota < \prod_{\iota \in I} \mu_\iota.$$

Beweis. Die Voraussetzungen seien erfüllt. Wir zeigen:

$$\bigcup\{\kappa_\iota \times \{\iota\} \mid \iota \in I\} \prec \bigtimes_{\iota \in I} \mu_\iota.$$

Zu „$\preceq$“: Die Funktion $f : \bigcup\{\kappa_\iota \times \{\iota\} \mid \iota \in I\} \to \bigtimes_{\iota \in I} \mu_\iota$ sei wie folgt definiert: Für $\iota_0 \in I$ und $\alpha \in \kappa_{\iota_0}$ sei $f(\alpha, \iota_0)$ die Funktion $g : I \to \bigcup\{\mu_\iota \mid \iota \in I\}$ mit

$$g(\iota) = \begin{cases} \kappa_\iota, & \text{falls } \iota \neq \iota_0 \\ \alpha, & \text{falls } \iota = \iota_0. \end{cases}$$

Die Funktion f ist injektiv. Denn $f(\alpha, \iota_0)$ bestimmt eindeutig ι_0 als *das* $\iota \in I$ mit $f(\alpha, \iota_0)(\iota) < \kappa_\iota$ und α als $f(\alpha, \iota_0)(\iota_0)$.

Zu „nicht $\sim$“: Sei $f : \bigcup\{\kappa_\iota \times \{\iota\} \mid \iota \in I\} \to \bigtimes_{\iota \in I} \mu_\iota$. Wir zeigen, dass f nicht surjektiv ist (und daher keine Bijektion). Sei dazu $g \in \bigtimes_{\iota \in I} \mu_\iota$ definiert durch

$$g(\iota) \ := \ \text{das kleinste } \alpha \in \mu_\iota \text{ mit } \alpha \notin \big\{h(\iota) \mid h \in \mathrm{Bild}\big(f{\restriction}(\kappa_\iota \times \{\iota\})\big)\big\}.$$

Die Definition ist sinnvoll. Mit $X_\iota := \{h(\iota) \mid h \in \mathrm{Bild}(f \restriction (\kappa_\iota \times \{\iota\}))\}$ gilt nämlich, dass $\mu_\iota \setminus X_\iota \neq \emptyset$ ist: Nach Aufgabe 2.16.4 hat das Bild einer Funktion höchstens die Mächtigkeit des Definitionsbereichs. Mit $Y_\iota := \mathrm{Bild}(f{\restriction}(\kappa_\iota \times \{\iota\}))$ ist wegen $|\kappa_\iota \times \{\iota\}| = \kappa_\iota$ daher $|Y_\iota| \leq \kappa_\iota$. Aus dem gleichen Grunde ist dann auch $|X_\iota| \leq \kappa_\iota$ (definiere dazu $h_\iota : Y_\iota \overset{auf}{\to} X_\iota$ durch $h_\iota(h) := h(\iota)$ für $h \in Y_\iota$). Also ist $|X_\iota \cap \mu_\iota| \leq \kappa_\iota < \mu_\iota$ und $X_\iota \cap \mu_\iota$ demnach eine echte Teilmenge von μ_ι.

Wir zeigen jetzt, dass $g \notin \mathrm{Bild}(f)$. Sei dazu $\iota_0 \in I$ und $\alpha_0 \in \kappa_{\iota_0}$. Nach Definition von g ist dann $g(\iota_0) \neq f(\alpha_0, \iota_0)(\iota_0)$, also $g \neq f(\alpha_0, \iota_0)$. $\dashv$

Die Bedeutung der Kofinalität für die Exponentiation ersehen wir aus dem folgenden Satz, von dem wir im nächsten Abschnitt intensiv Gebrauch machen werden.

3.8 Satz. *Für alle* α *gilt*:

(i) $\aleph_\alpha < \aleph_\alpha^{\mathrm{cof}(\aleph_\alpha)}$.

(ii) $\mathrm{cof}(\mathbf{2}^{\aleph_\alpha}) > \aleph_\alpha$.

Aus (i) erhalten wir zum Beispiel, dass $\aleph_\omega^{\aleph_\mathbf{0}} > \aleph_\omega$, aus (ii) etwa, dass $\mathbf{2}^{\aleph_\mathbf{0}} \neq \aleph_\omega$, $\mathbf{2}^{\aleph_\mathbf{1}} \neq \aleph_\omega$ und $\mathbf{2}^{\aleph_\mathbf{1}} \neq \aleph_{\aleph_\mathbf{1}}$.

Beweis von 3.8. *Zu* (i): Ist $\aleph_\alpha$ regulär, so ist $\aleph_\alpha^{\mathrm{cof}(\aleph_\alpha)} = \aleph_\alpha^{\aleph_\alpha} > \aleph_\alpha$.

Sei jetzt $\aleph_\alpha$ singulär. Dann ist α eine Limeszahl und daher mit $\mu < \aleph_\alpha$ auch $\mu^+ < \aleph_\alpha$. Sei weiter $f : \mathrm{cof}(\aleph_\alpha) \to \aleph_\alpha$ unbeschränkt in $\aleph_\alpha$. Indem wir gegebenenfalls von $f(\beta)$ zu $|f(\beta)|^+$ übergehen – mit $f(\beta)$ ist auch $|f(\beta)|^+$ kleiner als $\aleph_\alpha$ –, können wir annehmen, dass f als Werte nur Kardinalzahlen annimmt. Wir erhalten dann der Reihe nach:

(1) $\aleph_\alpha = \bigcup\{f(\beta) \mid \beta < \mathrm{cof}(\aleph_\alpha)\}$,

(2) $\bigcup\{f(\beta) \mid \beta < \mathrm{cof}(\aleph_\alpha)\} \preceq \sum_{\beta \in \mathrm{cof}(\aleph_\alpha)} f(\beta)$ (Begründung folgt),

(3) $\sum_{\beta \in \mathrm{cof}(\aleph_\alpha)} f(\beta) \prec \prod_{\beta \in \mathrm{cof}(\aleph_\alpha)} \aleph_\alpha$ (Ungleichung von Zermelo und König),

(4) $\prod_{\beta \in \mathrm{cof}(\aleph_\alpha)} \aleph_\alpha \sim \bigtimes_{\beta \in \mathrm{cof}(\aleph_\alpha)} \aleph_\alpha = {}^{\mathrm{cof}(\aleph_\alpha)}\aleph_\alpha$.

Insgesamt ergibt sich, dass $\aleph_\alpha \prec {}^{\mathrm{cof}(\aleph_\alpha)}\aleph_\alpha$, also $\aleph_\alpha < \aleph_\alpha^{\mathrm{cof}(\aleph_\alpha)}$. Zu (2) beachten wir, dass

$$h : \bigcup\{f(\beta) \mid \beta < \mathrm{cof}(\aleph_\alpha)\} \preceq \bigcup\{f(\beta) \times \{\beta\} \mid \beta < \mathrm{cof}(\aleph_\alpha)\},$$

wenn wir $h(\gamma) := (\gamma, \beta)$ setzen, wobei β minimal gewählt sei mit $\gamma \in f(\beta)$.

Zu (ii): Wäre $\mathrm{cof}(\mathbf{2}^{\aleph_\alpha}) \leq \aleph_\alpha$, so gälte nach (i), angewendet auf $\mathbf{2}^{\aleph_\alpha}$ anstelle von $\aleph_\alpha$, dass $\mathbf{2}^{\aleph_\alpha} < (\mathbf{2}^{\aleph_\alpha})^{\aleph_\alpha}$, also $\mathbf{2}^{\aleph_\alpha} < \mathbf{2}^{\aleph_\alpha}$, ein Widerspruch. $\dashv$

3.9 Aufgaben.

3.9.1 Für eine Limeszahl δ ist $\mathrm{cof}(\delta)$ das kleinste β, für das eine unbeschränkte und monotone Funktion $f : \beta \to \delta$ existiert (für $\gamma_0 < \gamma_1 \in \beta$ ist $f(\gamma_0) < f(\gamma_1)$).

3.9.2 Es sei $\kappa, \mu \geq \aleph_{\mathbf{0}}$ und $\mathrm{cof}(\kappa) = \mu$. Man zeige: Es gibt eine Teilmenge a von κ mit $|a| = \mu$, $\bigcup a = \kappa$ und $(a, \in_a) \cong (\mu, \in_\mu)$.

3.9.3 Es gibt beliebig große Kardinalzahlen der Kofinalität ω.

3.9.4 Es sei κ eine unendliche reguläre Kardinalzahl. Man zeige: Es gibt beliebig große Kardinalzahlen der Kofinalität κ.

3.9.5 Für eine Ordnung (a, r) i.S.v. $<$ sei $\mathrm{cof}(a, r)$ das kleinste β, für das es eine bzgl. r unbeschränkte Teilmenge b von a gibt mit $(b, r{\restriction}(b \times b)) \cong (\beta, \in_\beta)$. Man bestimme die Kofinalität der Summe und des lexikografischen Produkts von Ordnungen (vgl. die Aufgaben IV.1.20.6, 7) aus deren Kofinalität.

3.9.6 Es sei $|I| \geq \aleph_{\mathbf{0}}$ und $(\kappa_\iota)_{\iota \in I}$ eine Familie von $\mathbf{0}$ verschiedener Kardinalzahlen. Man zeige, dass $\sum\limits_{\iota \in I} \kappa_\iota = \max\{|I|, \bigcup\{\kappa_\iota \mid \iota \in I\}\}$.

3.9.7 Für eine Familie $(\kappa_\iota)_{\iota \in I}$ von Kardinalzahlen mit $\kappa_\iota = \kappa$ für $\iota \in I$ ist $\sum\limits_{\iota \in I} \kappa_\iota = \kappa {\cdot} |I|$ und $\prod\limits_{\iota \in I} \kappa_\iota = \kappa^{|I|}$.

3.9.8 Für eine Familie $(\kappa_\iota)_{\iota \in I}$ von Kardinalzahlen ist

(i) $$\mathbf{2}^{\sum\limits_{\iota \in I} \kappa_\iota} = \prod_{\iota \in I} \mathbf{2}^{\kappa_\iota};$$

(ii) $$\left(\prod_{\iota \in I} \kappa_\iota\right)^\kappa = \prod_{\iota \in I} \kappa_\iota^\kappa \quad \text{für alle } \kappa.$$

3.9.9 Für $\iota \in I$ sei $|X_\iota| \leq \kappa_\iota$. Dann gilt $|\bigtimes\limits_{\iota \in I} X_\iota| \leq \prod\limits_{\iota \in I} \kappa_\iota$.

3.9.10 Für eine Limeszahl δ und eine Familie $(\kappa_\iota)_{\iota \in \delta}$ von Kardinalzahlen mit $\mathbf{0} < \kappa_\iota < \kappa_{\iota'}$ für $\iota < \iota' < \delta$ gilt $\sum\limits_{\iota \in \delta} \kappa_\iota < \prod\limits_{\iota \in \delta} \kappa_\iota$.

§4 Die Kontinuumshypothese

Zu Beginn des letzten Abschnitts haben wir die Frage nach einer genaueren Beschreibung der Werte der kardinalen Exponentiation aufgeworfen. Mit Satz 3.8 sind wir einen ersten Schritt vorangekommen. In diesem Abschnitt wollen wir uns auf die Zweierpotenzen $\mathbf{2}^{\aleph_\alpha}$ konzentrieren und ausleuchten, was auf der Basis von **ZFC** erreicht werden kann.

Während für endliche Exponenten die Werte von $\mathbf{2}^i$ mit wachsendem i zunehmend größer als $i + \mathbf{1}$ werden, vermutete Cantor 1878, dass $\mathbf{2}^{\aleph_\mathbf{0}}$ gleich $\aleph_\mathbf{1}$ sei, also den kleinstmöglichen Wert habe. Wir sprechen heute von der *Cantorschen Kontinuumshypothese*

$$\text{CH („}\mathbf{C}\text{ontinuum }\mathbf{H}\text{ypothesis“)}: \quad \mathbf{2}^{\aleph_\mathbf{0}} = \aleph_\mathbf{1},$$

weil $\mathbf{2}^{\aleph_\mathbf{0}}$ die Mächtigkeit der Menge der reellen Zahlen, also die Mächtigkeit des Kontinuums, ist, und darüber hinaus von der *allgemeinen Kontinuumshypothese*

$$\text{GCH („}\mathbf{G}\text{eneral }\mathbf{C}\text{ontinuum }\mathbf{H}\text{ypothesis“)}: \quad \forall\alpha\, \mathbf{2}^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+\mathbf{1}}.$$

Auf der Basis von **ZFC** ist CH äquivalent zu

$$\text{CH}^*: \quad \forall X\big(X \subseteq \mathbb{R} \wedge X \text{ unendlich } \rightarrow X \sim \aleph_\mathbf{0} \vee X \sim \mathbb{R}\big),$$

und GCH ist äquivalent zu

$$\text{GCH}^*: \quad \forall X\big(X \text{ unendlich } \rightarrow \neg\exists Y(X \prec Y \wedge Y \prec \mathrm{Pot}(X))\big).$$

Denn GCH* besagt, dass es für $|X| \geq \aleph_\mathbf{0}$ zwischen $|X|$ und $|\mathrm{Pot}(X)|$ keine weitere Mächtigkeit gibt, dass also $|\mathrm{Pot}(X)| = \mathbf{2}^{|X|} = |X|^+$ und demnach allgemein $\mathbf{2}^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+\mathbf{1}}$ ist. Wegen $|\mathbb{R}| = \mathbf{2}^{\aleph_\mathbf{0}}$ entspricht CH* gerade dem Sonderfall von GCH* für $|X| = \aleph_\mathbf{0}$ und damit der Kontinuumshypothese CH.

Cantor spricht seine Vermutung für die Version CH* aus (*Cantor 1878*, vgl. *Cantor 1932*, S. 132):

> Verstehen [wir] ... unter einer *linearen* Mannigfaltigkeit reeller Zahlen jeden denkbaren Inbegriff unendlich vieler voneinander verschiedener reeller Zahlen, so fragt es sich, in *wie viel* und in welche Klassen die linearen Mannigfaltigkeiten zerfallen, wenn Mannigfaltigkeiten von gleicher Mächtigkeit in ein und dieselbe Klasse, Mannigfaltigkeiten von verschiedener Mächtigkeit in verschiedene Klassen gebracht werden. Durch ein Induktionsverfahren, auf dessen Darstellung wir hier nicht näher eingehen, wird der Satz nahegebracht, dass die Anzahl der nach diesem Einteilungsprinzip sich

> ergebenden Klassen linearer Mannigfaltigkeiten eine endliche und zwar, dass sie gleich *Zwei* ist [nämlich die der abzählbar unendlichen Mannigfaltigkeiten und die der zu $\mathbb{R}$ gleichmächtigen Mannigfaltigkeiten].

Über Jahre versuchte Cantor, die Kontinuumshypothese zu beweisen. Phasen des Zweifels wechselten dabei mit Phasen der Zuversicht. So heißt es 1883 (vgl. *Cantor 1932*, S. 192):

> Ich hoffe, [die Frage nach der Größe von $\mathbf{2}^{\aleph_0}$] schon bald durch einen strengen Beweis dahin beantworten zu können, dass die gesuchte Mächtigkeit keine andere ist als diejenige unserer *zweiten Zahlenklasse* [d. h. die Mächtigkeit $\aleph_1$].

Und 1884 gar (vgl. *Cantor 1932*, S. 244) glaubte er, einen solchen Beweis gefunden zu haben.

Cantor scheiterte. Über die Gründe für sein Scheitern und die heutige Situation berichten wir in Abschnitt A. In Abschnitt B weisen wir nach, dass GCH die kardinale Exponentiation vollständig festlegt, und in Abschnitt C befassen wir uns mit den Gründen, die Cantor bewogen haben, an die Beweisbarkeit von CH zu glauben. Wir argumentieren in **ZFC**.

A. Die allgemeine Situation

Wir wissen heute, dass man auf der Basis von **ZFC** (sofern **ZFC** widerspruchsfrei ist) weder CH noch ¬CH (und weder GCH noch ¬GCH) zeigen kann; die Informationen, die in den Axiomen von **ZFC** enthalten sind, reichen also nicht aus, die Gültigkeit von CH zu beweisen oder zu widerlegen. Anders gesprochen: Unsere Mengenvorstellung, wie sie sich in den Axiomen von **ZFC** niederschlägt, ist so unvollständig, dass sie die Gültigkeit von CH nicht zu entscheiden gestattet. Wir werden diese Situation in Kapitel XI gründlich diskutieren. Sie erklärt natürlich sofort, warum Cantor scheitern *musste*.

Im Folgenden tragen wir einige Ergebnisse zusammen, die uns nähere Auskunft darüber geben, wie weit **ZFC** die genaue Größe von $\mathbf{2}^{\aleph_0}$ und allgemeiner die der $\mathbf{2}^{\aleph_\alpha}$ offen lässt.

Wir beginnen mit einer Definition. In den Aufgaben VII.2.2.1 bis 2.2.7 haben wir die ordinale Addition $\oplus$ und einige ihrer Eigenschaften behandelt. Bei der folgenden Definition und der anschließenden Schilderung einiger Ergebnisse machen wir stillschweigend davon Gebrauch.

4.1 Definition. Die Operation Γ sei definiert durch

$$\Gamma(x) := \begin{cases} \emptyset, \ \text{falls } \neg\mathrm{Oz}\ x; \\ \textit{das } \beta \text{ mit } \mathbf{2}^{\aleph_x} = \aleph_{x\oplus\beta}, \ \text{ falls Oz } x. \end{cases}$$

Wegen $\mathbf{2}^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha\oplus\Gamma(\alpha)}$ messen die $\Gamma(\alpha)$ in augenfälliger Weise die Abweichungen von der allgemeinen Kontinuumshypothese.

4.2 Bemerkung. (i) *Für alle* α *ist* $\Gamma(\alpha) \geq \mathbf{1}$.

(ii) GCH $\leftrightarrow \forall\alpha\,\Gamma(\alpha) = \mathbf{1}$.

(iii) *Für alle* $\alpha, \beta : \alpha \leq \beta \rightarrow \alpha \oplus \Gamma(\alpha) \leq \beta \oplus \Gamma(\beta)$.

(iv) *Für alle* α *ist* $\operatorname{cof}(\aleph_{\alpha\oplus\Gamma(\alpha)}) > \aleph_\alpha$.

Der *Beweis* ist trivial; für (iv) benutzt man Satz 3.8(ii). ⊣

Teil (iii) und Teil (iv) (dieser impliziert (i)) formulieren die wesentlichen Eigenschaften über die Größe von $\Gamma(\alpha)$, die sich in **ZFC** allgemein beweisen lassen. Ist nämlich G eine in **ZFC** definierbare einstellige Operation ohne Parameter, für welche die Analoga dieser Eigenschaften gelten, so lässt sich in **ZFC** (sofern **ZFC** widerspruchsfrei ist) nicht widerlegen, dass

$$\forall\alpha \left(\aleph_\alpha \text{ regulär} \rightarrow \mathbf{2}^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha\oplus \mathrm{G}(\alpha)}\right)$$

gilt (sog. *Satz von Easton*, 1964). Durch geeignete Operationen G kann man so feststellen, dass sich in **ZFC** weder

(i) $$\mathbf{2}^{\aleph_\mathbf{0}} = \mathbf{2}^{\aleph_\mathbf{1}} = \mathbf{2}^{\aleph_\mathbf{2}} = \aleph_\mathbf{17} \text{ und } \mathbf{2}^{\aleph_\mathbf{3}} = \aleph_{\omega\oplus\mathbf{19}}$$

noch

(ii) $$\mathbf{2}^{\aleph_i} = \aleph_{\omega\oplus\mathbf{27}} \text{ für } i \geq \mathbf{4} \text{ und } \mathbf{2}^{\aleph_{\omega+\mathbf{1}}} = \aleph_{\omega\oplus\mathbf{27}}$$

widerlegen lassen.

Wie die beiden folgenden Sätze zeigen, gelten an singulären Stellen gewisse Einschränkungen.

4.3 Satz (Silver 1974)**.** *Ist* δ *eine Limeszahl,* $\aleph_\delta$ *singulär und* $\operatorname{cof}(\aleph_\delta) \geq \aleph_\mathbf{1}$, *so gilt*:

$$\forall\beta\,(\beta < \delta \rightarrow \mathbf{2}^{\aleph_\beta} = \aleph_{\beta+\mathbf{1}}) \rightarrow \mathbf{2}^{\aleph_\delta} = \aleph_{\delta+\mathbf{1}}.$$

4.4 Satz (Shelah 1989)**.**

$$\forall i\,\mathbf{2}^{\aleph_i} < \aleph_\omega \rightarrow \mathbf{2}^{\aleph_\omega} < \aleph_{\aleph_\mathbf{4}}.$$

Einen Beweis von Satz 4.3 findet man in *Devlin 1993*, Abschnitt 4.6, einen Beweis von Satz 4.4 in *Jech 1992*.

Mit einfachen Mitteln lässt sich eine weitere Einschränkung aufzeigen, die nicht zwischen singulären und regulären Exponenten trennt:

4.5 Satz von Patai. $\forall\alpha\,\Gamma(\alpha) = \gamma \rightarrow \gamma < \omega$.

Beweis. Sei $\gamma \geq \omega$ und gelte $\forall\alpha\, \mathbf{2}^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha\oplus\gamma}$. Wir behaupten

$$(*) \qquad \beta \leq \gamma \rightarrow \mathbf{2}^{\aleph_{\gamma\oplus\beta}} \leq \mathbf{2}^{\aleph_\gamma}.$$

Dann erhalten wir mit $\mathbf{2}^{\aleph_\gamma} = \aleph_{\gamma\oplus\gamma} < \mathbf{2}^{\aleph_{\gamma\oplus\gamma}} \leq \mathbf{2}^{\aleph_\gamma}$ einen Widerspruch.

Den Beweis von $(*)$ führen wir induktiv über β. Für $\beta = \mathbf{0}$ ist nichts zu zeigen. Ist $\beta + \mathbf{1} \leq \gamma$ und gilt $(*)$ für β, ergibt sich mit der Assoziativität von $\oplus$ und wegen $\mathbf{1} \oplus \gamma = \gamma$ (da $\gamma \geq \omega$):

$$\mathbf{2}^{\aleph_{\gamma\oplus(\beta+\mathbf{1})}} = \aleph_{\gamma\oplus\beta\oplus\mathbf{1}\oplus\gamma} = \aleph_{\gamma\oplus\beta\oplus\gamma} = \mathbf{2}^{\aleph_{\gamma\oplus\beta}} \leq \mathbf{2}^{\aleph_\gamma}.$$

Ist δ eine Limeszahl $\leq \gamma$ und $(*)$ für $\beta < \delta$ bewiesen, so ist

$$\mathbf{2}^{\aleph_{\gamma\oplus\beta}} \leq \mathbf{2}^{\aleph_\gamma} \text{ für } \beta < \delta$$

und daher

$$\mathbf{2}^{\aleph_\alpha} \leq \mathbf{2}^{\aleph_\gamma} \text{ für } \alpha < \gamma \oplus \delta.$$

Mit dem folgenden Hilfssatz 4.6 erhalten wir hieraus, dass

$$\mathbf{2}^{\aleph_{\gamma\oplus\delta}} \leq (\mathbf{2}^{\aleph_\gamma})^{|\gamma\oplus\delta|}.$$

Wegen $\delta \leq \gamma$ ist (vgl. Aufgabe VII.2.2.6)

$$\gamma \oplus \delta \preceq \gamma \times \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\},$$

also $|\gamma \oplus \delta| \leq |\gamma| \cdot \mathbf{2} = |\gamma|$ und somit

$$\mathbf{2}^{\aleph_{\gamma\oplus\delta}} \leq (\mathbf{2}^{\aleph_\gamma})^{|\gamma|} = \mathbf{2}^{\aleph_\gamma \cdot |\gamma|} = \mathbf{2}^{\aleph_\gamma}.$$

Damit ist auch der Induktionsschritt erbracht. ⊣

4.6 Hilfssatz. *Es sei δ eine Limeszahl, und es gelte $\mathbf{2}^{\aleph_\beta} \leq \kappa$ für $\beta < \delta$. Dann ist $\mathbf{2}^{\aleph_\delta} \leq \kappa^{|\delta|}$.*

Beweis. Wir definieren $h : \mathrm{Pot}(\aleph_\delta) \rightarrow \bigtimes_{\beta\in\delta} \mathrm{Pot}(\aleph_\beta)$, indem wir für eine Teilmenge s von $\aleph_\delta$

$$h(s) := \text{ das } f \in \bigtimes_{\beta\in\delta} \mathrm{Pot}(\aleph_\beta) \text{ mit } f(\beta) = s \cap \aleph_\beta \text{ für } \beta < \delta$$

setzen. Offensichtlich ist h eine Injektion. Somit gilt (vgl. Aufgaben 3.9.9 und 3.9.7)

$$\mathbf{2}^{\aleph_\delta} \leq \prod_{\beta\in\delta} \mathbf{2}^{\aleph_\beta} \leq \prod_{\beta\in\delta} \kappa = \kappa^{|\delta|}.$$ ⊣

B. Die Exponentiation unter GCH

Wenn wir die allgemeine Kontinuumshypothese voraussetzen, so wird die kardinale Exponentiation sehr übersichtlich:

4.7 Satz. (a) *Sei* $\mu \geq \aleph_{\mathbf{0}}$. *Dann gilt*:

(i) $\mathbf{0}^\mu = \mathbf{0}$, $\mathbf{1}^\mu = \mathbf{1}$.

(ii) (GCH) $i \geq \mathbf{2} \to i^\mu = \mathbf{2}^\mu = \mu^+$.

(b) *Sei* $\kappa \geq \aleph_{\mathbf{0}}$. *Dann gilt*:

(i) $\mu = \mathbf{0} \to \kappa^\mu = \mathbf{1}$.

(ii) (GCH) $\mathbf{0} < \mu < \operatorname{cof}(\kappa) \to \kappa^\mu = \kappa$.

(iii) (GCH) $\operatorname{cof}(\kappa) \leq \mu \leq \kappa \to \kappa^\mu = \kappa^+$.

(iv) (GCH) $\kappa < \mu \to \kappa^\mu = \mu^+$.

Beweis. (a) und (b)(i) ergeben sich aus Rechenregeln für die kardinalen Exponentiation (vgl. Satz 2.12) und aus $\mathbf{2}^\mu = \mu^+$ (wegen GCH). Sei weiter $\kappa \geq \aleph_{\mathbf{0}}$.

Zu (b)(iv): Sei $\kappa < \mu$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \kappa^\mu &= \mathbf{2}^\mu && \text{(nach Satz 2.12(viii))} \\ &= \mu^+ && \text{(wegen GCH).} \end{aligned}$$

Zu (b)(iii): Sei $\operatorname{cof}(\kappa) \leq \mu \leq \kappa$. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} \kappa &< \kappa^{\operatorname{cof}(\kappa)} && \text{(nach Satz 3.8(i))} \\ &\leq \kappa^\mu && \text{(nach Satz 2.12(iv))} \\ &\leq \mathbf{2}^\kappa && \text{(nach Satz 2.12(iv) mit } \kappa \leq \mathbf{2}^\kappa\text{)} \\ &= \kappa^+ && \text{(wegen GCH),} \end{aligned}$$

also $\kappa^\mu = \kappa^+$.

Zu (b)(ii): Es gelte GCH. Wir nehmen an, κ sei eine unendliche Kardinalzahl, für die ein μ existiert mit $\mathbf{0} < \mu < \operatorname{cof}(\kappa)$ und $\kappa^\mu > \kappa$. Sei κ minimal mit dieser Eigenschaft, und sei weiter $\mathbf{0} < \mu < \operatorname{cof}(\kappa)$ und $\kappa^\mu > \kappa$. Dann ist $\mu \geq \aleph_{\mathbf{0}}$. Da jede Funktion von μ nach κ in κ beschränkt ist, gilt

$${}^\mu\kappa = \bigcup\{{}^\mu\alpha \mid \alpha < \kappa\}.$$

Wir zeigen unten:

$$(*) \qquad \alpha < \kappa \to |\alpha|^\mu \leq \kappa.$$

Wegen $|\{{}^\mu\alpha \mid \alpha < \kappa\}| \leq \kappa$ erhalten wir damit (vgl. Satz 2.7)

$$\kappa^\mu = |{}^\mu\kappa| \leq \kappa \cdot \kappa = \kappa,$$

also einen Widerspruch.

Sei, zum Beweis von $(*)$, $\alpha < \kappa$. Falls $|\alpha| \leq \mu$, so ist $|\alpha|^\mu \leq \mathbf{2}^\mu = \mu^+ \leq \kappa$. Falls $\mu < \mathrm{cof}(|\alpha|)$, ist aufgrund der Minimalität von κ Teil (ii) für $|\alpha|$ anstelle von κ gültig und daher ebenfalls $|\alpha|^\mu = |\alpha| \leq \kappa$. Falls schließlich $\mathrm{cof}(|\alpha|) \leq \mu < |\alpha|$, können wir (iii) anwenden und erhalten auch hier, dass $|\alpha|^\mu = |\alpha|^+ \leq \kappa$. Damit ist $(*)$ gezeigt. ⊣

C. Offene und abgeschlossene Mengen

Wir kennen (auf der Basis von **ZFC**) bereits die folgende Äquivalenz:

$$\mathrm{CH} \quad \leftrightarrow \; \forall X\big(X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \big(|X| \leq \aleph_\mathbf{0} \vee |X| = |\mathbb{R}|\big)\big).$$

Die Kontinuumshypothese besagt demnach gerade, dass eine Menge reeller Zahlen höchstens abzählbar oder aber bereits von der Mächtigkeit des Kontinuums ist, dass sie also, anschaulich gesprochen, „klein" oder „groß" ist. Cantor konnte für eine Reihe von Mengen reeller Zahlen – darunter für abgeschlossene Mengen – zeigen, dass sie dieser Dichotomie genügen. In der Zuversicht, diese Resultate auf beliebige Mengen reeller Zahlen ausdehnen zu können, gründete seine Hoffnung, CH schließlich zu beweisen. Wir zeigen die Dichotomie hier für offene und für abgeschlossene Mengen reeller Zahlen und verbinden den zweiten Fall mit einigen Betrachtungen über Häufungspunkte.

4.8 Satz. *X offene Teilmenge von $\mathbb{R}$* $\rightarrow \; \big(X = \emptyset \vee |X| = |\mathbb{R}|\big)$.

Beweis. Ist X eine nicht leere offene Teilmenge von $\mathbb{R}$, so umfaßt X ein nicht leeres offenes Intervall I. Im Beweis von Satz 2.15(i) haben wir gesehen, dass das offene Einheitsintervall $\langle \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ die gleiche Mächtigkeit wie $\mathbb{R}$ hat. Da offenbar $|\langle \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle| = |I|$, ist $|\mathbb{R}| = |I| \leq |X| \leq |\mathbb{R}|$, also $|X| = |\mathbb{R}|$. ⊣

Satz 4.8 gilt gleichermaßen für Mengen reeller Zahlen, die eine nicht leere offene Menge umfassen.

4.9 Satz. *X abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$* $\rightarrow \; \big(|X| \leq \aleph_\mathbf{0} \vee |X| = |\mathbb{R}|\big)$.

Der Satz ergibt sich unmittelbar aus den beiden folgenden Hilfssätzen. Zu deren Formulierung wiederholen wir einige aus der Analysis bekannte Begriffe.

Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ und $r \in \mathbb{R}$. Wir nennen r wie üblich einen *Häufungspunkt* von X, wenn jedes offene Intervall I mit $r \in I$ eine von r verschiedene Zahl aus X enthält. Ist für alle I mit $r \in I$ sogar $|I \cap X| \geq \aleph_\mathbf{1}$, nennen wir r einen *Kondensationspunkt* von X. Mit $H(X)$ bezeichnen wir die Menge der Häufungspunkte von X, mit $K(X)$ die Menge der Kondensationspunkte von X. Die Menge X ist abgeschlossen, wenn $H(X) \subseteq X$, und $H(X)$ ist abgeschlossen. Ist $H(X) = X$, ist also X abgeschlossen und jeder Punkt von X auch Häufungspunkt von X, heißt X *perfekt.*

4.10 Hilfssatz (sog. *Satz von Cantor und Bendixson*)**.** *Ist X eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$, so gibt es Teilmengen Y, Z von $\mathbb{R}$ mit*:

$$X = Y \cup Z, \quad Y \cap Z = \emptyset, \quad Y \textit{ perfekt}, \quad |Z| \leq \aleph_{\mathbf{0}}.$$

4.11 Hilfssatz. *Eine perfekte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist leer oder hat die gleiche Mächtigkeit wie $\mathbb{R}$.*

Beweis von Hilfssatz 4.10. Sei X eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$. Dann ist $K(X) \subseteq H(X) \subseteq X$. Wir setzen $Y := K(X)$ und $Z := X \setminus Y$. Es bleibt zu zeigen, dass Z höchstens abzählbar und Y perfekt ist. Jeder Punkt von Z liegt, da er kein Kondensationspunkt von X ist, in einem offenen Intervall mit rationalen Endpunkten, das höchstens abzählbar viele Punkte von X enthält. Da es nur abzählbar viele offene Intervalle mit rationalen Endpunkten gibt, ist Z Teilmenge einer höchstens abzählbaren Teilmenge von X, also ist $|Z| \leq \aleph_{\mathbf{0}}$.

Da offenbar $H(K(X)) \subseteq K(X)$, ist $H(Y) \subseteq Y$. Ist umgekehrt $r \in Y$, so liegen in jedem offenen Intervall I mit $r \in I$ überabzählbar viele Punkte von X, wegen $|Z| \leq \aleph_{\mathbf{0}}$ und $Y \cup Z = X$ also überabzählbar viele Punkte von Y. Demnach ist r ein Häufungspunkt von Y. Somit gilt $Y \subseteq H(Y)$. Insgesamt ist $H(Y) = Y$, Y also perfekt. ⊣

Beweis von Hilfssatz 4.11. Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ perfekt und nicht leer. Wir zeigen:

$$(*) \qquad {}^{\omega}\mathbf{2} \preceq X.$$

Dann ist $|X| = |\mathbb{R}|$.

Abgeschlossenen Intervalle I von $\mathbb{R}$ schreiben wir in der Form $I = [a_I, b_I]$. Ferner sei

$$\begin{aligned} \mathfrak{I} \ := \ \big\{ I \mid I & \text{ abgeschlossenes Intervall von } \mathbb{R}, \\ & \text{es gibt ein } x \in X \text{ mit } a_I < x < b_I \big\}. \end{aligned}$$

Da X nicht leer ist, ist auch $\mathfrak{I}$ nicht leer. Wir definieren eine Abbildung h von $\mathrm{Seq}_\omega(\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}) = \bigcup\{{}^{i}\mathbf{2} \mid i \in \omega\}$ nach $\mathfrak{I}$ so, dass für alle Folgen s und t aus $\mathrm{Seq}_\omega(\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\})$ gilt:

(1) $(\mathrm{Def}(s) = i \wedge h(s) = I) \ \rightarrow \ b_I - a_I \leq \mathbf{2}^{-i}$.

(2) $s \subseteq t \ \rightarrow \ h(t) \subseteq h(s)$.

(3) $\mathrm{Def}(s) = i \wedge t_0 = s \cup \{(i, \mathbf{0})\} \wedge t_1 = s \cup \{(i, \mathbf{1})\} \ \rightarrow \ h(t_0) \cap h(t_1) = \emptyset$.

Damit ist $(*)$ leicht einzusehen: Ist $f \in {}^{\omega}\mathbf{2}$, so bestimmt f nach (1), (2) eine Folge

$$\big(h(f \restriction i)\big)_{i \in \omega}$$

von Intervallen aus $\mathfrak{I}$ mit $h(f{\restriction}\mathbf{0}) \supseteq h(f{\restriction}\mathbf{1}) \supseteq \ldots$, deren Längen gegen $\mathbf{0}$ gehen, also eine Intervallschachtelung. Es sei r_f deren Grenzpunkt. Nach Definition von $\mathfrak{I}$ ist $r_f \in H(X) \cup X$, wegen $H(X) = X$ also Element von X. Schließlich ist (vgl. (2), (3)) die Funktion

$$g \;:\; {}^{\omega}\mathbf{2} \to X,$$

die jedem $f \in {}^{\omega}\mathbf{2}$ den Grenzpunkt r_f zuordnet, injektiv.

Wir müssen also nur noch eine Funktion h so definieren, dass (1), (2) und (3) gelten. Dabei begnügen wir uns mit einer Skizze.

Da jeder Punkt von X ein Häufungspunkt von X ist, liegen in einem Intervall I aus $\mathfrak{I}$ mindestens zwei Punkte von X, etwa x_0 und x_1. Zu diesen existieren zueinander disjunkte Intervalle I_0 und I_1 aus $\mathfrak{I}$ mit $I_0 \subseteq I$, $I_1 \subseteq I$, $x_0 \in I_0$ und $x_1 \in I_1$, deren Längen höchstens halb so groß sind wie die Länge von I. Mit Hilfe einer Auswahlfunktion auf $\mathrm{Pot}(\mathfrak{I} \times \mathfrak{I})$ lassen sich daher leicht Funktionen $h_0, h_1 : \mathfrak{I} \to \mathfrak{I}$ gewinnen, so dass für alle $I \in \mathfrak{I}$ gilt:

(1)′ $h_0(I)$ und $h_1(I)$ sind höchstens halb so lang wie I.

(2)′ $h_0(I) \subseteq I$ und $h_1(I) \subseteq I$.

(3)′ $h_0(I) \cap h_1(I) = \emptyset$.

Sei jetzt $I_\emptyset$ ein Intervall aus $\mathfrak{I}$, das eine Länge $\leq \mathbf{1}$ hat. Wir definieren h auf $\mathrm{Seq}_\omega(\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\})$ induktiv durch

$$h(\emptyset) \;:=\; I_\emptyset,$$

und für $s \in \mathrm{Seq}_\omega(\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\})$ mit $\mathrm{Def}(s) = i$:

$$\begin{aligned} h\big(s \cup \{(i, \mathbf{0})\}\big) \;&:=\; h_0\big(h(s)\big), \\ h\big(s \cup \{(i, \mathbf{1})\}\big) \;&:=\; h_1\big(h(s)\big). \end{aligned}$$

Offenbar gelten (1), (2) und (3). $\dashv$

Sei, wie oben, H die auf $\mathrm{Pot}(\mathbb{R})$ definierte Funktion, die einer Teilmenge X von $\mathbb{R}$ die Menge $H(X)$ ihrer Häufungspunkte zuordnet. Wir wollen abschließend die Iteration dieser Funktion genauer untersuchen (sog. *Cantor-Bendixson-Analyse*).

Für $X \subseteq \mathbb{R}$ definieren wir $X^{(\alpha)}$ rekursiv durch

$$\begin{aligned} X^{(\mathbf{0})} \;&:=\; X \\ X^{(\alpha+\mathbf{1})} \;&:=\; H(X^{(\alpha)}) \\ X^{(\delta)} \;&:=\; \bigcap\{X^{(\beta)} \mid \mathbf{0} < \beta < \delta\}. \end{aligned}$$

Häufig nennt man $H(X)$ auch die *Ableitung* von X. Die Betrachtung höherer Ableitungen geht auf Cantor (1872) zurück, der sie im Zusammenhang mit

Untersuchungen über trigonometrische Reihen eingeführt hat. Sie brachten ihn in der Folge zum Konzept der transfiniten Ordinalzahlen. Die Bedeutung, die ihnen damit bei der Entstehung der Mengenlehre zukommt, formuliert Zermelo so (*Cantor 1932*, S. 102):

> In diesem Begriff der „höheren Ableitungen“ einer Punktmenge haben wir somit den eigentlichen Keimpunkt und in der Theorie der trigonometrischen Reihen die Geburtsstätte der Cantorschen ‚Mengenlehre‘ zu erblicken.

4.12 Hilfssatz. *Sei* $X \subseteq \mathbb{R}$. *Dann gilt*:

(i) *Für* $\alpha \geq \mathbf{1}$ *ist* $X^{(\alpha)}$ *abgeschlossen.*

(ii) *Für* $\mathbf{1} \leq \alpha \leq \beta$ *ist* $X^{(\beta)} \subseteq X^{(\alpha)}$.

(iii) *Falls* $X^{(\alpha+\mathbf{1})} = X^{\alpha}$, *so ist* $X^{(\alpha)}$ *perfekt und* $X^{(\beta)} = X^{(\alpha)}$ *für alle* $\beta \geq \alpha$.

(iv) $\exists \alpha\, X^{(\alpha+\mathbf{1})} = X^{\alpha}$.

Beweis. Zu (i). Da $H(Y)$ für alle $Y \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen ist und da der Durchschnitt über eine Menge abgeschlossener Teilmengen von $\mathbb{R}$ ebenfalls abgeschlossen ist, ergibt sich die Behauptung leicht durch transfinite Induktion über $\alpha \geq \mathbf{1}$.

Zu (ii). Für eine abgeschlossene Teilmenge Y von $\mathbb{R}$ ist $H(Y) \subseteq Y$. Nach (i) gilt daher für alle $\alpha \geq \mathbf{1}$, dass $X^{(\alpha+\mathbf{1})} \subseteq X^{(\alpha)}$. Der Rest ergibt sich leicht durch transfinite Induktion.

Zu (iii). Ist $X^{(\alpha+\mathbf{1})} = X^{(\alpha)}$, so ist $H(X^{(\alpha)}) = X^{(\alpha)}$, also ist dann $X^{(\alpha)}$ perfekt. Die zweite Behauptung beweist man wieder leicht induktiv über β.

Zu (iv). Wir nehmen an, es gäbe kein α mit $X^{(\alpha+\mathbf{1})} = X^{(\alpha)}$. Nach (ii) gälte dann $X^{(\alpha+\mathbf{1})} \subset X^{(\alpha)}$ für alle $\alpha \geq \mathbf{1}$, und mit $Y_\beta := X^{(\beta+\mathbf{1})} \setminus X^{(\beta+\mathbf{2})}$ wären alle Y_β nicht leer und paarweise disjunkt. Damit gälte insbesondere für alle $\kappa > \mathbf{2}^{\aleph_\mathbf{0}}$:

$$|\bigcup_{\beta\in\kappa} Y_\beta| \geq \kappa > \mathbf{2}^{\aleph_\mathbf{0}}$$

im Widerspruch zu $\bigcup_{\beta\in\kappa} Y_\beta \subseteq \mathbb{R}$. ⊣

Aufgrund von Teil (iv) des gerade bewiesenen Hilfssatzes ist die folgende Definition sinnvoll:

4.13 Definition. CB sei die auf Pot($\mathbb{R}$) definierte Funktion mit

$$CB(X) \;:=\; \text{das kleinste } \alpha \text{ mit } X^{(\alpha+\mathbf{1})} = X^{(\alpha)}.$$

$CB(X)$ heißt der *Cantor-Bendixson-Rang* von X.

Der Cantor-Bendixson-Rang misst, nach wie vielen Ableitungsschritten wir zu einer perfekten Menge gelangen. Es stellt sich heraus, dass dies nach abzählbar vielen Schritten der Fall ist:

4.14 Satz. *Für alle* $X \subseteq \mathbb{R}$ *gilt*: $CB(X) < \aleph_{\mathbf{1}}$.

Beweis. Nach Hilfssatz 4.10 gibt es eine Zerlegung

$$X^{(\mathbf{1})} = Y \cup Z,$$

wobei $Y \cap Z = \emptyset$, Y perfekt und $|Z| \leq \aleph_{\mathbf{0}}$ ist. Eine leichte Induktion zeigt, dass $Y \subseteq X^{(\alpha)}$ für alle $\alpha \geq \mathbf{1}$. Für alle α mit $\mathbf{1} \leq \alpha < CB(X)$ ist daher $\emptyset \neq X^{(\alpha)} \setminus X^{(\alpha+\mathbf{1})} \subseteq Z$. Wäre $CB(X) \geq \aleph_{\mathbf{1}}$, so würde eine Überlegung ähnlich der am Ende des Beweises für Hilfssatz 4.12(iv) zeigen, dass $|Z| \geq \aleph_{\mathbf{1}}$, und wir hätten einen Widerspruch. ⊣

Es ist nicht schwer, Mengen reeller Zahlen mit CB-Rängen $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots$ anzugeben. So ist offenbar

$$CB(\mathbb{R}) = CB(\emptyset) = \mathbf{0};$$
$$CB(\{\mathbf{0}\}) = \mathbf{1};$$
$$CB\big(\{\mathbf{0}\} \cup \{\mathbf{2}^{-i} \mid i \in \omega\}\big) = \mathbf{2};$$
$$CB\Big(\{\mathbf{0}\} \cup \bigcup \big\{\{\mathbf{2}^{-i}\} \cup \{\mathbf{2}^{-i} + \mathbf{2}^{-i-j} \mid j \geq \mathbf{1}\} \mid i \in \omega\big\}\Big) = \mathbf{3}.$$

Aufgabe 4.15.5 zeigt, dass alle abzählbaren Ordinalzahlen als CB-Ränge auftreten.

4.15 Aufgaben.

4.15.1 Nach Aufgabe 2.16.14 gibt es beliebig große Kardinalzahlen κ mit $\forall \mu(\mu < \kappa \to \mathbf{2}^{\mu} < \kappa)$. Unter der Annahme von GCH bestimme man alle diese Kardinalzahlen.

4.15.2 Es sei $\aleph_{\mathbf{0}} \leq \mu < \kappa$, und κ sei singulär. Man zeige: Gilt $\mathbf{2}^{\mu} = \mathbf{2}^{\nu}$ für alle ν mit $\mu < \nu < \kappa$, so ist $\mathbf{2}^{\mu} = \mathbf{2}^{\kappa}$.

4.15.3 Gibt es eine beschränkte Teilmenge X von $\mathbb{R}$ mit $CB(X) = \alpha$, so enthält jedes nicht leere offene Intervall eine Teilmenge Y mit $CB(Y) = \alpha$.

4.15.4 Es sei $(I_i)_{i \in \omega}$ eine Folge offener und zueinander disjunkter Intervalle positiver reeller Zahlen mit $\mathbf{2}^{-i} \in I_i$. Ferner sei $f : \omega \to \delta$ monoton und unbeschränkt und $(X_i)_{i \in \omega}$ eine Folge von abgeschlossenen Mengen mit $X_i \subseteq I_i$, $CB(X_i) = f(i)$ und $X_i^{(f(i))} = \emptyset$ für $i \in \omega$. Mit $Y := \bigcup \{X_i \mid i \in \omega\}$ ist dann $CB([-\mathbf{1}, \mathbf{0}] \cup Y) = \delta$ und $CB(\{\mathbf{0}\} \cup Y) = \delta + \mathbf{1}$.

4.15.5 Zu jedem $\alpha < \aleph_{\mathbf{1}}$ existiert ein abgeschlossenes $X \subseteq \mathbb{R}$ mit $CB(X) = \alpha$.

4.15.6 Gibt es ein $X \subseteq \mathbb{R}$ mit $CB(X) = \omega$ und $X^{(\omega)} = \emptyset$? Gibt es eine beschränkte Menge mit dieser Eigenschaft?

4.15.7 Man gebe eine nicht leere perfekte Teilmenge des abgeschlossenen Einheitsintervalls $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ an, die keine inneren Punkte besitzt. Hierzu entferne man das offene Intervall $\langle \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}, \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \rangle$ aus $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ und setze diesen Prozess geeignet fort. Die so entstehende Menge ist als *Cantorsche Menge* oder *Cantorsches Diskontinuum* bekannt.

X

Das Universum als kumulative Hierarchie

> Die innere Wahrheit ist keine wächserne Nase, die sich jeder Schelm nach seiner Nase bossieren kann.

Bereits in I. 4 haben wir erwähnt, dass die Widerspruchsfreiheit von **ZFC** nicht bewiesen werden kann. Im nächsten Kapitel werden wir uns diesem Problem genauer zuwenden. Angesichts der Bedeutung, die der Mengenlehre im Gefüge der mathematischen Theorien zukommt, enthebt uns die grundsätzliche Unmöglichkeit eines Widerspruchsfreiheitsbeweises jedoch nicht der Aufgabe, **ZFC**, wenn nicht vollständig, so doch *möglichst weitgehend* zu rechtfertigen. Hierzu bieten sich mehrere Wege an.

Einmal können wir versuchen, die Widerspruchsfreiheit von **ZFC** auf die Widerspruchsfreiheit kleinerer Teilsysteme zurückzuführen. Man spricht in diesem Zusammenhang von *relativen Widerspruchsfreiheitsbeweisen*. Ein Beispiel haben wir bereits in VIII. 1 erwähnt: die Widerspruchsfreiheit von **ZFC** relativ zu **ZF**. Eine der Methoden, mit denen solche Beweise geführt werden können, lernen wir im nächsten Kapitel kennen. Offen bleibt in diesen Fällen natürlich die Frage nach der Widerspruchsfreiheit des jeweiligen Teilsystems.

Ein anderer, mehr intuitiver Weg besteht darin, *inhaltliche* Argumente, z. B. für **ZFC**, ins Feld zu führen, Argumente etwa, die darlegen, dass die in **ZFC** formulierten Eigenschaften des Universums unsere Mengenvorstellung angemessen widerspiegeln, dass sie eine innere Geschlossenheit aufweisen oder dass sie andere – letztlich natürlich nur intuitiv erfassbare – Vorzüge besitzen, die es schwer vorstellbar erscheinen lassen, dass Widersprüche auftreten könnten.

Im Mittelpunkt dieses Kapitels steht eine solche inhaltliche Rechtfertigung von **ZF**. Da **ZFC** relativ zu **ZF** widerspruchsfrei ist, bedeutet das im Hinblick auf **ZFC** keine Einschränkung.

H.-D. Ebbinghaus, *Einführung in die Mengenlehre*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-63866-8_10

Anknüpfungspunkt unserer Überlegungen ist der Eindruck, der sich am stärksten vielleicht bei einer *ersten* Begegnung mit **ZF** aufdrängt: der Eindruck einer Vielfalt möglicherweise nur zufällig zusammengekommener Aspekte des Mengenbegriffs, die sich in diesem Axiomensystem niederschlagen: Extensionalität, Aussonderung, Vereinigung, Potenzmenge, Unendlichkeit, Ersetzung, Fundiertheit. Während einige dieser Aspekte grundlegend zu sein scheinen, z. B. die Extensionalität, könnte man bei anderen meinen, sie seien vielleicht nur aus ad-hoc-Bedürfnissen berücksichtigt worden.

Unser Ziel ist es, diese Bedenken zu zerstreuen. Wir stellen dazu einige Eigenschaften des Mengenbegriffs zusammen, die uns wesentlich erscheinen. Alle lassen sich auf der Basis von **ZF** beweisen. Bis auf das sog. *Reflektionsprinzip* sind sie uns bereits bekannt. Wir geben diesen Eigenschaften dann in §3 eine angemessene Formulierung in Gestalt des auf *Scott 1974* zurückgehenden *Scottschen Axiomensystems* $\mathbf{\Sigma}$ und zeigen, dass $\mathbf{\Sigma}$ mit **ZF** gleichwertig ist. Die intuitiven Argumente, die wir für $\mathbf{\Sigma}$ vorbringen können, treffen damit auch für **ZF** zu. – Zur Formulierung und zum Beweis des Reflektionsprinzips in §2 bedarf es einiger Vorarbeiten über *Relativierungen*, denen wir uns in §1 zuwenden. Sofern nichts anderes gesagt wird, legen wir unseren Betrachtungen das Axiomensystem **ZF** zugrunde.

§1 Relativierungen und Absolutheit

Wir wollen zunächst versuchen, uns die Bedeutung von Relativierungen inhaltlich zu erarbeiten. Dazu gehen wir von einem einstelligen Prädikat P aus. $\mathfrak{P}$ sei der Teilbereich des Universums, der aus den Mengen mit der Eigenschaft P besteht. Man denke z. B. an die Eigenschaft, im „$\mathbf{V}$-Trichter“ zu liegen, an die Eigenschaft, eine Einermenge zu sein, oder auch an die Eigenschaft, ein Element von V_ω zu sein.

A. Relativierung von Ausdrücken ohne definierte Symbole

Die Aussage „2 *ist eine Quadratzahl*“ ist wahr, wenn wir sie im „Universum“ der reellen Zahlen betrachten, falsch hingegen, wenn wir sie auf das „Teiluniversum“ der rationalen Zahlen beziehen. Die Aussage „*Es gibt eine Millionenstadt*“ trifft auf das „Städteuniversum“ aller Städte der Erde zu, nicht dagegen auf das „Teiluniversum“ aller Städte Baden-Württembergs.

Bislang haben wir bei inhaltlichen Betrachtungen unter der *Bedeutung* eines Ausdrucks immer seine *Bedeutung im gesamten Universum* verstanden. Ähnlich wie bei der Aussage über die Millionenstadt können wir die Bedeutung von Ausdrücken auch in einem Teilbereich, etwa im Teilbereich $\mathfrak{P}$, untersuchen. Relativierungen sind, grob gesprochen, ein Mittel, Überlegungen in $\mathfrak{P}$ wieder auf Betrachtungen zurückzuführen, die sich auf das gesamte Universum beziehen. Dazu ein Beispiel. Es sei x_0 eine Menge aus $\mathfrak{P}$. Dann trifft

$$\varphi_0(x_0) \;:=\; \exists y\, y \in x_0$$

genau dann in $\mathfrak{P}$ zu, wenn es in $\mathfrak{P}$ ein y gibt mit $y \in x_0$, d. h. wenn

$$\varphi_1(x_0) \;:=\; \exists y\,(Py \wedge y \in x_0)$$

im Universum zutrifft. Ähnlich verhält es sich mit $\psi_0(x_0) \;:=\; \forall y\, y = x_0$ und $\psi_1(x_0) \;:=\; \forall y\,(Py \to y = x_0)$. Wir nennen $\varphi_1(x_0)$ (bzw. $\psi_1(x_0)$) die *P-Relativierung* von $\varphi_0(x_0)$ (bzw. $\psi_0(x_0)$). Die P-Relativierung eines Ausdrucks φ entsteht im Wesentlichen dadurch, dass die in φ vorkommenden Quantifizierungen „$\forall z \ldots$" bzw. „$\exists z \ldots$" durch „$\forall z(Pz \to \ldots)$" bzw. „$\exists z(Pz \wedge \ldots)$" ersetzt oder, technisch gesprochen, auf P *relativiert* werden.

Exakt können wir die P-Relativierung eines Ausdrucks φ, die man in der Regel mit φ^P bezeichnet, metasprachlich induktiv über den Aufbau der Ausdrücke definieren. Wir wollen das im Folgenden zunächst für solche mengentheoretischen Ausdrücke tun, *die keine definierten Symbole enthalten.* Bei den einzelnen Induktionsschritten lassen wir uns von der inhaltlichen Bedeutung der Relativierung leiten, der zufolge ein Ausdruck $\varphi(\overset{n}{x})$ für Mengen $x_1, \ldots, x_n$ aus $\mathfrak{P}$ genau dann in $\mathfrak{P}$ zutrifft, wenn $\varphi(\overset{n}{x})^P$ im Universum zutrifft. Zuweilen schreiben wir $[\varphi]^P$ statt φ^P, um die Lesbarkeit zu verbessern oder um den Wirkungsbereich der jeweiligen Relativierung anzudeuten.

1.1 Definition der P-Relativierung.

$$\begin{aligned}
\big[x \in y\big]^P \;&:=\; x \in y \;\text{ und }\; [x = y]^P \;:=\; x = y;\\
\big[\neg\varphi(\overset{n}{x})\big]^P \;&:=\; \neg\big[\varphi(\overset{n}{x})\big]^P;\\
\big(\varphi(\overset{n}{x}) \wedge \psi(\overset{n}{x})\big)^P \;&:=\; \varphi(\overset{n}{x})^P \wedge \psi(\overset{n}{x})^P;\ \text{analog für } \vee, \to, \leftrightarrow;\\
\big[\forall x\, \varphi(x, \overset{n}{x})\big]^P \;&:=\; \forall x\,\big(Px \to [\varphi(x, \overset{n}{x})]^P\big);\\
\big[\exists x\, \varphi(x, \overset{n}{x})\big]^P \;&:=\; \exists x\,\big(Px \wedge [\varphi(x, \overset{n}{x})]^P\big).
\end{aligned}$$

Wir geben – als Beispiel – eine inhaltliche Rechtfertigung des Induktionsschrittes über den Existenzquantor. Seien hierzu $x_1, \ldots, x_n$ aus $\mathfrak{P}$. Dann trifft $\exists x\, \varphi(x, \overset{n}{x})$ in $\mathfrak{P}$ zu genau dann, wenn es ein x aus $\mathfrak{P}$ gibt, für das $\varphi(x, \overset{n}{x})$ in $\mathfrak{P}$ zutrifft. Für φ können wir aufgrund der Induktionsvoraussetzung bereits von der inhaltlichen Bedeutung der Relativierung Gebrauch machen. Für das in Rede stehende x bedeutet das: $\varphi(x, \overset{n}{x})$ trifft in $\mathfrak{P}$ zu genau dann, wenn $[\varphi(x, \overset{n}{x})]^P$ im Universum zutrifft. Zusammenfassend erhalten wir: $\exists x\, \varphi(x, \overset{n}{x})$

trifft in $\mathfrak{P}$ genau dann zu, wenn $\exists x\,(Px \wedge [\varphi(x, \overset{n}{x})]^P)$ im Universum zutrifft, nach Definition also genau dann, wenn $[\exists x\,\varphi(x, \overset{n}{x})]^P$ im Universum zutrifft.

Wenn wir die Anweisung der Definition 1.1 befolgen, um z. B. die P-Relativierung des Ausdrucks $\exists u\,\forall v\,(v \in x \to v = u)$ herzustellen, gelangen wir zu $\exists u\,(Pu \wedge \forall v\,(Pv \to (v \in x \to v = u)))$. Logisch gleichwertig damit ist der Ausdruck $\exists u\,(Pu \wedge \forall v\,(Pv \wedge v \in x \to v = u))$. Umformungen dieser Art werden wir im Folgenden oft stillschweigend durchführen.

Neben der Relativierung nach *Prädikatssymbolen* sind noch andere Relativierungen gebräuchlich. Wir erwähnen die für uns wichtige *Relativierung nach Mengentermen*. Hierzu betrachten wir als Beispiel den Fall, dass $\mathfrak{P}$ gerade aus den Elementen der Menge ω besteht. Statt die Relativierung nach P durchzuführen (wobei P etwa definiert ist durch $Px :\leftrightarrow x \in \omega$), können wir auch „direkt" nach ω relativieren. Dies geschieht auf ähnliche Art, wie es die Definition 1.1 vorschreibt. Lediglich die Quantorenschritte ändern wir in naheliegender Weise ab:

$$\begin{aligned}\big[\forall x\varphi(x, \overset{n}{x})\big]^{\omega} &:= \forall x\,\big(x \in \omega \to [\varphi(x, \overset{n}{x})]^{\omega}\big);\\ \big[\exists x\varphi(x, \overset{n}{x})\big]^{\omega} &:= \exists x\,\big(x \in \omega \wedge [\varphi(x, \overset{n}{x})]^{\omega}\big).\end{aligned}$$

Völlig analog lässt sich die Relativierung nach solchen Mengentermen definieren, die Variablen enthalten, wie x, $\mathrm{Pot}(y)$, V_x. Unter Umständen ist hier allerdings eine Umbenennung von gebundenen Variablen erforderlich. Beispielsweise setzt man

$$\big[\forall x\,\varphi(x, \overset{n}{x})\big]^{x} := \forall z\,\big(z \in x \to [\varphi(z, \overset{n}{x})]^{x}\big),$$

wobei z die erste Variable unter den $v_0, v_1, \ldots$ ist, die nicht in $\varphi(x, \overset{n}{x})$ auftritt.

Wir beschränken uns im Folgenden auf die Relativierung nach Prädikatssymbolen. Eine Übertragung der Definitionen, Resultate und Bezeichnungsweisen auf Relativierungen nach Mengentermen bereitet keine Schwierigkeiten.

B. Relativierung von Ausdrücken mit definierten Symbolen

Es seien x_0 und y_0 wieder Mengen aus $\mathfrak{P}$. Wann gilt $x_0 \subseteq y_0$ im Bereich $\mathfrak{P}$? Unter Berücksichtigung der Definition von $\subseteq$ gilt es genau dann in $\mathfrak{P}$, wenn $\forall z(z \in x_0 \to z \in y_0)$ in $\mathfrak{P}$ zutrifft, d. h. wenn $[\forall z(z \in x_0 \to z \in y_0)]^P$ im Universum zutrifft. *Im Allg. bedeutet das nicht, dass $x_0 \subseteq y_0$ im Universum zutrifft.* Hierzu das folgende Beispiel: P sei definiert durch

$$Px :\leftrightarrow x = \{\{\emptyset\}\} \vee x = \emptyset,$$

$\mathfrak{P}$ bestehe also aus den Mengen $x_0 := \{\{\emptyset\}\}$ und $y_0 := \emptyset$. Dann gilt $x_0 \subseteq y_0$ zwar in $\mathfrak{P}$ (weil keine Menge aus $\mathfrak{P}$ ein Element von x_0 ist), doch nicht im

Universum. Bei dieser Überlegung haben wir die Bedeutung der Inklusionsbeziehung zugrunde gelegt. Wir definieren $[x \subseteq y]^P$ also nicht analog zu Definition 1.1 als $x \subseteq y$, sondern mit Rückgriff auf die Bedeutung als

$$\big[x \subseteq y\big]^P \;:=\; \big[\forall z\,(z \in x \to z \in y)\big]^P.$$

Allgemein verfahren wir so: Wir haben in II. 2 geschildert, wie man aus einem Ausdruck φ die dort vorkommenden definierten Symbole eliminieren kann. Es sei $\epsilon(\varphi)$ der Ausdruck, der auf diese Weise entsteht. Dann vereinbaren wir:

1.2 Definition. Für Ausdrücke φ, die definierte Symbole enthalten können, sei $\varphi^P \;:=\; [\epsilon(\varphi)]^P$.

Die Relativierung $[\epsilon(\varphi)]^P$ ist dabei nach Definition 1.1 erklärt. Falls φ keine definierten Symbole enthält, ist $\epsilon(\varphi) = \varphi$, Definition 1.2 trifft also in diesem Fall die gleiche Festsetzung.

C. Absolutheit

Wie im Beispiel unter B. sei wieder $x_0 := \{\{\emptyset\}\}$ und $y_0 := \emptyset$, und $\mathfrak{P}$ bestehe aus x_0 und y_0. Dann trifft, wie wir bereits wissen, $x_0 \subseteq y_0$ in $\mathfrak{P}$ zu, nicht jedoch im Universum. Die Inklusionsbeziehung ändert also beim Übergang vom Universum zu $\mathfrak{P}$ ihre Bedeutung; man sagt, sie sei *nicht absolut für* $\mathfrak{P}$. Eine weitere Besonderheit von $\mathfrak{P}$ betrifft die leere Menge: Die Bedingung

$$\varphi(x) \;:=\; \neg\exists y\, y \in x,$$

durch die wir die leere Menge definiert haben, wird in $\mathfrak{P}$ nicht durch genau ein Element, sondern durch x_0 und y_0 erfüllt. Insbesondere trifft daher in $\mathfrak{P}$ das Extensionalitätsaxiom nicht zu; denn x_0 und y_0 enthalten zwar dieselben zu $\mathfrak{P}$ gehörenden Elemente (nämlich keine), sind aber verschieden. In der Mengenlehre ist man an solch „pathologischen“ Bereichen wie $\mathfrak{P}$ nicht interessiert. Eine wesentliche Rolle (z. B. bei sog. *relativen Widerspruchsfreiheitsbeweisen*; vgl. XI. 1) spielen dagegen Bereiche, in denen möglichst viele Axiome der Mengenlehre gelten und für die möglichst viele Prädikate und Operationen bei Relativierungen nicht ihre Bedeutung ändern. Wir setzen dazu fest:

1.3 Definition. Es sei P ein einstelliges Prädikat und $\varphi(\overset{n}{x})$ ein mengentheoretischer Ausdruck ohne definierte Symbole. Dann sei

(∗) $\varphi(\overset{n}{x})$ *ist absolut für* P oder P *spiegelt* $\varphi(\overset{n}{x})$

der Ausdruck

$$\forall \overset{n}{x}\,\big(Px_1 \wedge \ldots \wedge Px_n \to \big(\varphi(\overset{n}{x})^P \leftrightarrow \varphi(\overset{n}{x})\big)\big),$$

im Falle $n = 0$ also der Ausdruck $(\varphi^P \leftrightarrow \varphi)$.

Enthält $\varphi(\overset{n}{x})$ definierte Symbole, sei $(*)$ der Ausdruck

$$\forall \overset{n}{x} \big(Px_1 \wedge \ldots \wedge Px_n \to \big(\epsilon(\varphi(\overset{n}{x}))^P \leftrightarrow \epsilon(\varphi(\overset{n}{x}))\big)\big).$$

Definiert $\varphi(\overset{n}{x})$ ein Prädikat Q, sagen wir statt $(*)$ auch „*Q ist absolut für P*" oder „*P spiegelt Q*".

Eine große Klasse „nicht-pathologischer" Bereiche erschließen wir uns, indem wir den Begriff der Transitivität von Mengen auf Prädikate übertragen:

1.4 Definition. Es sei „*P ist transitiv*" der Ausdruck

$$\forall x \forall y \big(Px \wedge y \in x \to Py\big).$$

Beispiele für transitive Prädikate (auf der Basis von **ZF**) sind das Prädikat **V** (vgl. dazu Satz VII.3.5(iii)), das Prädikat, eine Ordinalzahl zu sein, das Prädikat, eine natürliche Zahl zu sein, und das „leere" Prädikat. Nicht transitiv sind das Prädikat, eine Potenzmenge zu sein, und das schon mehrfach erwähnte Prädikat, das genau auf $\emptyset$ und $\{\{\emptyset\}\}$ zutrifft.

Transitive Prädikate spiegeln eine Fülle von Ausdrücken. Der folgende Satz enthält einige Beispiele. Eine systematische Verallgemeinerung bringen wir in Aufgabe 1.6.2.

1.5 Satz. *P sei transitiv, d. h. der Ausdruck „P ist transitiv" gelte. Dann sind in einem entsprechenden Sinn absolut für P:*[1]

(i) $x \subseteq y$, d. h. $\forall z\, (z \in x \to z \in y)$;

(ii) $x = y \cup \{y\}$, d. h. $\forall z\, \big(z \in x \leftrightarrow (z \in y \vee z = y)\big)$;

(iii) $x = \emptyset$ d. h. $\neg \exists z\, z \in x$;

(iv) *falls zusätzlich $\exists x Px$ gilt:* $\exists u\, u = \emptyset$.

Beweis. Sei P transitiv und gelte Px, Py.
Zu (i): Wir haben

$$\begin{aligned} [x \subseteq y]^P &\leftrightarrow \forall z\, (Pz \wedge z \in x \to z \in y) \\ &\leftrightarrow \forall z\, (z \in x \to z \in y) \ \text{(für „}\to\text{": da } P \text{ transitiv ist,} \\ &\qquad\qquad \text{gilt mit } Px \text{ und } z \in x \text{ auch } Pz) \\ &\leftrightarrow x \subseteq y. \end{aligned}$$

Zu (ii): Offensichtlich ist zunächst

$$\begin{aligned} [x = y \cup \{y\}]^P \leftrightarrow\ & \forall z\, (Pz \wedge z \in x \to z \in y \vee z = y) \\ & \wedge \forall z\, (Pz \wedge (z \in y \vee z = y) \to z \in x). \end{aligned}$$

[1] Satz 1.5(i) besagt also, dass $\forall x \forall y\, (Px \wedge y \in x \to Py) \to \forall x \forall y\, (Px \wedge Py \to ([x \subseteq y]^P \leftrightarrow x \subseteq y))$ in **ZF** beweisbar ist.

Da P transitiv ist, können wir, ähnlich wie beim Beweis von (i), wegen Px und Py fortfahren:

$$\begin{aligned}
&\leftrightarrow \quad \forall z\,(z \in x \to z \in y \vee z = y) \wedge \forall z\,(z \in y \vee z = y \to z \in x) \\
&\leftrightarrow \quad x = y \cup \{y\}.
\end{aligned}$$

Der Beweis von (iii) bereitet keine Schwierigkeiten. Gelte, zum Beweis von (iv), nun zusätzlich $\exists x Px$. Da $\exists u\, u = \emptyset$ zutrifft, müssen wir zeigen:

$$\exists u\, \bigl(Pu \wedge [u = \emptyset]^P\bigr),$$

nach (iii) also

$$\exists u\,(Pu \wedge u = \emptyset), \quad \text{d. h. } P\,\emptyset.$$

Sei hierzu x eine Menge mit Px, die von minimalem Rang ist. Dann gilt nach Satz VII.3.5(ii):

$$\forall y\,(y \in x \to \neg Py).$$

Da P transitiv ist, gilt zugleich $\forall y\,(y \in x \to Py)$. Also ist $x = \emptyset$. ⊣

1.6 Aufgaben.

1.6.1 Es sei φ ein parameterfreier Ausdruck. Dann sind für $u \subseteq v$ die Ausdrücke φ^u, $[\varphi^u]^v$ und $[\varphi^v]^u$ äquivalent.

1.6.2 Ein mengentheoretischer Ausdruck ohne definierte Symbole, bei dem Quantoren nur in der Form $\exists x\,(x \in y \wedge \varphi)$ oder $\forall x\,(x \in y \to \varphi)$ auftreten, heiße *beschränkt* oder ein Δ_0-*Ausdruck*. Man zeige, dass beschränkte Ausdrücke absolut für transitive Prädikate sind, und beweise damit noch einmal die Teile (i), (ii) und (iii) von Satz 1.5.

1.6.3 Man bestimme diejenigen Ordinalzahlen α, für die V_α das Unendlichkeitsaxiom spiegelt, d. h. die α mit $\mathbf{Inf}^{V_\alpha}$. Spiegelt $\mathbf{V}$ das Axiom?

1.6.4 Es sei F eine n-stellige parameterfreie Operation bzgl. **ZF**, und P sei ein einstelliges Prädikat. Ferner sei „*F ist absolut für P*" der Ausdruck

$$F(\overset{n}{x}) = y \textit{ ist absolut für } P \wedge \exists y\, F(\overset{n}{x}) = y \textit{ ist absolut für } P.$$

(i) Man zeige: F ist genau dann absolut für P, wenn $F(\overset{n}{x}) = y$ absolut für P ist und wenn P gegen F abgeschlossen ist, d. h., wenn mit $Px_1 \wedge \ldots \wedge Px_n$ auch $PF(\overset{n}{x})$ gilt.

(ii) Man zeige: Die Operationen $\emptyset$, $\{\}$, $\cap$, $\cup$ der Stellenzahl 0, 1, 2, bzw. 2 sind absolut für $\mathbf{V}$.

1.6.5 Für welche Ordinalzahlen α ist die Potenzmengenoperation absolut für die Stufe V_α? Ist die Operation absolut für $\mathbf{V}$?

§2 Das Reflektionsprinzip

Wir argumentieren weiterhin auf der Basis von **ZF**.

Das Reflektionsprinzip (Richard Montague 1957, Azriel Levy 1960) besagt in seiner einfachsten Form: Zu jedem Satz φ gibt es eine Menge, die φ spiegelt. Jeder Satz, der im Universum gilt, gilt also bereits in einer Menge. Mit anderen Worten: Das Universum ist in dem Sinne „unbeschreiblich groß", als es keinen in der mengentheoretischen Sprache formulierbaren Sachverhalt gibt, der es von allen Mengen unterscheidet.[2] Wir beweisen das Prinzip mit den folgenden Verschärfungen: Wir lassen Parameter zu, und wir zeigen, dass man als spiegelnde Menge jeweils ein V_α wählen kann, das eine vorgegebene Menge x als Teilmenge oder – eine äquivalente Formulierung – als Element enthält.

2.1 Reflektionsprinzip (RP) (Schema)**.** *Für jedes* $\varphi(\overset{n}{x})$ *gilt*:

$$\forall x\, \exists\alpha\, \big(x \in V_\alpha \wedge V_\alpha \textit{ spiegelt } \varphi(\overset{n}{x})\big).$$

Ist β gegeben, sieht man mit $x := \beta$ sofort, dass es ein $\alpha > \beta$ gibt, für das V_α den Ausdruck $\varphi(\overset{n}{x})$ spiegelt. Der Beweis von **RP** wird zeigen, dass man α als Limeszahl wählen kann, ja, dass „fast alle" α die Spiegelung leisten.

Offenbar können wir uns auf Ausdrücke $\varphi(\overset{n}{x})$ beschränken, die keine definierten Symbole enthalten. Für solche Ausdrücke werden wir **RP** durch metasprachliche Induktion über ihren Aufbau zeigen. Der Induktionsanfang und der Negationsschritt sind trivial. Zunächst gilt nämlich nach Definition 1.1:

2.2 Bemerkung. $\forall\alpha\, \big(V_\alpha \textit{ spiegelt } x \in y \wedge V_\alpha \textit{ spiegelt } x = y\big)$. $\dashv$

Und da mit $\varphi(\overset{n}{x})^{V_\alpha} \leftrightarrow \varphi(\overset{n}{x})$ auch $[\neg\varphi(\overset{n}{x})]^{V_\alpha} \leftrightarrow \neg\varphi(\overset{n}{x})$ gilt, erhalten wir:

2.3 Bemerkung. $\forall\alpha\, \big(V_\alpha \textit{ spiegelt } \varphi(\overset{n}{x}) \to V_\alpha \textit{ spiegelt } \neg\varphi(\overset{n}{x})\big)$. $\dashv$

Auf eine erste Schwierigkeit stoßen wir bei der Disjunktion $\vee$. Werde etwa φ durch V_α und ψ durch V_β gespiegelt. Falls $\alpha = \beta$, spiegelt V_α sowohl φ als auch ψ und damit, wie man leicht nachweist, auch $\varphi \vee \psi$. Ist dagegen $\alpha \neq \beta$, braucht weder V_α noch V_β die Disjunktion $\varphi \vee \psi$ zu spiegeln; denn aus $\varphi^{V_\alpha} \leftrightarrow \varphi$ ergibt sich nicht unbedingt $(\varphi \vee \psi)^{V_\alpha} \leftrightarrow (\varphi \vee \psi)$. Wir überwinden diese Schwierigkeit, indem wir mehr zeigen: Jeder Ausdruck wird durch „fast alle" V_α gespiegelt (Hauptlemma 2.6). Wird dann φ durch „fast alle" V_α und ψ durch „fast alle" V_α gespiegelt, so spiegeln – in Übereinstimmung mit der

[2] Vgl. hierzu auch Aufgabe 2.7.9. Dort soll gezeigt werden, dass im Fall der Widerspruchsfreiheit kein zu **ZF** gleichwertiges Axiomensystem der Mengenlehre existiert, das aus nur endlich vielen Axiomen – äquivalent dazu: aus einem einzigen Axiom – besteht.

anschaulichen Vorstellung – „fast alle“ V_α sowohl φ als auch ψ (Hilfssatz 2.5(i)) und damit $\varphi \vee \psi$. Zur Präzisierung des „fast alle“ setzen wir fest:

2.4 Definition. Für ein einstelliges Prädikat P sei „*P ist club*“ die Konjunktion von

$$\forall x\, (Px \to \mathrm{Oz}\ x),$$
$$\forall x\, (x \subseteq P \wedge x \neq \emptyset \to P \bigcup x) \ \text{(„}P\text{ ist } \textit{abgeschlossen} \text{ oder } \textbf{cl}\textit{osed}\text{“)},$$
$$\forall \beta \exists \alpha\, (\beta < \alpha \wedge P\alpha) \ \text{(„}P\text{ ist } \textit{unbeschränkt} \text{ oder } \textbf{un}\textit{b}\textbf{o}\textit{unded}\text{“)}.$$

Das Prädikat Oz ist club, ferner das Prädikat, eine Limeszahl zu sein (man beachte, dass das Supremum einer nicht leeren Menge von Limeszahlen wieder eine Limeszahl ist), und für alle α das Prädikat, eine Ordinalzahl $> \alpha$ zu sein. Anschaulich stelle man sich vor, dass ein Prädikat Q, welches ein club-Prädikat umfasst, auf fast alle Ordinalzahlen zutrifft. Eine erste Bestätigung erfährt diese Vorstellung durch Teil (i) des nachfolgenden Hilfssatzes.

2.5 Hilfssatz. (i) *P, Q und R seien einstellige Prädikate. Dann gilt*

$$\big(\forall x\, (Rx \leftrightarrow (Px \wedge Qx)) \wedge P \textit{ ist club} \wedge Q \textit{ ist club}\big) \ \to\ R \textit{ ist club.}$$

(ii) *Es sei F eine normale Operation* (vgl. Aufgabe VI.2.11.12). *Dann ist das Prädikat B_F mit $\forall x\, (B_F x \leftrightarrow \exists \alpha\, x = F(\alpha))$ club.*

Beweis. Zu (i): Seien P und Q club und gelte $\forall x\, (Rx \leftrightarrow Px \wedge Qx)$.

R ist abgeschlossen: Ist $x \neq \emptyset$ und $x \subseteq R$, so ist auch $x \subseteq P$ und $x \subseteq Q$, also gilt $P \bigcup x \wedge Q \bigcup x$, d. h. $R \bigcup x$.

R ist unbeschränkt: Sei β gegeben. Wir definieren f auf ω rekursiv durch

$$\begin{aligned} f(0) \ &:= \ \text{das kleinste } \gamma > \beta \text{ mit } P\gamma, \\ f(i+\mathbf{1}) \ &:= \ \begin{cases} \text{das kleinste } \gamma > f(i) \text{ mit } Q\gamma, \text{ falls } i \text{ gerade,} \\ \text{das kleinste } \gamma > f(i) \text{ mit } P\gamma, \text{ falls } i \text{ ungerade,} \end{cases} \end{aligned}$$

und setzen

$$\alpha \ := \ \bigcup \mathrm{Bild}(f).$$

Dann ist $\beta < \alpha$, und wegen

$$\alpha \ = \ \bigcup \{f(i) \mid i \text{ ist gerade}\} \ = \ \bigcup \{f(i) \mid i \text{ ist ungerade}\}$$

und

$$\{f(i) \mid i \text{ ist gerade}\} \subseteq P, \ \ \{f(i) \mid i \text{ ist ungerade}\} \subseteq Q$$

ergibt sich $P\alpha \wedge Q\alpha$, also $R\alpha$.

Zu (ii): Sei F eine normale Operation. Zunächst ergibt sich leicht, dass stets $F(\beta) \geq \beta$; B_F ist daher unbeschränkt. Sei, zum Nachweis der Abgeschlossenheit, $\emptyset \neq x \subseteq B_F$. Wir müssen zeigen, dass es ein α gibt mit $F(\alpha) = \bigcup x$. Falls $\bigcup x \in x$, ist dies klar. Falls $\bigcup x \notin x$, falls also x kein größtes Element hat, ist wegen der Monotonie von F mit $y := \{\beta \mid F(\beta) \in x\}$ offenbar $\bigcup y \notin y$, also $\bigcup y$ eine Limeszahl. Aus der Monotonie und der Stetigkeit von F ergibt sich, dass $F(\bigcup y) = \bigcup\{F(\beta) \mid \beta \in \bigcup y\} = \bigcup\{F(\beta) \mid \beta \in y\} = \bigcup x$. $\dashv$

2.6 Hauptlemma. *Zu jedem Ausdruck* $\varphi(\overset{n}{x})$ *kann man ein einstelliges Prädikat* Q *definieren, für das gilt*:

(i) Q *ist club.*

(ii) $\forall\alpha\,\big(Q\alpha \to V_\alpha$ *spiegelt* $\varphi(\overset{n}{x})\big)$.

Da eine Menge x in allen V_β mit hinreichend großem β liegt, ergibt sich hieraus mit der Unbeschränktheit der Prädikate Q sofort das Reflektionsprinzip 2.1. $\dashv$

Beweis von Hilfssatz 2.6. Wir zeigen die Behauptung durch metasprachliche Induktion über den Aufbau von φ.

Der Induktionsanfang: Ist φ von der Gestalt $x \in y$ oder $x = y$, wählen wir als Q das Prädikat Oz. Q ist club, und (ii) gilt nach Bemerkung 2.2.

Der $\neg$*-Schritt* ergibt sich sofort mit Bemerkung 2.3: Gehört Q zu $\varphi(\overset{n}{x})$, wählen wir zu $\neg\varphi(\overset{n}{x})$ ebenfalls Q.

Der $\vee$*-Schritt*: Sei $\varphi(\overset{n}{x}) = (\psi(\overset{n}{x}) \vee \chi(\overset{n}{x}))$, und seien Q_ψ zu $\psi(\overset{n}{x})$ und Q_χ zu $\chi(\overset{n}{x})$ bereits definiert. Wir setzen $Qx :\leftrightarrow Q_\psi x \wedge Q_\chi x$. Nach Hilfssatz 2.5(i) ist Q club. Gilt weiter $Q\alpha$, d. h. $Q_\psi\alpha \wedge Q_\chi\alpha$, so spiegelt V_α sowohl $\psi(\overset{n}{x})$ als auch $\chi(\overset{n}{x})$ und damit $\varphi(\overset{n}{x})$. Die Schritte für $\wedge, \to, \leftrightarrow$ verlaufen ähnlich.

Der $\exists$*-Schritt*: Sei etwa $n = 1$ und $\varphi(x_1) = \exists x_2\,\psi(x_1, x_2)$, und für $\psi(x_1, x_2)$ sei ein entsprechendes Prädikat Q bereits definiert. Wir geben unten ein Prädikat R an mit

$$R \text{ ist club;} \tag{1}$$

$$\forall\alpha\,(R\alpha \to Q\alpha); \tag{2}$$

$$\forall\alpha\,\forall x_1\,\big(R\alpha \wedge x_1 \in V_\alpha \wedge \exists x_2\,\psi(x_1, x_2) \to \exists x_2\,\big(x_2 \in V_\alpha \wedge \psi(x_1, x_2)\big)\big). \tag{3}$$

R erfüllt die Behauptung für $\varphi(x_1)$; denn nach (1) ist R club, und mit $R\alpha$ gilt für alle $x_1 \in V_\alpha$:

$$\begin{aligned}
\big[\varphi(x_1)\big]^{V_\alpha} &\leftrightarrow \exists x_2\,\big(x_2 \in V_\alpha \wedge [\psi(x_1, x_2)]^{V_\alpha}\big)\\
&\leftrightarrow \exists x_2\,\big(x_2 \in V_\alpha \wedge \psi(x_1, x_2)\big) \quad \text{(nach (2))}\\
&\leftrightarrow \exists x_2\,\psi(x_1, x_2) \quad \text{(für „}\leftarrow\text{“ benutze man (3))}\\
&\leftrightarrow \varphi(x_1).
\end{aligned}$$

Wegen $\forall x\,\varphi \leftrightarrow \neg\exists x\,\neg\varphi$ und $[\forall x\,\varphi]^{V_\alpha} \leftrightarrow [\neg\exists x\,\neg\varphi]^{V_\alpha}$ lässt sich der Schritt für $\forall$ auf den $\neg$-Schritt und den $\exists$-Schritt zurückführen.

Es bleibt die Aufgabe, R geeignet zu definieren. Sei, zur Abkürzung,

$$\chi(\alpha) \;:=\; \forall x_1\,\big(x_1 \in V_\alpha \wedge \exists x_2\,\psi(x_1,x_2) \;\to\; \exists x_2\,\big(x_2 \in V_\alpha \wedge \psi(x_1,x_2)\big)\big).$$

Dann gilt

$$\forall\beta\,\exists\alpha\,\big(\beta<\alpha \wedge Q\alpha \wedge \chi(\alpha)\big). \tag{4}$$

Wir nehmen zunächst an, (4) sei bewiesen, und definieren eine einstellige Operation F rekursiv durch

$$\begin{aligned} F(x) &:= \emptyset,\ \text{falls } \neg\mathrm{Oz}\ x;\\ F(\mathbf{0}) &:= \text{das kleinste } \gamma \text{ mit } Q\gamma \wedge \chi(\gamma);\\ F(\alpha{+}\mathbf{1}) &:= \text{das kleinste } \gamma > F(\alpha) \text{ mit } Q\gamma \wedge \chi(\gamma);\\ F(\delta) &:= \bigcup\{F(\beta) \mid \beta<\delta\}. \end{aligned}$$

F ist normal. Setzen wir nun $R :=$ „Bild($F\!\restriction\!\mathrm{Oz}$)“, d. h.

$$Rx \;:\leftrightarrow\; \exists\alpha\, x = F(\alpha),$$

so erfüllt R die Bedingungen (1), (2) und (3):

(1) ergibt sich aus Hilfssatz 2.5(ii); denn R ist gerade das Prädikat B_F.

(2) bekommen wir sofort aus $\forall\alpha\, QF(\alpha)$, und dies zeigen wir durch Induktion über α. Nach Definition von F sind dabei der Induktionsanfang und der Nachfolgerschritt trivial. Gelte im Limesschritt $QF(\beta)$ für alle $\beta<\delta$. Dann gilt wegen der Abgeschlossenheit von Q auch $Q\bigcup\{F(\beta) \mid \beta<\delta\}$, d. h. $QF(\delta)$.

(3) besagt gerade

$$\forall\alpha\,\big(R\alpha \to \chi(\alpha)\big),\ \ \text{d. h.}\ \ \forall\alpha\,\chi\big(F(\alpha)\big).$$

Auch dies zeigen wir durch Induktion über α. Wieder sind der Induktionsanfang und der Nachfolgerschritt trivial. Sei nun δ eine Limeszahl und gelte

$$\forall x_1\,\big(x_1 \in V_{F(\beta)} \wedge \exists x_2\,\psi(x_1,x_2) \;\to\; \exists x_2\,\big(x_2 \in V_{F(\beta)} \wedge \psi(x_1,x_2)\big)\big)$$

für alle $\beta<\delta$. Ist dann $x_1 \in V_{F(\delta)}$ und gilt $\exists x_2\,\psi(x_1,x_2)$, so ist für geeignetes $\beta<\delta$ bereits $x_1 \in V_{F(\beta)}$, und wir finden ein $x_2 \in V_{F(\beta)}$ (und damit erst recht ein $x_2 \in V_{F(\delta)}$) mit $\psi(x_1,x_2)$.

Abschließend zeigen wir (4). Sei dazu β gegeben. Wir müssen ein $\alpha>\beta$ finden mit $Q\alpha$ und

$$\forall x_1\big(x_1 \in V_\alpha \wedge \exists x_2\psi(x_1,x_2) \to \exists x_2\big(x_2 \in V_\alpha \wedge \psi(x_1,x_2)\big)\big).$$

Wir werden α als Limes einer aufsteigenden Folge $(f(i))_{i\in\omega}$ von Ordinalzahlen in Q gewinnen, bei der jeweils $f(i+\mathbf{1})$ so gewählt ist, dass $V_{f(i+\mathbf{1})}$ für jedes $x_1 \in V_{f(i)}$ mit $\exists x_2\psi(x_1,x_2)$ ein x_2 enthält mit $\psi(x_1,x_2)$. Hierzu definieren wir die Funktion f auf ω rekursiv durch

$$\begin{aligned} f(\mathbf{0}) &:= \text{ das kleinste } \gamma > \beta \text{ mit } Q\gamma; \\ f(i+\mathbf{1}) &:= \text{ das kleinste } \gamma > f(i) \text{ mit } Q\gamma \text{ und } \gamma \geq \bigcup X; \end{aligned}$$

dabei sei (man beachte **Ers**) $X :=$

$$\big\{\gamma \mid \exists x_1 \big(x_1 \in V_{f(i)} \wedge \exists x_2 \big(x_2 \in V_\gamma \wedge \psi(x_1,x_2) \wedge \gamma \text{ ist minimal hiermit}\big)\big)\big\}.$$

Dann leistet die Limeszahl $\alpha := \bigcup \text{Bild}(f)$ das Gewünschte: Da $\text{Bild}(f) \subseteq Q$, gilt zunächst $Q\alpha$. Ist ferner $x_1 \in V_\alpha$, etwa $x_1 \in V_{f(i)}$, und gibt es ein x_2 mit $\psi(x_1,x_2)$, so gibt es ein solches x_2 bereits in $V_{f(i+\mathbf{1})}$, also in V_α. $\dashv$

Ohne die (aber unschwer auch mit der) Verschärfung, dass ein Ausdruck durch „fast alle“ V_α gespiegelt werden kann, lässt sich der Beweis des Reflektionsprinzips aus entsprechenden Beweisen der sog. *Modelltheorie* über *elementare Substrukturen* übertragen. Man vgl. hierzu etwa den Beweis von Lemma 9.2.5 in *Ebbinghaus, Flum und Thomas 2018*.

2.7 Aufgaben.

2.7.1 Für $m \geq 2$ und Ausdrücke $\varphi_1(\overset{n}{x}),\ldots,\varphi_m(\overset{n}{x})$ zeige man („*simultane Reflektion*“):

$$\forall x \exists \alpha \big(x \in V_\alpha \wedge V_\alpha \text{ spiegelt } \varphi_1(\overset{n}{x}) \wedge \ldots \wedge V_\alpha \text{ spiegelt } \varphi_m(\overset{n}{x})\big).$$

2.7.2 Für einen gegebenen Ausdruck $\varphi(\overset{n}{x})$ verschärfe man **RP** zu:

$$\forall x \exists \alpha\, (x \in V_\alpha \wedge \text{cof}(\alpha) = \aleph_\mathbf{0} \wedge V_\alpha \text{ spiegelt } \varphi(\overset{n}{x})).$$

Man verfahre ähnlich für $\aleph_\mathbf{1}$ statt $\aleph_\mathbf{0}$.

2.7.3 V_ω spiegelt alle Axiome von **ZF** ohne **Inf**. $V_{\omega\oplus\omega}$ spiegelt alle Axiome von **ZF** ohne **Ers**. (Wie steht es mit **AC**?)

2.7.4 (**ZFC**) Eine Teilmenge x von $\aleph_\mathbf{1}$ heiße $\aleph_\mathbf{1}$-*club*, wenn sie in $(\aleph_\mathbf{1}, \in_{\aleph_\mathbf{1}})$ unbeschränkt ist und wenn sie gegen abzählbare Suprema abgeschlossen ist, d. h. wenn für jede nicht leere abzählbare Teilmenge y von x das Supremum $\bigcup y$ zu x gehört. Es sei

$$\mathbb{D} := \big\{u \in \text{Pot}(\aleph_\mathbf{1}) \mid \exists x \big(x \subseteq u \text{ und } x \text{ ist } \aleph_\mathbf{1}\text{-club}\big)\big\}.$$

Man zeige:

(i) $\mathbb{D}$ ist ein Filter über $\aleph_\mathbf{1}$, d. h. es ist $\emptyset \notin \mathbb{D}$ und $\aleph_\mathbf{1} \in \mathbb{D}$, mit $u \in \mathbb{D}$ und $u \subseteq v \subseteq \aleph_\mathbf{1}$ ist $v \in \mathbb{D}$, und mit $u, v \in \mathbb{D}$ ist $u \cap v \in \mathbb{D}$.

(ii) $\mathbb{D}$ hat die *abzählbare-Durchschnitte-Eigenschaft*, d. h. mit $\emptyset \neq y \subseteq \mathbb{D}$ und $|y| \leq \aleph_\mathbf{0}$ ist $\bigcap y \in \mathbb{D}$.

(iii) $\mathbb{D}$ hat die *diagonale-Durchschnitte-Eigenschaft*, d. h. ist $u_\alpha \in \mathbb{D}$ für alle $\alpha < \aleph_\mathbf{1}$, so auch $\{\beta < \aleph_\mathbf{1} \mid \forall \alpha \, (\alpha < \beta \to \beta \in u_\alpha)\}$.

2.7.5 (**ZFC**) Es sei $\mathbb{D}$ wie in der vorangehenden Aufgabe. Eine Teilmenge $x \subseteq \aleph_\mathbf{1}$ heiße $\aleph_\mathbf{1}$-*stationär*, wenn $x \cap u \neq \emptyset$ für alle $u \in \mathbb{D}$. Man zeige für Teilmengen x, y, x_i $(i \in \omega)$ von $\aleph_\mathbf{1}$:

(i) x ist $\aleph_\mathbf{1}$-club $\to$ x ist $\aleph_\mathbf{1}$-stationär.

(ii) x ist nicht $\aleph_\mathbf{1}$-stationär $\leftrightarrow$ $\aleph_\mathbf{1} \setminus x \in \mathbb{D}$.

(iii) x ist $\aleph_\mathbf{1}$-stationär $\wedge\, y$ ist nicht $\aleph_\mathbf{1}$-stationär $\to$ $x \setminus y$ ist $\aleph_\mathbf{1}$-stationär.

(iv) x ist $\aleph_1$-stationär $\to$ $|x| = \aleph_1$.

(v) $\forall i \; x_i$ nicht $\aleph_\mathbf{1}$-stationär $\to$ $\bigcup\{x_i \mid i \in \omega\}$ ist nicht $\aleph_\mathbf{1}$-stationär.

2.7.6 (**ZFC**; Satz von Fodor) Ist $x \subseteq \aleph_\mathbf{1}$ $\aleph_\mathbf{1}$-stationär und ist $f : x \to \aleph_\mathbf{1}$ *regressiv* (d. h. ist $f(\alpha) < \alpha$ für alle $\alpha \in x \setminus \{\mathbf{0}\}$), so gibt es eine $\aleph_\mathbf{1}$-stationäre Teilmenge von x, auf der f konstant ist.

2.7.7 (**ZFC**; Satz von Solovay) Ist $x \subseteq \aleph_\mathbf{1}$ $\aleph_\mathbf{1}$-stationär, so gibt es eine Partition von x in $\aleph_\mathbf{1}$ viele $\aleph_\mathbf{1}$-stationäre Teilmengen von x. Zum Beweis kann man annehmen, dass x nur Limeszahlen enthält. Diese haben die Kofinalität ω. Man arbeite mit einer Funktion $f : x \times \omega \to \aleph_\mathbf{1}$, bei der für $\alpha \in x$ die Folge $(f(\alpha, i))_{i \in \omega}$ echt monoton wachsend gegen α strebt, und zeige zunächst:

(i) $\forall \beta \, \big(\beta < \aleph_\mathbf{1} \to \exists i \, \{\alpha \in x \mid f(\alpha, i) > \beta\}$ ist $\aleph_\mathbf{1}$-stationär$\big)$.

(ii) $\exists i_0 \exists y \, \big(y$ ist unbeschränkte Teilmenge von $\aleph_\mathbf{1} \wedge$

$$\forall \beta \, (\beta \in y \to \{\alpha \in x \mid f(\alpha, i_0) > \beta\} \text{ ist } \aleph_\mathbf{1}\text{-stationär})\big).$$

Dann wende man den Satz von Fodor aus der vorangehenden Aufgabe an.

2.7.8 Es sei F eine einstellige parameterfreie Operation mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} \alpha < \beta \;\to\; F(\alpha) \subseteq F(\beta) &\quad \text{für alle } \alpha, \beta, \\ F(\delta) \;=\; \bigcup\{F(\beta) \mid \beta < \delta\} &\quad \text{für alle } \delta, \end{aligned}$$

und das einstellige Prädikat $\mathbf{F}$ sei definiert durch $\mathbf{F}x :\leftrightarrow \exists \alpha \, x \in F(\alpha)$. Man zeige für jeden Ausdruck $\varphi(\overset{n}{x})$:

$$\begin{aligned} &\forall x \, \big(\mathbf{F}x \to \exists \alpha \, \big(x \in F(\alpha) \wedge \\ &\forall x_1 \ldots \forall x_n \, (x_1 \in F(\alpha) \wedge \ldots \wedge x_n \in F(\alpha) \to (\varphi(\overset{n}{x})^{F(\alpha)} \leftrightarrow \varphi(\overset{n}{x})^{\mathbf{F}})))\big)\big). \end{aligned}$$

Man überlege sich, dass **RP** ein Spezialfall hiervon ist.

2.7.9 Man zeige, dass **ZF** – sofern es widerspruchsfrei ist – nicht zu einem endlichen Axiomensystem äquivalent ist. Man kann so vorgehen: Wäre **ZF** äquivalent zu φ_0, so zeige man in **ZF**, dass es zwar ein α gibt mit $\varphi_0^{V_\alpha}$, aber kein minimales – ein Widerspruch! Man benutze dabei, dass für jedes parameterfreie φ und jedes Prädikat P mit φ auch $(\exists x\, Px \rightarrow \varphi^P)$ ohne Axiome beweisbar ist (vgl. dazu den Beweis von Satz XI.1.2).

§3 Das Scottsche Axiomensystem der Mengenlehre

Bereits mehrfach haben wir die Vorstellung angesprochen, das Axiomensystem **ZF** sei vielleicht von ad-hoc-Bedürfnissen geprägt; es könnte also – zumindest in Teilen – seine Formulierung einer mehr oder weniger zufälligen Auswahl verdanken, ein Umstand, der sich schlecht mit der Bedeutung der Mengenlehre für die Mathematik vertrüge. In einem Vortrag, den er 1929 in Warschau gehalten hat, greift Zermelo diesen Punkt im Zusammenhang mit dem Axiomensystem **NBG** auf, das wir in Kapitel XII behandeln werden:[3]

> Hier erscheinen nun freilich die einzelnen den Mengen-Begriff einschränkenden „Axiome“ leicht als willkürlich und ohne inneren Zusammenhang unter einander, und man möchte versuchen, sie alle aus einem einzigen einheitlichen Prinzipe herzuleiten, das dann als unterscheidendes Merkmal zwischen Mengen und Klassen eine eigentliche „Definition“ des Mengen-Begriffes darstellen würde.

Wir fragen daher ein wenig provozierend: *Tragen die Axiome von* **ZF** *wirklich willkürliche Züge*?

Hinsichtlich **Ext, Aus** und **Fund** werden wir die Frage verneinen wollen. Diese Axiome beinhalten Gesichtspunkte, die für die Mengenlehre eine grundsätzliche und intuitiv naheliegende Bedeutung haben: **Ext** steht für den rein quantitativen Aspekt, unter dem wir Mengen betrachten, **Aus** präzisiert eine von erkennbaren Widersprüchen freie Möglichkeit, Mengen durch Zusammenfassung zu gewinnen, und **Fund** sichert den hierarchischen Charakter des Universums.

Demgegenüber erscheinen die restlichen Axiome, nämlich $\cup$**-Ax**, $\bigcup$**-Ax**, **Pot**, **Inf** und **Ers**, von mehr pragmatischem Charakter. A priori ist also nicht von der Hand zu weisen, dass ein Teil der Unzulänglichkeiten von **ZF**, wie etwa die Unfähigkeit, die allgemeine Kontinuumshypothese **GCH** zu entscheiden, hier seine Ursache haben könnte.

[3] Siehe *Zermelo 2010*, S. 386.

Wir werden in Anlehnung an *Scott 1974* versuchen, Argumente zusammenzutragen, die den Eindruck von Pragmatismus zerstreuen sollten. Dabei gehen wir folgendermaßen vor.

(**1**) Wir arbeiten einige grundlegende Aspekte des Mengenbegriffs heraus, die in den Axiomen von **ZF** niedergelegt sind oder sich aus **ZF** beweisen lassen.

(**2**) Wir formulieren diese Aspekte auf natürliche Weise in einer mengentheoretischen Sprache und gelangen so zum Scottschen Axiomensystem $\mathbf{\Sigma}$.

(**3**) Wir weisen nach, dass $\mathbf{\Sigma}$ und **ZF** gleichwertig sind.

Ein wesentlicher Aspekt, den wir in (**1**) berücksichtigen werden, ist die hierarchische Gliederung des Universums in die bzgl. der Inklusion aufsteigende („kumulative“) Abfolge der von Neumannschen Stufen V_α, d. h. die *kumulativ-hierarchische Struktur* der Mengenwelt. Sie trägt entscheidend zu der konzeptionellen Geschlossenheit des Systems $\mathbf{\Sigma}$ bei. Mit (**3**) übertragen wir diese konzeptionelle Geschlossenheit auf **ZF** und erkennen damit im Nachhinein, dass (vielleicht nicht hinter den einzelnen Axiomen, jedoch) hinter dem Gesamtsystem ein überzeugendes Konzept steht. Natürlich bleiben die Schwächen von **ZF**(**C**). Doch das neue Gesamtbild mag zu einer Klärung der Frage beitragen, warum es bislang nicht gelungen ist, sich auf allgemein akzeptierte Verschärfungen von **ZF**(**C**) zu einigen: Die Ansprüche an die Erweiterung eines überzeugenden Gesamtkonzepts sind sehr viel höher als eine Erweiterung „nur“ um neue Axiome.

Zu (**1**). Als grundlegende Sachverhalte notieren wir:

1. **Ex**.

   Das Existenzaxiom ist nicht aus den folgenden Sachverhalten beweisbar.

2. **Ext**, d. h. $\forall xy\,\big(\forall z\,(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y\big)$.

   Das Extensionalitätsaxiom legt den rein quantitativen Charakter der Mengen fest.

3. **Aus**, das *Schema der Aussonderung*.

   Es sichert in einfacher Form systematische Möglichkeiten der Komprehension im Rahmen vorgegebener Mengen und stellt damit eine natürliche Form der Komprehension in einem typenfreien Universum dar.

4. **Kum**, das *Kumulierungslemma*:

   $$\forall\alpha\forall x\,\big(x \in V_\alpha \leftrightarrow \exists\beta\,\big(\beta < \alpha \wedge (x \in V_\beta \vee x \subseteq V_\beta)\big)\big).$$

   Das Kumulierungslemma gibt die kumulativ-hierarchische Struktur wieder: Jede von Neumannsche Stufe besteht gerade aus den Elementen und den Teilmengen der vorangehenden Stufen. Der Beweis ergibt sich sofort mit der Definition VII.3.1 und aus Satz VII.3.2; man unterscheide dazu, ob α gleich **0**, eine Nachfolgerzahl oder eine Limeszahl ist.

5. **Beschr**, das *Beschränkungslemma* (vgl. Satz VII.3.7):

$$\forall x \exists \alpha \, x \in V_\alpha.$$

Das Beschränkungslemma garantiert, dass die in Punkt 4. angesprochene kumulative Hierarchie der V_α das Universum ausschöpft.

6. **RP**, das *Reflektionsprinzip* (in der Form aus Satz 2.1):
Für jeden mengentheoretischen Ausdruck $\varphi(\overset{n}{x})$ die Aussage

$$\forall x \exists \alpha \left(x \in V_\alpha \wedge V_\alpha \text{ spiegelt } \varphi(\overset{n}{x}) \right).$$

Das Reflektionsprinzip präzisiert in augenfälliger Form die „unbeschreibliche“ Größe des Universums: Endlich viele Sätze reichen nicht aus, die Größe sicherzustellen.

Zu (**2**). Wir erweitern die mengentheoretische Sprache um ein neues einstelliges Prädikatssymbol Σ (für „*ist eine Stufe*“). Anschaulich stelle man sich unter einer Stufe, also einer Menge mit der Eigenschaft Σ, ein V_α vor. Besonders nützlich ist diese Vorstellung bei den unter (**3**) folgenden Beweisen; eine mehr formale Rechtfertigung erhält sie durch Satz 3.7. Die Ausdrücke der um Σ erweiterten mengentheoretischen Sprache nennen wir Σ-*Ausdrücke*.

Wir übertragen nun die Punkte 1. bis 6. in die um Σ erweiterte mengentheoretische Sprache. Beim Vergleich von Punkt 4. mit Σ-**Kum** beachte man, dass auf der Basis der **ZF**-Axiome die Beziehung $\alpha < \beta$ genau dann gilt, wenn $V_\alpha \in V_\beta$ gilt.

3.1 Definition. Das *Scottsche Axiomensystem* $\boldsymbol{\Sigma}$ *der Mengenlehre* umfasst die folgenden Axiome:

(i) das **Existenzaxiom** (**Ex**);

(ii) das **Extensionalitätsaxiom** (**Ext**);

(iii) das *Schema der* Σ-*Aussonderungsaxiome* (Σ-**Aus**); es ist definiert wie **Aus**; nur lassen wir für die Aussonderung jetzt auch Σ-Ausdrücke zu;

(iv) das **Kumulierungsaxiom** (Σ-**Kum**):

$$\forall v \left(\Sigma v \;\rightarrow\; \forall x \left(x \in v \leftrightarrow \exists w \left(\Sigma w \wedge w \in v \wedge (x \in w \vee x \subseteq w) \right) \right) \right);$$

(v) das **Beschränkungsaxiom** (Σ-**Beschr**):

$$\forall x \exists v \left(\Sigma v \wedge x \in v\right);$$

(vi) das *Schema der* Σ-**Reflektionsaxiome** (Σ-**RP**):
für jeden Ausdruck $\varphi(\overset{n}{x})$ der ursprünglichen mengentheoretischen Sprache das Axiom

$$\forall x \exists v \left(\Sigma v \wedge x \in v \wedge v \textit{ spiegelt } \varphi(\overset{n}{x})\right).$$

Offenbar liefert Σ-**RP** sofort das Beschränkungsaxiom. Wir behalten dieses Axiom trotzdem bei, weil wir wesentliche Züge der Hierarchie der Σ-Stufen dann bereits ohne Σ-**RP** beweisen können. Die Stärke von $\mathbf{\Sigma}$ ändert sich nicht, wenn man in Σ-**RP** auch solche Ausdrücke $\varphi(\overset{n}{x})$ berücksichtigt, die das Symbol Σ enthalten und, für Stufen v, $[\Sigma x]^v := \Sigma x$ setzt (vgl. Aufgabe 3.9.3).

Zu (**3**), der Gleichwertigkeit von $\mathbf{\Sigma}$ und **ZF**. Der folgende Satz präzisiert diese Gleichwertigkeit.

3.2 Satz. *Für* Σ*-freie Sätze* φ *der mengentheoretischen Sprache sind die folgenden Aussagen äquivalent*:

(a) φ *ist in* **ZF** *beweisbar.*

(b) φ *ist in* $\mathbf{\Sigma}$ *beweisbar.*

Beweis. Gelte zunächst (b). Aus der Definition von $\mathbf{\Sigma}$ ergibt sich sofort, dass in **ZF** zusammen mit der Festlegung

$$\Delta \ := \ \forall x \, (\Sigma x \ \leftrightarrow \ \exists \alpha \; x = V_\alpha)$$

alle Axiome von $\mathbf{\Sigma}$ beweisbar sind. Sei nun φ ein Σ-freier Satz, der in $\mathbf{\Sigma}$ beweisbar ist. Dann ist φ in $\mathbf{ZF} + \Delta$ beweisbar. B sei ein entsprechender Beweis. Man eliminiere in B mit Hilfe von Δ alle Vorkommen von Σ. Dabei wird φ nicht verändert, weil Σ nicht in φ vorkommt, und B geht dabei über in einen Beweis von φ aus **ZF**. Die umgekehrte Richtung „Wenn (a), so (b)“ ergibt sich sofort aus dem folgenden Hilfssatz. $\dashv$

3.3 Hilfssatz. *In* $\mathbf{\Sigma}$ *sind alle Axiome von* **ZF** *beweisbar.*

Für **Ex**, **Ext** und die Axiome von **Aus** brauchen wir nichts zu zeigen. Die restlichen Axiome, nämlich

$$(*) \qquad \cup\text{-}\mathbf{Ax},\ \bigcup\text{-}\mathbf{Ax},\ \mathbf{Pot},\ \mathbf{Inf},\ \mathbf{Fund},\ \mathbf{Ers}$$

erfordern einige Vorbereitungen, deren Ziel wesentlich darin besteht, zu zeigen, dass die Stufen transitiv und durch $\in$ wohlgeordnet sind und dass sie eine kumulative Hierarchie bilden. Zur Vereinfachung der Schreibweise benutzen wir die Buchstaben s, t, ... für Stufen. Z. B. lautet damit Σ-**Kum** kürzer

$$\forall s \forall x \left(x \in s \leftrightarrow \exists t \big(t \in s \wedge (x \in t \vee x \subseteq t)\big)\right),$$

und Σ-**Beschr** kürzer

$$\forall x \exists s\, x \in s.$$

Wir argumentieren in $\boldsymbol{\Sigma}$. Da wir dort über **Ex**, **Ext** und Σ-**Aus** verfügen, können wir z. B. die Existenz der leeren Menge $\emptyset$ wie üblich beweisen und mit Hilfe von Σ-Ausdrücken Mengen durch Aussonderung definieren.

Als nützlich erweisen sich folgende Prädikate und die folgende Operation:

3.4 Definition. (i) x ist *fundiert* $:\leftrightarrow$ jede nicht leere Teilmenge von x besitzt ein $\in$-minimales Element (vgl. Definition VI.1.5).
(ii) x ist *fundierend* $:\leftrightarrow$ jedes y mit $x \in y$ besitzt ein $\in$-minimales Element.
(iii) $x^f := \{z \in x \mid z \text{ ist fundierend}\}$.

Die leere Menge ist fundiert und fundierend, und wie man leicht sieht, ist eine transitive fundierte Menge fundierend.

3.5 Hilfssatz. (i) *x^f ist fundiert.*
(ii) *x^f ist fundierend.*
(iii) $s \in t \to s^f \in t^f$.
(iv) $\{t \mid t \in s\}$ $(= \{x \in s \mid \Sigma x\})$ *ist fundiert.*

Beweis. Zu (i). Jede nicht leere Teilmenge von x^f enthält ein fundierendes und daher ein $\in$-minimales Element.

Zu (ii). Sei $x^f \in y$. Ist $x^f \cap y$ leer, so ist x^f ein $\in$-minimales Element von y; andernfalls enthält y ein fundierendes, also wieder ein $\in$-minimales Element.

Zu (iii). Es sei $s \in t$. Da $s^f \subseteq s$, ist nach Σ-**Kum** $s^f \in t$, und da s^f nach (ii) fundierend ist, gilt somit $s^f \in t^f$.

Zu (iv). Es sei v eine nicht leere Teilmenge von $\{t \mid t \in s\}$. Wir setzen $w := \{x \in s^f \mid \exists y\, (y \in v \wedge x = y^f)\}$, d. h., nach (iii), $w = \{t^f \mid t \in v\}$. Dann ist $\emptyset \neq w$ und $w \subseteq s^f$. Da s^f nach (i) fundiert ist, enthält w ein $\in$-minimales Element. Wir können also ein t_0 in v finden, für das t_0^f $\in$-minimal in w ist. Nach (iii) ist dann t_0 $\in$-minimal in v. $\dashv$

3.6 Hilfssatz. (i) $\forall s\, \forall x\, (x \in s \leftrightarrow \exists t\, (t \in s \wedge x \subseteq t))$.
(ii) *$\forall s$ s ist transitiv.*
(iii) $\forall s\, \forall t\, (s \in t \vee s = t \vee t \in s)$.
(iv) $\forall s\, \forall t\, (s \subseteq t \vee t \subseteq s)$.

Beweis. *Zu* (i). Seien x und s gegeben. Die Richtung von rechts nach links ergibt sich sofort mit Σ-**Kum**. Sei umgekehrt $x \in s$, also nach Σ-**Kum** für ein geeignetes t:

$$t \in s \text{ und } x \in t \vee x \subseteq t.$$

Nach Hilfssatz 3.5(iv) können wir überdies annehmen, dass t eine $\in$-minimale Stufe mit dieser Eigenschaft ist. Wir zeigen, dass $x \subseteq t$, und nehmen dazu an, es gälte $x \in t$. Σ-**Kum** liefert ein $t' \in t$ mit $x \in t' \vee x \subseteq t'$ und gleichzeitig, dass $t' \in s$. Wir haben damit einen Widerspruch zur Minimalität von t.

Zu (ii). Falls $x \in s$, gibt es nach (i) ein $t \in s$ mit $x \subseteq t$. Nach Σ-**Kum** ist $t \subseteq s$, also auch $x \subseteq s$.

Zu (iii). Wir nehmen an, es gelte für ein s

$$\exists t \left(t \notin s \wedge t \neq s \wedge s \notin t\right).$$

Wir können annehmen, dass s $\in$-minimal unter den Stufen mit dieser Eigenschaft ist. (Andernfalls wählen wir nach Hilfssatz 3.5(iv) eine $\in_s$-minimale Stufe $s' \in s$, zu der eine Stufe t existiert mit $t \notin s' \wedge t \neq s' \wedge s' \notin t$. Wegen der Transitivität von s (vgl. (ii)) ist dann s' $\in$-minimal.) Entsprechend wählen wir eine $\in$-minimale Stufe t mit

$$t \notin s \wedge t \neq s \wedge s \notin t.$$

Wir zeigen, dass $t = s$, und haben damit einen Widerspruch. Beim Nachweis beschränken wir uns auf $t \subseteq s$: Sei $x \in t$, nach (i) also $x \subseteq t'$ für ein $t' \in t$. Wegen der Minimalität von t gilt

$$t' \in s \vee t' = s \vee s \in t'.$$

Da $t' \in t$ und $s \notin t$, ist $t' \neq s$ und $s \notin t'$, somit ist $t' \in s$ und wegen Σ-**Kum** und $x \subseteq t'$ dann $x \in s$.

Zu (iv). Die Behauptung ergibt sich mit (ii) sofort aus (iii). $\dashv$

Wir kommen nun zu Hilfssatz 3.3 und behandeln die Axiome aus (*).

Zu **Fund.** Sei $x \neq \emptyset$. Wir zeigen, dass x ein $\in$-minimales Element enthält. Nach Σ-**Beschr** gibt es ein s mit $x \in s$, also (vgl. Hilfssatz 3.6(ii)) mit $x \subseteq s$ und daher mit $x \cap s \neq \emptyset$. Wie im Beweis von 3.6(iii) können wir ein $\in$-minimales t gewinnen mit $x \cap t \neq \emptyset$. Sei $z \in x \cap t$ und (vgl. Hilfssatz 3.6(i)) $z \subseteq t' \in t$. Wegen der Minimalität von t ist $x \cap t' = \emptyset$ und daher $x \cap z = \emptyset$, d. h., z ist ein $\in$-minimales Element von x.

Zu $\cup$**-Ax**. Seien x und y gegeben, und seien (man beachte Σ-**Beschr** und Hilfssatz 3.6(ii)) s, t Stufen mit $x \subseteq s$ und $y \subseteq t$. Nach Hilfssatz 3.6(iv) gilt

$s \subseteq t$ oder $t \subseteq s$, also $x, y \subseteq t$ oder $x, y \subseteq s$. Jetzt liefert Σ-**Aus** die Existenz von $x \cup y$ als Teilmenge von t bzw. von s.

Zu $\bigcup$**-Ax**. Sei x gegeben und $x \subseteq s$. Mit $y \in x$ gilt dann $y \in s$, also $y \subseteq s$. Σ-Aussonderung aus s liefert die Existenz von $\bigcup x$.

Zu **Pot**. Zu gegebenem x wähle man (beachte Σ-**Beschr** und Hilfssatz 3.6(i)) s und t mit $t \in s$ und $x \subseteq t$. Für $y \subseteq x$ ist dann $y \subseteq t$, also $y \in s$. Wieder liefert Σ-**Aus** das Gewünschte.

Zu **Inf**. Mit den bisher in $\mathbf{\Sigma}$ bewiesenen **ZF**-Axiomen kann man die Operationen $\cup$, $\bigcup$, Pot und z. B. die Einermengenoperation und die Nachfolgeroperation wie üblich definieren. Leicht lässt sich zeigen:

(∗) Für alle s ist $y = x \cup \{x\}$ absolut für s

(vgl. Satz 1.5(ii)). Nach Σ-**RP** existiert eine Stufe, die $\forall x \exists y\, y = x \cup \{x\}$ spiegelt und die leere Menge enthält, d. h. eine Stufe s mit

$$\emptyset \in s \wedge \big(\forall x \exists y\, y = x \cup \{x\} \leftrightarrow \forall x \big(x \in s \rightarrow \exists y\, (y \in s \wedge [y = x \cup \{x\}]^s)\big)\big),$$

also wegen der Beweisbarkeit von $\forall x \exists y\, y = x \cup \{x\}$ und wegen (∗) mit

$$\emptyset \in s \wedge \forall x\, (x \in s \rightarrow x \cup \{x\} \in s).$$

Es ist s eine induktive Menge.

Zu **Ers.** Sei $\varphi(x, y, \overset{n}{x})$ ein Σ-freier mengentheoretischer Ausdruck und gelte

(1) $$\forall x\, \exists^{=1} y\, \varphi(x, y, \overset{n}{z}).$$

Wir zeigen (das reicht wegen Σ-**Aus** und der Eindeutigkeitsaussage in (1)):

(2) $$\forall u\, \exists v\, \forall x\, \big(x \in u \rightarrow \exists y\, (y \in v \wedge \varphi(x, y, \overset{n}{z}))\big).$$

Sei dazu u gegeben. Wir beweisen anschließend:

(3) $$\exists s\, \big(u, z_1, \ldots, z_n \in s \wedge\ s \text{ spiegelt } \varphi(x, y, \overset{n}{x}) \wedge s \text{ spiegelt } \exists y\, \varphi(x, y, \overset{n}{x})\big).$$

Sei dann s entsprechend gewählt. Ist $x \in u$, also (wegen $u \in s$) auch $x \in s$, so erhalten wir aus (1) und dem letzten Konjunktionsglied in (3):

$$\exists y\, \big(y \in s \wedge [\varphi(x, y, \overset{n}{z})]^s\big),$$

aus dem vorletzten Konjunktionsglied in (3) daher

$$\exists y\, \big(y \in s \wedge \varphi(x, y, \overset{n}{z})\big).$$

Wir können also $v := s$ setzen. Das zeigt (2).

(3) ist ein Spezialfall des auch für $\mathbf{\Sigma}$ beweisbaren Schemas der simultanen Reflektion (vgl. die Aufgaben 3.9.1 und 2.7.1). Wir wählen mit Σ-**RP** eine Stufe s so, dass

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, u, z_1, \ldots, z_n\} \in s, \ \text{ also } \ \emptyset, \{\emptyset\}, u, z_1, \ldots, z_n \ \in s,$$
$$s \text{ spiegelt } \big(z = \emptyset \wedge \varphi(x, y, \overset{n}{x})\big) \vee \big(z \neq \emptyset \wedge \exists y\, \varphi(x, y, \overset{n}{x})\big).$$

Dann erhalten wir für alle $x, y, z \in s$ und alle $x_1, \ldots, x_n \ \in s$ (man beachte, dass $z = \emptyset$ absolut für s ist; vgl. Satz 1.5(iii)):

$$\big[\big(z = \emptyset \wedge \varphi(x, y, \overset{n}{x})\big) \vee \big(z \neq \emptyset \wedge \exists y\, \varphi(x, y, \overset{n}{x})\big)\big] \ \leftrightarrow$$
$$\big[\big(z = \emptyset \wedge [\varphi(x, y, \overset{n}{x})]^s\big) \vee \big(z \neq \emptyset \wedge [\exists y\, \varphi(x, y, \overset{n}{x})]^s\big)\big].$$

Setzen wir einmal $z = \emptyset$, dann $z = \{\emptyset\}$ (und damit $z \neq \emptyset$), ist in beiden Fällen $z \in s$, und wir bekommen

$$\varphi(x, y, \overset{n}{x}) \ \leftrightarrow \ \varphi(x, y, \overset{n}{x})^s \qquad (\text{für } z = \emptyset),$$
$$\exists y\, \varphi(x, y, \overset{n}{x}) \ \leftrightarrow \ \big[\exists y\, \varphi(x, y, \overset{n}{x})\big]^s \quad (\text{für } z = \{\emptyset\}).$$

Damit ist auch (3) gezeigt. ⊣

Die Gleichwertigkeit von **ZF** und $\mathbf{\Sigma}$ bezieht sich zunächst nur auf Σ-freie Ausdrücke. Doch auch die Einbeziehung von Σ bringt keine neuen Aspekte: Mit dem folgenden Satz zeigen wir (vgl. Korollar 3.8), dass $\mathbf{\Sigma}$ äquivalent ist zu der Definitionserweiterung **ZF** $+\Delta$ von **ZF**, wobei wie oben

$$\Delta \ = \ \forall x\, \big(\Sigma x \leftrightarrow \exists \alpha\, x = V_\alpha\big).$$

3.7 Satz. *In* $\mathbf{\Sigma}$ *gilt*: $\forall x\big(\Sigma x \ \leftrightarrow \ \exists \alpha\, x = V_\alpha\big)$, d. h. Δ.

Beweis. Zunächst gilt in **ZF** und damit in $\mathbf{\Sigma}$:

(1) $\forall \alpha\, V_\alpha = \bigcup\{\mathrm{Pot}(V_\beta) \mid \beta < \alpha\}$,
(2) $\forall X\, \big(\forall u\, (u \in X \to \exists \alpha\, u = V_\alpha) \to \exists \alpha\, \bigcup\{\mathrm{Pot}(u) \mid u \in X\} = V_\alpha\big)$,

und aus Hilfssatz 3.6(i) erhalten wir sofort:

(3) $\forall s \forall x\, \big(x \in s \leftrightarrow \exists t\, (t \in s \wedge x \in \mathrm{Pot}(t))\big)$.

Hieraus gewinnen wir für $\mathbf{\Sigma}$ (und damit ist dann die Behauptung bewiesen):

(4) $\forall s\, \exists \alpha\, s = V_\alpha$,
(5) $\forall \alpha\, \Sigma V_\alpha$.

Zu (4). Sei s kein V_α und $\in$-minimal mit dieser Eigenschaft. Nach (3) ist s eine Vereinigung von Mengen der Gestalt $V_{\alpha+\mathbf{1}}$, nach (2) also ein V_α. Widerspruch.

Zu (5). Sei α gegeben und s $\in$-minimal mit $V_\alpha \subseteq s$. Dann gilt für $t \in s$, dass t ein V_β ist (vgl. (4)) mit $V_\alpha \nsubseteq V_\beta$, d. h. mit $\beta < \alpha$. Wir erhalten daher unter Berücksichtigung von (3):

$$V_\alpha \subseteq s \subseteq \bigcup\{\mathrm{Pot}(V_\beta) \mid \beta < \alpha\} \underset{(1)}{=} V_\alpha,$$

also $V_\alpha = s$ und damit ΣV_α. ⊣

3.8 Korollar. *Die Axiomensysteme* $\mathbf{\Sigma}$ *und* $\mathbf{ZF} + \Delta$ *sind äquivalent.*

Beweis. Nach der Anfangsbemerkung im Beweis von Satz 3.2 sind in $\mathbf{ZF} + \Delta$ die Axiome von $\mathbf{\Sigma}$ beweisbar, und nach Hilfssatz 3.3 und Satz 3.7 sind in $\mathbf{\Sigma}$ die Axiome von $\mathbf{ZF} + \Delta$ beweisbar.

3.9 Aufgaben.

3.9.1 Man beweise in $\mathbf{\Sigma}$ für Σ-freie Ausdrücke $\varphi_1(\overset{n}{x}), \ldots, \varphi_m(\overset{n}{x})$ (vgl. Aufgabe 2.7.1):

$$\forall x \exists s \left(x \in s \wedge s \text{ spiegelt } \varphi_1(\overset{n}{x}) \wedge \ldots \wedge s \text{ spiegelt } \varphi_m(\overset{n}{x})\right).$$

3.9.2 Die Variante $\mathbf{RP}'$ des Reflektionsprinzips enthalte für jeden Σ-freien Ausdruck $\varphi(\overset{n}{x})$ die Aussage

$$\forall x \exists y \left(x \subseteq y \wedge y \text{ spiegelt } \varphi(\overset{n}{x})\right).$$

Man zeige, dass auf der Basis von **ZF** ohne **Ers** die Schemata **Ers** und $\mathbf{RP}'$ zueinander äquivalent sind.

3.9.3 Man zeige, dass sich die Stärke des Systems $\mathbf{\Sigma}$ nicht ändert, wenn man in Σ-**RP** auch solche Ausdrücke $\varphi(\overset{n}{x})$ zulässt, die das Symbol Σ enthalten (und $[\Sigma x]^s := \Sigma x$ setzt).

XI

Metamathematische Fragestellungen

> Das ist der garstige breite Graben, über den ich nicht kommen kann, so oft und ernstlich ich auch den Sprung versucht habe. Kann mir jemand hinüberhelfen, der tue es, ich bitte ihn.

Zu Beginn unserer Betrachtungen haben wir in I. 4 unsere Erwartungen an einen axiomatischen Aufbau der Mengenlehre in die folgenden vier Fragen gekleidet:

Die *pragmatische* Frage: *Reicht* **ZFC** *für die Mathematik aus*?

Die *inhaltliche* Frage: *Beschreibt* **ZFC** *unsere Mengenvorstellung adäquat*?

Die *formale* Frage: *Ist* **ZFC** *widerspruchsfrei*?

Die *ehrgeizige* Frage: *Ist* **ZFC** *vollständig*?

Die pragmatische Frage lässt sich weitgehend positiv beantworten. Wir konnten hier nur einen exemplarischen Beitrag leisten, indem wir einige grundlegende Begriffe wie den Funktionsbegriff, den Strukturbegriff und verschiedene Zahlbegriffe bereitgestellt und einige methodische Hilfsmittel wie induktive Definitionen und Beweise und das Auswahlaxiom abgeklärt haben. Allerdings sind wir auch Einschränkungen begegnet, z. B. der Unabhängigkeit der Kontinuumshypothese. Die heute bekannten Einschränkungen dieser Art betreffen zwar nicht den Kern der Mathematik, jedoch sind sie – nicht zuletzt aus prinzipiellen Gründen – so wichtig, dass wir sie im Zusammenhang mit der ehrgeizigen Frage genauer diskutieren wollen.

Zur Behandlung der inhaltlichen Frage bringen wir noch einmal eine Klärung unseres Standpunktes. Wir haben unsere Aufgabe nicht darin gesehen, rein formal und vielleicht sogar losgelöst von aller Intuition einen Katalog von

H.-D. Ebbinghaus, *Einführung in die Mengenlehre*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-63866-8_11

Axiomen aufzustellen, der dann das Ausgangsmaterial für ein gleichsam spielerisches Deduzieren hätte bilden können. Andererseits haben wir unseren Betrachtungen auch nicht ein Universum „an sich“ existierender Mengen unterlegt, das es – zumindest in Teilaspekten – präzis zu beschreiben gelte. Wir haben einen Weg der Mitte beschritten. Ausgangspunkt war die Beobachtung, dass wir Dinge aus unserem Erfahrungskreis gedanklich zu einer Einheit, einem System, einer „Menge“ zusammenfassen können. Unser Ziel bestand darin, eine weitreichende axiomatische und intuitiv vertretbare Beschreibung der Gesamtheit dieser Mengen zu geben. Die mengentheoretischen Antinomien und die mit dem Versuch ihrer Lösung verbundene Revision des Mengenbildes haben uns schon sehr früh gezeigt, dass die aus der unmittelbaren Intuition gewonnene Vorstellung von den Mengen noch recht unvollkommen ist. Wir haben daher bewusst die Möglichkeit eingeschlossen, dass sich unsere Mengenvorstellung während des Prozesses der Axiomatisierung gleichfalls entwickelt: An Hand der Konsequenzen aus den jeweiligen Axiomen können sich neue Züge des Mengenbildes offenbaren, das jene Axiome beschreiben; Unabhängigkeitsbeweise, die erst mit dem Instrument einer formalen Axiomatik möglich werden, können Lücken in der Mengenvorstellung aufspüren. So können Revisionen notwendig werden (Russellsche Antinomie), es können neue, bislang vielleicht noch nicht bewusst gewordene Aspekte in den Vordergrund treten (Fundiertheit, kumulative Hierarchie, Reflektierbarkeit), oder es kann eine Erweiterung des Mengenbildes notwendig werden (Unabhängigkeit der Kontinuumshypothese). Neben der Aufgabe der exakten Beschreibung wird der Axiomatisierung damit eine weitere Funktion zugewiesen: *ein Motor für die Entwicklung des Mengenbegriffs zu sein.*

Berücksichtigen wir diese Wechselwirkung zwischen Mengenvorstellung und Axiomatisierung, müssen wir die inhaltliche Frage korrekter etwa so stellen: *Lässt sich der Mengenbegriff, wie ihn* **ZFC** *beschreibt, intuitiv rechtfertigen*? Unser Bemühen im Zusammenhang mit dem Scottschen Axiomensystem galt dem Ziel, Argumente für eine positive Antwort zusammenzutragen. So zufriedenstellend dies auch gelungen sein mag, es bleiben zwei grundlegende Einschränkungen: Die bereits oben erwähnte Unabhängigkeit der Kontinuumshypothese zeigt, dass in unserem Mengenbild noch Lücken klaffen. Und die überzeugendste intuitive Rechtfertigung von **ZFC** geht ins Leere, wenn **ZFC** nicht widerspruchsfrei sein sollte. Wir werden damit auf die formale und wieder auf die ehrgeizige Frage verwiesen. Ihrer ausführlichen Diskussion sind die ersten drei Abschnitte gewidmet. Im vierten Abschnitt schließlich wollen wir unsere heuristische Vorgehensweise noch einmal gründlicher beleuchten und dabei auch gegen andere mögliche Vorgehensweisen abgrenzen.

§1 Widerspruchsfreiheit und relative Widerspruchsfreiheit

In I. 3 sind wir im Zusammenhang mit der Russellschen Antinomie zum ersten Mal dem *Problem der Widerspruchsfreiheit* begegnet. Wir haben dort erkannt, dass das Fregesche Axiomensystem der Mengenlehre *widerspruchsvoll* ist; es gestattet die Herleitung der Aussage $M_R \in M_R$ und ihres Negats $M_R \notin M_R$ und ist daher für die Zwecke der Mengenlehre und der Mathematik zunächst wertlos. Alle Vorsichtsmaßnahmen, die wir daraufhin bei der Aufstellung der **ZFC**-Axiome (z. B. im Zusammenhang mit der Komprehension; vgl. I. 3 und die Ausführungen vor Satz III.1.3) beachtet haben, und die inhaltlichen Überlegungen in X. 3 schließen Widersprüche nicht grundsätzlich aus und entheben uns daher nicht der *formalen Frage* nach der Widerspruchsfreiheit von **ZFC**.

Die Antwort auf sie müsste *Nein* lauten, gelänge es uns, einen Ausdruck φ anzugeben und zwei Beweise, die zeigen, dass φ und $\neg\varphi$ in **ZFC** gelten. Eine positive Antwort, wie wir sie erhoffen, schließt die Existenz eines solchen Ausdrucks aus. Sie macht also letzten Endes eine Aussage über *alle* möglichen Beweise aus **ZFC** und erfordert daher eine Präzisierung des Beweisbegriffs. Wie wir bereits zu Beginn von Kapitel II betont haben, gehört dazu eine Präzisierung der Sprache und eine exakte Angabe der erlaubten Regeln des Schließens.

Den sprachlichen Rahmen haben wir abgegrenzt durch die mengentheoretische Sprache. Wir haben sie so präzise eingeführt, wie man üblicherweise Programmiersprachen einführt. Obwohl wir bei unseren Argumentationen häufig von der exakten Gestalt der Ausdrücke abgewichen sind, haben wir uns immer wieder davon überzeugt, dass es letztlich diese mengentheoretische Sprache ist, in der die Axiome, die Behauptungen und ihre Beweise formuliert sind. Von einer Präzisierung der Schlussregeln haben wir bislang abgesehen. Hier können wir auf Ergebnisse der *Logik der ersten Stufe* zurückgreifen. Es ist gelungen, für sog. *Sprachen der ersten Stufe* – dazu gehört auch die von uns benutzte mengentheoretische Sprache – ein System von endlich vielen Schlussregeln anzugeben, *das erfahrungsgemäß ausreicht, alle herkömmlichen Beweise nachzuvollziehen, insbesondere also auch alle Beweise, die wir in den vorangehenden Kapiteln geführt haben.* Wir geben hier einen exemplarischen Einblick. Der interessierte Leser sei etwa auf *Ebbinghaus, Flum und Thomas 2018* verwiesen.

Einige der Schlussregeln sind:

(R1) Man kann stets von φ auf φ schließen.

(R2) Falls man von $\chi_1, \ldots, \chi_m$ auf $(\varphi \wedge \psi)$ schließen kann,
kann man von $\chi_1, \ldots, \chi_m$ auch auf φ schließen.

(R3) Falls man von $\chi_1, \ldots, \chi_m$ auf $(\varphi \wedge \psi)$ schließen kann, kann man von $\chi_1, \ldots, \chi_m$ auch auf ψ schließen.

(R4) Falls man von $\chi_1, \ldots, \chi_m$ auf φ und falls man von $\chi_1, \ldots, \chi_m$ auf ψ schließen kann, kann man von $\chi_1, \ldots, \chi_m$ auch auf $(\varphi \wedge \psi)$ schließen.

Als Beispiel für einen Beweis unter Benutzung der angegebenen Schlussregeln zeigen wir, dass man von $(\varphi \wedge \psi)$ auf $(\psi \wedge \varphi)$ schließen kann. Zunächst erhalten wir mit (R1):

(a) Man kann von $(\varphi \wedge \psi)$ auf $(\varphi \wedge \psi)$ schließen.

(R2) bzw. (R3) führen mit (a) zu:

(b) Man kann von $(\varphi \wedge \psi)$ auf φ schließen.
(c) Man kann von $(\varphi \wedge \psi)$ auf ψ schließen.

Mit (R4) und (c), (b) gelangen wir dann zu

(d) Man kann von $(\varphi \wedge \psi)$ auf $(\psi \wedge \varphi)$ schließen.

Wir können jetzt präzisieren:

1.1 Definition. Es sei S ein mengentheoretisches Axiomensystem.

(i) Der Ausdruck φ ist aus S *formal beweisbar* (kurz: $S \vdash \varphi$) genau dann, wenn es Axiome $\chi_1, \ldots, \chi_m$ aus S gibt, so dass man mit den Schlussregeln der Logik erster Stufe von $\chi_1, \ldots, \chi_m$ auf φ schließen kann.

(ii) S heißt *formal widerspruchsfrei* (kurz: Wf S) genau dann, wenn es keinen parameterfreien Ausdruck[1] φ gibt mit $S \vdash \varphi$ und $S \vdash \neg\varphi$, d. h. kein solches φ mit $S \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$. Andernfalls heißt S *formal widerspruchsvoll.*

Wie wir bereits betont haben, zeigt die Erfahrung, dass der formale Beweisbarkeitsbegriff mit dem intuitiven Begriff der Beweisbarkeit zusammenfällt, so erstaunlich das auch angesichts der Einfachheit der zugrunde liegenden Schlussregeln erscheinen mag. Mithin fällt auch der Begriff der formalen Widerspruchsfreiheit mit dem der Widerspruchsfreiheit zusammen. Wir können die formale Frage also präzisieren zu

$$(*) \qquad \text{Gilt Wf } \mathbf{ZFC}\,?$$

Wie das obige Beispiel eines präzisen Beweises zeigt, besteht präzises Beweisen im Manipulieren von Zeichenreihen nach festen Regeln. Einen Ausdruck in **ZFC** exakt zu beweisen, heißt gleichsam, ihn aus gewissen Axiomen von **ZFC** nach diesen Regeln zu „produzieren“. Die Frage $(*)$ ist daher semiotisch-kombinatorischer Natur. Eine positive Antwort, wie wir sie erhoffen, müsste

[1] Die Parameterfreiheit ist unwesentlich, aber an späterer Stelle nützlich.

uns die Einsicht vermitteln, dass kein φ existiert mit $\mathbf{ZFC} \vdash \varphi$ und $\mathbf{ZFC} \vdash \neg\varphi$. Von einer Argumentation, die uns zu dieser Einsicht führen soll, erwarten wir, dass sie einen elementaren Charakter hat. Wir sind in diesem Zusammenhang sicher bereit, metasprachliche Induktionsbeweise (vgl. III. 3) zu akzeptieren. Wir sind aber wohl kaum bereit, die Zermelo-Fraenkelsche Mengenlehre (jetzt in der Metasprache) zuzulassen. „Komplizierte“ Argumentationen würden ja die Frage nach der Widerspruchsfreiheit von **ZFC** nur verlagern auf die Frage nach einer Rechtfertigungsmöglichkeit für diese Argumentationen. Der hier angeschnittene Problemkreis gehört in das Gebiet der sog. *Beweistheorie*. Dort werden auch Präzisierungen dessen vorgeschlagen, was elementare Argumentationen sind. Damit kann man dann die Frage $(*)$ umformulieren zu

$(**)$ Gibt es eine elementare Argumentation dafür, dass Wf **ZFC**?

Ein zentraler Satz der mathematischen Logik, der sog. *Zweite Gödelsche Unvollständigkeitssatz*, verneint diese Frage nicht nur für **ZFC**, sondern für eine große Klasse von Axiomensystemen, zu der insbesondere Axiomensysteme der Theorie der natürlichen Zahlen gehören. Ist **ZFC** wirklich widerspruchsfrei, so können wir nach diesem Satz die Widerspruchsfreiheit selbst dann nicht zeigen, wenn wir Hilfsmittel der Stärke zulassen, wie sie uns **ZFC** selbst zur Verfügung stellt. Einzelheiten entnehme man, wie auch im Folgenden, *Ebbinghaus, Flum und Thomas 2018*. Prägnant können wir wie in I. 4 zusammenfassen: *Wir werden nie sicher wissen, dass* **ZFC** *widerspruchsfrei ist.*

Wenn die Mengenlehre sich trotzdem sehr intensiv dem Widerspruchsfreiheitsproblem zugewandt hat, so nicht mit dem unerreichbaren Ziel einer vollständigen positiven Lösung, sondern mit der bescheideneren Absicht einer *Reduktion* des Problems durch sog. *relative Widerspruchsfreiheitsbeweise*, wie wir sie in der Einleitung zu Kapitel X bereits erwähnt haben. Ihr Ziel besteht darin, die Frage nach der Widerspruchsfreiheit eines stärkeren Systems T auf die Widerspruchsfreiheit eines schwächeren Systems S zu reduzieren, und zwar durch eine elementare Argumentation. Wir wollen dies am Beispiel einer wichtigen Reduktionsmethode, der *Methode der inneren Modelle*, kurz skizzieren. Kern ist der folgende Sachverhalt:

1.2 Satz (über relative Widerspruchsfreiheitsbeweise mit inneren Modellen)**.** *S und T seien mengentheoretische Axiomensysteme, und P sei ein parameterfreies einstelliges Prädikat. Es gelte*

(1) Wf S;

(2) $S \vdash \exists x Px$;

(3) $S \vdash \varphi^P$ *für alle* φ *aus* T.

Dann ist Wf T.

Beweisskizze. Die Voraussetzungen seien erfüllt. Zunächst machen wir uns die Behauptung inhaltlich klar: (1) besagt (genauer handelt es sich um eine Folgerung aus (1) und dem *Gödelschen Vollständigkeitssatz*), dass die Axiome von S in einem geeigneten Universum $\mathfrak{U}$ gelten. $\mathfrak{P}$ sei der – nach (2) nicht leere – Teilbereich von $\mathfrak{U}$, der durch P beschrieben wird. Dann besagt (3), dass die Axiome von T im Teiluniversum $\mathfrak{P}$ gelten und damit widerspruchsfrei sein müssen. $\mathfrak{P}$ ist ein *Modell* von T, das *innerhalb von* $\mathfrak{U}$ liegt. Daher die Bezeichnung „Methode der inneren Modelle". Bedingung (2) ist nötig, weil die Schlussregeln auf nicht leere Universen zugeschnitten sind.

Nun eine genauere Argumentation. Wir nehmen an, φ wäre parameterfrei mit

$$T \vdash \varphi \wedge \neg\varphi,$$

es gäbe also Axiome $\chi_1, \ldots, \chi_m$ aus T, von denen man mit den Schlussregeln der Logik erster Stufe auf $\varphi \wedge \neg\varphi$ schließen kann. Dann lässt sich durch metasprachliche Induktion über die Länge eines entsprechenden Beweises zeigen, dass man von $\exists x Px, \chi_1^P, \ldots, \chi_m^P$ auf $(\varphi \wedge \neg\varphi)^P$, d. h. auf $\varphi^P \wedge \neg\varphi^P$, schließen kann. Da man in S gemäß (2) auf $\exists x Px$ und gemäß (3) auf die χ_j^P schließen kann, ergäbe sich insgesamt

$$S \vdash \varphi^P \wedge \neg\varphi^P;$$

S wäre also entgegen (1) nicht widerspruchsfrei. ⊣[2]

Als eine einfache Anwendung bringen wir

1.3 Satz. *Wenn* Wf $\mathbf{ZF}^0$, *so* Wf $\mathbf{ZF}$.

Hierbei stehe, wie fortan, $\mathbf{ZF}^0$ für $\mathbf{ZF}$ ohne **Fund**. Sollte also das Zermelo-Fraenkelsche Axiomensystem ohne Fundierungsaxiom widerspruchsfrei sein, so bleibt die Widerspruchsfreiheit bei Hinzunahme des Fundierungsaxioms erhalten.

Beweis. Wir wenden Satz 1.2 an mit

$$S := \mathbf{ZF}^0, \quad T := \mathbf{ZF}, \quad Px :\leftrightarrow \mathbf{V}x$$

(wobei wir genauer statt mit $\mathbf{V}x$ mit einer mengentheoretischen Definition von $\mathbf{V}$ arbeiten, die keine definierten Symbole enthält). Bei der folgenden Argumentation beachten wir, dass wir in VII. 3 die Eigenschaften der von Neumannschen Hierarchie auf der Basis von $\mathbf{ZF}^0$ bewiesen haben. Wie schon früher stehe $x \in \mathbf{V}$ für $\mathbf{V}x$ und $x \subseteq \mathbf{V}$ für $\forall y\,(y \in x \to \mathbf{V}y)$.

[2] Die letzte Argumentation (genauer: ihre sorgfältige Vervollständigung) ist elementar, die Zurückführung der Widerspruchsfreiheit von T auf die von S kann also elementar erfolgen.

Da $\mathbf{ZF}^0 \vdash \exists x \mathbf{V} x$, bleibt nur zu zeigen, dass für alle **ZF**-Axiome φ

$$\mathbf{ZF}^0 \vdash \varphi^{\mathbf{V}}.$$

Zum Nachweis argumentieren wir in $\mathbf{ZF}^0$ wie gewohnt. Nützlich ist es, sich daran zu erinnern, dass $\mathbf{V}$ ein (bzgl. $\mathbf{ZF}^0$) transitives Prädikat ist und daher gewisse Absolutheitseigenschaften besitzt (vgl. hierzu Satz X.1.5 und Aufgabe X.1.6.2).

Zu **Ex**: Wir haben $\exists x(\mathbf{V}x \wedge x = x)$.

Zu **Ext**: Seien $x, y \in \mathbf{V}$. Wir müssen zeigen:

$$[x \subseteq y]^{\mathbf{V}} \wedge [y \subseteq x]^{\mathbf{V}} \to x = y,$$

also, da $\mathbf{V}$ transitiv ist (vgl. Satz X.1.5(i)):

$$x \subseteq y \wedge y \subseteq x \to x = y,$$

und das ergibt sich sofort aus **Ext**.

Zu **Aus**: Sei $\varphi(z, \overset{n}{x})$ gegeben, und seien $x, x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{V}$. Dann ist mit $x \subseteq \mathbf{V}$ auch $y := \{z \in x \mid \varphi(z, \overset{n}{x})^{\mathbf{V}}\} \subseteq \mathbf{V}$, also (vgl. Satz VII.3.5(iii)) $y \in \mathbf{V}$, und es gilt $[\forall z\, (z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge \varphi(z, \overset{n}{x}))]^{\mathbf{V}}$.

Zu $\cup$**-Ax**: Seien $x, y \in \mathbf{V}$. Dann ist $w := x \cup y \subseteq \mathbf{V}$, also $w \in \mathbf{V}$, und es gilt $[\forall z\, (z \in w \leftrightarrow (z \in x \vee z \in y))]^{\mathbf{V}}$.

Ähnlich behandelt man $\bigcup$**-Ax**, **Pot** und **Inf**.

Zu **Ers**: Wir behandeln ein parameterfreies Beispiel $\varphi(x, y)$. Gelte also

$$\left[\forall x \exists^{=1} y\, \varphi(x, y)\right]^{\mathbf{V}},$$

d. h.

$$\forall x\, \big(x \in \mathbf{V} \to \exists^{=1} y\, \big(y \in \mathbf{V} \wedge \varphi(x, y)^{\mathbf{V}}\big)\big),$$

und sei $u \in \mathbf{V}$ (und daher auch $u \subseteq \mathbf{V}$). Wir haben zu zeigen, dass es ein $v \in \mathbf{V}$ gibt mit

$$v = \{y \mid \exists x \big(x \in u \wedge x \in \mathbf{V} \wedge y \in \mathbf{V} \wedge \varphi(x, y)^{\mathbf{V}}\big)\},$$

d. h. mit

$$v = \{y \mid \exists x\, \big(x \in u \wedge \psi(x, y)\big)\},$$

wobei

$$\psi(x, y) \;:=\; \big(x \in \mathbf{V} \wedge y \in \mathbf{V} \wedge \varphi(x, y)^{\mathbf{V}}\big) \vee \big(x \notin \mathbf{V} \wedge y = \emptyset\big).$$

Da $\forall x \exists^{=1} y\, \psi(x, y)$, gewinnen wir solch ein v mit **Ers**. Offenbar ist $v \subseteq \mathbf{V}$, also $v \in \mathbf{V}$.

Zu **Fund**: Sei $x \in \mathbf{V}$ gegeben und gelte $[\neg x = \emptyset]^{\mathbf{V}}$, d. h. (vgl. Satz X.1.5(iii)) $\neg x = \emptyset$. Sei dann y ein Element von x mit minimalem Rang. Offensichtlich haben wir $y \in \mathbf{V}$ und $[\neg \exists z(z \in x \wedge z \in y)]^{\mathbf{V}}$. $\dashv$

Die Tatsache, dass in $\mathbf{ZF}^0$ die $\mathbf{V}$-Relativierungen aller **ZF**-Axiome beweisbar sind, fassen wir in die anschauliche Redeweise:

1.4. **V** *ist bzgl.* $\mathbf{ZF}^0$ *ein inneres Modell von* **ZF**.

Wenn wir die Argumentation, die uns zum Beweis von Satz 1.3 geführt hat, noch einmal betrachten, so stellen wir fest, dass sie es gestattet, zu jeder Deduktion eines Widerspruchs in **ZF** effektiv die Deduktion eines Widerspruchs in $\mathbf{ZF}^0$ herzustellen: Nach Satz 1.2 relativieren wir eine solche Deduktion nach **V** (dies geht, wie wir dort angemerkt haben, effektiv) und beweisen dann die **V**-Relativierungen der (endlich vielen) **ZF**-Axiome, die sie benötigt, auf der Basis von $\mathbf{ZF}^0$. Unser Beweis liefert dazu eine konkrete Anleitung. Um einzusehen, dass diese Anleitung stets durchführbar ist und das gewünschte Resultat liefert, benötigt man neben konkreten Schlüssen lediglich metasprachliche Induktionen. Die relativen Widerspruchsfreiheitsbeweise, auf die wir anschließend noch zu sprechen kommen, werden gleichfalls diese Effektivitätseigenschaft besitzen.

1.5 Aufgaben.

1.5.1 Man zeige: Wenn Wf **ZF**, so Wf (**ZF** ohne **Inf**) + $\neg$ **Inf**.

1.5.2 Es sei **Z** das Axiomensystem **ZF** ohne **Ers**. Man zeige (zu (i) und (ii) vgl. man die Aufgabe X.2.7.3):

(i) Für alle **Z**-Axiome φ gilt $\mathbf{ZF} \vdash \forall \delta\, (\omega < \delta \to \varphi^{V_\delta})$.

(ii) Wenn Wf **ZF**, so Wf $\mathbf{Z} + \forall \delta\, \delta = \omega$. Wenn Wf **ZF**, ist also in **Z** nicht beweisbar, dass eine Limeszahl größer als ω existiert, **ZF** ist dann also stärker als **Z**.

(iii) Wenn Wf **ZF**, so Wf $\mathbf{Z} + \neg \exists x \big(\omega \in x \wedge \forall z\, (z \in x \to \mathrm{Pot}(z) \in x)\big)$.

§2 Die konstruktible Hierarchie – Ein Exkurs

Zum Abschluss unserer Betrachtungen zur relativen Widerspruchsfreiheit beschreiben wir einen Beweis des für die Mengenlehre wohl wichtigsten Resultats solcher Art, das auf Gödel (1938) zurückgeht: Mit der Methode der inneren Modelle zeigen wir, dass die Hinzunahme des lange Zeit umstrittenen Auswahlaxioms (und zugleich die der allgemeinen Kontinuumshypothese) zu **ZF** dessen (hoffentlich vorhandene) Widerspruchsfreiheit nicht zerstört:

2.1 Satz. *Wenn* Wf **ZF**, *so* Wf **ZF** + **AC** + GCH.

Bevor wir uns dem Beweis zuwenden, vermerken wir noch, dass die bisherigen Resultate zur relativen Widerspruchsfreiheit auch für die Negate der darin betrachteten Aussagen gelten:

2.2 Satz. (i) *Wenn* Wf $\mathbf{ZF}^0$, *so* Wf $\mathbf{ZF}^0 + \neg\mathbf{Fund}$.

(ii) *Wenn* Wf **ZF**, *so* Wf **ZF** + ¬**AC**.

(iii) *Wenn* Wf **ZF**, *so* Wf **ZFC** + ¬GCH.

Die Beweise können hier nicht mit der Methode der inneren Modelle geführt werden; sie erfordern neue Techniken, für (ii) und (iii) (Paul Cohen 1963) z. B. die sog. *Erzwingungs-* oder *Forcing-Methode* (vgl. *Kunen 1980/2011*).

Nun zurück zu Satz 2.1. Sein Beweis verläuft ähnlich wie der von Satz 1.3, ist aber ungleich schwieriger. Die Rolle von **V** übernimmt jetzt das Prädikat **L** der *konstruktiblen* Mengen. Ziel ist ein „übersichtliches" und „langsam wachsendes" Mengenuniversum, „übersichtlich" in dem Sinn, dass es die Definition von Auswahlmengen erlaubt, und „langsam wachsend" in dem Sinn, dass die Potenzmengen möglichst klein bleiben, um die Gültigkeit von GCH zu sichern. Die „Übersichtlichkeit" wird sich darin äußern, dass das Universum als definierbar wohlgeordnet nachgewiesen werden kann.

Um das Ziel zu erreichen, ersetzt man die Potenzmengenoperation durch die Bildung der Menge aller *definierbaren* Teilmengen einer Menge. Dabei sei, anschaulich gesprochen, die Menge x eine *definierbare Teilmenge* der Menge y, wenn es einen mengentheoretischen Ausdruck $\varphi(z, \overset{n}{x})$ und Parameter $x_1, \ldots, x_n \in y$ gibt mit

$$x = \bigl\{z \in y \mid [\varphi(z, \overset{n}{x})]^y\bigr\}.$$

Die Menge $\mathrm{Defpot}(y)$ aller definierbaren Teilmengen von y lässt sich nicht unmittelbar in unserer mengentheoretischen Sprache beschreiben, weil wir in ihr nicht über Ausdrücke sprechen oder gar quantifizieren können. Ähnlich jedoch, wie wir mit der Menge ω einen adäquaten mengentheoretischen Ersatz für die naiven natürlichen Zahlen gefunden haben, kann man auch für Ausdrücke und die mit ihnen zusammenhängenden Begriffe wie den Begriff des Parameters oder den des Geltens einen adäquaten mengentheoretischen Ersatz finden und dann in **ZF** eine Operation Defpot mit den gewünschten Eigenschaften definieren. Wir werden dies weiter unten tun. Insbesondere werden wir dort zeigen:

2.3 Hilfssatz. *In* **ZF** *gilt*: (i) $\forall y\ \mathrm{Defpot}(y) \subseteq \mathrm{Pot}(y)$.

(ii) (Schema) *Für alle* $\varphi(z, \overset{n}{x})$:

$$\forall y \forall \overset{n}{x}\ \bigl(x_1 \in y \wedge \ldots \wedge x_n \in y \rightarrow \bigl\{z \in y \mid [\varphi(z, \overset{n}{x})]^y\bigr\} \in \mathrm{Defpot}(y)\bigr).$$

2.4 Definition der *konstruktiblen Hierarchie*:

$$\begin{aligned} L_x &:= \emptyset, \text{ falls } \neg \mathrm{Oz}\, x; \\ L_{\mathbf{0}} &:= \emptyset; \\ L_{\alpha+\mathbf{1}} &:= \mathrm{Defpot}(L_\alpha); \\ L_\delta &:= \bigcup\{L_\beta \mid \beta < \delta\}. \end{aligned}$$

Wir setzen

$$\mathbf{L}x \;:\leftrightarrow\; \exists \alpha\, x \in L_\alpha.$$

Fortan schreiben wir häufig $x \in \mathbf{L}$ für $\mathbf{L}x$ und $x \subseteq \mathbf{L}$ für $\forall z\, (z \in x \rightarrow z \in \mathbf{L})$ und definieren den L-Rang durch

$$L\text{-Rg}\,(x) \;:=\; \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } x \notin \mathbf{L}; \\ \text{das kleinste } \alpha \text{ mit } x \in L_{\alpha+\mathbf{1}}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Im Kern werden wir zeigen, dass $\mathbf{L}$ bzgl. **ZF** ein inneres Modell von **ZF** + **AC** + GCH ist. Nach Satz 1.2 wird damit Satz 2.1 bewiesen sein.

Zunächst einige grundlegende Eigenschaften. In Analogie zu Satz VII.3.2 und Satz VII.3.5(i), (ii) und der Richtung „$\rightarrow$“ von (iii) gilt:

2.5 Hilfssatz. (i) *L_α ist transitiv.*

(ii) $\beta < \alpha \rightarrow L_\beta \in L_\alpha$.

(iii) $\beta \leq \alpha \rightarrow L_\beta \subseteq L_\alpha$.

(iv) L-$\mathrm{Rg}(\alpha) = \alpha$, *insbesondere also* $\alpha \in \mathbf{L}$.

(v) $x, y \in \mathbf{L} \wedge x \in y \rightarrow L\text{-}\mathrm{Rg}(x) < L\text{-}\mathrm{Rg}(y)$.

(vi) $x \in \mathbf{L} \rightarrow x \subseteq \mathbf{L}$.

Beweis. Zu (i): Wir führen den Beweis durch transfinite Induktion über α. Im Nachfolgerschritt schließen wir folgendermaßen: Sei $x \in y$ und $y \in L_{\alpha+\mathbf{1}}$. Da $y \subseteq L_\alpha$, ist $x \in L_\alpha$, also nach Induktionsvoraussetzung $x \subseteq L_\alpha$. Daher gilt mit Hilfssatz 2.3, dass

$$x = \left\{z \in L_\alpha \mid [z \in x]^{L_\alpha}\right\} \in \mathrm{Defpot}(L_\alpha) = L_{\alpha+\mathbf{1}}.$$

Zu (ii): Da stets

$$L_\alpha = \left\{z \in L_\alpha \mid [z = z]^{L_\alpha}\right\} \in L_{\alpha+\mathbf{1}},$$

können wir den Beweis von Satz VII.3.2(ii) auf L übertragen. Teil (iii) ergibt sich jetzt sofort aus (i) und (ii).

Zu (iv): Wir führen den Beweis durch transfinite Induktion über α. Zunächst ist $\mathbf{0} = L_{\mathbf{0}} \in L_{\mathbf{1}} \setminus L_{\mathbf{0}}$, also L-$\mathrm{Rg}\,(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Sei, im Nachfolgerschritt, L-$\mathrm{Rg}\,(\alpha) = \alpha$. Dann ist $\alpha + \mathbf{1} \subseteq L_{\alpha+\mathbf{1}}$ und

$$\alpha+\mathbf{1} \;=\; \left\{z \in L_{\alpha+\mathbf{1}} \mid \left[z = \alpha \vee z \in \alpha\right]^{L_{\alpha+\mathbf{1}}}\right\} \in L_{\alpha+\mathbf{2}}.$$

Wäre $\alpha{+}\mathbf{1} \in L_{\alpha+\mathbf{1}}$, so wäre $\alpha \cup \{\alpha\} \subseteq L_\alpha$, also $\alpha \in L_\alpha$, ein Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung. Im Limesschritt zu δ ist wegen $\alpha \in L_{\alpha+\mathbf{1}}$ für $\alpha < \delta$ zunächst $\delta \subseteq L_\delta$, also wegen der Transitivität von L_δ

$$\delta \;=\; \big\{z \in L_\delta \mid \big[\text{transitiv}\, z \wedge \text{ konnex}\, z\big]^{L_\delta}\big\} \in L_{\delta+\mathbf{1}}.$$

Wäre $\delta \in L_\delta$, so für ein $\alpha < \delta$ bereits $\delta \in L_\alpha$, also $\alpha \in \delta \subseteq L_\alpha$, ein Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung.

Zu (v): Mit $x, y \in \mathbf{L}$ und $x \in y$ ist $x \in y \subseteq L_{L\text{-Rg}(y)}$, also L-Rg$(x) < L$-Rg(y).

Teil (vi) ergibt sich sofort aus (i). ⊣

Der erste Schritt im Beweis von Satz 2.1 ist

2.6 Hilfssatz. L *ist bzgl.* **ZF** *ein inneres Modell von* **ZF**.

Beweis. Der Beweis für die Axiome **Ex**, **Ext**, $\cup$-**Ax**, $\bigcup$-**Ax** und **Inf** ergibt sich leicht mit Hilfssatz 2.5, von dem wir fortan zumeist stillschweigend Gebrauch machen, und mit Hilfssatz 2.3.

Zu **Pot**: Sei $x \in \mathbf{L}$. Für $z \in \mathbf{L}$ gilt $z \subseteq x \leftrightarrow [z \subseteq x]^{\mathbf{L}}$. Es reicht daher, für die Teilmenge

$$u := \{z \in \mathbf{L} \mid z \subseteq x\}$$

von Pot(x) zu zeigen, dass $u \in \mathbf{L}$. Sei

$$\beta := \sup\{L\text{-Rg}\,(z) + \mathbf{1} \mid z \in u\}.$$

Dann ist $u \subseteq L_\beta$, also

$$u = \{z \in L_\beta \mid [z \subseteq x]^{L_\beta}\} \in \text{Defpot}(L_\beta) = L_{\beta+\mathbf{1}} \subseteq \mathbf{L}.$$

Zu **Fund**: Sei $x \in \mathbf{L}$ mit $[x \neq \emptyset]^{\mathbf{L}}$, also $x \neq \emptyset$. Sei weiter $y \in x$ von minimalem L-Rang. Dann gilt offensichtlich $[\neg\exists z(z \in x \wedge z \in y)]^{\mathbf{L}}$.

Zu **Aus**: Die Operation L und das Prädikat $\mathbf{L}$ erfüllen die Bedingungen an F und $\mathbf{F}$ in Aufgabe X.2.7.8. Daher gilt für alle $\varphi(\overset{n}{x})$:

$$(*)\qquad \begin{aligned}&\forall x\,\big(\mathbf{L}x \to \exists\alpha\,\big(x \in L_\alpha \wedge\\ &\forall x_1 \ldots \forall x_n\,(x_1 \in L_\alpha \wedge \ldots \wedge x_n \in L_\alpha \to (\varphi(\overset{n}{x})^{L_\alpha} \leftrightarrow \varphi(\overset{n}{x})^{\mathbf{L}}))\big)\big).\end{aligned}$$

Sei jetzt $\varphi(z, \overset{n}{x})$ gegeben, und seien $x, x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{L}$. Wir müssen zeigen:

$$(**)\qquad \exists y\,\big(y \in \mathbf{L} \wedge y = \big\{z \in x \mid \varphi(z, \overset{n}{x})^{\mathbf{L}}\big\}\big).$$

Dazu wählen wir β so groß, dass $x, x_1, \ldots, x_n \in L_\beta$. Nach Hilfssatz 2.3(ii) ist dann

$$w \;:=\; \big\{x, x_1, \ldots, x_n\big\} \;=\; \big\{u \in L_\beta \mid [u = x \vee u = x_1 \vee \ldots \vee u = x_n]^{L_\beta}\big\}$$

ein Element von $L_{\beta+\mathbf{1}}$, also $w \in \mathbf{L}$. Sei α gemäß (*) zu w und $\varphi(z, \overset{n}{x})$ gewählt. Wir haben damit $x, x_1, \ldots, x_n \in L_\alpha$, und für alle $z \in L_\alpha$ gilt

$$[\varphi(z, \overset{n}{x})]^{\mathbf{L}} \leftrightarrow [\varphi(z, \overset{n}{x})]^{L_\alpha}.$$

Setzen wir

$$\begin{aligned} y \;&:=\; \{z \in x \mid \varphi(z, \overset{n}{x})^{\mathbf{L}}\} = \{z \in L_\alpha \mid z \in x \wedge [\varphi(z, \overset{n}{x})]^{L_\alpha}\} \\ &=\; \{z \in L_\alpha \mid [z \in x \wedge \varphi(z, \overset{n}{x})]^{L_\alpha}\} \in L_{\alpha+\mathbf{1}}, \end{aligned}$$

ist also (**) gezeigt.

Zu **Ers**: Wir betrachten den parameterfreien Fall. Gelte also $[\forall x \exists^{=1} y\, \varphi(x, y)]^{\mathbf{L}}$ und damit

$$\forall x \big(x \in \mathbf{L} \to \exists^{=1} y\, (y \in \mathbf{L} \wedge \varphi(x, y)^{\mathbf{L}})\big).$$

Sei $u \in \mathbf{L}$ gegeben. Da wir über die $\mathbf{L}$-Relativierungen von **Aus** verfügen, brauchen wir nur zu zeigen:

$$\exists w\, \big(w \in \mathbf{L} \wedge \forall x \forall y\, \big((x \in u \wedge y \in \mathbf{L} \wedge \varphi(x, y)^{\mathbf{L}}) \to y \in w\big)\big).$$

Sei $\psi(x, y) := (x \in \mathbf{L} \wedge y \in \mathbf{L} \wedge \varphi(x, y)^{\mathbf{L}}) \vee (\neg x \in \mathbf{L} \wedge y = \emptyset)$. Dann gilt $\forall x \exists^{=1} y\, \psi(x, y)$. Nach **Ers** existiert daher die Menge

$$v \;:=\; \{y \mid \exists x\, \big(x \in u \wedge y \in \mathbf{L} \wedge \varphi(x, y)^{\mathbf{L}}\big)\} \subseteq \mathbf{L}.$$

Sei α minimal mit $v \subseteq L_\alpha$. Dann leistet $w := L_\alpha$ das Gewünschte. ⊣

Um den Beweis von Hilfssatz 2.6 zu beenden, bedarf es noch einer Definition der Operation Defpot und eines Beweises von Hilfssatz 2.3. Beidem wenden wir uns jetzt zu. Der wesentliche Schritt besteht darin, einen mengentheoretischen Aufbau von Syntax und Semantik der mengentheoretischen Sprache zu geben.

Innere Syntax. Wir modellieren die Variablen $v_0, v_1, \ldots$ der mengentheoretischen Sprache durch die Elemente von ω und die Zeichen $=, \in, \neg, \vee, \exists$ durch die Mengen $=^{\text{in}} := (\mathbf{0}, \mathbf{0})$, $\in^{\text{in}} := (\mathbf{0}, \mathbf{1})$, $\neg^{\text{in}} := (\mathbf{0}, \mathbf{2})$, $\vee^{\text{in}} := (\mathbf{0}, \mathbf{3})$ und $\exists^{\text{in}} := (\mathbf{0}, \mathbf{4})$. Die übrigen Junktoren und der Allquantor sind entbehrlich, weil sie durch $\neg, \vee, \exists$ definiert werden können. Wir sprechen von den $i \in \omega$ in diesem Zusammenhang als von *inneren Variablen*, von $=^{\text{in}}$ als dem *inneren Gleichheitszeichen*, usf. Dabei soll der *inner*-Zusatz andeuten, dass wir uns *in* der Mengenlehre bewegen und nicht im metasprachlichen, *äußeren* Bereich der mengentheoretischen Sprache, in der unsere Axiome formuliert sind. Wie in den gerade gebrachten Beispielen deuten wir innere, d. h. mengentheoretische, Modellierungen in der Regel durch einen oberen Index $^{\text{in}}$ an der äußeren Bezeichnung an, schreiben also oft anschaulicher v_i^{in} anstelle von i, wenn wir i nicht als mengentheoretische natürliche Zahl, sondern als innere Variable verstehen. Von den Ausdrücken der mengentheoretischen Sprache sprechen wir fortan genauer als von *äußeren* Ausdrücken. Den äußeren atomaren Ausdrücken $v_n = v_m$ bzw. $v_n \in v_m$ entsprechen die *inneren atomaren Ausdrücke* $v_i^{\text{in}} =^{\text{in}} v_j^{\text{in}} := (v_i^{\text{in}}, =^{\text{in}}, v_j^{\text{in}})$ bzw. $v_i^{\text{in}} \in^{\text{in}} v_j^{\text{in}} := (v_i^{\text{in}}, \in^{\text{in}}, v_j^{\text{in}})$.[3] Mit $\varphi^{\text{in}}, \psi^{\text{in}}$ als Variablen für innere Ausdrücke sei dann weiter $\neg^{\text{in}}\varphi^{\text{in}} := (\neg^{\text{in}}, \varphi^{\text{in}})$, $(\varphi^{\text{in}} \vee^{\text{in}} \psi^{\text{in}}) := (\varphi^{\text{in}}, \vee^{\text{in}}, \psi^{\text{in}})$ und $\exists^{\text{in}} v_i^{\text{in}}\, \varphi^{\text{in}} := (\exists^{\text{in}}, v_i^{\text{in}}, \varphi^{\text{in}})$. Der metasprachlichen induktiven Definition der äußeren Ausdrücke entspricht jetzt die folgende rekursive Definition der „Ausdrucksfunktion" A auf ω, die mit der Menge der inneren atomaren Ausdrücke beginnt. Wir schreiben die Argumente als untere Indizes.

$$\mathsf{A}_{\mathbf{0}} := \omega \times \{=^{\text{in}}, \in^{\text{in}}\} \times \omega,$$

$$\forall i\ \mathsf{A}_{i+\mathbf{1}} := \mathsf{A}_i \cup \big(\{\neg^{\text{in}}\} \times \mathsf{A}_i\big) \cup \big(\mathsf{A}_i \times \{\vee^{\text{in}}\} \times \mathsf{A}_i\big) \cup \big(\{\exists^{\text{in}}\} \times \omega \times \mathsf{A}_i\big).$$

Es sei

$$\mathsf{A}^{\text{in}} := \bigcup \{\mathsf{A}_i \mid i \in \omega\}$$

die *Menge der inneren Ausdrücke*. Leicht lässt sich zeigen:

2.7 Hilfssatz. $\mathsf{A}^{\text{in}} \subseteq V_\omega$. ⊣

Falls $\varphi^{\text{in}} \in \mathsf{A}_{i+\mathbf{1}} \setminus \mathsf{A}_i$, habe φ^{in} den A^{in}-Rang i. Die im Folgenden angesprochenen Definitionen und Beweise für innere Ausdrücke können in exakter Form induktiv über den A^{in}-Rang geführt werden; das entspricht der metasprachlichen Induktion über den Aufbau der äußeren Ausdrücke.

Die in der Lösung zu Aufgabe VII.1.5.5 gegebene induktive Definition von par über den Aufbau der äußeren Ausdrücke – par ordnet einem äußeren Ausdruck die (naive) Menge der in ihm vorkommenden Parameter zu – lässt sich nach innen übertragen. Wir setzen dazu:

$$\begin{aligned}
\text{par}^{\text{in}}(v_i^{\text{in}} =^{\text{in}} v_j^{\text{in}}) &:= \{v_i^{\text{in}}, v_j^{\text{in}}\};\\
\text{par}^{\text{in}}(v_i^{\text{in}} \in^{\text{in}} v_j^{\text{in}}) &:= \{v_i^{\text{in}}, v_j^{\text{in}}\};\\
\text{par}^{\text{in}}((\varphi^{\text{in}} \vee \psi^{\text{in}})) &:= \text{par}^{\text{in}}(\varphi^{\text{in}}) \cup \text{par}^{\text{in}}(\psi^{\text{in}});\\
\text{par}^{\text{in}}(\exists^{\text{in}} v_i^{\text{in}}\, \varphi^{\text{in}}) &:= \text{par}^{\text{in}}(\varphi^{\text{in}}) \setminus \{v_i^{\text{in}}\}.
\end{aligned}$$

Innere Semantik. Eine *innere X-Belegung* ist eine Funktion von einer *endlichen* Teilmenge von ω in die Menge X; sie ist also ein Element der Menge $\{b \in \text{Pot}_\omega(\omega \times X) \mid \text{Fkn } b\}$.

$$b\ X\text{-bel}^{\text{in}}\ \varphi^{\text{in}}$$

besage, dass b eine innere X-Belegung ist, die den inneren Ausdruck φ^{in} in dem Sinne belegt, dass $\text{Def}(b) \supseteq \text{par}^{\text{in}}(\varphi^{\text{in}})$, dass also b die inneren Parameter

[3] Nach Definition IV.1.5 sind n-Tupel bei uns von links geklammert.

in φ^{in} mit Elementen aus X belegt. Wir schreiben

$$b\ X\text{-erf}^{\,\text{in}}\ \varphi^{\text{in}},$$

um anzudeuten, dass φ^{in} unter einer solchen Belegung wahr ist oder *erfüllt* wird. Dieses Erfüllungsprädikat lässt sich rekursiv über den Aufbau der inneren Ausdrücke definieren durch

$$b\ X\text{-erf}^{\,\text{in}}\ v_i^{\text{in}} =^{\text{in}} v_j^{\text{in}} \quad :\leftrightarrow \quad b\ X\text{-bel}^{\text{in}}\ v_i^{\text{in}} =^{\text{in}} v_j^{\text{in}} \,\wedge\, b(v_i^{\text{in}}) = b(v_j^{\text{in}}),$$

und ähnlich für $\in^{\text{in}}$;

$$b\ X\text{-erf}^{\,\text{in}}\ \neg^{\text{in}}\varphi^{\text{in}} \quad :\leftrightarrow \quad b\ X\text{-bel}^{\text{in}}\ \neg^{\text{in}}\varphi^{\text{in}} \,\wedge\, \neg\big(b\ X\text{-erf}^{\,\text{in}}\ \varphi^{\text{in}}\big),$$

und ähnlich für $\vee^{\text{in}}$;

$$b\ X\text{-erf}^{\,\text{in}}\ \exists^{\text{in}} v_i^{\text{in}}\,\varphi^{\text{in}} \quad :\leftrightarrow \quad b\ X\text{-bel}^{\text{in}}\ \exists^{\text{in}} v_i^{\text{in}}\,\varphi^{\text{in}}$$
$$\wedge\, \exists z\, \exists b' \big(z \in X \wedge b' = b \setminus (\{i\} \times X) \wedge (b' \cup \{(v_i^{\text{in}}, z)\})\ X\text{-erf}^{\,\text{in}}\ \varphi^{\text{in}}\big).$$

Damit lässt sich ein inneres Analogon der definierbaren Teilmengen von X einführen. Als Analogon für die „Laufvariable“ z (vgl. Hilfssatz 2.3(ii)) benutzen wir dabei der Einfachheit halber die innere Variable $v_{\mathbf{0}}^{\text{in}}$. Wir gelangen so zu folgender Definition der Operation Defpot:

$$x \in \text{Defpot}(X) \quad :\leftrightarrow \quad \exists \varphi^{\text{in}}\, \exists b\, \big(b\ X\text{-bel}^{\text{in}}\ \exists^{\text{in}}\, v_{\mathbf{0}}^{\text{in}}\,\varphi^{\text{in}} \,\wedge\, v_{\mathbf{0}}^{\text{in}} \notin \text{Def}(b)$$
$$\wedge\, x = \big\{z \in X \mid b \cup \{(v_{\mathbf{0}}^{\text{in}}, z)\}\ X\text{-erf}^{\,\text{in}}\ \varphi^{\text{in}}\big\}\big).$$

Offensichtlich gilt Teil (i) von Hilfssatz 2.3; den Nachweis von Teil (ii) führen wir im folgenden Unterabschnitt.

Innen und Außen. Ähnlich, wie den üblichen natürlichen Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ die „inneren“ Zahlen $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots$ entsprechen, entsprechen den äußeren Ausdrücken φ innere Ausdrücke φ_{in}. Die φ_{in} sind definierte Mengenterme, für die $\varphi_{\text{in}} \in \mathsf{A}^{\text{in}}$ gilt (d. h. in **ZF** beweisbar ist). Sie lassen sich durch metasprachliche Induktion über den Aufbau der äußeren Ausdrücke definieren. Wir geben drei Fälle an:

$$\begin{aligned} \big[v_n = v_m\big]_{\text{in}} &:= v_{\mathbf{n}}^{\text{in}} =^{\text{in}} v_{\mathbf{m}}^{\text{in}} \quad \big(= (\mathbf{n}, (\mathbf{0}, \mathbf{0}), \mathbf{m})\big); \\ \big[\neg\varphi\big]_{\text{in}} &:= \neg^{\text{in}}\varphi_{\text{in}}; \\ \big[\exists v_n\, \varphi\big]_{\text{in}} &:= \exists^{\text{in}} v_{\mathbf{n}}^{\text{in}}\,\varphi_{\text{in}}. \end{aligned}$$

Man mache sich anschaulich klar, dass $\varphi(v_0, \ldots, v_{n-1})$ mit $v_0, \ldots, v_{n-1} \in X$ genau dann in X gilt, oder anders gesagt, dass $\varphi(v_0, \ldots, v_{n-1})^X$ genau dann gilt, wenn die innere X-Belegung b, welche $v_{\mathbf{0}}^{\text{in}}$ mit der Menge $v_0, \ldots, v_{\mathbf{n-1}}^{\text{in}}$

mit der Menge v_{n-1} belegt, den inneren Ausdruck φ_{in} X-erfüllt. Hierzu ein Beispiel. Es sei $\varphi(v_0)$ der Ausdruck $\exists v_1\, v_1 \in v_0$. Für $v_0 \in X$ haben wir dann:

$$\begin{aligned}\big[\exists v_1\, v_1 \in v_0\big]^X \;&\leftrightarrow\; \exists v_1 \big(v_1 \in X \wedge v_1 \in v_0\big)\\ &\leftrightarrow\; \exists v_1 \big(v_1 \in X \;\wedge\; \{(v_{\mathbf{0}}^{\text{in}}, v_0), (v_{\mathbf{1}}^{\text{in}}, v_1)\}\; X\text{-erf}^{\,\text{in}}\; v_{\mathbf{1}}^{\text{in}} \in^{\text{in}} v_{\mathbf{0}}^{\text{in}}\big)\\ &\leftrightarrow\; \big\{(v_{\mathbf{0}}^{\text{in}}, v_0)\big\}\; X\text{-erf}^{\,\text{in}}\; \exists^{\text{in}} v_{\mathbf{1}}^{\text{in}}\, v_{\mathbf{1}}^{\text{in}} \in^{\text{in}} v_{\mathbf{0}}^{\text{in}}.\end{aligned}$$

Allgemein lässt sich dieser Zusammenhang ohne Schwierigkeiten über den Aufbau der äußeren Ausdrücke beweisen. Wir erhalten so:

2.8 Hilfssatz. *Für alle äußeren Ausdrücke* $\varphi(v_0, \dots, v_{n-1})$ *gilt*:

$$\forall X\, \forall v_0 \dots v_{n-1} \big(v_0, \dots, v_{n-1} \in X \;\rightarrow$$

$$\big(\varphi(v_0, \dots, v_{n-1})\big)^X \;\leftrightarrow\; \big\{(v_{\mathbf{0}}^{\text{in}}, v_0), \dots, (v_{\mathbf{n-1}}^{\text{in}}, v_{n-1})\big\}\; X\text{-erf}^{\,\text{in}}\; \varphi(v_0, \dots, v_{n-1})_{\text{in}}\big)\big).$$

Daraus ergibt sich sofort Teil (ii) von Hilfssatz 2.3. ⊣

Bevor wir mit dem Beweis von Satz 2.1 fortfahren, zeigen wir:

2.9 Hilfssatz (i) $\forall X\, \mathrm{Pot}_\omega(X) \subseteq \mathrm{Defpot}(X)$.
(ii) $\forall i\, L_i = V_i$ *und daher* $L_\omega = V_\omega$, *insbesondere also* $\mathsf{A}^{\text{in}} \subseteq L_\omega$.

Beweis. Zu (i): Es sei X gegeben, und x sei eine endliche Teilmenge von X. Ist $x = \emptyset$, so gilt $x \in \mathrm{Defpot}(X)$ via $\neg^{\text{in}}\, v_{\mathbf{0}}^{\text{in}} =^{\text{in}} v_{\mathbf{0}}^{\text{in}}$. Ist z. B. $x = \{z_1, z_2\}$, so wird x durch den inneren Ausdruck $(v_{\mathbf{0}}^{\text{in}} =^{\text{in}} v_{\mathbf{1}}^{\text{in}} \;\vee\; v_{\mathbf{0}}^{\text{in}} =^{\text{in}} v_{\mathbf{2}}^{\text{in}})$ und die innere Belegung $\{(v_{\mathbf{1}}^{\text{in}}, z_1), (v_{\mathbf{2}}^{\text{in}}, z_2)\}$ definiert. Allgemein betrachten wir für $i \geq \mathbf{1}$ die inneren Disjunktionen $\psi_i^{\text{in}} := (v_{\mathbf{0}}^{\text{in}} =^{\text{in}} v_{\mathbf{1}}^{\text{in}} \;\vee \dots \vee v_{\mathbf{0}}^{\text{in}} =^{\text{in}} v_i^{\text{in}})$. Wir können sie rekursiv definieren durch

$$\psi_{\mathbf{1}}^{\text{in}} \;:=\; v_{\mathbf{0}}^{\text{in}} =^{\text{in}} v_{\mathbf{1}}^{\text{in}} \quad \text{und} \quad \psi_{i+\mathbf{1}}^{\text{in}} \;:=\; (\psi_i^{\text{in}} \vee^{\text{in}} v_{\mathbf{0}}^{\text{in}} =^{\text{in}} v_{i+\mathbf{1}}^{\text{in}}).$$

Ist jetzt $\emptyset \neq x \in \mathrm{Pot}_\omega(X)$ und etwa $f : ((i+\mathbf{1}) \setminus \{\mathbf{0}\}) \sim x$, so gilt

$$x = \big\{z \in X \mid f \cup \{(v_{\mathbf{0}}^{\text{in}}, z)\}\; X\text{-erf}^{\,\text{in}}\; \psi_i^{\text{in}}\big\} \in \mathrm{Defpot}(X).$$

Zu (ii): Nach (i) gilt für endliches X, dass $\mathrm{Pot}(X) = \mathrm{Defpot}(X)$, und nach Hilfssatz 2.7, dass $\mathsf{A}^{\text{in}} \subseteq V_\omega$. ⊣

Um den Beweis von Satz 2.1 zu beenden, könnten wir versuchen, Hilfssatz 2.6 dahin gehend zu erweitern, dass **L** bzgl. **ZF** auch ein inneres Modell von **AC** und von GCH ist. Dieser Weg ist möglich. Wir benutzen eine gleichwertige Variante. Den Schlüssel dazu bildet die Aussage $\forall x\, \mathbf{L}x$, oft geschrieben als $\mathbf{V} = \mathbf{L}$, das *Gödelsche Konstruktibilitätsaxiom*. Es besagt, dass das Mengenuniversum allein aus konstruktiblen Mengen besteht. Diese Forderung ist mit den **ZF**-Axiomen verträglich. Es gilt nämlich:

2.10 Satz. *Wenn* Wf **ZF**, so Wf **ZF** + **V** = **L**.

Das Konstruktibilitätsaxiom **V** = **L** schränkt das Mengenuniversum auf diejenigen Mengen ein, die man, ausgehend von der leeren Menge, durch den über alle Ordinalzahlen iterierten Prozess der Bildung definierbarer Teilmengen erhält, und lässt es dadurch „übersichtlich" und „langsam wachsend" erscheinen, ein Eindruck, der sich, wie gewünscht, in dem folgenden Sachverhalt niederschlägt:

2.11 Satz. **ZF** + **V** = **L** $\vdash$ **AC** $\wedge$ GCH.

Aus den Sätzen 2.10 und 2.11 folgt unmittelbar Satz 2.1: Ist **ZF** widerspruchsfrei, so nach Satz 2.10 das System **ZF** + **V** = **L** und nach Satz 2.11 dann das System **ZF** (+ **V** = **L**) + **AC** + GCH. $\dashv$

Beweis von Satz 2.10. Es reicht zu zeigen, dass **L** bzgl. **ZF** ein inneres Modell von **ZF** + **V** = **L** ist, nach Hilfssatz 2.6 also, dass es ein inneres Modell von **V** = **L** ist.

Es ist $\mathsf{A}^{\text{in}} \subseteq L_\omega$, und die Definition der Defpot-Operation verwendet nur Prädikate und Operationen, für die wir die Absolutheit für transitive Prädikate nachgewiesen haben oder leicht nachweisen können. Damit lässt sich zeigen, dass die rekursive Definition 2.4 der L-Operation zu einer bzgl. **ZF** absoluten Operation führt. Es gilt also in **ZF**:

$$\forall x \, \forall y \left(x \in \mathbf{L} \wedge y \in \mathbf{L} \to (x = L_y \leftrightarrow [x = L_y]^{\mathbf{L}}) \right).$$

Da **L** alle Ordinalzahlen und alle L_α enthält und das Ordinalzahlprädikat spiegelt, erhalten wir hieraus mit $\forall x \, (x \in \mathbf{L} \to \exists \alpha \exists z \, (x \in z \wedge z = L_\alpha))$, dass

$$\forall x \left(x \in \mathbf{L} \to \exists \alpha \exists z \, (\alpha \in \mathbf{L} \wedge z \in \mathbf{L} \wedge x \in z \wedge \left[z = L_\alpha \right]^{\mathbf{L}} \right),$$

also $\left[\forall x \exists \alpha \, x \in L_\alpha \right]^{\mathbf{L}}$ und damit $\left[\mathbf{V} = \mathbf{L} \right]^{\mathbf{L}}$. $\dashv$

Beweis von Satz 2.11: Wir argumentieren in **ZF** + **V** = **L**. Unser erstes Ziel ist der Nachweis von **AC**. Dazu geben wir ein zweistelliges Prädikat $W_{\mathbf{L}}$ an, das **L**, also das gesamte Mengenuniversum, in dem Sinne wohlordnet, dass für alle Mengen x die Relation $\{(u, v) \in x \times x \mid W_{\mathbf{L}} uv\}$ die Menge x wohlordnet. Hieraus gewinnen wir schnell das Auswahlaxiom, und zwar in der starken Form der Existenz einer globalen Auswahl*operation* $G_{\mathbf{L}}$ gemäss

$$G_{\mathbf{L}}(x) := \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } x = \emptyset; \\ \text{das } W_{\mathbf{L}}\text{-minimale Element von } x, & \text{falls } x \neq \emptyset. \end{cases}$$

Für eine Menge X ist dann $G_{\mathbf{L}} \restriction X$ eine Auswahlfunktion auf X.

Um $W_{\mathbf{L}}$ anzugeben, definieren wir eine zweistellige Operation F_{wdp} mit der Eigenschaft

(†) Ist W eine Wohlordnungsrelation über X,
so ist $F_{\text{wdp}}(X, W)$ eine Wohlordnungsrelation über Defpot(X).

Dann können wir $W_\mathbf{L}$ folgendermaßen gewinnen: Zunächst definieren wir durch transfinite Rekursion Wohlordnungsrelationen W_α über L_α. Es sei $W_\mathbf{0} = \emptyset$. Im Nachfolgerschritt von α nach $\alpha + \mathbf{1}$ verlängern wir W_α um die Elemente aus $L_{\alpha+\mathbf{1}} \setminus L_\alpha$ in der durch $F_{\text{wdp}}(L_\alpha, W_\alpha)$ auf $L_{\alpha+\mathbf{1}} \setminus L_\alpha$ induzierten Wohlordnung. Für Limeszahlen δ sei $W_\delta := \bigcup\{W_\beta \mid \beta < \delta\}$. Da wir stets „nach rechts“ verlängern, ist mit den W_β für $\beta < \delta$ auch W_δ eine Wohlordnungsrelation.

Jetzt setzen wir

$$W_\mathbf{L}xy \;\;:\leftrightarrow\;\; \exists\alpha\,(x,y) \in W_\alpha.$$

Damit hat $W_\mathbf{L}$ die gewünschten Eigenschaften, und die Beweisbarkeit von **AC** aus **ZF** + **V**=**L** ist erreicht.

Es bleibt die Angabe von F_{wdp}. Ist W keine Wohlordnungsrelation über X, setzen wir $F_{\text{wdp}}(X, W) := \emptyset$. Sei jetzt W eine Wohlordnungsrelation über X. Wir definieren $F_{\text{wdp}}(X, W)$ in fünf Schritten.

Der *erste Schritt*: Bei der Lösung von Aufgabe VII.3.8.4(ii) haben wir eine Wohlordnungsrelation über V_ω definiert; aus ihr gewinnen wir durch Restriktion eine Wohlordnungsrelation W_1 über A^{in} (vgl. Hilfssatz 2.9(ii)).

Der *zweite Schritt*: Mit dem „$\times$“-Teil von Aufgabe VI.1.10.7 definieren wir, ausgehend von den Wohlordnungen $(\omega, \in_\omega)$ und (X, W), eine Wohlordnungsrelation $W_2 = W_2(X, W)$ über $\omega \times X$.[4]

Der *dritte Schritt*: Ausgehend von W_2 und $Y := \omega \times X$ definieren wir eine Wohlordnungsrelation $W_3 = W_3(X, W)$ über $\text{Pot}_\omega(Y)$: Für $u, v \in \text{Pot}_\omega(Y)$ setzen wir:

$$(u,v) \in W_3 \;\;:\leftrightarrow\;\; |u| < |v| \;\text{ oder }\; \big(|u| = |v| \;\text{ und}$$
$$u \neq v \text{ und das } W_2\text{-minimale Element von } (u \cup v) \setminus (u \cap v) \text{ gehört zu } u\big).$$

W_3 ist eine Ordnung. Die Transitivität ergibt sich dabei so: Gelte $(u, v) \in W_3$ und $(v, w) \in W_3$. Wir können annehmen, dass $|u| = |v| = |w| \geq \mathbf{1}$ und $u \cap v \cap w = \emptyset$. Sei z das W_2-minimale Element von $u \cup v \cup w$. Da $z \notin v \setminus u$ und $z \notin w \setminus v$, muss $z \in u \setminus w$ sein. Also ist $(u, w) \in W_3$.

Um die Wohlordnungseigenschaft von W_3 nachzuweisen, brauchen wir mit $\text{Pot}_{=i}(Y) := \{u \in \text{Pot}(Y) \mid |u| = i\}$ nur zu zeigen, dass für alle i gilt:

$$\forall Z\, \big(\emptyset \neq Z \subseteq \text{Pot}_{=i}(Y) \;\;\rightarrow\;\; Z \text{ hat ein } W_3\text{-minimales Element}\big).$$

Der Beweis erfolgt durch Induktion über i. Für $i = \mathbf{0}$ gilt die Behauptung. Sei – im Induktionsschritt – die Behauptung für i bewiesen und Z eine nicht leere

[4] Mit der Schreibweise „$W_2 = W_2(X, W)$“ deuten wir an, dass wir eine zweistellige Operation definieren, die für den Fall, dass das zweite Argument keine Wohlordnungsrelation über dem ersten ist, etwa die leere Menge als Wert liefert.

Teilmenge von $\mathrm{Pot}_{=i+\mathbf{1}}(Y)$. Es sei $w \in X$ das W_2-minimale Element von $\bigcup Z$. Wir können annehmen, dass $w \in u$ für alle $u \in Z$. Nach Induktionsvoraussetzung hat die Teilmenge $\{u \setminus \{w\} \mid u \in Z\}$ von $\mathrm{Pot}_{=i}(Y)$ ein W_3-minimales Element, etwa u_0. Damit ist $u_0 \cup \{w\}$ ein W_3-minimales Element von Z.

Der *vierte Schritt*: Analog zum zweiten Schritt definieren wir mit W_1 und W_3 eine Wohlordnungsrelation über $\mathsf{A}^{\mathrm{in}} \times \mathrm{Pot}_\omega(\omega \times X)$ und daraus durch Restriktion eine Wohlordnungsrelation $W_4 = W_4(X, W)$ über

$$\big\{(\varphi^{\mathrm{in}}, b) \mid b\ X\text{-bel}^{\mathrm{in}}\ \exists^{\mathrm{in}} v_{\mathbf{0}}^{\mathrm{in}}\, \varphi^{\mathrm{in}}\ \wedge\ v_{\mathbf{0}} \notin \mathrm{Def}(b)\big\}.$$

Im *fünften Schritt* gelangen wir von W_4 zur gewünschten Wohlordnungsrelation $F_{\mathrm{wdp}}(X, W)$ über $\mathrm{Defpot}(X)$, indem wir für $x, y \in \mathrm{Defpot}(X)$ festsetzen:

$$\begin{aligned}(x, y) \in F_{\mathrm{wdp}}(X, W) \quad :\leftrightarrow \quad & \text{das } W_4\text{-minimale } (\varphi^{\mathrm{in}}, b), \text{ das } x \text{ über } X \text{ definiert,}\\ & \text{ist } W_4\text{-kleiner als das } W_4\text{-minimale } (\varphi^{\mathrm{in}}, b),\\ & \text{das } y \text{ über } X \text{ definiert.}\end{aligned}$$

Insgesamt haben wir damit die gewünschte Operation F_{wdp} gewonnen, die (†) erfüllt.

Zum Schluss schildern wir recht knapp einen Beweis von GCH aus $\mathbf{ZF} + \mathbf{V}{=}\,\mathbf{L}$. Wir beachten dabei, dass wir in $\mathbf{ZF} + \mathbf{V}{=}\,\mathbf{L}$ jetzt auch das Auswahlaxiom zur Verfügung haben.

Nach Aufgabe IX.2.16.9 gilt für alle X, dass $|\mathrm{Pot}_\omega(X)| \le \max\{\aleph_{\mathbf{0}}, |X|\}$, also für alle X, dass $|X| \le |\mathrm{Defpot}(X)| \le |\mathsf{A}^{\mathrm{in}} \times \mathrm{Pot}_\omega(\omega \times X)| \le \max\{\aleph_{\mathbf{0}}, |X|\}$. Mit transfiniter Induktion ergibt sich hieraus:

$$\forall \alpha \left(\alpha \ge \omega \ \rightarrow\ |L_\alpha| = |\alpha|\right). \tag{1}$$

Sei κ eine unendliche Kardinalzahl. Nach (1) ist $|L_\kappa| = \kappa$ und $|L_{\kappa^+}| = \kappa^+$. Es reicht daher, zu zeigen:

$$\mathrm{Pot}(L_\kappa) \subseteq L_{\kappa^+}. \tag{2}$$

Denn dann gilt $\mathbf{2}^\kappa = |\mathrm{Pot}(L_\kappa)| \le |L_{\kappa^+}| = \kappa^+$, also $\mathbf{2}^\kappa = \kappa^+$.

Es sei $x \in \mathrm{Pot}(L_\kappa)$ und $X := L_\kappa \cup \{x\}$, also $|X| = \kappa$. Unser Ziel ist der Nachweis von $x \in L_{\kappa^+}$. Dazu sei Λ eine geeignet gewählte Konjunktion endlich vieler Axiome von $\mathbf{ZF} + \mathbf{V} = \mathbf{L}$ (unter ihnen **Ext** und **Fund**), die sicherstellt, dass das Mengenuniversum die Vereinigung der L_α über alle Ordinalzahlen α ist und dass sich diese Eigenschaft auf transitive Mengen vererbt, in denen Λ gilt, dass also

$$\forall U \big((U \text{ transitiv } \wedge \Lambda^U) \rightarrow \forall u\, (u \in U \leftrightarrow \exists \alpha\, (\alpha \in U \wedge u \in L_\alpha))\big). \tag{3}$$

Wir zeigen die Existenz einer Menge U' mit

$$X \subseteq U' \wedge \Lambda^{U'} \wedge |U'| = \kappa. \tag{4}$$

Dann sind wir fertig: Nach Wahl von Λ ist $(U', \in_{U'})$ extensional und fundiert. Nach dem Lemma VII.1.4 von Mostowski existieren daher eine eindeutig bestimmte transitive Menge U und ein eindeutig bestimmter Isomorphismus $g : (U', \in_{U'}) \cong (U, \in_U)$. Da $(X, \in_X)$ extensional, transitiv und fundiert ist, gilt $g{\restriction}X = \mathrm{id}_X$, also $X \subseteq U$. Aus der Isomorphie erhalten wir mit $\Lambda^{U'}$ die Gültigkeit von Λ^U und mit $|U'| = \kappa$ die Gültigkeit von $|U| = \kappa$, insgesamt also das Analogon von (4) für U. Zusammen mit (3) und (1) gilt für das Supremum β der Ordinalzahlen in U, dass $\kappa \leq \beta < \kappa^+$ und $X \subseteq U = L_\beta$, insbesondere also $x \in L_\beta \subseteq L_{\kappa^+}$.

Die Existenz von U' weisen wir mit einer Methode der *Modelltheorie* nach (vgl. *Chang und Keisler 1990* oder *Tent und Ziegler 2012*). Dabei arbeiten wir statt mit inneren Ausdrücken der darstellerischen Einfachheit halber mit endlich vielen externen Ausdrücken, nämlich mit den endlich vielen Teilausdrücken von Λ, wobei wir die Allquantoren $\forall x$ äquivalent durch $\neg\exists x\neg$ ersetzen. Die Menge Φ dieser Teilausdrücke enthält also höchstens Existenzquantoren.

Wir definieren die Funktion f auf ω rekursiv durch

$$\begin{aligned} f(\mathbf{0}) &:= X \\ f(i+\mathbf{1}) &:= f(i) \cup Z_i\,. \end{aligned}$$

Hierbei bestehe Z_i aus den z, für die folgendes gilt: Für einen Ausdruck der Gestalt $\exists x\, \varphi(x, \overset{n}{x})$ aus Φ und für Elemente $z_1, \ldots, z_n \in f(i)$ gilt $\exists x\, \varphi(x, \overset{n}{z})$, und z ist das $W_{\mathbf{L}}$-minimale Existenzbeispiel.

Es sei

$$U' := \bigcup \mathrm{Bild}(f).^5$$

Dann ist $X = f(\mathbf{0}) \subseteq U'$. Ferner zeigt man durch Induktion, dass $|f(i)| = \kappa$ für alle i und daher $|U'| = \kappa$. Die Gültigkeit von $\Lambda^{U'}$ und damit die von (4) ergibt sich sofort daraus, dass für alle $\varphi(\overset{n}{x})$ aus Φ, also auch für Λ,

$$\forall \overset{n}{x}\, \big((x_1 \in U' \wedge \ldots \wedge x_n \in U') \rightarrow (\varphi(\overset{n}{x})^{U'} \leftrightarrow \varphi(\overset{n}{x}))\big). \tag{5}$$

Der Beweis von (5) erfolgt induktiv über den Aufbau der Ausdrücke aus Φ. Wir zeigen den $\exists$-Schritt: Ist $\varphi(\overset{n}{x})$ etwa von der Gestalt $\exists x \psi(x, \overset{n}{x})$ und gilt (5)

[5] Der Übergang von (κ, x) mit unendlichem κ und $x \in \mathrm{Pot}(L_\kappa)$ zu U' kann, wie nicht schwer nachzuweisen ist, durch eine Operation vollzogen werden, die alle anderen Argumente etwa auf $\emptyset$ abbildet.

für $\psi(x, \overset{n}{x})$, können wir für $x_1 \in U', \ldots, x_n \in U'$, etwa $x_1 \in f(i), \ldots, x_n \in f(i)$, folgermaßen schließen:

$$\begin{aligned} \exists x\, \psi(x, \overset{n}{x}) &\to \exists x\big(x \in f(i+\mathbf{1}) \wedge \psi(x, \overset{n}{x})\big) \text{ (nach Def. von } f) \\ &\to \exists x\big(x \in f(i+\mathbf{1}) \wedge \psi(x, \overset{n}{x})^{U'}\big) \text{ (nach Ind.-Vor.)} \\ &\to [\exists x\, \psi(x, \overset{n}{x})]^{U'}, \end{aligned}$$

und noch einfacher in der anderen Richtung. Damit ist der Beweis von Satz 2.11 beendet. ⊣

Eine abschließende Bemerkung. Ist **ZF** widerspruchsfrei, so ist nach den Sätzen 2.10 und 2.11 und nach Teil (iii) von Satz 2.2 das System **ZF**+**V**=**L** eine widerspruchsfreie und echte Erweiterung von **ZF**. Die Hinzunahme des Konstruktibilitätsaxioms zu **ZF** bedeutet also eine Verstärkung von **ZF**. Mehr noch: Sie liefert das Auswahlaxiom, entscheidet die allgemeine Kontinuumshypothese und lässt das Mengenuniversum „übersichtlich" erscheinen. Viel spricht also dafür, dem Konstruktibilitätsaxiom die Rolle eines Standardaxioms zuzuschreiben. Doch es ist bisher nicht zu einem anerkannten Axiom der Mengenlehre geworden. Es wird als zu stark begrenzend empfunden (vgl. auch Abschnitt 3). Methodisch allerdings kommt ihm eine wichtige Rolle zu. Näheres findet man etwa in *Devlin 1984*.

§3 Unvollständigkeit

Für die folgende Diskussion unterstellen wir, das Axiomensystem **ZF** sei widerspruchsfrei. Nach Satz 2.2(ii) ist dann das System **ZF** + ¬**AC** ebenfalls widerspruchsfrei. Daher gilt

$$\text{nicht } \mathbf{ZF} \vdash \mathbf{AC};$$

denn sonst wären aus **ZF** + ¬**AC** sowohl **AC** als auch ¬**AC** beweisbar, und **ZF** + ¬**AC** wäre widerspruchsvoll. Entsprechend erhalten wir aus Satz 2.1, dass

$$\text{nicht } \mathbf{ZF} \vdash \neg\mathbf{AC}.$$

Ein Axiomensystem S, für das ein parameterfreier Ausdruck φ existiert mit nicht $S \vdash \varphi$ und nicht $S \vdash \neg\varphi$, heißt *unvollständig*, und ein solcher Ausdruck φ heißt *unabhängig von S*. Gilt $S \vdash \varphi$ oder $S \vdash \neg\varphi$ für alle solchen φ, heißt S *vollständig*. Insbesondere sind widerspruchsvolle Axiomensysteme vollständig, weil mit $S \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$ nach den üblichen Schlussregeln auch $S \vdash \psi$ für alle ψ gilt („Ex contradictione quodlibet"). Aufgrund der vorangehenden Ergebnisse haben wir:

3.1 Satz. *Wenn* Wf **ZF**, *so ist* **ZF** *unvollständig. Insbesondere ist dann* **AC** *unabhängig von* **ZF**. ⊣

Die Informationen über den Mengenbegriff, die in **ZF** niedergelegt sind, reichen also nicht aus, eine Entscheidung über die Gültigkeit des Auswahlaxioms zu treffen. Ähnlich wie mit **ZF** verhält es sich mit **ZFC**: Auch **ZFC** ist unvollständig; GCH ist (nach Satz 2.1 und Satz 2.2(iii)) ein Beispiel für eine unabhängige Aussage. Das Axiomensystem, das zur Zeit die Basis für die Mathematik bildet, lässt also Fragen offen. Wir schildern ein Beispiel, das zeigt, wie schnell man im üblichen mathematischen Alltag auf unabhängige Aussagen stoßen kann: Man findet sie bereits bei zunächst recht einfach erscheinenden Fragen über die Ordnung der reellen Zahlen. Unter Ordnungen verstehen wir im Folgenden Ordnungen i.S.v. $<$.

3.2 Definition. Die Struktur (a, r) ist ein *Kontinuum* $:\leftrightarrow$ (a, r) ist eine Ordnung mit den folgenden Eigenschaften:

(K0) (a, r) ist *vollständig*, d. h. jede nach oben beschränkte nicht leere Teilmenge von a hat in (a, r) ein Supremum.

(K1) (a, r) ist *dicht* (d. h. zwischen je zwei verschiedenen Elementen von a liegt ein weiteres Element von a) und *offen* (d. h. (a, r) hat kein erstes und kein letztes Element).

(K2) Es gibt eine abzählbare Teilmenge b von a, die in (a, r) *dicht* liegt (d. h. zwischen je zwei verschiedenen Elementen von a liegt ein Element von b).

3.3 Bemerkung. *Für eine Struktur* (a, r) *gilt*:

$$(a, r) \textit{ ist Kontinuum } \leftrightarrow (\mathbb{R}, <_{\mathbb{R}}) \cong (a, r).$$

Beweis. Die Richtung von rechts nach links ergibt sich daraus, dass $(\mathbb{R}, <_{\mathbb{R}})$ ein Kontinuum ist. Sei jetzt umgekehrt (a, r) ein Kontinuum und b eine abzählbare Teilmenge von a, die in (a, r) dicht liegt. Mit $s := r \cap (b \times b)$ ist (b, s) eine abzählbare dichte offene Ordnung. Wir behaupten:

$$(*) \qquad (\mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}}) \cong (b, s).$$

Zum Beweis von $(*)$ sei f eine Bijektion von ω auf $\mathbb{Q}$, mit „ρ_i" für „$f(i)$" also

$$\mathbb{Q} = \{\rho_i \mid i \in \omega\}.$$

Ähnlich sei (man beachte, dass $|b| = \aleph_{\mathbf{0}}$)

$$b = \{b_i \mid i \in \omega\}.$$

Mit dem auf Cantor zurückgehenden „*Hin- und Her-Verfahren*" gewinnen wir einen Isomorphismus, der $(*)$ belegt. Dabei beginnen wir mit der leeren Abbildung und bringen nacheinander $\rho_{\mathbf{0}}$ in den Definitionsbereich, $b_{\mathbf{0}}$ ins Bild, $\rho_{\mathbf{1}}$

in den Definitionsbereich, b_1 ins Bild, usf. Wir definieren dazu die Abbildung p auf ω rekursiv durch

$$\begin{aligned} p_0 &:= \emptyset, \\ p_{2i+1} &:= p_{2i} \cup \{(\rho_i, b_j)\}, \\ p_{2i+2} &:= p_{2i+1} \cup \{(\rho_k, b_i)\}. \end{aligned}$$

Hierbei seien j bzw. k minimal so gewählt, dass p_{2i+1} bzw. p_{2i+2} eine ordnungserhaltende Abbildung ist. Es ist nicht schwer, sich mit Hilfe der Dichtheit und der Offenheit der Ordnungen davon zu überzeugen, dass solche j und k existieren. Offenbar ist

$$\pi := \bigcup\{p_i \mid i \in \omega\}$$

ein Isomorphismus von $(\mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}})$ auf (b, s).

Wir definieren $\overline{\pi} : \mathbb{R} \to a$ mit $\sup\limits_{(a,r)}$ für die Supremumsbildung in (a, r) durch

$$\overline{\pi}(\tau) := \sup_{(a,r)}\{\pi(\rho) \mid \rho \in \mathbb{Q},\ \rho <_{\mathbb{R}} \tau\}$$

für $\tau \in \mathbb{R}$. Da (a, r) die Bedingung $(K0)$ erfüllt, ist diese Definition sinnvoll. Schließlich ist $\overline{\pi}$ ein Isomorphismus von $(\mathbb{R}, <_{\mathbb{R}})$ auf (a, r), wie wir ihn suchen. Offenbar ist nämlich $\overline{\pi}$ eine ordnungserhaltende Fortsetzung von π und damit auch injektiv. Die Surjektivität von π ergibt sich daraus, dass für $z \in a$ und $\tau := \sup\limits_{(\mathbb{R},<_{\mathbb{R}})} \{\rho \in \mathbb{Q} \mid \pi(\rho) r z\}$

$$\begin{aligned} \overline{\pi}(\tau) &= \sup_{(a,r)}\{\pi(\rho) \mid \rho \in \mathbb{Q},\ \rho <_{\mathbb{R}} \tau\} \\ &= \sup_{(a,r)}\{\pi(\rho) \mid \rho \in \mathbb{Q},\ \pi(\rho) r z\} \\ &= \sup_{(a,r)}\{y \in b \mid y r z\} \\ &= z. \end{aligned} \qquad \dashv$$

Durch Abschwächung der Forderung (K2) gelangen wir zu einem Typ von Ordnungen, der in Verfolgung topologischer Fragestellungen zuerst von Michail Suslin untersucht wurde:

3.4 Definition. Eine Struktur (a, r) ist ein *Suslin-Kontinuum*
$:\leftrightarrow$ (a, r) ist eine Ordnung mit den folgenden Eigenschaften:

(K0), (K1) wie in Definition 3.2;

(K2)* Jede Menge paarweise disjunkter offener Intervalle in (a, r) ist höchstens abzählbar.

Offenbar ist jedes Kontinuum ein Suslin-Kontinuum; denn in einer Ordnung, in der eine abzählbare Teilmenge dicht liegt, kann es keine überabzählbare Menge paarweise disjunkter offener Intervalle geben. Suslin vermutete 1920, dass auch die Umkehrung gelte. Wir sprechen heute von der *Suslinschen Hypothese* SH:

$$\mathrm{SH} \;:=\; \forall a \, \forall r \, \big((a,r) \textit{ Suslin-Kontinuum} \rightarrow (a,r) \textit{ Kontinuum}\big).$$

Um 1970 gelang der Nachweis, *dass* SH *von* **ZFC** *unabhängig ist.* Auf der Basis von **ZFC**, und das bedeutet: im Rahmen der heute benutzten mathematischen Methoden, kann also nicht entschieden werden, ob für vollständige dichte offene Ordnungen (K2) stärker ist als (K2)*.

1968 bewies Ronald Jensen:

3.5 Satz. $\mathbf{ZF} + \mathbf{V}{=}\,\mathbf{L} \vdash \neg\mathrm{SH}$.

Falls wir also **ZF** um das Konstruktibilitätsaxiom erweitern, wird SH negativ entschieden. Aber auch $\mathbf{ZF} + \mathbf{V}{=}\,\mathbf{L}$ ist, wie man zeigen kann, unvollständig. Wir fragen daher grundsätzlicher: Ist es überhaupt möglich, **ZF** durch die Hinzunahme neuer Axiome zu einem widerspruchsfreien und vollständigen Axiomensystem zu erweitern? Eine Antwort, und zwar eine negative, gibt der *Erste Gödelsche Unvollständigkeitssatz* (vgl. *Ebbinghaus, Flum und Thomas 2018*):

Es gibt keine widerspruchsfreie und vollständige Erweiterung von **ZF**, *die man* (in einem präzisierbaren Sinn) *effektiv angeben kann* (wie das für die Axiomensysteme, die wir bisher betrachtet haben, der Fall ist).

Was bleibt, ist also die sich immer wieder neu stellende Aufgabe, angesichts konkreter unabhängiger Aussagen, deren Abklärung wesentlich erscheint, den intuitiven Mengenbegriff auf möglichst einsichtige Weise zu verstärken und so zur Formulierung von neuen Axiomen zu gelangen, mit deren Hilfe eine solche Abklärung herbeigeführt werden kann.

Hierzu ein Beispiel. Kehren wir noch einmal zum Konstruktibilitätsaxiom zurück und nehmen wir an, eine intuitive Analyse lege nahe, jede Menge sei konstruktibel. Dann könnten wir mit einer gewissen Berechtigung das System **ZF** um das Konstruktibilitätsaxiom $\mathbf{V}{=}\,\mathbf{L}$ erweitern. Da

$$\mathbf{ZF} + \mathbf{V}{=}\,\mathbf{L} \vdash \mathbf{AC} \wedge \mathrm{GCH} \wedge \neg\mathrm{SH},$$

würde diese Erweiterung eine Entscheidung für das Auswahlaxiom, für die allgemeine Kontinuumshypothese und gegen die Suslinsche Hypothese bedeuten. Solche Konsequenzen könnten die Entscheidung für das Konstruktibilitätsaxiom bekräftigen. Sie könnten auch umgekehrt ein Grund dafür sein, das Axiom zu verwerfen.

Bislang sind zahlreiche Erweiterungen von **ZF** und **ZFC** diskutiert und näher untersucht worden. Neben dem Konstruktibilitätsaxiom, das einen mehr restriktiven Charakter hat, standen dabei in der Hauptsache „ausweitende“ Axiome im Vordergrund, und hier besonders solche Axiome, die die Existenz von Kardinalzahlen mit gewissen zusätzlichen Eigenschaften fordern („Axiome für große Kardinalzahlen“; vgl. *Drake 1974*). Ein im Hinblick auf die Analysis interessanter Vorschlag ist das dem Auswahlaxiom widersprechende *Axiom der Bestimmtheit* (vgl. *Fenstad 1971* oder *Kanamori 2003*). Bis heute steht allerdings eine überzeugende Argumentation aus, welche einen dieser Vorschläge vor anderen auszeichnen könnte. Es scheint, als stelle der intuitive Mengenbegriff einer allgemein anerkannten Erweiterung über den durch **ZFC** bestimmten Rahmen hinaus erheblichen Widerstand entgegen. Auf der anderen Seite drängen eine Fülle von Unabhängigkeitsresultaten und eine wachsende Beanspruchung der mengentheoretischen Basis durch die Mathematik auf eine Verstärkung der Axiome. Neben dem selbstverständlich immer möglichen und wissenschaftlich durchaus nützlichen mengentheoretischen „Relativismus“, der verschiedene Verstärkungen nebeneinander toleriert, bleibt die Aufgabe, nach intuitiv ausgezeichneten Möglichkeiten der Erweiterung zu suchen.

§4 Erkenntnistheoretische Anmerkungen

Zu Beginn dieses Kapitels haben wir noch einmal unsere Vorgehensweise geschildert: Wir sind nicht von einem gleichsam fertigen Mengenuniversum ausgegangen, das es zu beschreiben gilt, sondern wir haben in Rechnung gestellt, dass sich der Mengenbegriff, ausgehend von einigen grundlegenden Vorstellungen, in vielleicht sogar unterschiedlicher Weise entwickeln könne. Im letzten Abschnitt haben wir dann gesehen, dass ein solcher Entwicklungsprozess nie zu einem Ende geführt haben wird: Ein effektiv angebbares widerspruchsfreies Axiomensystem, das die jeweiligen Vorstellungen beschreibt, ist unvollständig und lässt daher Eigenschaften des Mengenbegriffs offen.

Wir werden also immer aufgefordert sein, an einer Verfeinerung des Mengenbegriffs zu arbeiten. Diese Situation stellt uns vor eine natürliche Frage: Welcher Art sind die Objekte, denen wir nachgehen, die Mengen und ihre Gesamtheit, das Universum? Kommt ihnen eine von uns unabhängige Existenz zu, und ist unser Vorgehen im Grunde eine von Irrungen geprägte Annäherung an ihre wahre Gestalt? Oder sind sie lediglich Geschöpfe unserer Fantasie oder bestenfalls Abstraktionen, die sich aus Alltagserfahrungen kristallisiert haben, und sind die inhaltlichen Vorstellungen, mit denen wir die Mengenlehre begleiten, dann nicht mehr als heuristische Hilfen, um unsere Vorgehensweise zu motivieren?

Wir stehen damit vor einem zentralen Anliegen der Philosophie der Mathematik, der Klärung dessen, was die Objekte mathematischer Theorien wie Zahlen, Punkte, Geraden, Funktionen, Mengen, Strukturen eigentlich sind. Es liegt auf der Hand, dass die Versuche, zu einer Lösung zu gelangen, stark vom jeweiligen erkenntnistheoretischen Standpunkt abhängen können. Entsprechend vielfältig sind daher auch die bisherigen Ansätze. In Ergänzung zu den Bemerkungen aus Kapitel I wollen wir im Folgenden kurz auf die – geschichtlich gesehen – wichtigsten Richtungen eingehen und unsere Vorgehensweise anschließend in den so geschaffenen Rahmen einordnen. Wir beschränken uns dabei vornehmlich auf den Bereich der Mengen. Eine umfassende Einführung in die Philosophie der Mathematik geben *Felgner 2020* und *Thiel 1995*.

Auffassungen, die den Objekten der Mathematik eine vom Menschen unabhängige Existenz zusprechen und sie damit von der Bindung an das denkende Subjekt lösen, folgen der Maxime des (*mathematischen*) *Platonismus*. Die Annahme von der aktualen Existenz auch unendlicher Gesamtheiten wie der Menge der natürlichen Zahlen, der Potenzmenge der Menge der natürlichen Zahlen oder gar des Mengenuniversums selbst, wird oft damit gerechtfertigt, dass sie eine Grundvoraussetzung der mathematischen Arbeitsweise sei. Die Argumentation verläuft dann etwa so: Ist z. B. P ein mengentheoretisches Prädikat, unterstellt man unabhängig vom jeweiligen Axiomensystem die Aussage

$$(*) \qquad \forall x Px \vee \exists x \neg Px,$$

etwa bei Beweisen durch Fallunterscheidung. Auch wir haben das getan. Wie soll man dieses Vorgehen rechtfertigen, wenn nicht dadurch, dass man $(*)$ als eine wahre Aussage ansieht? Und wie kann man von der Wahrheit einer Aussage wie $(*)$ sprechen, ohne dass man dem Universum Existenz unterstellt? Denn erst dann beschreiben mengentheoretische Aussagen zutreffende oder nicht zutreffende Sachverhalte, sind also wahr oder falsch.

Kritiker des Platonismus wenden ein, dass es gerade die infinitären Bildungsprozesse seien, die für die aufgetretenen Widersprüche wie die Russellsche Antinomie die Verantwortung trügen. Damit sei erwiesen, dass die Begriffsbildungen der Platonisten widerspruchsvoll sein könnten. Widerspruchsvolle Begriffsbildungen aber könnten sich nicht auf existierende Objekte beziehen. Missgeschicke solcher Art seien auch in Zukunft nicht auszuschließen, seien doch finite und damit kontrollierbare Widerspruchsfreiheitsbeweise im allgemeinen nicht möglich. Ein eindrucksvolles Zeugnis solch kritischer Einstellung finden wir bei Hermann Weyl; in *Weyl 1921* schreibt er:

> Die Antinomien der Mengenlehre werden gewöhnlich als Grenzstreitigkeiten betrachtet, die nur die entlegensten Provinzen des mathematischen Reiches angehen und in keiner Weise die innere Solidität und Sicherheit des Reiches selber, seiner eigentlichen

> Kerngebiete gefährden können. [...] Jede ernste und ehrliche Besinnung muss zu der Einsicht führen, dass jene Unzuträglichkeiten in den Grenzbezirken der Mathematik als Symptome gewertet werden müssen; in ihnen kommt an den Tag, was der äußerlich glänzende und reibungslose Betrieb im Zentrum verbirgt: die innere Haltlosigkeit der Grundlagen, auf denen der Aufbau des Reiches ruht.

In dem Bemühen, die Mathematik vor Widersprüchen wie der Russellschen Antinomie abzusichern, wurden in den ersten Jahrzehnten des letzten Jahrhunderts erkenntnistheoretische Standpunkte erarbeitet, die sich weit vom Platonismus entfernen. Wir gehen kurz auf den Intuitionismus – dem auch Weyl nahestand – und auf den Formalismus ein.

Der *Intuitionismus* (vgl. *Heyting 1956*) versucht Widersprüche dadurch zu vermeiden, dass er den Kreis der zugelassenen Objekte und den Umgang mit ihnen einschränkt: Die Objekte der Mathematik müssen in einem mentalen Prozess konstruiert werden. Zu ihnen gehören zuallererst die natürlichen Zahlen; sie entstehen, ausgehend von der Eins, durch den mentalen Prozess des Zählens, also der Nachfolgerbildung. Beweise werden nur dann anerkannt, wenn sie in einem ähnlichen Sinn konstruktiv sind. So besteht ein konstruktiver Beweis für eine Existenzbehauptung in der Konstruktion eines Beispiels und ein konstruktiver Beweis für eine Disjunktion im konstruktiven Beweis für eines der Glieder. Ein konstruktiver Beweis der Aussage $(*)$ von oben müsste eine Methode angeben, die zu jedem Objekt x des in Rede stehenden Bereichs einen konstruktiven Beweis für Px liefert, oder aber die Konstruktion eines Objekts x_0 mit einer konstruktiven Argumentation, die Px_0 *ad absurdum* führt.[6] Während etwa die Analysis in Teilen – insbesondere solchen, die auf Anwendungen zielen – intuitionistisch nachvollzogen werden kann, entzieht sich die Mengenlehre weitestgehend dem intuitionistischen Zugang, ist sie doch wesentlich durch inkonstruktive Begriffe und Schlussweisen geprägt.

Der *Formalismus* betrachtet die Mathematik und damit auch die Mengenlehre als ein Spiel mit Zeichenreihen. Den Grundbegriffen eines Axiomensystems (oder besser: seinen Grund*symbolen*), z. B. dem $\in$-Symbol in einem Axiomensystem der Mengenlehre, kommt nicht unbedingt eine inhaltliche Bedeutung zu; sie dienen, wie auch die Junktoren und Quantoren, als Marken in einem syntaktischen Beziehungsgefüge, welche die Anwendung der logischen Schlussregeln steuern. Letztlich unterliegt die Wahl der Axiome wie auch die der Re-

[6] Es gibt konkrete Prädikate P, bei denen selbst die herkömmliche Mathematik bis heute keinen Beweis für eines der Disjunktionsglieder in $(*)$ kennt. Ein Beispiel aus der Zahlentheorie betrifft die sog. *Goldbachsche Vermutung*. Ihr liegt als Universum die Menge der geraden natürlichen Zahlen ≥ 4 zugrunde, und Px besagt, dass x sich als Summe zweier Primzahlen schreiben lässt.

geln nur der Bedingung, dass nicht alle Aussagen beweisbar werden und das entsprechende Spiel damit uninteressant. Doch ist der Formalismus auch mit stärker inhaltlich geprägten Positionen verträglich. David Hilbert, einer seiner herausragenden Vertreter, verknüpfte mit der „spieltheoretisch"-syntaktischen Darstellung der Mathematik und der daraus resultierenden größeren Klarheit die Hoffnung, unmittelbar einsichtige und überzeugende Widerspruchsfreiheitsbeweise führen zu können.

Keine der drei genannten Richtungen – zumindest in der jeweiligen „reinen" Form – kann beanspruchen, eine adäquate Beschreibung der Mathematik zu liefern. Mag der Platonismus mit der ihm inhärenten Rechtfertigung infinitärer und inkonstruktiver Methoden wesentlich zur Entwicklung neuerer Theorien, etwa in der Algebra, beigetragen haben, mag der Intuitionismus das ontologische Bewusstsein geschärft und der Formalismus zu einer Präzisierung mathematischer Betrachtungen geführt haben – alle drei spiegeln nur gewisse Aspekte des mathematischen Handelns. Mathematikerinnen und Mathematiker argumentieren vielleicht heute inhaltlich und morgen formal, sie benutzen heute das inkonstruktive Auswahlaxiom und beschäftigen sich morgen mit konkreten Berechnungsverfahren, sie billigen ihren Objekten im mathematischen Alltag eine reale Existenz zu und ziehen sich bei ontologischen Diskussionen auf einen formalen Standpunkt zurück.

Es gibt zahlreiche Versuche, erkenntnistheoretische Positionen aufzubauen, die der „realen" Mathematik stärker Rechnung tragen. Dazu gehören z. B. abgeschwächte Formen des Platonismus wie der *mathematische Realismus*.[7] Wir wollen abschließend auf eine Spielart eingehen, den sog. *Konzeptualismus*.

Mathematische Begriffe sind nach dieser Auffassung nicht von vornherein fertig (oder wenigstens prinzipiell fertig); sie *entwickeln sich*, z. B. aus Erfahrungen über die uns umgebende Wirklichkeit, über Anzahlen, Raum, Zeit, oder im Umgang mit anderen mathematischen Begriffen, und gelangen über die Kommunikation der Mathematikerinnen und Mathematiker untereinander zu einem immer einheitlicheren Gebrauch, der sich schließlich in einem allseits akzeptierten Axiomensystem niederschlagen kann. Wie wir am Beispiel der Mengenlehre gesehen haben, kann ein solches Axiomensystem Anlass zu weiterer Analyse und zur Fortentwicklung der in ihm angelegten Konzepte geben.

Der Reifungsprozess eines Konzepts kann langwierig und geistesgeschichtlich dramatisch sein. So dauerte es mehr als zwei Jahrtausende, bis sich, ausge-

[7] Während der Platonismus die Objekte der Mathematik aus der physikalischen Welt löst und ihnen eine gleichsam unveränderliche und ewige Existenz zuschreibt, sieht der Realismus die mathematischen Objekte stärker als Bestandteile unserer Welt, mit denen sich die Mathematik in ähnlicher Weise befasst wie die Physik mit den physikalischen Objekten. Zu Einzelheiten vgl. man etwa *Maddy 1990*.

hend von den ganzen und den rationalen Zahlen, über die Ausformung der algebraischen Irrationalzahlen wie $\sqrt{2}$ und der transzendenten Zahlen wie π schließlich an der Wende zum 20. Jahrhundert der Begriff des vollständig geordneten Körpers herausgebildet hatte, der heute die Idee des mathematischen Kontinuums am adäquatesten wiedergibt. Allerdings zeigt die Entwicklung der *Nichtstandardanalysis* seit Mitte der sechziger Jahre des letzten Jahrhunderts (vgl. dazu *Ebbinghaus, Hermes et al. 1992*), dass die Entwicklung des Kontinuumsbegriffs nicht unbedingt schon abgeschlossen sein muss.

Was die Mengenlehre betrifft, so sind wir an verschiedenen Stellen einem ähnlichen Entwicklungsprozess begegnet, etwa der Herausbildung der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre oder der wachsenden Anerkennung des Auswahlaxioms. Als Motor der Entwicklung haben wir bei Cantor auch philosophische und theologische Überlegungen ausmachen können. Offenbar fließen also in die Gestaltung mathematischer Konzepte nicht nur Ausschnitte der Erfahrungswelt oder innermathematische Motivationen ein, sondern geistes- und kulturgeschichtliche Aspekte vielfältiger Art.

Es gehört zum Schicksal mancher Konzepte, niemals zu voller Reife gelangen zu können. Im vorangehenden Abschnitt haben wir gesehen, dass dies auch für den Mengenbegriff gilt: Die Mengenlehre bleibt aufgefordert, immer wieder an der Vervollkommnung des Mengenkonzepts zu arbeiten. Sie hat heute reiches Material für mögliche Vorschläge zur Hand, z. B. das beschränkende Konstruktibilitätsaxiom oder „entgrenzende“ Axiome über große Kardinalzahlen. Als Argumente für oder gegen solche Vorschläge können intuitive Überzeugungen dienen oder auch die Qualität neuer Resultate, zu denen man mit ihnen gelangen kann.

Natürlich lässt diese kurze Schilderung noch viele Fragen offen, auf die wir hier nicht eingegangen sind: die Frage etwa, wie weit und in welchem Sinn Konzepten Realität zukommen kann, insbesondere dann, wenn sie (wie in Geometrie oder Arithmetik) Aspekte unserer Außenwelt spiegeln, oder die Frage, wie es möglich ist, dass die oft unterschiedliche Entstehungsweise von Konzepten die Einheit der Mathematik über weltanschauliche und kulturelle Grenzen hinweg letztlich niemals gefährdet hat. Prinzipiell offen bleiben auch die grundsätzlichen Fragen: die Frage nach der Rechtfertigung des Umgangs mit Konzepten (also nach der Rechtfertigung von Schlussregeln und Beweisen) und die Frage nach der Widerspruchsfreiheit der entwickelten Konzepte und der sie beschreibenden Axiomensysteme.

Dennoch lässt sich ein wesentlicher Aspekt herausstellen, mit dem wir unsere Betrachtungen schließen wollen: Während der strenge Platonismus die Mathematik an eine vorgegebene Welt von Ideen bindet, der Formalismus die mathematische Tätigkeit zum Spiel machen könnte und der Intuitionismus sie in die

Schranken des Konstruktiven weist, gibt der Konzeptualismus Mathematikerinnen und Mathematikern mit aller Verantwortung auch die Möglichkeit, ihre Wissenschaft aus ihren geistig-kulturellen Bezügen heraus frei zu gestalten.

Hiermit beenden wir unsere Betrachtungen zum Zermelo-Fraenkelschen Axiomensystem und zu der auf ihm gründenden Mengenlehre. Unser Ziel war es, eine Einführung in diese Grundlagendisziplin der Mathematik zu geben und die mit ihr verbundenen methodologischen und wissenschaftstheoretischen Fragen zumindest anklingen zu lassen. Hinsichtlich einiger weiterführender Fragen, Methoden und Ergebnisse haben wir auf die Literatur verwiesen. Die behandelten oder angedeuteten Themenkreise sind der Ausgangspunkt für vielfältige Fortentwicklungen. Von deren Weite überzeugt ein Blick in das dreibändige Handbuch *Foreman und Kanamori 2010*.

Abschließend gehen wir noch der Frage nach, wie sich **ZFC** und das „Konkurrenzsystem" **NBG** zueinander verhalten, anders gesprochen, ob wir zu einer anderen Mengenlehre gekommen wären, hätten wir statt des Zermelo-Fraenkelschen das von Neumann-Bernays-Gödelsche System zugrunde gelegt. Wie wir vielleicht hoffen oder erwarten, wird sich herausstellen, dass das System keinen Einfluss auf die Mengenlehre hat, zu der man mit ihm gelangt.

XII

Anhang: Zum Verhältnis von ZF und NBG

Ich habe auf kein gewisses System schwören müssen.

In I. 3 sind wir im Zusammenhang mit der Russellschen Antinomie kurz auf die von Neumann-Bernays-Gödelsche (Klassen-)Mengenlehre **NBG** eingegangen. Wir präzisieren in diesem Kapitel den bereits dort erwähnten Sachverhalt, dass die Systeme **ZF** und **NBG** in bezug auf Mengen von gleicher Stärke sind, und beweisen ihn so weit, wie es mit den uns zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln möglich ist. Zuvor geben wir die **NBG**-Axiome explizit an und zeigen, dass es zu **NBG** im Gegensatz zu **ZF** ein gleich starkes *endliches* Axiomensystem gibt.

§1 Das Axiomensystem NBG

In der **NBG**-Mengenlehre behandeln wir die $\in$-Beziehung zwischen Klassen. Für Klassen gebrauchen wir statt $v_0, v_1, v_2, \ldots$ die Variablen $V_0, V_1, V_2, \ldots$. Im Übrigen entsprechen die Ausdrücke genau den alten mengentheoretischen Ausdrücken, lediglich mit dem Unterschied, dass anstelle der Mengenvariablen $v_0, v_1, v_2, \ldots$ nun die Klassenvariablen $V_0, V_1, V_2, \ldots$ verwendet werden.

Von den alten mengentheoretischen Ausdrücken sprechen wir fortan als von *kleinen* Ausdrücken, von den Ausdrücken der **NBG**-Mengenlehre als von *großen* Ausdrücken; für die ersteren verwenden wir wie schon bisher die Variablen φ, $\psi, \ldots$, für die letzteren die Variablen $\Phi, \Psi, \ldots$. Für einen kleinen Ausdruck φ sei $\varphi_{\text{groß}}$ der große Ausdruck, der aus φ entsteht, indem man die Variablen $v_0, v_1, v_2, \ldots$ durch $V_0, V_1, V_2, \ldots$ ersetzt. Im Übrigen bedienen wir uns ähnlicher Bezeichnungskonventionen wie früher. Insbesondere stehen $X, Y, Z, \ldots$ für Klassenvariablen.

H.-D. Ebbinghaus, *Einführung in die Mengenlehre*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-63866-8_12

Gemäß der intuitiven Vorstellung, dass die Mengen gerade die Elemente von Klassen sind, definieren wir das Prädikat M (für „ist eine Menge") durch

$$MX \;:\leftrightarrow\; \exists Y X \in Y$$

und verwenden $x, y, z, \ldots$ als Variablen für Mengen, d. h. für Klassen X mit MX. So steht das im Folgenden angegebene Existenzaxiom von **NBG**, nämlich

$$\exists x\, x = x,$$

für

$$\exists X(MX \wedge X = X), \quad \text{d. h. für} \quad [\exists X\, X = X]^M,$$

und das ist logisch äquivalent zu $\exists X \exists Y\, X \in Y$. Obwohl $\exists x\, x = x$ wie das Existenzaxiom **Ex** von **ZF** aussieht, ist es kein kleiner Ausdruck, sondern eine abkürzende Schreibweise für $[\mathbf{Ex}_{\text{groß}}]^M$. Um deutlicher zu sein, schreiben wir allgemein

$$\varphi^* \quad \text{für} \quad [\varphi_{\text{groß}}]^M,$$

also $\mathbf{Ex}^*$ für das Existenzaxiom von **NBG**. Dies hindert uns jedoch nicht, im konkreten Fall die Formulierung $\exists x\, x = x$ sowohl im Hinblick auf **ZF** als auch im Hinblick auf **NBG** zu verwenden. Aus dem Zusammenhang wird sich jeweils klar ergeben, welche Bedeutung gemeint ist.

Das Axiomensystem **NBG** umfasst folgende Axiome:

das *Existenzaxiom* $\exists x\, x = x$, d. h. $\mathbf{Ex}^*$;

das *Extensionalitätsaxiom* $\mathbf{Ext}_{\text{NBG}}$:

$$\forall X\, \forall Y\, \big(\forall z\, (z \in X \leftrightarrow z \in Y) \rightarrow X = Y\big);$$

das *Aussonderungsaxiom* $\mathbf{Aus}_{\text{NBG}}$:

$$\forall X \forall x \exists y \forall z\, \big(z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge z \in X)\big);$$

das *Vereinigungsmengenaxiom* $(\cup\text{-}\mathbf{Ax})^*$;

das *Vereinigungsmengenaxiom* $(\bigcup\text{-}\mathbf{Ax})^*$;

das *Potenzmengenaxiom* $\mathbf{Pot}^*$;

das *Unendlichkeitsaxiom* $\mathbf{Inf}^*$;

das *Schema der Komprehensionsaxiome*, $\mathbf{Komp}_{\text{NBG}}$; es enthält zu jedem *puren* Ausdruck $\Phi(Z, \overset{n}{X})$ das Axiom

$$\forall \overset{n}{X}\, \exists Y\, \forall z\, \big(z \in Y \leftrightarrow \Phi(z, \overset{n}{X})\big);$$

dabei heiße ein großer Ausdruck *pur* (manchmal auch: *prädikativ*), wenn in ihm alle Quantoren auf Mengen relativiert sind, wenn also die Quantoren nur in der Form $\forall X(MX \to \ldots)$ oder $\exists X(MX \wedge \ldots)$, d.h. in der Form $\forall x \ldots$ oder $\exists x \ldots$ auftreten. Pure parameterfreie Ausdrücke sind von der Gestalt ψ^* mit einem kleinen parameterfreien Ausdruck ψ.

Für das nach $\mathbf{Ext}_{\mathrm{NBG}}$ eindeutig bestimmte Y mit

$$\forall z \left(z \in Y \leftrightarrow \Phi(z, \overset{n}{X})\right)$$

schreiben wir häufig

$$\left[z \mid \Phi(z, \overset{n}{X})\right].$$

Bevor wir in der Auflistung der **NBG**-Axiome fortfahren, flechten wir einige Bemerkungen ein, die zum Teil dazu dienen, die Formulierung der nachfolgenden Axiome zu erleichtern.

Die Einschränkung der Komprehensionsaxiome auf solche, die zu puren Ausdrücken gehören, präzisiert die Bedingungen, die wir in I. 3 bei der vorläufigen Beschreibung des Komprehensionsschemas angedeutet haben. Löst man sich von dieser Einschränkung, lässt also alle großen Ausdrücke zu, entsteht das Axiomensystem der *Kelly-Morse-(Klassen-)Mengenlehre* von John Kelley und Anthony Morse.

Modifiziert man die *Mengen*existenzaxiome von $\mathbf{Aus}_{\mathrm{NBG}}$ bis $\mathbf{Pot}^*$ dahingehend, dass man die Existenzforderungen zur Existenz von Klassen abschwächt, erhält man Spezialfälle von $\mathbf{Komp}_{\mathrm{NBG}}$. So existiert nach $\mathbf{Komp}_{\mathrm{NBG}}$ zu jeder Klasse X und jeder Menge x die Klasse $Y = [z \mid z \in x \wedge z \in X]$, die wir mit $x \cap X$ wiedergeben. $\mathbf{Aus}_{\mathrm{NBG}}$ garantiert darüber hinaus, dass Y eine Menge ist.

Leicht lässt sich zeigen, dass mit den bisher formulierten Axiomen von **NBG** die *-Analoga der **ZF**-Axiome ohne **Ers** und **Fund** beweisbar sind. Wir können daher in **NBG** die leere *Menge*, den Durchschnitt und die Vereinigung von Mengen, Paarmengen, geordnete Paare von Mengen (als Mengen) definieren. Dabei übernehmen wir die früheren Bezeichnungen. Setzen wir dann noch

$$\begin{aligned}
\operatorname{Rel} X \;&:\leftrightarrow\; \forall x\,(x \in X \to x \text{ ist geordnetes Paar}),\\
\operatorname{Fkn} X \;&:\leftrightarrow\; \operatorname{Rel} X \wedge \forall x \exists y\,(x,y) \in X\\
&\qquad\; \wedge \forall x\, \forall y\, \forall z\,\big((x,y) \in X \wedge (x,z) \in X \to y = z\big),
\end{aligned}$$

können wir die letzten Axiome von **NBG** folgendermaßen angeben:

das *Fundierungsaxiom* $\mathbf{Fund}_{\mathrm{NBG}}$:

$$\forall X \left(X \neq \emptyset \to \exists y\,(y \in X \wedge y \cap X = \emptyset)\right);$$

das *Ersetzungsaxiom* $\mathbf{Ers}_{\text{NBG}}$:

$$\forall X\,\big(\text{Fkn}\,X \;\to\; \forall u \exists v\, v = \{X(x) \mid x \in u\}\big).$$

Dabei stehe $X(x)$ für *das* y mit $(x, y) \in X$.

Möchte man **NBG** um ein Auswahlaxiom ergänzen, bieten sich mehrere Möglichkeiten an: Man kann $\mathbf{AC}^*$ wählen, man kann aber auch das den erweiterten Rahmen der Klassen stärker ausnutzende *globale* Auswahlaxiom

$$\mathbf{GC}:\; \exists X\,\big(\text{Fkn}\,X \wedge \forall x\,(x \neq \emptyset \to X(x) \in x)\big)$$

hinzunehmen, das in uniformer Weise aus jeder nicht leeren Menge ein Element auszuwählen gestattet. Natürlich gilt

$$\mathbf{NBG} \vdash \mathbf{GC} \to \mathbf{AC}^*.$$

NBG besteht, wie auch **ZF**, aus unendlich vielen Axiomen. Während aber **ZF** in dem Sinne wesentlich unendlich ist, als zu ihm kein gleichwertiges endliches Axiomensystem existiert (vgl. Aufgabe X.2.7.9), ist **NBG** (im Gegensatz zur Kelly-Morse-Mengenlehre) zu einem endlichen Axiomensystem äquivalent:

Das System $\mathbf{NBG}_{\text{fin}}$ entstehe aus **NBG**, indem man das Schema der Komprehensionsaxiome durch die folgenden Spezialfälle **K0** bis **K7** ersetzt:

$$\begin{array}{lrl}
\mathbf{K0} & \forall x \exists Y & Y = [z \mid z = x] \\
\mathbf{K1} & \forall X \exists Y & Y = [(u,v) \mid u \in X] \\
 & & \big(= [w \mid \exists u \exists v\,(u \in X \wedge w = (u,v))]\big); \\
\mathbf{K2} & \forall X \exists Y & Y = [(u,v) \mid (v,u) \in X]; \\
\mathbf{K3} & \forall X \exists Y & Y = [((u,v),w) \mid (u,(v,w)) \in X] \\
 & & \big(= [(u,v,w) \mid (u,(v,w)) \in X]\big); \\
\mathbf{K4} & \exists Y & Y = [(u,v) \mid u \in v]; \\
\mathbf{K5} & \forall X \exists Y & Y = [z \mid z \notin X]; \\
\mathbf{K6} & \forall X_1 \forall X_2 \exists Y & Y = [z \mid z \in X_1 \wedge z \in X_2]; \\
\mathbf{K7} & \forall X \exists Y & Y = [z \mid \exists u\,(z,u) \in X].
\end{array}$$

Dann gilt:

1.1 Satz. NBG *und* $\mathbf{NBG}_{\text{fin}}$ *sind gleich stark.*

Beweis. Wir brauchen nur zu zeigen, dass in $\mathbf{NBG}_{\text{fin}}$ alle Komprehensionsaxiome von **NBG** beweisbar sind. Wir tun das durch metasprachliche Induktion über den Aufbau der großen puren Ausdrücke. Die Axiome **K0** bis **K7** sind gerade so gewählt, dass sie diese Induktion erlauben. So dient **K5** dem $\neg$-Schritt,

K6 dem $\wedge$-Schritt; **K7** wird den $\exists$-Schritt, und die restlichen **K**-Axiome werden den atomaren Fall ermöglichen. Aus technischen Gründen zeigen wir die folgende Variante:

(∗) Für $m \geq 1$, $n \geq 0$ und pures $\Phi(\overset{m}{Z}, \overset{n}{X})$ gilt:
$\mathbf{NBG}_{\text{fin}} \vdash \forall X_1 \ldots X_n \exists Y\, Y = \big[z \mid \exists \overset{m}{z} \,\big(z = (z_1, \ldots, z_m) \wedge \Phi(\overset{m}{z}, \overset{n}{X})\big)\big]$.

Mit $m = 1$ sind wir dann wegen $(z) = z$ am Ziel.

Da

$$\mathbf{NBG}_{\text{fin}} \vdash \forall X\, \forall Y\, \big(X = Y \leftrightarrow \forall z\, (z \in X \leftrightarrow z \in Y)\big),$$

können wir annehmen, dass in Φ das Gleichheitszeichen nicht auftritt, und wie üblich können wir weiter voraussetzen, dass auch $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ und $\forall$ nicht vorkommen.

Sei nun $\Phi := \Phi(\overset{m}{Z}, \overset{n}{X})$ entsprechend gegeben. Wir haben in $\mathbf{NBG}_{\text{fin}}$ zu zeigen, dass die Klasse

$$Y \;:=\; \big[(z_1, \ldots, z_m) \mid \Phi(\overset{m}{z}, \overset{n}{X})\big]$$

existiert.

Für *atomares* Φ behandeln wir nacheinander die möglichen Fälle. Wir schicken voraus, dass die leere Klasse existiert. Daraus ergibt sich dann (wegen **K5**) die Existenz der

$$\textit{Allklasse}\ A \;:=\; \big[z \mid z = z\big]$$

und für $l = 2, 3, \ldots$ (wegen **K1**) die Existenz der Klassen

$$A^l \;:=\; \big[(z_1, \ldots, z_l) \mid z_1 = z_1\big]$$

aller l-Tupel von Mengen. Zur Existenz der leeren Klasse: Nach $\mathbf{Ex}^*$ existiert eine Menge, etwa x. Mit **K5** erhält man die Komplementärklasse $[z \mid z \notin x]$, mit $\mathbf{Aus}_{\text{NBG}}$ dann die leere Klasse, die man damit sogar als Menge erkennt.

$\Phi = X_r \in X_t$:

Je nachdem, ob $X_r \in X_t$ zutrifft oder nicht, ist $Y = \emptyset$ oder $Y = A^m$ (insbesondere $Y = A$ für $m = 1$), Y existiert also.

$\Phi = Z_r \in Z_t$:

Ist $r = t$, so gilt wegen $\mathbf{Fund}_{\text{NBG}}$ stets $z_r \notin z_r$ und daher $Y = \emptyset$. Ist $r < t$, so existiert nach **K4** die Klasse $[(z_r, z_t) \mid z_r \in z_t]$; ist $t < r$, so existiert entsprechend die Klasse $[(z_r, z_t) \mid z_r \in z_t]$ und nach **K2** dann die Klasse $[(z_t, z_r) \mid z_r \in z_t]$. Jetzt müssen nur noch die geordneten Paare zu m-Tupeln aufgefüllt werden. Wir tun dies „von links nach rechts“ und beschränken uns dabei auf den Fall $r < t$.

Falls $r \geq 2$, beginnen wir folgendermaßen: Zunächst zeigt **K1**, dass mit der Klasse $[(z_r, z_t) \mid z_r \in z_t]$ auch die Klasse $[((z_r, z_t), z_1) \mid z_r \in z_t]$ existiert. Wir notieren diesen Sachverhalt in der Form

$$(r,t) \underset{\mathbf{K1}}{\to} ((r,t),1)$$

und schließen weiter:

$$((r,t),1) \underset{\mathbf{K2}}{\to} (1,(r,t)),$$

und, falls $r \geq 3$:

$$\underset{\mathbf{K2}}{\to} ((r,t),1) \underset{\mathbf{K1}}{\to} (((r,t),1),2) \underset{\mathbf{K2}}{\to} (2,((r,t),1))$$

$$\underset{\mathbf{K3}}{\to} ((2,(r,t)),1) \underset{\mathbf{K2}}{\to} (1,(2,(r,t))) \underset{\mathbf{K3}}{\to} ((1,2),(r,t))$$

$$\ldots \ ((1,2,\ldots,r-1),(r,t)) \underset{\mathbf{K3}}{\to} ((1,\ldots,r),t),$$

sodann im Falle $r+1 < t$ (auch für $r = 1$) mit $\overline{r}$ für $(1,\ldots,r)$ weiter gemäß

$$\underset{\mathbf{K2}}{\to} (t,\overline{r}) \underset{\mathbf{K1}}{\to} ((t,\overline{r}),r+1) \underset{\mathbf{K2}}{\to} (r+1,(t,\overline{r}))$$

$$\underset{\mathbf{K3}}{\to} ((r+1,t),\overline{r}) \underset{\mathbf{K2}}{\to} (\overline{r},(r+1,t)) \underset{\mathbf{K3}}{\to} ((1,\ldots,r+1),t)$$

und ähnlich weiter zu $(1,\ldots,t)$, und, falls $t < m$, weiter mit

$$\underset{\mathbf{K1}}{\to} (1,\ldots,t+1) \ \ldots \ \underset{\mathbf{K1}}{\to} (1,\ldots,m).$$

Damit ist gezeigt, dass Y existiert.

$\Phi = Z_r \in X_t$:

Ähnlich wie oben, ausgehend von $[z_r \mid z_r \in X_t] = X_t$.

$\Phi = X_t \in Z_r$:

Ist X_t keine Menge, so ist $Y = \emptyset$. Andernfalls verfährt man ähnlich wie oben, wobei man von der Klasse $Z := [z_r \mid X_t \in z_r]$ ausgeht. Diese existiert; denn nach **K0** existiert die Klasse $[X_t]$, die genau aus X_t besteht, nach **K1** dann die Klasse $[(x,u) \mid x \in [X_t]] = [(X_t,u) \mid u = u]$ und nach **K4** die Klasse $[(z,u) \mid z \in u]$, weiter nach **K6** der Durchschnitt beider Klassen, also die Klasse $[(X_t,u) \mid X_t \in u]$, nach **K2** dann die Klasse $[(z_r,X_t) \mid X_t \in z_r]$ und nach **K7** schließlich die Klasse Z.

Der Induktionsschritt: Da sich, wie wir bereits angedeutet haben, der $\neg$-Schritt und der $\wedge$-Schritt unmittelbar mit **K5** bzw. **K6** ergeben, brauchen wir nur noch den $\exists$-Schritt zu behandeln. Sei also

$$\Phi(\overset{m}{Z},\overset{n}{X}) \ = \ \exists W \left(MW \wedge \Psi(\overset{m}{Z},W,\overset{n}{X}) \right).$$

Wir können annehmen, dass W verschieden von $Z_1, \ldots, X_n$ ist, und wir schreiben Z_{m+1} für W. Nach Induktionsvoraussetzung existiert die Klasse

$$U := \big[(z_1, \ldots, z_m, z_{m+1}) \mid \Psi(\overset{m+1}{z}, \overset{n}{X})\big].$$

Damit existiert nach **K7** die Klasse

$$\big[(z_1, \ldots, z_m) \mid \exists z_{m+1} \Psi(\overset{m+1}{z}, \overset{n}{X})\big],$$

d. h. die Klasse

$$\big[(z_1, \ldots, z_m) \mid \exists Z_{m+1} \big(MZ_{m+1} \wedge \Psi(\overset{m}{z}, Z_{m+1}, \overset{n}{X})\big)\big],$$

also Y. ⊣

§2 Die Gleichwertigkeit von ZF und NBG

Das Ziel dieses Abschnitts ist ein möglichst weitgehender Beweis des folgenden auf Andrzej Mostowski (1949) zurückgehenden Satzes:

2.1 Satz. *Für alle kleinen parameterfreien Ausdrücke φ gilt*:

$$\mathbf{ZF} \vdash \varphi \textit{ genau dann, wenn } \mathbf{NBG} \vdash \varphi^*.$$

Die Systeme **ZF** und **NBG** sind also in bezug auf die Beweisbarkeit rein mengentheoretischer Sachverhalte gleich stark. Der Gleichwertigkeitssatz bleibt offensichtlich gültig, wenn wir **ZF** durch **ZFC** und **NBG** durch $\mathbf{NBG} + \mathbf{AC}^*$ ersetzen. Er bleibt aber auch dann gültig, wenn man **ZF** um **AC** und **NBG** um das globale Auswahlaxiom **GC** erweitert.

2.2 Korollar (Die Äquikonsistenz von **ZF** und **NBG**)**.** **ZF** *ist genau dann widerspruchsfrei, wenn* **NBG** *widerspruchsfrei ist.* ⊣

Beweis von Satz 2.1. Gelte, zum Nachweis der Richtung von links nach rechts, $\mathbf{ZF} \vdash \varphi$. Ersetzen der kleinen Variablen durch große Variablen zeigt uns, dass $\mathbf{ZF}_{\text{groß}} \vdash \varphi_{\text{groß}}$, und hieraus ergibt sich (vgl. den Beweis zu Satz XI.1.2):

$$[\mathbf{ZF}_{\text{groß}}]^M + \exists X\, MX \;\vdash\; [\varphi_{\text{groß}}]^M.$$

Da $[\mathbf{ZF}_{\text{groß}}]^M \vdash \exists X\, MX$, können wir die Voraussetzung $\exists X\, MX$ eliminieren und erhalten damit

$$\mathbf{ZF}^* \;\vdash\; \varphi^*.$$

Wir brauchen also nur zu zeigen, dass $\mathbf{NBG} \vdash \psi^*$ für alle **ZF**-Axiome ψ. Auf die von **Fund** und den Ersezungsaxiomen verschiedenen Axiome sind wir bereits auf Seite 207 eingegangen. **Fund*** erhält man sofort aus $\mathbf{Fund}_{\mathrm{NBG}}$ durch Einschränkung auf Mengen. Um die (*-Version der) Ersetzungsaxiome zu zeigen, nehmen wir an, für ein kleines $\varphi(x, y, \overset{n}{x})$ gelte

$$\forall x \exists^{=1} y\, \varphi^*(x, y, \overset{n}{x}).$$

Wir setzen ($\mathbf{Komp}_{\mathrm{NBG}}$!)

$$X \;:=\; \big[z \mid \exists x\, \exists y\, \big(z = (x, y) \wedge \varphi(x, y, \overset{n}{x})\big)^*\big] \;\big(= \big[(x, y) \mid \varphi^*(x, y, \overset{n}{x})\big]\big).$$

Dann haben wir $\mathrm{Fkn}\, X$, und $\mathbf{Ers}_{\mathrm{NBG}}$ liefert für alle u die Existenz der Menge $v := \{y \mid \exists x(x \in u \wedge \varphi^*(x, y, \overset{n}{x}))\}$.

Wir kommen zur Richtung von rechts nach links. Es gelte dazu

(1) $\mathbf{NBG} \vdash \varphi^*$.

Wir haben zu zeigen:

(2) $\mathbf{ZF} \vdash \varphi$.

Dazu machen wir uns zunächst in einer ausgedehnten inhaltlichen Überlegung klar, dass φ in jedem Mengenuniversum gilt, das den Bedingungen von **ZF** genügt (vgl. (8) auf Seite 214). Wir nehmen also an, $\mathfrak{U}$ sei ein Mengenuniversum, in dem alle **ZF**-Axiome gelten. Als Variable für Mengen aus $\mathfrak{U}$ wählen wir wie üblich $x, y, z, \ldots$, und die Elementbeziehung auf $\mathfrak{U}$ bezeichnen wir wie immer mit $\in$. Von den Mengen aus $\mathfrak{U}$ sprechen wir als den $\mathfrak{U}$-*Mengen*.

Wir erweitern nun $\mathfrak{U}$ zu einem Klassenuniversum $\mathfrak{V}$, in dem die Axiome von **NBG** gelten (vgl. (5)). Anschließend werden wir mit (1) beweisen, dass φ^* in $\mathfrak{V}$ gilt (vgl. (6)), und schließlich, dass φ in $\mathfrak{U}$ gilt (vgl. (7)).

Als Klassen des Klassenuniversums $\mathfrak{V}$ wählen wir die $\mathfrak{U}$-Mengen und die „Teiluniversen"

$$\big[z \mid \psi(z, \overset{n}{x}) \text{ gilt in } \mathfrak{U}\big],$$

wobei die $\psi(z, \overset{n}{x})$ alle kleinen Ausdrücke und die Parameter $x_1, \ldots, x_n$ alle $\mathfrak{U}$-Mengen durchlaufen. Die Klassen aus $\mathfrak{V}$, welche die gleichen Elemente wie eine $\mathfrak{U}$-Menge x haben, sollen als Elemente im Sinne von $\mathfrak{V}$ gerade die z mit $z \in x$ haben, und die Klassen der Gestalt $[z \mid \psi(z, \overset{n}{x}) \text{ gilt in } \mathfrak{U}]$ gerade die z aus $\mathfrak{U}$, für die $\psi(z, \overset{n}{x})$ in $\mathfrak{U}$ gilt. Schließlich sollen zwei Klassen genau dann gleich sein, wenn sie im Sinne von $\mathfrak{V}$ die gleichen Elemente enthalten. Insbesondere ist für $\mathfrak{U}$-Mengen x stets $x = [z \mid z \in x \text{ gilt in } \mathfrak{U}]$.

Zunächst stellen wir fest:

(3) $\mathfrak{V}$ umfasst $\mathfrak{U}$, die Elementbeziehung im Sinne von $\mathfrak{V}$ stimmt auf $\mathfrak{U}$ mit $\in$ überein, und die Mengen im Sinne von $\mathfrak{V}$ sind gerade die $\mathfrak{U}$-Mengen.

Die beiden ersten Aussagen von (3) gelten aufgrund der Definition von $\mathfrak{V}$. Für die dritte beachten wir, dass die Klassen von $\mathfrak{V}$ nach Definition im Sinne von $\mathfrak{V}$ nur solche Elemente haben können, die $\mathfrak{U}$-Mengen sind, und dass umgekehrt jede $\mathfrak{U}$-Menge x im Sinne von $\mathfrak{V}$ ein Element der Klasse $\{x\}$ ist.

Aufgrund von (3) führt es nicht zu Unverträglichkeiten, wenn wir fortan die Elementbeziehung von $\mathfrak{V}$ ebenfalls mit $\in$ bezeichnen. Wir verwenden die Variablen $X, Y, Z, \ldots$ als Variablen für Klassen aus $\mathfrak{V}$. Für Mengen im Sinne von $\mathfrak{V}$, d. h. nach (3), für $\mathfrak{U}$-Mengen, benutzen wir weiterhin die Variablen $x, y, z, \ldots$.

Als unmittelbare Folge aus (3) erhalten wir:

(4) Für alle kleinen Ausdrücke $\psi(\overset{n}{x})$ und alle $\mathfrak{U}$-Mengen $x_1, \ldots, x_n$:
$\psi(\overset{n}{x})$ gilt in $\mathfrak{U}$ genau dann, wenn $\psi^*(\overset{n}{x})$ in $\mathfrak{V}$ gilt.

Wir sind auf dem richtigen Weg; denn wir können jetzt zeigen:

(5) In $\mathfrak{V}$ gelten alle **NBG**-Axiome.

Den Nachweis führen wir exemplarisch für $\mathbf{Ext}_{\mathrm{NBG}}$, $\mathbf{Inf}^*$, $\mathbf{Komp}_{\mathrm{NBG}}$ und $\mathbf{Fund}_{\mathrm{NBG}}$.

$\mathbf{Ext}_{\mathrm{NBG}}$ gilt in $\mathfrak{V}$ aufgrund der Definition von $\mathfrak{V}$. $\mathbf{Inf}^*$ gilt nach (4) in $\mathfrak{V}$, da **Inf** in $\mathfrak{U}$ gilt.

Zu $\mathbf{Komp}_{\mathrm{NBG}}$: Sei etwa

$$\forall X \exists Y \forall z \big(z \in Y \leftrightarrow \psi^*(z, X)\big)$$

ein Komprehensionsaxiom mit nur einem Klassenparameter. (Der Fall endlich vieler Parameter – nach Satz 1.1 reichen zwei – lässt sich ähnlich behandeln.) Ferner sei X eine Klasse von $\mathfrak{V}$, etwa

$$X \;=\; \big[z \mid \chi(z, \overset{n}{x}) \text{ gilt in } \mathfrak{U}\big] \;=\; \big[z \mid \chi^*(z, \overset{n}{x}) \text{ gilt in } \mathfrak{V}\big]$$

(jede Klasse von $\mathfrak{V}$ lässt sich so schreiben). Gesucht ist eine Klasse Y von $\mathfrak{V}$ mit

$$(*) \qquad \forall z \big(z \in Y \leftrightarrow \psi^*(z, X)\big).$$

Wir können annehmen, dass in ψ^* das Gleichheitszeichen nicht vorkommt und dass die Variable X nicht gebunden auftritt. (Falls erforderlich, können wir das Gleichheitszeichen wegen der Gültigkeit von

$$\forall UW \big(U = W \leftrightarrow \forall z(z \in U \leftrightarrow z \in W)\big)$$

in $\mathfrak{V}$ leicht eliminieren.) Wir ersetzen nun die atomaren Teilausdrücke von $\psi^*(z, X)$ der Gestalt

(α) $X \in X$

(β) $u \in X$

(γ) $X \in u$

der Reihe nach durch die über $\mathfrak{V}$ gleichwertigen Ausdrücke

(α') $\exists v\, v \in v$

(β') $\chi^*(u, \overset{n}{x})$

(γ') $\exists v \left(\forall z\, (z \in v \leftrightarrow \chi^*(z, \overset{n}{x})) \wedge v \in u\right)$.

Zur Gleichwertigkeit von (α) und (α') beachte man, dass die **ZF**-Axiome und insbesondere **Fund** in $\mathfrak{U}$ gelten, und unterscheide die Fälle „X ist Menge" und „X ist keine Menge".

Durch die Ersetzung entsteht aus $\psi^*(z, X)$ ein Ausdruck der Gestalt $\vartheta^*(z, \overset{n}{x})$, und es gilt in $\mathfrak{V}$

$$\forall z \left(\vartheta^*(z, \overset{n}{x}) \;\leftrightarrow\; \psi^*(z, X)\right).$$

Wir können also Y als

$$\left[z \mid \vartheta^*(z, \overset{n}{x}) \text{ gilt in } \mathfrak{V}\right]$$

definieren und erhalten damit (vgl. (4)) eine Klasse aus $\mathfrak{V}$, die ($*$) erfüllt.

Zu $\mathbf{Fund}_{\text{NBG}}$: Sei wieder $X = [z \mid \chi(z, \overset{n}{x}) \text{ gilt in } \mathfrak{U}]$ gegeben und nicht leer. Es ist (vgl. (4)) $X = [z \mid \chi^*(z, \overset{n}{x}) \text{ gilt in } \mathfrak{V}]$. Wir müssen zeigen, dass

$$\exists z \left(\chi^*(z, \overset{n}{x}) \wedge \forall u \left(u \in z \to \neg\chi^*(u, \overset{n}{x})\right)\right)$$

in $\mathfrak{V}$ gilt, also

$$\exists z \left(\chi(z, \overset{n}{x}) \wedge \forall u \left(u \in z \to \neg\chi(u, \overset{n}{x})\right)\right)$$

in $\mathfrak{U}$. Dies ergibt sich sofort daraus, dass mit **ZF** auch das Schema der Fundierung VII.3.6 in $\mathfrak{U}$ gilt.

Damit ist (5) bewiesen.

Da bei den Anwendungen der formalen Regeln des Schliessens die Gültigkeit von Ausdrücken erhalten bleibt, überträgt sich nach (1) die Gültigkeit der **NBG**-Axiome in $\mathfrak{V}$ auf φ^*, und wir bekommen:

(6) In $\mathfrak{V}$ gilt φ^*.

Mit (4) gelangen wir zu:

(7) In $\mathfrak{U}$ gilt φ.

Zusammenfassend haben wir damit gezeigt:

(8) Jedes Mengenuniversum, das die **ZF**-Axiome erfüllt, erfüllt auch φ.

Um den Beweis von Satz 2.1 zu beenden, benötigen wir statt (8) jedoch (2), nämlich $\mathbf{ZF} \vdash \varphi$. Dies kann man auf zwei Wegen erreichen.

Der erste Weg. Man schliesst weiter von (8) auf (2): Im Sinne der sog. Semantik der Sprachen erster Stufe bedeutet (8), dass φ aus **ZF** *folgt*, kurz: dass

$$\mathbf{ZF} \models \varphi.$$

Daher lässt sich (vgl. *Ebbinghaus, Flum und Thomas 2018*) der *Gödelsche Vollständigkeitssatz* anwenden, der für beliebige Axiomensysteme Ψ und Sätze ψ in einer Sprache erster Stufe feststellt:

$$\text{Wenn } \Psi \models \psi, \text{ so } \Psi \vdash \psi.$$

Er liefert wegen $\mathbf{ZF} \models \varphi$ sofort $\mathbf{ZF} \vdash \varphi$, d. h. die Behauptung (2).

Der zweite Weg. Um auf dem ersten Weg von (1) nach (2) zu gelangen, haben wir die Voraussetzung (1) nur dahingehend genutzt, dass jedes Klassenuniversum, das die Axiome von **NBG** erfüllt, auch φ^* erfüllt, nämlich beim Schluss von (5) auf (6). Wir sind also, genauer, von $\mathbf{NBG} \vdash \varphi^*$ zu $\mathbf{NBG} \models \varphi^*$ übergegangen, von dort dann zu $\mathbf{ZF} \models \varphi$ und weiter zu $\mathbf{ZF} \vdash \varphi$. Man kann diesen semantischen Umweg über die Folgebeziehung vermeiden und direkt von (1) auf (2) schließen. Allerdings benötigt man dazu in stärkerem Maße Methoden und Ergebnisse aus der Beweistheorie. Eine Möglichkeit besteht darin, eine geeignete *schnittfreie* Version des Katalogs exakter Schlussregeln zu verwenden. Schnittfreie Systeme vermeiden Schlussregeln wie den Modus ponens

> Falls man von $\chi_1, \ldots, \chi_m$ auf φ und auf $(\varphi \to \psi)$ schließen kann,
> so kann man von $\chi_1, \ldots, \chi_m$ auch auf ψ schließen,

bei denen Teile von Beweisen (hier der Ausdruck φ) später wieder verlorengehen können. Schnittfreie Beweise tragen an jeder Stelle gleichsam ihre Vorgeschichte mit sich und lassen sich daher gut analysieren. Man kann dann zeigen, dass sich ein schnittfreier Beweis im Sinne von (1) umformen lässt in einen Beweis im Sinne von (2).[1] $\dashv$

[1] Informationen über schnittfreie Regelsysteme findet man z. B. in *Richter 1978*.

XIII

Hinweise zur Lösung der Aufgaben

Es kommt wenig darauf an, wie wir schreiben, aber viel, wie wir denken.

Die Vorschläge sind von unterschiedlicher Art: Bei manchen Aufgaben wird die Lösung nur angedeutet oder angegeben; bei anderen, insbesondere bei solchen, auf die im Haupttext zurückgegriffen wird, sind die Argumentationen von einer Ausführlichkeit, die der des Haupttextes nahekommt. Einige wenige Aufgaben, vornehmlich solche, deren Lösung auf der Hand liegt oder der Lösung der vorangehenden Aufgabe ähnlich ist, sind unberücksichtigt geblieben.

Aufgaben zu Kapitel II

1.1.1 $\forall xy\,(\forall z\,(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$.

1.1.2 $\forall x \exists y\, x \in y$; $\neg \exists x \forall y\,(y \neq x \rightarrow y \in x)$.

1.1.3 $\forall xuv\,\big(\psi(x,y) \wedge \psi(u,y) \wedge \psi(v,y) \;\rightarrow\; x = u \vee x = v \vee u = v\big)$;

$$\exists uvw\,\big(u \neq v \wedge u \neq w \wedge v \neq w \wedge \psi(u,y) \wedge \psi(v,y) \wedge \psi(w,y) \wedge \forall x\,\big(\psi(x,y) \rightarrow x = u \vee x = v \vee x = w\big)\big).$$

2.1.1 $\forall xy\,\big(\varphi_T(x,y) \rightarrow \exists uv\,\big(\varphi_P(x,u) \wedge \varphi_P(y,v) \wedge \varphi_T(u,v)\big)\big)$.

2.1.2 $x \cap y = z \;:\leftrightarrow\; \varphi_\cap(x,y,z)$ mit

$$\varphi_\cap(x,y,z) \;:=\; \forall u\,\big(u \in z \leftrightarrow (u \in x \wedge u \in y)\big).$$

Durch Elimination von $\cap$ aus dem Assoziativgesetz entsteht der Ausdruck $\forall xyz\,\exists uvwt\,\big(\varphi_\cap(x,y,u) \wedge \varphi_\cap(u,z,v) \wedge \varphi_\cap(y,z,w) \wedge \varphi_\cap(x,w,t) \wedge v = t\big)$.

H.-D. Ebbinghaus, *Einführung in die Mengenlehre*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-63866-8_13

2.1.3 Sei $F(x) = y \;:\leftrightarrow\; \varphi_F(x,y)$ und $G(x) = y \;:\leftrightarrow\; \varphi_G(x,y)$. Dann ist

$$(F \circ G)(x) = y \;\leftrightarrow\; \exists u\big(\varphi_G(x,u) \land \varphi_F(u,y)\big).$$

H lässt sich folgendermaßen definieren:

$$H(x) = y \;\leftrightarrow\; \big(\varphi(x) \land \varphi_F(x,y)\big) \lor \big(\neg\varphi(x) \land \varphi_G(x,y)\big).$$

2.1.4 Es seien $\varphi(x,y)$ schwach funktional und F die durch φ definierte partielle Operation. Dann gilt: $F(x)$ ist definiert $\;\leftrightarrow\; \exists y\, \varphi(x,y)$.

2.1.5 Seien φ und F wie in der vorangehenden Aufgabe. Man setze

$$G(x) = y \;:\leftrightarrow\; \big(\exists u\, \varphi(x,u) \land \varphi(x,y)\big) \lor \big(\neg\exists u\, \varphi(x,u) \land y = \emptyset\big).$$

Aufgaben zu Kapitel III

1.8.1 $\forall x \exists y \big(\forall z\, (z \in y \;\leftrightarrow\; z \in x \land z \notin z) \land y \notin x\big)$.

1.8.2 Es gilt $\forall z\, (z \in x \leftrightarrow z \in x \land z = z)$ und $\forall z\, (z \in x \leftrightarrow z \in x \land z \in x)$.

1.8.3 *Zu* (i): $u \in (x \setminus y) \cap z \;\leftrightarrow\; u \in x \land u \in z \land u \notin y$
$\leftrightarrow\; (u \in x \land u \in z) \land (u \notin y \lor u \notin z) \;\leftrightarrow\; u \in (x \cap z) \land \neg(u \in y \land u \in z)$
$\leftrightarrow\; u \in (x \cap z) \setminus (y \cap z)$.

Zu (ii): $u \in x \setminus (x \setminus y) \;\leftrightarrow\; u \in x \land \neg(u \in x \land u \notin y)$
$\leftrightarrow\; u \in x \land u \in y \;\leftrightarrow\; u \in x \cap y$.

1.8.4 Falls $X = \emptyset$, sind beide Mengen leer. Falls $X \neq \emptyset$, ist $z \in \big(\bigcap X\big) \cap y$
$\leftrightarrow\; \forall x\, (x \in X \to z \in x) \land z \in y$
$\leftrightarrow$ (da $X \neq \emptyset$) $\forall x\, (x \in X \to z \in x \land z \in y) \;\leftrightarrow\; z \in \bigcap\{x \cap y \mid x \in X\}$.

1.8.6 Da $\forall z \forall x\, (x \in \emptyset \to z \in x)$ gilt, wäre $F(\emptyset)$ die Allmenge.

2.3.1 Für alle Mengen u gilt: $u \in \bigcup(x \cup y)$
$\leftrightarrow\; \exists v\, (v \in x \cup y \land u \in v) \;\leftrightarrow\; \exists v\, \big((v \in x \land u \in v) \lor (v \in y \land u \in v)\big)$
$\leftrightarrow\; \exists v\, (v \in x \land u \in v) \lor \exists v\, (v \in y \land u \in v)$
$\leftrightarrow\; u \in \big(\bigcup x\big) \cup \big(\bigcup y\big)$.

2.3.2 Wir zeigen die erste Gleichung: Es ist $u \in y \setminus \bigcap X$
$\leftrightarrow\; u \in y \land u \notin \bigcap X \;\leftrightarrow$ (da $X \neq \emptyset$) $u \in y \land \exists x\, (x \in X \land u \notin x)$
$\leftrightarrow\; \exists x\, (x \in X \land u \notin x \land u \in y)$
$\leftrightarrow\; \exists x\, (x \in X \land u \in y \setminus x) \;\leftrightarrow\; u \in \bigcup\{y \setminus x \mid x \in X\}$.

2.3.3 Es sei $z_0 := \emptyset$, $z_1 := \{\emptyset\}$, $z_2 := \{\{\emptyset\}\}, \ldots$, also $z_0 = \emptyset$ und allgemein $z_{l+1} = \{z_l\}$. Die z_n sind untereinander verschieden (vgl. Aufgabe 4.4.3). Das „Universum" $\mathfrak{U}_0$ bestehe aus allen Teilmengen von $\{z_0, z_1, z_2 \ldots\}$, in denen nur endlich viele z_l mit ungeradem l vorkommen. Alle z_n liegen in $\mathfrak{U}_0$, und in $\mathfrak{U}_0$ gelten **Ex** und **Ext**. Mit x und y liegen auch $x \cup y$ und jede Teilmenge von x in $\mathfrak{U}_0$. Also gelten **Aus** und $\cup$-**Ax** in $\mathfrak{U}_0$. Da $z := \{z_2, z_4, z_6, \ldots\}$ in $\mathfrak{U}_0$ liegt, $\bigcup z = \{z_1, z_3, z_5, \ldots\}$ aber nicht, kann $\bigcup$-**Ax** nicht in $\mathfrak{U}_0$ gelten.

3.5.1 Durch (metasprachliche) vollständige Induktion über n. Zunächst ist $\mathrm{Pot}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ einelementig. Ist x $(n+1)$-elementig, etwa $x = y \cup \{a\}$ mit einer n-elementigen Menge y, so ist $\mathrm{Pot}(x) = \mathrm{Pot}(y) \cup \big\{z \cup \{a\} \mid z \in \mathrm{Pot}(y)\big\}$. Hieraus ergibt sich leicht der Induktionsschluss.

3.5.2 Sei $x = \{\{\emptyset\}\}$ und $y = \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$. Dann ist $x \cap y = \emptyset$, also $\bigcup (x \cap y) = \emptyset$, aber $\emptyset \in \big(\bigcup x\big) \cap \big(\bigcup y\big)$. Es gilt stets „$\subseteq$".

3.5.3 Mit $z \in x$ ist $z \subseteq \bigcup x$, also $z \in \mathrm{Pot}(\bigcup x)$. Gleichheit tritt für $x = \{\emptyset\}$ ein, Ungleichheit für $x = \emptyset$. Zum Rest beachte man, dass $\bigcup \mathrm{Pot}(x) = x$.

3.5.4 Wir behandeln $* = \cup$. Für $x \in X$ ist $x \subseteq \bigcup X$. Daher liefert **Aus** die Existenz von $\{x \cup y \mid x \in X\} = \{z \in \mathrm{Pot}((\bigcup x) \cup y) \mid \exists x\, (x \in X \wedge z = x \cup y)\}$.

3.5.5 (i) Da $\{\{u, v\} \mid u, v \in x\} = \{z \in \mathrm{Pot}(x) \mid \exists uv\, (u, v \in x \wedge z = \{u, v\})\}$, haben wir die Existenz. Ferner gilt $\big\{\{u, v\} \mid u, v \in x\big\} = y \;\leftrightarrow$

$$\forall z \,\big(z \in y \leftrightarrow \exists uv \,\big(u, v \in x \wedge \forall w\, (w \in z \leftrightarrow w = u \vee w = v)\big)\big).$$

(ii) Mit $\{\mathrm{Pot}(u) \mid u \in x\} = \{z \in \mathrm{Pot}(\mathrm{Pot}(\bigcup x)) \mid \exists u\, (u \in x \wedge z = \mathrm{Pot}(u))\}$ erhalten wir die Existenz.

3.5.6 Das „Universum" bestehe genau aus der leeren Menge, es bestehe also aus den Elementen von $\{\emptyset\}$. Weitere „Universen", die die Unbeweisbarkeit belegen, gewinnt man durch iterierte Potenzmengenbildung, also die „Universen" $\mathrm{Pot}(\{\emptyset\})$, $\mathrm{Pot}(\mathrm{Pot}(\{\emptyset\}))$, usf.

4.4.1 Eine Form ist $\omega = y \;:\leftrightarrow\; \forall z \,\big(z \in y \leftrightarrow \forall w\, (w \text{ induktiv} \to z \in w)\big)$.

4.4.2 Mit der Definition x induktiv$_{\mathbf{Z}}$ $:\leftrightarrow\; \emptyset \in x \wedge \forall z\, (z \in x \to \{z\} \in x)$ sei $\mathbf{Inf}_{\mathbf{Z}}$ der Ausdruck $\exists x\, x$ induktiv$_{\mathbf{Z}}$. Man kann nun ähnlich wie mit **Inf** argumentieren.

4.4.3 Sei $z_0 := \emptyset$, und für $n \geq 0$ sei $z_{n+1} := \{z_n\}$. Wir zeigen durch metasprachliche Induktion über n, dass für alle l

$$z_n \neq z_{n+l+1}. \tag{1}$$

Der Fall $n = 0$ ist klar, da stets $z_l \in z_{l+1}$, also $z_{l+1} \neq \emptyset$. Im Induktionsschritt beachte man, dass mit $z_{n+1} = z_{(n+1)+l+1}$ auch $z_n = z_{n+l+1}$.

4.4.4 Man zeigt zunächst durch metasprachliche Induktion über n, dass für alle $n \geq 1$ gilt: $\mathbf{n} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{n-1}\}$. Sodann zeigt man, ebenfalls durch Induktion über n, dass $\mathbf{k} \neq \mathbf{n}$ für alle $k < n$. Gälte, im Induktionsschritt, $\mathbf{k} = \mathbf{n+1}$ für ein $k < n+1$, so $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$ und $\mathbf{n} \in \{\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{k-1}\}$, ein Widerspruch. Die Menge $\mathbf{n}$ besteht also aus den n verschiedenen Elementen $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{n-1}$.

5.2.1 Es ist $\{F(x) \mid x \in u\} = \{y \mid Ey\}$ mit $Ey :\leftrightarrow \exists x\,(x \in u \wedge y = F(x))$.

5.2.2 Die **Ers**-Axiome fallen unter die Axiome vom Typ (i) und diese unter die Axiome vom Typ (ii). Zur Rechtfertigung der letzteren mit den bisherigen Axiomen gelte $\forall x \exists w \forall y\,(\varphi(x, y, \overset{n}{x}) \to y \in w)$. Man setze für gegebenes x und ein entsprechendes w

$$F(x) \;:=\; \big\{y \in w \mid \varphi(x, y, \overset{n}{x})\big\} \;\; \big(=\big\{y \mid \varphi(x, y, \overset{n}{x})\big\}\big).$$

Nach **Ers** existiert für gegebenes u die Menge $\{F(x) \mid x \in u\}$. Für die Menge $v := \bigcup\{F(x) \mid x \in u\}$ gilt dann $\forall y\,\big(y \in v \leftrightarrow \exists x(x \in u \wedge \varphi(x, y, \overset{n}{x}))\big)$.

5.2.3 Sei $u := \text{Pot}(\text{Pot}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Mit

$$\varphi(x, y, x_1, x_2) \;:=\; (x = \emptyset \wedge y = x_1) \vee (x \neq \emptyset \wedge y = x_2)$$

gilt $\forall x \exists^{=1} y\, \varphi(x, y, x_1, x_2)$, und durch entsprechende Ersetzung, angewendet auf u, entsteht die Paarmenge $\{x_1, x_2\}$ von x_1 und x_2. Es ist $x_1 \cup x_2 = \bigcup\{x_1, x_2\}$.

5.2.4 Zu $\varphi(z, \overset{n}{x})$ und gegebenen x und $x_1, \ldots, x_n$ zeigen wir die Existenz der Menge $y := \{z \in x \mid \varphi(z, \overset{n}{x})\}$. Wir definieren dazu F (mit Parametern $x, w, \overset{n}{x}$) durch:

$$F(z) \;:=\; \begin{cases} z, \text{ falls } z \in x \wedge \varphi(z, \overset{n}{x}); \\ w, \text{ sonst.} \end{cases}$$

Entweder ist $y = \emptyset$, oder für ein w mit $w \in x \wedge \varphi(w, \overset{n}{x})$ ist $y = \{F(z) \mid z \in x\}$.

Aufgaben zu Kapitel IV

1.20.1 Genau die ersten beiden Operationen.

1.20.2 Es gilt $z \in \text{Def}(\in_x) \;\leftrightarrow\; z \in x \wedge \exists y\,(y \in x \wedge z \in y) \;\leftrightarrow\; z \in x \cap \big(\bigcup x\big)$.

1.20.4 Es sei r eine Ordnungsrelation i.S.v. $<$ über der Menge x. Ist $x = \emptyset$, so ist $\text{Feld}(r) = \emptyset = x$. Enthält x mindestens zwei Elemente, liefert die Konnexität von r über x, dass $\text{Def}(r) \cup \text{Bild}(r) = \text{Feld}(r) = x$. Ist x eine Einermenge, so ist $\text{Feld}(x) = \emptyset$, da r irreflexiv ist, also $\text{Feld}(x) \neq x$.

1.20.5 Wir zeigen (ii). Sei dazu $s := r \setminus \mathrm{id}_a$. Dann ist s konnex über a und nach Definition irreflexiv. Zur Transitivität von s: Mit $usv \wedge vsw$ gilt urw. Wäre $u = w$, so gälte $urv \wedge vru$, also $u = v$ im Widerspruch zu usv.

1.20.6 Da $a \cap b = \emptyset$, ist t irreflexiv. Da $a \times b \subseteq t$, ist t konnex über $a \cup b$. Gilt $utv \wedge vtw$ und etwa $u \in a \wedge v \in b$, so ist $w \in b$ und $(u, w) \in a \times b$, also gilt utw.

1.20.7 Die Konnexität von t über $(a \times b)^2$ sieht man so: Sind $w := (u, v)$ und $w' := (u', v')$ entsprechend gegeben, so gilt wtw', falls vsv', und $w'tw$, falls $v'sv$; falls $v = v'$, verhalten sich w und w' bzgl. t wie u und u' bzgl. r.

1.20.8 Es sei r eine Äquivalenzrelation über a. *Zu* 1.17(ii): Sei $z \in [x]_r \cap [y]_r$. Wir zeigen $[x]_r \subseteq [y]_r$. Sei hierzu $u \in [x]_r$, also xru. Mit xrz bekommen wir zrx, also zru, und mit yrz dann yru, also $u \in [y]_r$.

Zu 1.17(iii): Es ist $a/r = \big\{z \in \mathrm{Pot}(a) \mid \exists x\, (x \in a \wedge z = \{y \in a \mid xry\})\big\}$.

1.20.9 (i): Nein; denn sonst wäre das Feld die Allmenge.
(ii): Ja; die entsprechende Menge ist $\mathrm{Pot}(\mathrm{Pot}(\omega) \times \mathrm{Pot}(\omega))$.
(iii): Nein; denn sonst wäre $\bigcup\{x \mid x \text{ ist Potenzmenge}\}$ die Allmenge.

1.20.10 Ein typisches zweistelliges Ersetzungsaxiom (der Einfachheit halber ohne Parameter) ist

$$\forall x'x''\, \exists^{=1} y\, \psi(x', x'', y) \;\rightarrow$$
$$\forall u'u''\, \exists v\, \forall y \big(y \in v \leftrightarrow \exists x'x''(x' \in u' \wedge x'' \in u'' \wedge \psi(x', x'', y))\big).$$

Zum Beweis in **ZF** gelte $\forall x'x''\, \exists^{=1} y\, \psi(x', x'', y)$. Man setze $\varphi(x, y) :=$

$$\exists x'x'' \,\big(x = (x', x'') \wedge \psi(x', x'', y)\big) \vee \big(\neg\, x \text{ geordnetes Paar } \wedge y = \emptyset\big).$$

Dann gilt $\forall x\, \exists^{=1} y\, \varphi(x, y)$. Man wende das entsprechende Axiom aus **Ers** auf $u := u' \times u''$ an.

2.15.1 Man setze etwa $\varphi(v, x, y) :=$

$$\big(\mathrm{Fkn}\; v \wedge (x, y) \in v\big) \;\vee\; \big(\neg(\mathrm{Fkn}\; v \wedge x \in \mathrm{Def}(v)) \wedge y = \emptyset\big).$$

2.15.2 Wir zeigen „$\leftarrow$“: $\bigcup X$ ist eine Menge von geordneten Paaren. Seien $(x, y), (x, y') \in \bigcup X$, etwa $(x, y) \in f$ und $(x, y') \in f'$ mit geeigneten $f, f' \in X$. Da $x \in \mathrm{Def}(f) \cap \mathrm{Def}(f')$ und f, f' kompatibel sind, ist $y = f(x) = f'(x) = y'$.

2.15.3 Für $\iota \in I$ sei $X_\iota = (a_\iota, r_\iota)$, also $a_\iota = \pi_l(X_\iota)$ und $r_\iota = \pi_r(X_\iota)$. Man setze $A := \bigcup\{a_\iota \mid \iota \in I\}$ und

$$t \;:=\; \bigcup\big\{r_\iota \mid \iota \in I\big\} \cup \big\{(u, u') \in A \times A \mid \exists \iota\, \iota' \,(\iota < \iota' \wedge u \in a_\iota \wedge u' \in a_{\iota'})\big\}.$$

Jetzt folge man der Lösung von Aufgabe 1.20.6.

2.15.4 Zu gegebenem X setze man für (i)

$$\begin{aligned} f &= \big\{(x,y) \in X \times \mathrm{Pot}\big(\mathrm{Pot}(\bigcup X)\big) \mid y = \mathrm{Pot}(x)\big\} \\ &= \big\{z \in X \times \mathrm{Pot}\big(\mathrm{Pot}(\bigcup X)\big) \mid \pi_r(z) = \mathrm{Pot}(\pi_l(z))\big\} \end{aligned}$$

und für (ii) $f = \big\{(x,y) \in \big(\mathrm{Pot}(X) \times \mathrm{Pot}(X)\big) \times \mathrm{Pot}(X) \mid y = \pi_l(x) \cap \pi_r(x)\big\}$.

2.15.5 Das Element $(u,v) \in x \times y$ werde abgebildet auf $\{(\emptyset, u), (\{\emptyset\}, v)\}$.

2.15.6 *Zu* (i): Man setze $(x)^{-1} := \big\{z \in \mathrm{Bild}(x) \times \mathrm{Def}(x) \mid \big(\pi_r(z), \pi_l(z)\big) \in x\big\}$.

Zu (ii): Man setze $g := f^{-1}$. Offensichtlich ist g eindeutig bestimmt.

Zu (iii): Die Voraussetzungen seien erfüllt. Da $f \circ g = \mathrm{id}_X$, ist $f(g(u)) = u$ für alle $u \in X$. Also ist g injektiv, und f ist surjektiv. Da auch $g \circ f = \mathrm{id}_X$, sind f und g bijektiv. Nach (ii) ist $f = g^{-1}$.

2.15.7 Mit $f, g \in \mathrm{Perm}(x)$ ist $f \circ g \in \mathrm{Perm}(x)$. Ferner ist $\circ$ assoziativ. Schließlich ist $\mathrm{id}_x \in \mathrm{Perm}(x)$, und für alle $f \in \mathrm{Perm}(x)$ ist $f^{-1} \in \mathrm{Perm}(x)$, $f \circ \mathrm{id}_x = f$ und $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_x$.

2.15.8 Es ist $r := \{(u,v) \in X \times X \mid f(u) = f(v)\}$ eine Äquivalenzrelation über X. Für $u \in X$ setzen wir $g(u) := [u]_r$ und $h([u]_r) := f(u)$. Genauer sei $h = \{(z, f(y)) \mid z \in X/r \text{ und } y \in z\}$. Es ist h eine Funktion; denn mit $y, y' \in z$ ist yry', also $f(y) = f(y')$. Für $u, v \in X$ mit $[u]_r \neq [v]_r$ gilt $\neg urv$, also $f(u) \neq f(v)$; mithin ist h injektiv. Für $u \in X$ ist $f(u) = h([u]_r) = h(g(u))$.

2.15.10 Man beachte, dass die Inverse eines Isomorphismus und die Komposition zweier Isomorphismen wieder Isomorphismen sind.

2.15.11 Für gegebenes x setze man $y := \{x\} \times x$ und $f(u) := (x,u)$ für $u \in x$. Wäre $u \in x \cap (\{x\} \times x)$, etwa $u = (x,v)$, so gälte $x \in \{x\} \in (x,v) \in x$ im Widerspruch zu Satz III.6.1. Dieser Satz benötigt **Fund**. Um die Benutzung von **Fund** zu vermeiden, wähle man $z \notin \bigcup\bigcup x$ und arbeite mit $\{z\} \times x$ anstelle von $\{x\} \times x$. Man beachte, dass $w \in \bigcup\bigcup x$, sofern $(w,u) \in x$.

Aufgaben zu Kapitel V

1.11.1 Durch vollständige Induktion über j zeige man $\forall j\, (j \neq \emptyset \to \emptyset \in j)$.

1.11.2 Wir betrachten den Fall $\bigcap b \neq \emptyset$, d. h. $\bigcap b \neq \mathbf{0}$. Dann ist $\mathbf{0} \in \bigcap b$. Wegen $\bigcap b = \{i \mid i \in j \text{ für alle } j \in b\} \subset \omega$ gibt es ein (eindeutig bestimmtes) i mit $i \in \bigcap b$ und $\mathbf{S}(i) \notin \bigcap b$. Für dieses i ist $\mathbf{S}(i) \in b$ und $\mathbf{S}(i)$ $\in_\omega$-minimales Element von b und $\mathbf{S}(i) = \bigcap b$.

1.11.3 Sei $\bigcup b \neq \omega$. Die Behauptung stimmt, falls $b = \{\mathbf{0}\}$. Andernfalls ist $\mathbf{0} \in \bigcup b$; es gibt also wegen $\bigcup b \neq \omega$ ein $j \in \bigcup b$ mit $\mathbf{S}(j) \notin \bigcup b$. Sei $j \in i \in b$. Da $\mathbf{S}(j) \notin i$, ist $i = \mathbf{S}(j) = \bigcup b$ das $\in_\omega$-größte Element von b.

1.11.4 Die folgenden Strukturen sind nicht isomorph zu $(\omega, \mathbf{S}, \mathbf{0})$:

(1) $\big(\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}, \{(\mathbf{0}, \mathbf{1}), (\mathbf{1}, \mathbf{1})\}, \mathbf{0}\big)$; sie erfüllt (**P2**) und (**P3**).

(2) $\big(\{\mathbf{0}\}, \{(\mathbf{0}, \mathbf{0})\}, \mathbf{0}\big)$; sie erfüllt (**P1**) und (**P3**).

(3) $\big(\omega, \mathbf{S} \circ \mathbf{S}, \mathbf{0}\big)$; sie erfüllt (**P1**) und (**P2**).

2.5.1 Zum Beispiel ist $\mathbf{2} + \mathbf{2} = \mathbf{2} + \mathbf{S}(\mathbf{1}) = \mathbf{S}(\mathbf{2} + \mathbf{1}) = \mathbf{S}(\mathbf{S}(\mathbf{2})) = \mathbf{4}$.

2.5.2 Man zeige durch Induktion über i, dass $\forall j\, j + i = i + j$. Für $i = \mathbf{0}$ zeige man induktiv über j, dass $j + \mathbf{0} = \mathbf{0} + j$. Hierfür verläuft der Induktionsschritt so: $\mathbf{S}(j) + \mathbf{0} = \mathbf{S}(j) = j + \mathbf{1} = (j + \mathbf{0}) + \mathbf{1} = (\mathbf{0} + j) + \mathbf{1} = \mathbf{0} + \mathbf{S}(j)$. Im Induktionsschritt für i benötigt man, dass $\forall ij\, (i + j) + \mathbf{1} = (i + \mathbf{1}) + j$; dies zeigt man bei festem i durch Induktion über j.

2.5.3 Man definiere mit Theorem 2.1 ein solches f rekursiv durch

$$\begin{aligned} f(\mathbf{0}) &= \text{ das } \in_\omega\text{-minimale Element von } a; \\ \forall i\, f(\mathbf{S}(i)) &= \text{ das } \in_\omega\text{-minimale Element von } a \setminus \mathbf{S}(f(i)). \end{aligned}$$

2.5.4 Für ein solches f hätte $\text{Bild}(f)$ kein $\in$-minimales Element.

2.5.5 Man definiere mit Theorem 2.4(i) die Funktion f gemäß $f(\mathbf{0}) = \omega$ und $\forall i\, f(\mathbf{S}(i)) = \text{Pot}(f(i))$. Die Menge $\text{Bild}(f)$ hat die gewünschten Eigenschaften.

2.5.6 Man definiere gemäß Theorem 2.1 rekursiv ein $f : \omega \to \omega \times \omega$ mit $f(\mathbf{0}) = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$ und

$$\forall i\, f\big(\mathbf{S}(i)\big) = \big(\pi_r(f(i)), \pi_l(f(i)) + \pi_r(f(i))\big).$$

Die Funktion $\text{fib} : \omega \to \omega$ mit $\text{fib}(i) = \pi_r(f(i))$ ist die (eindeutig bestimmte) Fibonacci-Funktion.

2.5.7 Sei $f : (a, r) \cong (i, \in_i)$ und $g : (b, s) \cong (j, \in_j)$. Man definiere den gesuchten Isomorphismus h durch $h := f \cup \{(u, g(u) + i) \mid u \in b\}$. Die Isomorphieeigenschaft ergibt sich mit $\forall ijk\, (j \in_\omega k \to j + i \in_\omega k + i)$. Das zeigt man durch Induktion über i.

2.5.8 Sei $f : (a, r) \cong (i, \in_i)$ und $g : (b, s) \cong (j, \in_j)$. Man definiere einen Isomorphismus h von $(a \times b, t)$ auf $(i \cdot j, \in_{i \cdot j})$ (zu t vgl. Aufgabe 1.20.7), indem man für $u \in a$ und $v \in b$ setzt:

$$h(u, v) := g(v) \cdot i + f(u).$$

2.5.9 Man definiere mit der Variante (i) von Satz 2.4, wobei man $c = \emptyset$ setzt und die Operation G mit $G(x) = x \cup \{(\text{Def}(x), F(x))\}$ verwendet, für

$i = \mathbf{0}, \mathbf{1}, \ldots$ die auf i definierten Anfänge $g(i)$ der Funktion f durch

$$g(\mathbf{0}) = \emptyset \quad \text{und} \quad g(\mathbf{S}(i)) = g(i) \cup \{(\mathrm{Def}(g(i)), F(g(i)))\}.$$

Durch Induktion zeigt man, dass stets $\mathrm{Def}(g(i)) = i$ und $g(i) \subseteq g(j)$ für $j \geq i$. Damit ist stets $g(\mathbf{S}(i))(i) = F(g(i))$. Man setze $f(i) = g(\mathbf{S}(i))(i)$. Dann gilt für alle i, dass $g(i) = f \restriction i$ und daher $f(i) = F(f \restriction i)$.

3.11.1 Leicht durch metasprachliche Induktion über n. Im Induktionsschritt unterscheide man, ob $x_{n+1} \in \{x_1, \ldots, x_n\}$ oder nicht.

3.11.2 Gälte $f : \omega \sim i$, so wäre $\mathrm{Bild}(f \restriction i) \sim i$ und echte Teilmenge von i, ein Widerspruch zu Satz 3.7.

3.11.3 Man kann $x = \omega$ annehmen und Aufgabe 2.5.3 und Satz 3.7 verwenden.

3.11.4 Bereits die Menge $X := \{\{i\} \mid i \in \omega\}$ ist nicht Dedekind-endlich, da $\{(\{i\}, \{\mathbf{S}(i)\}) \mid i \in \omega\} : X \sim X \setminus \{\mathbf{0}\}$.

3.11.5 *Zu* „$\leftarrow$“: Man beachte, dass ω und daher ein entsprechendes y nicht Dedekind-endlich ist. *Zu* „$\rightarrow$“: Sei $u \subset x$, $f : x \sim u$ und $z \in x \setminus u$. Man definiere g auf ω rekursiv durch $g(\mathbf{0}) = z$ und $\forall i\, g(\mathbf{S}(i)) = f(g(i))$. Dann ist $\mathrm{Bild}(g) \subseteq x$. Ferner ist $g : \omega \sim \mathrm{Bild}(g)$. Zur Injektivität von g zeige man induktiv für alle j, dass $g(j) \notin \mathrm{Bild}(g \restriction j)$. Dabei beachte man die Wahl von z. Man setze $y := \mathrm{Bild}(g)$.

3.11.6 Man folge der Lösung von Aufgabe III.3.5.1.

3.11.7 Man definiere $f : \omega \sim \omega \times \omega$ etwa rekursiv durch $f(\mathbf{0}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ und (Zeichnung!) für alle i:

$$f(\mathbf{S}(i)) := \begin{cases} (k, \mathbf{S}(l)), \text{ falls } f(i) = (k, l) \text{ mit } l \in k; \\ (k, l), \text{ falls } f(i) = (\mathbf{S}(k), l) \text{ mit } k \in l; \\ (\mathbf{S}(l), \mathbf{0}), \text{ falls } f(i) = (\mathbf{0}, l). \end{cases}$$

Aufgaben zu Kapitel VI

1.10.1 Mit $u \in b \subseteq a$ und $b \cap r[u] = \emptyset$ ist auch $b \cap s[u] = \emptyset$.

1.10.2 Die Struktur $(\omega, \in_\omega)$ ist fundiert, also mit $\mathbf{S} = \{(i, \mathbf{S}(i)) \mid i \in \omega\}$ (als Relation) wegen $\mathbf{S} \subseteq \in_\omega$ auch die Struktur $(\omega, \mathbf{S})$, die wir als (a, r) wählen. Weil $\mathbf{S}[\mathbf{0}] = \emptyset$ und $\forall i\, \mathbf{S}[\mathbf{S}(i)] = \{i\}$, erhalten wir, dass $\mathbf{0} \in b \wedge \forall i\, (i \in b \rightarrow \mathbf{S}(i) \in b)$ äquivalent zu $\forall i\, (\mathbf{S}[i] \subseteq b \rightarrow i \in b)$ ist.

1.10.3 Die Menge b erfülle die Voraussetzungen. Sei $a \times a \not\subseteq b$, und sei etwa $u \in a$ r-minimal mit $\exists v\, (v \in a \wedge (u, v) \notin b)$. Dann ist $r[u] \times a \subseteq b$. Für jedes $v \in a$ ist also $r[u] \times r[v] \subseteq b$ und daher $(u, v) \in b$, ein Widerspruch.

1.10.4 Sei $f : a \to A$ mit $f(u) = r[u]$ für $u \in a$. Dann ist $f : (a, r) \cong (A, \subset_A)$.

Es sei $a := \{\frac{\mathbf{1}}{i} \mid i \geq \mathbf{1}\} \cup \{-\frac{\mathbf{1}}{i} \mid i \geq \mathbf{1}\}$ und $< := <_{\mathbb{Q}} \cap (a \times a)$. Dann ist $(a, <) \not\cong (A, \subset_A)$; denn für $g : (A, \subset_A) \cong (a, <)$ müsste $g(\{-\frac{\mathbf{1}}{i} \mid i \geq \mathbf{1}\})$ größer als alle $-\frac{\mathbf{1}}{i}$ und kleiner als alle $\frac{\mathbf{1}}{i}$ (für $i \geq \mathbf{1}$) sein.

1.10.5 Man vgl. den Beweis zu Satz III.6.1.

1.10.6 Durch Induktion über i lässt sich zeigen, dass eine nicht leere Ordnung (a, r) mit $|a| = i$ ein größtes Element hat und isomorph zu $(i, \in_i)$ ist.

1.10.7 Seien (a, r) und (b, s) Wohlordnungen.
Zu $a \cup b$: Wir können annehmen, dass $a \cap b = \emptyset$ ist und dann wie in Aufgabe IV.1.20.6 verfahren.
Zu $a \times b$: Man definiere die Relation t über $(a \times b)$ wie in Aufgabe IV.1.20.7. Dann ist $(a \times b, t)$ eine Wohlordnung. (Um t-minimale Elemente zu finden, minimiere man zunächst nach der rechten und dann nach der linken Komponente.)
Zu ${}^b a$ bei endlichem b: Sei etwa (vgl. die vorangehende Aufgabe) $(b, s) = (i, \in_i)$. Man definiere t über ${}^i a$ durch $gth \;:\leftrightarrow$

$$g \neq h \text{ und für das } \in_i\text{-minimale } j \in i \text{ mit } g(j) \neq h(j) \text{ gilt } g(j) r h(j).$$

Dann ist $({}^i a, t)$ eine Wohlordnung. Ist z. B. $\emptyset \neq c \subseteq {}^i a$, setze man $c_0 := c$, und für $\mathbf{S}(j) \leq i$ setze man

$$c_{\mathbf{S}(j)} := \{g \in c_j \mid g(j) \text{ ist } r\text{-minimal unter den } h(j) \text{ für } h \in c_j\}.$$

Es ist $c_i = \{g\}$, wobei g t-minimal in c.
Zu $\mathrm{Pot}(b)$, b endlich: Man ordne ${}^b\mathbf{2}$ wohl (mit $(\mathbf{2}, \in_{\mathbf{2}})$ als (a, r)) und übertrage die Wohlordnungsrelation auf $\mathrm{Pot}(b)$, wobei man den $f \in {}^b\mathbf{2}$ die Menge $\{z \in b \mid f(z) = \mathbf{1}\} \in \mathrm{Pot}(b)$ zuordnet. Oder man definiere direkt eine Wohlordnungsrelation über $\mathrm{Pot}(b)$ als die Menge derjenigen $(u, v) \in \mathrm{Pot}(b) \times \mathrm{Pot}(b)$, für die $u \neq v$ und das s-minimale Element von $(u \cup v) \setminus (u \cap v)$ in u liegt.

1.10.8 Seien (a, r) und (b, s) entsprechende Wohlordnungen, f ein Isomorphismus von (a, r) auf einen Anfangsabschnitt von (b, s) und g ein Isomorphismus von (b, s) auf einen Anfangsabschnitt von (a, r). Dann ist $g \circ f$ ein Isomorphismus von (a, r) auf einen Anfangsabschnitt von (a, r). Nach Korollar 1.8(ii) ist $g \circ f = \mathrm{id}_a$. Also ist $\mathrm{Bild}(g) = a$ und daher $g : (b, s) \cong (a, r)$.

2.11.1 *Zu* (i): Wir haben die folgende Äquivalenzkette:

$$x \text{ transitiv } \leftrightarrow \forall z\,(z \in x \to z \subseteq x) \leftrightarrow \forall z\,(z \in \bigcup x \to z \in x) \leftrightarrow \bigcup x \subseteq x.$$

Zu (ii): Seien die Elemente von x transitiv und $x \neq \emptyset$. Dann gilt z. B. für $z \in \bigcap x$, dass $z \in y$ für alle $y \in x$, also $z \subseteq y$ für alle $y \in x$, also $z \subseteq \bigcap x$.

2.11.2 Ist x transitiv, $y \in \mathrm{Pot}(x)$ und $z \in y$, so gilt $z \subseteq x$, also $z \in \mathrm{Pot}(x)$. Ist $\mathrm{Pot}(x)$ transitiv und $z \in x$, so gilt $z \in \bigcup \mathrm{Pot}(x) \subseteq \mathrm{Pot}(x)$, also $z \in \mathrm{Pot}(x)$, d. h. $z \subseteq x$.

2.11.3 *Zu* (i): Keine Richtung stimmt: Das Element $\{\{\emptyset\}\}$ der transitiven Menge $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$ ist nicht transitiv, und die Menge $\{\mathbf{2}\}$ ist nicht transitiv. *Zu* (ii): Die Menge $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$ widerlegt die Richtung von links nach rechts, $\{\mathbf{2}\}$ die von rechts nach links.

2.11.4 Sei β die kleinste Ordinalzahl in X. Da $\beta \subseteq \gamma$ für alle $\gamma \in X$, ist $\bigcap X = \bigcap\{\beta\} = \beta$. Ferner ist $\bigcup X$ transitiv, konnex und fundiert, also nach Satz 2.2 eine Ordinalzahl. Mit $\alpha \in X$ gilt $\alpha \leq \bigcup X$, und mit $\beta \leq \gamma$ für alle $\beta \in X$ gilt $\bigcup X \leq \gamma$. Insgesamt ist $\bigcup X$ das Supremum von X.

2.11.5 Sei $x \cup \{x\} = \alpha \cup \{\alpha\}$. Ist $x \neq \alpha$, so gilt $\alpha \in x$ und $x \in \alpha$, also ist x eine Ordinalzahl und daher $\alpha \in \alpha$, ein Widerspruch.

2.11.6 Es gilt stets $\bigcup \alpha \subseteq \alpha$. Ist α Limeszahl und $\beta \in \alpha$, so ist $\beta \in S(\beta) \in \alpha$, also gilt $\alpha \subseteq \bigcup \alpha$. Mit $\alpha \subseteq \bigcup \alpha$ und $\beta \in \alpha$ ist $\beta \in \gamma \in \alpha$ für ein γ, also α Limeszahl oder $\alpha = \mathbf{0}$.

2.11.7 Sei α eine Limeszahl. Dann ist α das Supremum von $\{S(\beta) \mid \beta \in \alpha\}$.

2.11.8 Man definiere f auf ω rekursiv durch $f(\mathbf{0}) = \omega$ und (vgl. Satz 2.9) $\forall i\, f(\mathbf{S}(i)) =$ kleinste Limeszahl $> f(i)$. Dann besteht $\mathrm{Bild}(f)$ aus Limeszahlen. Ferner ist $\bigcup \mathrm{Bild}(f)$ eine Limeszahl; denn gälte $\bigcup \mathrm{Bild}(f) = \alpha \cup \{\alpha\}$, so gäbe es ein i mit $\alpha \subseteq f(i)$ und $f(\mathbf{S}(i)) \subseteq \alpha$, also mit $\alpha \subseteq f(i) \subseteq f(\mathbf{S}(i)) \subseteq \alpha$ und daher mit $f(i) = f(\mathbf{S}(i))$, ein Widerspruch.

2.11.9 Wäre $\alpha \notin \omega$, hätte $\mathrm{Bild}(f{\restriction}\omega)$ kein r-minimales Element.

2.11.10 Es ist stets $f(\mathbf{S}(i)) \leq f(i)$ und $f(i) \geq \omega$. Nach der vorangehenden Aufgabe kann nicht für alle i gelten, dass $f(\mathbf{S}(i)) < f(i)$. Sei i so gewählt, dass $f(\mathbf{S}(i)) = f(i)$. Dann ist $f(i) = \bigcup f(i)$ eine Limeszahl $\leq \alpha$. Ist ferner $\delta' \leq \alpha$, so für alle j auch $\delta' \leq f(j)$. Dies zeigt man durch Induktion über j. Im Induktionsschritt schließt man: $\delta' \leq f(j) \to \delta' = \bigcup \delta' \leq \bigcup f(j) = f(\mathbf{S}(j))$.

2.11.11 Man definiere f auf ω rekursiv durch $f(\mathbf{0}) = x$ und $\forall i\, f(\mathbf{S}(i)) = f(i) \cup \bigcup f(i)$. Man setze $y := \bigcup \mathrm{Bild}(f)$. Dann ist (α) klar. Für (β) beachte man, dass mit $z \in y$, etwa $z \in f(i)$, offenbar $z \subseteq f(\mathbf{S}(i))$, also $z \subseteq y$. Zu (γ) zeige man für entsprechendes w, dass $\forall i\, f(i) \subseteq w$.

2.11.12 *Zu* (i): $F(\delta)$ ist das Supremum einer Menge von Ordinalzahlen ohne größtes Element.

Zu (ii): Wenn w ein größtes Element β hat, ist $\bigcup\{F(\alpha) \mid \alpha \in w\} = F(\beta) = F(\bigcup w)$. Andernfalls ist $\bigcup w$ eine Limeszahl und daher $\bigcup\{F(\alpha) \mid \alpha \in w\} = \bigcup\{F(\alpha) \mid \alpha \in \bigcup w\} = F(\bigcup w)$.

Zu (iii): Durch transfinite Induktion ergibt sich leicht, dass $\forall\beta\, F(\beta) \geq \beta$. Sei β minimal mit $F(\beta) > \alpha$. Dann ist $\beta \neq \mathbf{0}$. Ferner ist β keine Limeszahl; sonst wäre $F(\beta') > \alpha$ für ein $\beta' < \beta$. Sei $\beta = S(\gamma)$. Dann ist $F(\gamma) \leq \alpha$ und γ maximal mit dieser Eigenschaft.

2.11.13 F und G seien normal. Da $G(\delta)$ nach (i) der vorangehenden Aufgabe eine Limeszahl ist, gilt z. B. $F(G(\delta)) = \bigcup\{F(\gamma) \mid \gamma < \bigcup\{G(\beta) \mid \beta < \delta\}\} = \bigcup\{F(G(\beta)) \mid \beta < \delta\}$.

2.11.14 Hat w ein größtes Element, etwa α, so ist $\bigcup w = \alpha$ und daher $F(\bigcup w) = F(\alpha) = \alpha = \bigcup w$. Andernfalls ist $\bigcup w$ eine Limeszahl und daher $F(\bigcup w) = \bigcup\{F(\beta) \mid \beta \in \bigcup w\} = \bigcup\{F(\beta) \mid \beta \in w\} = \bigcup\{\beta \mid \beta \in w\} = \bigcup w$.

2.11.15 Zu gegebenem α definiere man f auf ω rekursiv durch $f(\mathbf{0}) = \alpha$ und $\forall i\, f(\mathbf{S}(i)) = F(f(i))$. Es ist stets $f(\mathbf{S}(i)) \geq f(i)$ und daher $\bigcup \mathrm{Bild}(f) \geq \alpha$. Mit Aufgabe 2.11.12(ii) ergibt sich $F(\bigcup \mathrm{Bild}(f)) = \bigcup\{F(\beta) \mid \beta \in \mathrm{Bild}(f)\} = \bigcup\{F(f(i)) \mid i \in \omega\} = \bigcup\{f(\mathbf{S}(i)) \mid i \in \omega\} = \bigcup \mathrm{Bild}(f)$.

2.11.16 *Zu* (i): Da jede endliche, nicht leere Menge von Ordinalzahlen ein kleinstes und ein größtes Element hat, ist B_α gegen endliche Durchschnitte abgeschlossen. Ferner ist $\alpha = [\mathbf{0}, \alpha\rangle \in B_\alpha$. Für $S(\beta) \in \alpha$ ist $\{S(\beta)\} \in B_\alpha$, für $\delta \in \alpha$ ist $\{\delta\} \notin B_\alpha$, und für $\beta < \gamma \in \alpha$ ist $\beta \in [\mathbf{0}, S(\beta)\rangle$, $\gamma \in \langle\beta, S(\gamma)\rangle$ und $[\mathbf{0}, S(\beta)\rangle \cap \langle\beta, S(\gamma)\rangle = \emptyset$.

Zu (ii), (iii): Die Darstellung $\delta = \bigcup\{[\mathbf{0}, \beta\rangle \mid \mathbf{0} < \beta < \delta\}$ bezeugt die Nichtkompaktheit von $(\delta, \mathcal{O}_\delta)$. Sei jetzt $\alpha = S(\beta)$ und $X \subseteq \mathcal{O}_\alpha$ mit $\alpha = \bigcup X$. Wir können annehmen, dass $X \subseteq B_\alpha$. Sei weiter

$$Y := \{\gamma \in \alpha \mid [\gamma, \alpha\rangle \text{ ist Vereinigung einer endlichen Teilmenge von } X\}.$$

Da $\beta \in x$ für ein $x \in X$, ist $Y \neq \emptyset$. Sei γ_0 das minimale Element von Y. Da B_α kein Intervall der Gestalt $[\,\delta, \gamma\rangle$ enthält, ist γ_0 keine Limeszahl. Da γ_0 auch keine Nachfolgerzahl sein kann, ist $\gamma_0 = \mathbf{0}$.

3.4.1 Für eine entsprechende Menge x enthielte $\bigcup x$ alle Ordinalzahlen.

3.4.2 Da x nicht endlich ist, zeigt man leicht durch Induktion, dass jedes i eine Injektion in x zulässt, dass also $\alpha \geq \omega$. Sei $\beta \geq \omega$ und $f : \beta \overset{inj}{\to} x$. Dann ist $g := f{\restriction}(\beta \setminus \omega) \cup \{(\beta, f(\mathbf{0}))\} \cup \{(i, f(\mathbf{S}(i))) \mid i \in \omega\}$ eine Injektion von $S(\beta)$ in x. Also kann α keine unendliche Nachfolgerzahl sein.

Aufgaben zu Kapitel VII

1.5.1 Es ist $(x, \in_x)$ eine Wohlordnung. Man kann also mit Lemma 1.4 oder auch mit Satz VI.3.3 schließen.

1.5.2 Zu gegebenem F und zu α, c bringe man die Bedingungen an f auf die Gestalt $\forall\beta\,(\beta < \alpha \to f(\beta) = G(f \restriction \beta))$ und wende Theorem 1.2 an. Die Operation G lässt sich definieren durch

$$G(x) := \begin{cases} c, \text{ falls } x = \emptyset; \\ F(x(\beta)), \text{ falls } x \text{ Funktion mit } \mathrm{Def}(x) = S(\beta); \\ F(x), \text{ falls } x \text{ Funktion mit } \mathrm{Def}(x) \text{ Limeszahl}; \\ \emptyset, \text{ sonst.} \end{cases}$$

1.5.3 Es sei f die auf ω rekursiv definierte Funktion mit $f(\mathbf{0}) = \emptyset$ und $\forall i\, f(\mathbf{S}(i)) = \{f(i)\}$. Dann ist $\omega_{\mathbf{Z}} = \mathrm{Bild}(f)$. Da $\in_{\omega_{\mathbf{Z}}} [u] = u$ für $u \in \omega_{\mathbf{Z}}$, ist $(\omega_{\mathbf{Z}}, \in_{\omega_{\mathbf{Z}}})$ eine extensionale Struktur. Eine Menge b mit $\emptyset \neq b \subseteq \omega_{\mathbf{Z}}$ hat das $\in_{\omega_{\mathbf{Z}}}$-minimale Element $f(j)$, wobei j $\in_\omega$-minimal mit $f(j) \in b$. Also ist $(\omega_{\mathbf{Z}}, \in_{\omega_{\mathbf{Z}}})$ auch eine fundierte Struktur. Da $\omega_{\mathbf{Z}}$ transitiv ist, ist $\mathrm{id}_{\omega_{\mathbf{Z}}}$ der Mostowski-Isomorphismus für $(\omega_{\mathbf{Z}}, \in_{\omega_{\mathbf{Z}}})$.

1.5.5 Man darf bei der Definition von $\mathrm{par}(\varphi)$ auf die Werte von par für echte Teilausdrücke von φ zurückgreifen. Für atomare Ausdrücke setzt man $\mathrm{par}(x \in y) := \{x, y\}$ und $\mathrm{par}(x = y) := \{x, y\}$; im Induktionsschritt setzt man $\mathrm{par}(\neg\varphi) := \mathrm{par}(\varphi)$ und z. B. $\mathrm{par}(\varphi \wedge \psi) := \mathrm{par}(\varphi) \cup \mathrm{par}(\psi)$ und $\mathrm{par}(\forall x\, \varphi) := \mathrm{par}(\varphi) \setminus \{x\}$. Man mache sich intuitiv klar, dass par durch diese Festlegungen – man spricht von ihnen als von einer *induktiven Definition über den Aufbau der Ausdrücke* – in eindeutiger Weise bestimmt wird.

2.2.1 Wir fassen das erste Argument als Parameter auf und schreiben z. B. die ersten zwei Zeilen mit x' anstelle von x und x anstelle von y wie folgt um:

$$x' \oplus x \;=\; \begin{cases} \emptyset, \text{ falls } \neg\mathrm{Oz}\; x'; \\ \emptyset, \text{ falls } \mathrm{Oz}\; x' \wedge \neg\mathrm{Oz}\; x. \end{cases}$$

$$x' \oplus \mathbf{0} \;=\; \begin{cases} \emptyset, \text{ falls } \neg\mathrm{Oz}\; x'; \\ x', \text{ falls } \mathrm{Oz}\; x'. \end{cases}$$

Nach Theorem 2.1 wird hierdurch für jeden Parameter x' eine einstellige Operation definiert. Es sei $\varphi(x, y, x')$ ein definierender Ausdruck. Dann definiert $\psi(x', x, y) := \varphi(x, y, x')$ eine zweistellige Operation, die den angegebenen Rekursionsgleichungen genügt, eben die ordinale Addition.

2.2.2 *Zu* (i): Die Funktion $\{((i, j), i \oplus j) \mid i, j \in \omega\}$ auf $\omega \times \omega$ genügt den Rekursionsgleichungen der Addition auf ω (vgl. Satz V.2.2). *Zu* (ii): Beweis durch transfinite Induktion über α. *Zu* (iii): Wir haben $\alpha \oplus \mathbf{1} = \alpha \oplus S(\mathbf{0}) = S(\alpha \oplus \mathbf{0}) = S(\alpha)$. *Zu* (iv): Es ist $\omega \oplus \mathbf{1} = S(\omega)$ und $\mathbf{1} \oplus \omega = \bigcup\{\mathbf{1} \oplus i \mid i \in \omega\} = \omega$.

2.2.3 Für gegebene γ, α zeige man durch transfinite Induktion über β, dass $\alpha < \beta \to \gamma \oplus \alpha < \gamma \oplus \beta$. Sei die Behauptung für alle $\beta' < \beta$ bewiesen. Falls

$\beta \leq \alpha$ oder $\beta = S(\alpha)$, gilt die Behauptung für β. Falls $\beta = S(\beta')$ mit $\alpha < \beta'$, ist $\gamma \oplus \alpha < \gamma \oplus \beta' < S(\gamma \oplus \beta') = \gamma \oplus \beta$; falls β Limeszahl und $\alpha < \beta' < \beta$, ist $\gamma \oplus \alpha < \gamma \oplus \beta' \leq \gamma \oplus \beta$. In beiden Fällen gilt also ebenfalls die Behauptung für β. – Es ist $\mathbf{0} \oplus \omega = \omega = \mathbf{1} \oplus \omega$.

2.2.5 Zur Existenz von γ definiere man für gegebenes α die Operation F rekursiv durch $F(x) = \emptyset$ für $\neg\mathrm{Oz}\ x$ und

$$F(\beta) = \begin{cases} \emptyset, \text{ falls } \beta \leq \alpha; \\ S(F(\beta')), \text{ falls } \beta = S(\beta') > \alpha; \\ \bigcup \mathrm{Bild}(F{\restriction}\beta), \text{ falls } \beta \text{ Limeszahl } > \alpha. \end{cases}$$

Durch transfinite Induktion über β zeigt man, dass $\alpha \oplus F(\beta) = \beta$ für alle $\beta \geq \alpha$. Die Eindeutigkeit von γ ergibt sich mit der vorangehenden Aufgabe. – Für alle γ ist $\gamma \oplus \mathbf{1} \neq \omega$.

2.2.6 Es reicht, zu zeigen: Für alle α und β ist $\{(\gamma, \alpha \oplus \gamma) \mid \gamma \in \beta\}$ ein Isomorphismus von $(\beta, \in_\beta)$ auf $((\alpha \oplus \beta) \setminus \alpha, \in_{(\alpha\oplus\beta)\setminus\alpha})$. Dies beweist man für gegebenes α durch transfinite Induktion über β.

2.2.7 Man zeige $(\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma = \alpha \oplus (\beta \oplus \gamma)$ durch transfinite Induktion über γ. Ein anderer Weg: $(\alpha, \in_\alpha)$ ist isomorph zu einer auf natürliche Weise definierten Ordnung (a, r) mit $a = \alpha \times \{\mathbf{0}\}$, und entsprechend sind $(\beta, \in_\beta)$ und $(\gamma, \in_\gamma)$ isomorph zu Ordnungen (b, s) bzw. (c, t) mit $b = \beta \times \{\mathbf{1}\}$ und $c = \gamma \times \{\mathbf{2}\}$. Mit $+_{\mathrm{Ord}}$ für die Summenbildung von Ordnungen ist $((a, r) +_{\mathrm{Ord}} (b, s)) +_{\mathrm{Ord}} (c, t) \cong (a, r) +_{\mathrm{Ord}} ((b, s) +_{\mathrm{Ord}} (c, t))$. Man wende die vorangehende Aufgabe an und benutze die Starrheit von Wohlordnungen.

2.2.8 Wir geben einige Hinweise zur Multiplikation von Ordinalzahlen. Die *ordinale Multiplikation* werde rekursiv definiert durch ($\odot$ binde stärker als $\oplus$):

$$\begin{aligned} x \odot y &:= \emptyset, \text{ falls } \neg\mathrm{Oz}\ x \vee \neg\mathrm{Oz}\ y\,; \\ \alpha \odot \mathbf{0} &:= \mathbf{0}\,; \\ \alpha \odot S(\beta) &:= \alpha \odot \beta \oplus \alpha\,; \\ \alpha \odot \delta &:= \bigcup\{\alpha \odot \beta \mid \beta < \delta\}. \end{aligned}$$

Sie verallgemeinert die Multiplikation auf ω, ist aber nicht mehr kommutativ; z. B. ist $\omega \odot \mathbf{2} = \omega \oplus \omega$, aber $\mathbf{2} \odot \omega = \bigcup\{\mathbf{2} \odot i \,|\, i \in \omega\} = \omega$. Durch Induktion über β lässt sich zeigen, dass für alle α und γ gilt:

(i) $\gamma \odot (\alpha \oplus \beta) = \gamma \odot \alpha \oplus \gamma \odot \beta$;

(ii) $\gamma \odot (\alpha \odot \beta) = (\gamma \odot \alpha) \odot \beta$;

(iii) das lexikografische Produkt von $(\alpha, \in_\alpha)$ und $(\beta, \in_\beta)$ (in dieser Reihenfolge) ist isomorph zu $(\alpha \odot \beta, \in_{\alpha\odot\beta})$.

2.2.9 Man imitiere den Beweis von Theorem 1.1. Sei dazu a ein *R-Anfangsstück*, wenn $\forall u\,(u \in a \to R[u] \subseteq a)$, und g sei ein *Anfang*, wenn g eine auf einem R-Anfangsstück a definierte Funktion ist mit $g(u) = F(u, g\restriction R[u])$ für $u \in a$. Dann gilt:

(i) $\forall x \exists g\,\big(g \text{ Anfang} \wedge x \in \mathrm{Def}(g)\big)$.

(ii) $\forall gh\,\big(g \text{ Anfang} \wedge h \text{ Anfang} \wedge x \in \mathrm{Def}(g) \cap \mathrm{Def}(h) \to g(x) = h(x)\big)$.

Zu (ii): Man benutzt, dass man auf R-Anfangsstücken der Gestalt $\mathrm{Def}(g) \cap \mathrm{Def}(h)$ Beweise durch Induktion über R führen kann. – *Zu* (i): Für gegebenes x definiert man f auf ω rekursiv durch $f(\mathbf{0}) = \{x\}$ und $\forall i\, f(\mathbf{S}(i)) = \bigcup\{R[u] \mid u \in f(i)\}$. Dann ist $a := \bigcup \mathrm{Bild}(f)$ ein R-Anfangsstück mit $x \in a$. Nach Theorem 1.1 existiert ein Anfang g mit $\mathrm{Def}(g) = a$, also mit $x \in \mathrm{Def}(g)$. – Schließlich setze man $G(x) := g(x)$, wobei g Anfang ist mit $x \in \mathrm{Def}(g)$.

2.2.10 Es reicht, eine Operation G zu definieren mit $\forall \alpha\, G(\alpha) = F(G\restriction\alpha)$. Man setze hierzu $Rxy :\leftrightarrow x \in y$.

2.2.11 Man definiere H auf den Ordinalzahlen rekursiv durch

$$\begin{aligned} H(\mathbf{0}) &= \text{kleinster Fixpunkt von } G; \\ H(S(\alpha)) &= \text{kleinster Fixpunkt von } G \text{ oberhalb von } H(\alpha); \\ H(\delta) &= \bigcup \mathrm{Bild}(H\restriction\alpha)\,. \end{aligned}$$

Nach Aufgabe VI.2.11.15 ist die Definition sinnvoll. H ist normal, und die $H(\alpha)$ sind Fixpunkte von G (für $H(\delta)$ vgl. Aufgabe VI.2.11.14). Indirekt schließt man, dass jeder Fixpunkt von G ein $H(\alpha)$ ist.

2.2.12 Wir verwenden Aufgabe 2.2.8 und, wie dort, $\odot$ für die ordinale Multiplikation; $\odot$ binde stärker als $\oplus$. Es gilt $\forall \alpha\,(\omega \oplus \alpha = \alpha \leftrightarrow \alpha \geq \omega \odot \omega)$. Ist nämlich $\alpha \geq \omega \odot \omega$, etwa (vgl. Aufgabe 2.2.5) $\alpha = \omega \odot \omega \oplus \gamma$, so ist $\omega \oplus \alpha = \omega \odot (\mathbf{1} \oplus \omega) \oplus \gamma = \omega \odot \omega \oplus \gamma = \alpha$, und ist $\alpha < \omega \odot \omega$, etwa $\alpha = \omega \odot i \oplus j$, so gilt $\omega \oplus \alpha = \omega \odot (\mathbf{1} \oplus i) \oplus j = \omega \odot i \oplus (\omega \oplus j) \neq \alpha$. Die Operation H mit $H(\alpha) = \omega \odot \omega \oplus \alpha$ leistet das Gewünschte.

3.8.1 Die Behauptung ist äquivalent mit „$\neg$ Rechte Seite $\to \neg$ Linke Seite“, d. h. mit $\exists x\, \neg Px \to \exists x\,(\neg Px \wedge \forall y\,(y \in x \to \neg\neg Py))$, und dies gilt nach Satz 3.6 (mit $\neg P$ anstelle von P).

3.8.2 Da $\beta \in V_{\beta+\mathbf{1}}$, ist $\beta \subseteq V_\beta$. Ist $\alpha \in V_\beta$, so ist $\mathrm{Rg}(\alpha) < \beta$, also $\alpha \in \beta$.

3.8.3 *Zu* (i): Gälte $\forall y\,(y \in x \to \mathrm{Rg}(y) < \alpha)$, so wäre $x \subseteq V_\alpha$, also $x \in V_{\alpha+\mathbf{1}}$ und daher $\mathrm{Rg}(x) \leq \alpha$.

Zu (ii): Sei $x \in V_{\delta+\mathbf{1}}$, also $x \subseteq V_\delta$. Sei weiter x endlich, und sei α die maximale Ordinalzahl unter den $\mathrm{Rg}(y)$ für $y \in x$. Dann ist $x \subseteq V_{\alpha+\mathbf{1}}$, und wegen $\alpha < \delta$ ist $\mathrm{Rg}(x) \leq \alpha + \mathbf{1} < \delta$.

3.8.4 Teil (i) zeigt man durch Induktion über i unter Verwendung von Aufgabe V.3.11.6.

Zu (ii): Wir ordnen V_ω wohl, indem wir die V_i nacheinander wohlordnen, wobei die Wohlordnungsrelationen „nach rechts voranschreiten". Die Lösungen des letzten Teils von Aufgabe VI.1.10.7 zeigen, dass es eine Operation F gibt, die jeder endlichen Wohlordnung (a, r) eine Wohlordnungsrelation über $\mathrm{Pot}(a)$ zuordnet. Man definiere nun f auf ω rekursiv durch $f(\mathbf{0}) = \emptyset$ und

$\forall i\, f(i+\mathbf{1}) =$

$$f(i) \cup \big(V_i \times (V_{i+\mathbf{1}} \setminus V_i)\big) \cup \Big(F\big((V_i, f(i))\big) \cap \big((V_{i+\mathbf{1}} \setminus V_i) \times (V_{i+\mathbf{1}} \setminus V_i)\big)\Big).$$

Die $f(i)$ sind Wohlordnungsrelationen über V_i, und $\bigcup \mathrm{Bild}(f)$ ist eine Wohlordnungsrelation über V_ω. Es gibt also ein α mit $(V_\omega, \bigcup \mathrm{Bild}(f)) \cong (\alpha, \in_\alpha)$. Da alle echten Anfangsstücke von $(\alpha, \in_\alpha)$ endlich sind, ist $\alpha = \omega$.

3.8.5 Mit $y \in x$ ist $y \subseteq \mathrm{TC}(x)$, also $\mathrm{TC}(y) \subseteq \mathrm{TC}(x)$; mit $\mathrm{TC}(x)$ ist also auch $\mathrm{TC}(y)$ endlich. (Zu TC vgl. Aufgabe VI.2.11.11.)

3.8.6 Mit $x \in V_\omega$, etwa $x \in V_i$, ist $\mathrm{TC}(x) \subseteq \mathrm{TC}(V_i) = V_i$, also $\mathrm{TC}(x)$ endlich. Zur Umkehrung: Sei $\mathrm{TC}(x)$ endlich und $\mathrm{Rg}(x) \geq \omega$, und sei x von minimalem Rang mit dieser Eigenschaft. Sei weiter $y \in x$. Nach der vorangehenden Aufgabe ist $\mathrm{TC}(y)$ endlich, nach Wahl von x also $\mathrm{Rg}(y) < \omega$. Da x endlich ist, gibt es demnach ein i mit $x \subseteq V_i$, also mit $x \in V_{i+\mathbf{1}}$. Widerspruch.

3.8.7 *Zu* (i): Seien $x, y \in V_\alpha$ und $u \in x$, $v \in y$. Für ein geeignetes $\beta < \alpha$ gilt dann $u, v \in V_\beta$, also $\{u\}, \{u, v\} \subseteq V_\beta$, daher $\{u\}, \{u, v\} \in V_\alpha$. Daraus ergibt sich $\{\{u\}, \{u, v\}\} = (u, v) \in V_{\alpha+\mathbf{1}}$ und $x \times y \in V_{\alpha+\mathbf{2}}$.

Zu (ii): Indem man den Aufbau der Zahlbereiche gemäß V. 4 verfolgt, kommt man mit ähnlichen Überlegungen wie in (i) zur Behauptung. Weiter ergibt sich, dass auch reelle Funktionen, Teilmengen von $\mathbb{R}$, offene Überdeckungen von $\mathbb{R}$ und andere Objekte der Analysis in einem geeigneten $V_{S^n(\omega)}$ liegen.

3.8.8 Wir schreiben Rxy für $\varphi(x, y, \overset{n}{x})$. Gelte $\forall x\, (x \in u \to \exists y\, Rxy)$. Mit $R'xy :\leftrightarrow Rxy \wedge \forall z\, (\mathrm{Rg}(z) < \mathrm{Rg}(y) \to \neg Rxz)$ existiert für jedes x die Menge $\{y \mid R'xy\}$; sie ist für $x \in u$ nicht leer und besteht aus Mengen y mit Rxy. Man definiert $F(x) := \{y \mid R'xy\}$ und setzt $v := \bigcup \mathrm{Bild}(F \restriction u)$.

3.8.10 Mit $x \in \mathbf{V}$ ist $\mathrm{TC}(x) \in \mathbf{V}$, also $\mathrm{TC}(x)$ fundiert. Sei umgekehrt $\mathrm{TC}(x)$ fundiert. Dann ist $\mathrm{TC}(x) \subseteq \mathbf{V}$ (und daher $x \subseteq \mathbf{V}$, also $x \in \mathbf{V}$). Wäre nämlich die Menge $y := \{z \in \mathrm{TC}(x) \,|\, z \notin \mathbf{V}\}$ nicht leer, gälte für ein $\in_{\mathrm{TC}(x)}$-minimales $z \in y$, dass $z \subseteq \mathbf{V}$, also $z \in \mathbf{V}$ – ein Widerspruch.

Aufgaben zu Kapitel VIII

1.5.1 Es gelte zunächst $(*)$, und X sei eine Menge mit $\emptyset \notin X$. Man setze $r := \bigcup\{\{x\} \times x \mid x \in X\}$. Ein f im Sinne von $(*)$ ist eine Auswahlfunktion auf X. Gelte umgekehrt **AC**, und sei r eine Relation. Man wende **AC** an auf die Menge $\{\{u\} \times r^{-1}[u] \mid u \in \mathrm{Def}(r)\}$.

1.5.2 Gelte zunächst $(*)$ und sei X eine Menge von nicht leeren, paarweise zueinander disjunkten Mengen. Ferner sei $f := \{(u,x) \mid u \in x \text{ und } x \in X\}$. Dann ist $f : \bigcup X \overset{auf}{\to} X$. Für ein g im Sinne von $(*)$ ist $\mathrm{Bild}(g)$ eine Auswahlmenge zu X.

Gelte umgekehrt **AC**, und sei $f : x \overset{auf}{\to} y$. Sei h eine Auswahlfunktion auf $\mathrm{Pot}(x)$. Definiere g auf y durch $g(v) = h(\{u \in x \mid f(u) = v\})$.

1.5.3 Sei x unendlich und h eine Auswahlfunktion auf $\mathrm{Pot}(x)$. Definiere f auf ω rekursiv durch $\forall i f(i) = h(x \setminus \mathrm{Bild}(f{\restriction}i))$. Wegen der Unendlichkeit von x ist $f : \omega \overset{inj}{\to} x$ und $\mathrm{Bild}(f)$ eine Teilmenge der gesuchten Art.

1.5.4 *Zu* (i): Gelte **AC**, und sei r eine Relation über a im Sinne von $\mathbf{DC}^*$. Es ist $\mathrm{Def}(r) = a$. Sei h eine Auswahlfunktion auf $\mathrm{Pot}(a)$. Zu $u \in a$ definiere man f auf ω rekursiv durch $f(\mathbf{0}) = u$ und $\forall i\, f(i+\mathbf{1}) = h(\{v \in \mathrm{Bild}(r) \mid f(i)rv\})$.

Zu (ii): Es gelte $\mathbf{DC}^*$, und es sei $g : \omega \overset{bij}{\to} x$ und etwa $\emptyset \notin x$. Wir setzen

$$r = \bigcup \Big(\big\{\{g(i)\} \times (g(i) \times \{i\}) \mid i \in \omega\big\} \cup \big\{(g(i) \times \{i\}) \times \{g(i+\mathbf{1})\} \mid i \in \omega\big\}\Big)$$

und $a = \mathrm{Feld}(r)$. Dann gilt $\forall u\, (u \in a \to \exists v\, urv)$. Sei f im Sinne von $\mathbf{DC}^*$ mit $f(\mathbf{0}) = g(\mathbf{0})$. Für alle i ist dann $f(i+i) = g(i)$ und $\pi_l(f(i+i+\mathbf{1})) \in f(i+i)$. Also ist $\{(f(i+i), \pi_l(f(i+i+\mathbf{1}))) \mid i \in \omega\}$ eine Auswahlfunktion auf x.

1.5.5 *Zu* „$\mathbf{DC} \to (*)$“: Die Struktur (a,r) sei nicht fundiert, und b sei eine nicht leere Teilmenge von a, die kein r-minimales Element besitzt. Dann gilt $\forall u\, (u \in b \to \exists v\, (v \in b \wedge vru))$. Also lässt sich **DC** auf $(b, r^{-1} \cap (b \times b))$ anwenden. Es liefert ein $f : \omega \to a$ im Sinne von $(*)$ für (a,r).

Zu „$(*) \to \mathbf{DC}$“: Gelte $(*)$, und erfülle (a,r) die Voraussetzung für **DC**. Dann ist (a, r^{-1}) nicht fundiert, da a kein r^{-1}-minimales Element besitzt. Anwendung von $(*)$ auf (a, r^{-1}) liefert ein $f : \omega \to a$ mit $\forall i\, f(i) r f(i+\mathbf{1})$.

1.5.6 Gelte **DC**, sei (a,r) mit $\forall u\, (u \in a \to \exists v\, urv)$ gegeben, und sei $u \in a$. Wir setzen

$$b := \big\{g \mid \exists i\, \big((g : i{+}\mathbf{1} \to a) \wedge g(\mathbf{0}) = u \wedge \forall j\, (j < i \to g(j) r g(j{+}\mathbf{1}))\big)\big\},$$

$$s := \big\{(g,g') \mid g, g' \in b \wedge g \subseteq g' \wedge \mathrm{Def}(g') = \mathrm{Def}(g){+}\mathbf{1}\big\}.$$

Dann erfüllt (b, s) die Voraussetzung für **DC**. Für ein entsprechendes f gilt mit $h := \bigcup \mathrm{Bild}(f)$, dass $h : \omega \to a$ sowie $h(\mathbf{0}) = u$ und $\forall i\, h(i) r h(i+\mathbf{1})$.

1.5.7 Nach der Aufgabe 1.5.6 reicht ein Beweis in **ZF** + **DC***. Er ist trivial mit Aufgabe 1.5.4(ii); denn bei der Argumentation für Bemerkung 1.1 braucht man die Auswahlfunktion g nur auf einer abzählbaren Teilmenge von $\mathrm{Pot}(\mathbb{R})$.

2.5.1 Für eine Menge w von Ordinalzahlen ist $(w, \in_w)$ eine Wohlordnung.

2.5.2 Es sei b eine entsprechende Teilmenge von a und $b \neq \emptyset$. Wir zeigen, dass alle endlichen Teilmengen x von $\bigcup b$ zu a gehören. Hierzu beweisen wir durch Induktion über $|x|$, dass $x \subseteq c$ für ein $c \in b$. Im Induktionsschritt schließen wir so: Sei $x = y \cup \{u\}$ und $u \notin y$, und sei nach Induktionsvoraussetzung $c \in b$ und $y \subseteq c$. Sei weiter $d \in b$ mit $u \in d$. Falls $c \subseteq d$, ist $x \subseteq d$; falls $d \subseteq c$, ist $x \subseteq c$. – Beispiele für Mengen von endlichem Charakter liefern die Mengen, die aus den linear unabhängigen Teilmengen eines Vektorraums bestehen.

2.5.3 Sei a gegeben. Wir zeigen ohne **Ers** und **Fund**, dass a wohlordenbar ist. Dazu wählen wir h und W wie angegeben. Die Existenz von W bekommen wir mit **Aus**. Sei $s := \bigcup W$. Dann gilt (und damit ist die Behauptung bewiesen):

(α) Für $r, r' \in W$ ist $(\mathrm{Feld}(r), r)$ ein Anfangsabschnitt von $(\mathrm{Feld}(r'), r')$ oder umgekehrt.
(β) $s \in W$.
(γ) $\mathrm{Feld}(s) = a$.

Zu (α): Seien $r, r' \in W$. Sei $u \in \mathrm{Feld}(r)$ r-minimales Element mit $u \notin \mathrm{Feld}(r')$. Durch Induktion in $(\mathrm{Feld}(r), r)$ zeigt man mit (2) für r und r', dass

$$\mathrm{id}_{r[u]} : \big(r[u], r \cap (r[u] \times r[u])\big) \cong \big(\mathrm{Feld}(r'), r'\big).$$

Also ist in diesem Fall $(\mathrm{Feld}(r'), r')$ ein Anfangsabschnitt von $(\mathrm{Feld}(r), r)$. Falls $\mathrm{Feld}(r') \setminus \mathrm{Feld}(r) \neq \emptyset$ oder $\mathrm{Feld}(r') = \mathrm{Feld}(r)$, schließt man ähnlich.

Zu (β): Nach (α) ist $(\mathrm{Feld}(s), s)$ eine Ordnung. Ist $\emptyset \neq b \subseteq \mathrm{Feld}(s)$ und $u \in b$, etwa $u \in \mathrm{Feld}(r)$ mit $r \in W$, hat $b \cap \mathrm{Feld}(r)$ ein r-minimales Element v. Dieses ist nach (α) s-minimales Element von b. Damit gilt (1) für s. Offenbar gilt auch (2) für s.

Zu (γ): Sei $a \setminus \mathrm{Feld}(s) \neq \emptyset$. Dann ist $s \cup \{(v, h(a \setminus \mathrm{Feld}(s))) \mid v \in \mathrm{Feld}(s)\}$ eine „Verlängerung“ von s um $h(a \setminus \mathrm{Feld}(s))$ in W. Widerspruch.

2.5.4 Sei (W, r) eine Wohlordnung. Man definiert B auf W rekursiv durch

$$B(w) := \begin{cases} \bigcup \mathrm{Bild}(B{\restriction} r[w]) \cup \{w\}, & \text{falls diese Menge linear unabhängig ist;} \\ \bigcup \mathrm{Bild}(B{\restriction} r[w]), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man argumentiert dann ähnlich weiter wie im Beweis von Satz 2.4.

3.3.1 Für eine Kette b in $(a, \subseteq_a)$ ist $\bigcup b$ eine obere Schranke von b (vgl. Aufgabe 2.5.2).

3.3.2 Sei $\mathcal{F}$ ein Filter über x und $\mathbf{F}$ die Menge der Filter über x, die $\mathcal{F}$ umfassen. Dann ist $\mathcal{F} \in \mathbf{F}$. Ferner hat jede nicht leere Kette in $(\mathbf{F}, \subseteq_{\mathbf{F}})$ ein maximales Element, denn ihre Vereinigung ist wieder ein Filter in $\mathbf{F}$. Nach dem Zornschen Lemma gibt es ein maximales Element in $\mathbf{F}$, also einen Ultrafilter über x, der $\mathcal{F}$ umfasst.

3.3.3 Ist a eine Menge von nicht leeren, zueinander disjunkten Mengen, so ist jede bzgl. $\subseteq$ maximale Fast-Auswahlmenge zu a eine Auswahlmenge zu a. Die Existenz von bzgl. $\subseteq$ maximalen Fast-Auswahlmengen impliziert also **AC**. Gelte umgekehrt **AC**. Angewandt auf die Menge der Fast-Auswahlmengen zu einer Menge a mit der zugehörigen Inklusionsbeziehung liefert dann das Zornsche Lemma eine maximale Fast-Auswahlmenge.

3.3.4 Seien a, r, u, v entsprechend gegeben. Falls $r[u] \cap r^{-1}[v] = \emptyset$, sei $s := r \cup (r[u] \times r^{-1}[v])$. Dann ist (a, s) eine Halbordnung i.S.v. $\leq$ mit $r \subseteq s$ und $(u, v) \in s$. Ist $r[u] \cap r^{-1}[v] \neq \emptyset$, gibt es ein $x \in a$ mit xru und vrx, also gilt bereits vru.

3.3.5 Man betrachte die Halbordnung $(b, \subseteq_b)$ mit der Trägermenge

$$b = \big\{ s \mid s \supseteq r \text{ und } (a, s) \text{ ist Halbordnung i.S.v. } \leq \big\}.$$

Das Zornsche Lemma ist auf $(b, \subseteq_b)$ anwendbar. Sei s ein maximales Element. Nach der vorangehenden Aufgabe ist s eine Ordnung i.S.v. $\leq$.

3.3.6 Für entsprechend gegebenes a sei B die Menge der Ketten mit (1) und (2). Ähnlich wie bei Aufgabe 2.5.3 zeigt man, dass für $b, b' \in B$ stets $(b,\ r \cap (b \times b))$ ein Anfangsabschnitt von $(b',\ r \cap (b' \times b'))$ ist oder umgekehrt und dass daher $\bigcup B \in B$. Insbesondere kann $\bigcup B$ nicht zu einer Kette verlängert werden, die in B liegt. Nach Voraussetzung hat $\bigcup B$ eine obere Schranke in (a, r), etwa u. Wegen der Nichtverlängerbarkeit von $\bigcup B$ ist u letztes Element von $\bigcup B$ und maximal in (a, r).

Aufgaben zu Kapitel IX

1.12.1 Sei $f : x \preceq y$. Wir definieren $g : {}^z x \to {}^z y$ durch $g(h) := f \circ h$ für $h \in {}^z x$. Mit $h, h' \in {}^z x$ und $g(h) = g(h')$ gilt $f(h(u)) = f(h'(u))$ für alle $u \in z$, also $h(u) = h'(u)$ für alle $u \in z$, also $h = h'$.

Es ist $\mathbf{2} \prec \mathbf{3}$, aber ${}^{\mathbf{0}}\mathbf{2} = {}^{\mathbf{0}}\mathbf{3} = \{\emptyset\}$. Ein interessanteres Beispiel: Es ist ${}^{\omega}\mathbf{2} \sim {}^{\omega}\mathbf{3}$. Dabei ist ${}^{\omega}\mathbf{2} \preceq {}^{\omega}\mathbf{3}$ offensichtlich. Um ${}^{\omega}\mathbf{3} \preceq {}^{\omega}\mathbf{2}$ zu zeigen, ordne man $f \in {}^{\omega}\mathbf{3}$ die

Funktion aus ${}^{\omega}\mathbf{2}$ zu, die für gegebenes i und mit $j = i+i+i$ die Zahl $j+f(i)$ auf $\mathbf{1}$ und die restlichen beiden Zahlen aus $\{j, j, +\mathbf{1}, j+\mathbf{2}\}$ auf $\mathbf{0}$ abbildet.

1.12.2 Sei $f : x \preceq y$ und $z \neq \emptyset$, etwa $u \in z$. Es ist $f^{-1} : \mathrm{Bild}(f) \overset{bij}{\to} x$. Man ordne $h \in {}^{x}z$ die Funktion $(h \circ f^{-1}) \cup ((y \setminus \mathrm{Bild}(f)) \times \{u\})$ aus ${}^{y}z$ zu.

Es ist $\mathbf{2} \prec \mathbf{3}$, aber ${}^{\mathbf{2}}\emptyset \sim {}^{\mathbf{3}}\emptyset$. Man vgl. die Diskussion nach Korollar 2.13.

1.12.3 Sei x gegeben und α minimal mit $\neg\alpha \preceq x$. Dann ist $\beta \preceq x$ für alle $\beta \in \alpha$. Also existiert für alle $\beta \in \alpha$ eine Wohlordnungsrelation r über einer Teilmenge von x mit $(\mathrm{Feld}(r), r) \cong (\beta, \in_\beta)$. Es sei f auf α definiert durch

$$f(\beta) \;:=\; \big\{r \mid \text{Es gibt } a \in \;\mathrm{Pot}(x) \text{ mit } (a, r) \cong (\beta, \in_\beta)\big\}.$$

Dann ist $f : \alpha \preceq \;\mathrm{Pot}(\mathrm{Pot}(x \times x))$.

1.12.4 Nach Aufgabe VI.1.10.8 reicht es zu zeigen: Seien (a, r) und (b, s) Wohlordnungen mit $b \subseteq a$ und $s \subseteq r$. Dann ist (b, s) isomorph zu einem Anfangsabschnitt von (a, r). Ein Isomorphismus f kann in (b, s) rekursiv definiert werden: Für $u \in b$ setze man $f(u) \;:=$ das r-minimale Element in $a \setminus \mathrm{Bild}(f \restriction s[u])$. Man beachte, dass stets $a \setminus \mathrm{Bild}(f \restriction s[u]) \neq \emptyset$.

Für beliebige Ordnungen gilt ein entsprechender Sachverhalt nicht mehr. Beispielsweise ist die Ordnung $([\mathbf{0}, \mathbf{1}], <)$ des abgeschlossenen Einheitsintervalls mit der üblichen Ordnung für reelle Zahlen isomorph zu einer Teilstruktur der Ordnung $([\mathbf{0}, \mathbf{1}] \cup \omega, <)$ und umgekehrt (man bilde ein $r \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ auf $\frac{r}{\mathbf{2}}$ ab und ein $i \geq \mathbf{2}$ auf $\mathbf{1} - \mathbf{1}/(i+\mathbf{1})$.

1.12.5 Man weist nach, dass mit $f := \bigcup \mathrm{Bild}(h)$ und $v := \mathrm{Bild}(f)$ die Funktion f eine Bijektion von $(y \setminus x) \cup v$ auf v ist und daher $f \cup \mathrm{id}_{x \setminus v} : y \sim x$ gilt.

1.12.6 Eine Vereinigung endlich vieler Restriktionen von Bewegungen mit zueinander disjunkten Definitionsbereichen und zueinander disjunkten Bildbereichen heiße eine *Stücke-Bewegung*. X heiße ein *Stücke-Teil* von Y, falls es eine Stücke-Bewegung $f : X \preceq Y$ gibt. Die Modifikation des Äquivalenzsatzes 1.4(iii) lautet dann: Ist X ein Stücke-Teil von Y und Y ein Stücke-Teil von X, so ist $X \equiv Y$. Zum Beweis argumentiere man wie im gewöhnlichen Fall und beachte, dass Restriktionen und Kompositionen von Stücke-Bewegungen wieder Stücke-Bewegungen sind.

Sind K_0, K_1 und K_2 (abgeschlossene) Einheitskugeln, so ist K_0 ein Stücke-Teil von $K_1 \cup K_2$ und $K_1 \cup K_2$ ein Stücke-Teil von $K_1 \cup K_2'$ mit einer zu K_1 disjunkten Einheitskugel K_2', nach dem Kugelparadoxon also ein Stücke-Teil von K_0. Nach dem modifizierten Äquivalenzsatz ist mithin $K_0 \equiv K_1 \cup K_2$. Die volle Behauptung, nämlich $K_0 \equiv Y$ für jede nicht leere Vereinigung Y

von endlich vielen Einheitskugeln, lässt sich ähnlich durch Induktion über die Anzahl der Kugeln zeigen. Sie gilt für jeden festen Radius $> \mathbf{0}$ anstelle des Radius $\mathbf{1}$.

1.12.7 Es reicht zu zeigen: Wenn X eine beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ ist, welche die (abgeschlossene) Einheitskugel K enthält, so ist $X \equiv K$. Für ein solches X sei Y eine Vereinigung endlich vieler Einheitskugeln mit $X \subseteq Y$. Trivialerweise ist K Stücke-Teil von X und X Stücke-Teil von Y. Nach der vorangehenden Aufgabe ist $Y \equiv K$. Also ist X Stücke-Teil von K. Der modifizierte Äquivalenzsatz liefert $X \equiv K$.

2.16.1 Ist X eine Teilmenge von ω, so ist $\bigcup X \in \omega$ oder $\bigcup X = \omega$. Andernfalls ist $\bigcup X = \bigcup\{\aleph_\alpha \mid \aleph_\alpha \in X\} = \aleph_\beta$, wobei $\beta := \bigcup\{\alpha \mid \aleph_\alpha \in X\}$. (Man vgl. hierzu Aufgabe VI.2.11.12(ii).)

2.16.2 Sei $f : \omega \sim \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0_\mathbb{Z}\}$ (man beachte, dass $\mathbb{Z} \sim \omega$ und $\mathbb{Z} \setminus \{0_\mathbb{Z}\} \sim \omega$). Für $\rho \in \mathbb{Q}$ sei $g(\rho)$ das kleinste i mit $f(i) \in \rho$. Dann ist $g : \mathbb{Q} \preceq \omega$. Da offensichtlich $\omega \preceq \mathbb{Q}^+$, ist $\omega \preceq \mathbb{Q}^+ \preceq \mathbb{Q} \preceq \omega$, also $|Q| = |Q^+| = \aleph_\mathbf{0}$.

2.16.3 Man ordne der Funktion $f \in {}^u(x \times y)$ das Paar $(g, h) \in {}^u x \times {}^u y$ zu mit $g(v) = \pi_l(f(v))$ und $h(v) = \pi_r(f(v))$ für $v \in u$. Die Zuordnung ist z. B. surjektiv; denn für $(g, h) \in {}^u x \times {}^u y$ wird der Funktion $f \in {}^u(x \times y)$ mit $f(v) = (g(v), h(v))$ für $v \in u$ gerade wieder (g, h) zugeordnet.

2.16.4 Sei zunächst $f : x \overset{auf}{\to} y$. Man wähle gemäß Aufgabe VIII.1.5.2 eine Funktion $g \in {}^y x$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_y$. Dann ist $g : y \preceq x$, also $|y| \leq |x|$. Für die Umkehrung sei $u \in y$ und $f : y \preceq x$. Mit $g := f^{-1} \cup \big((x \setminus \mathrm{Bild}(f)) \times \{u\}\big)$ ist g eine Funktion von x auf y.

Zu Satz 2.7: Es gelte $|X| \leq \aleph_\alpha$ und $\forall y\,(y \in X \to |y| \leq \aleph_\alpha)$. Sei $g : \aleph_\alpha \overset{auf}{\to} X$, und sei h mit Hilfe einer geeigneten Auswahlfunktion so auf X definiert, dass für $y \in X$ der Wert $h(y)$ eine Funktion von $\aleph_\alpha$ auf y ist (wir können annehmen, dass $X \neq \emptyset$ und $\emptyset \notin X$). Setzen wir dann $k(\beta, \gamma) = h(g(\beta))(\gamma)$ für $\beta, \gamma \in \aleph_\alpha$, ist k eine Funktion von $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$ auf $\bigcup X$.

2.16.5 Nach Wahl von μ gibt es ein f mit $f : \mu \times X \sim X$. Für solch ein f ist $X = \bigcup\{\mathrm{Bild}(f \restriction (\{\alpha\} \times X)) \mid \alpha \in \mu\}$ eine entsprechende Zerlegung.

2.16.6 Sei $|I| \leq \mu$ und $|X_\iota| \leq \kappa$ für $\iota \in I$. Sei zunächst $|I| = \mu$, und sei weiter $g : \mu \sim I$ und h eine auf I definierte Funktion mit $h(\iota) : X_\iota \preceq \kappa$ für $\iota \in I$. Dann ist $f : \bigtimes_{\iota \in I} X_\iota \preceq {}^\mu\kappa$, wobei für $g' \in \bigtimes_{\iota \in I} X_\iota$

$$f\big(g'\big) : \mu \to \kappa \text{ mit } f\big(g'\big)(\alpha) = h\big(g(\alpha)\big)\big(g'(g(\alpha))\big) \text{ für } \alpha \in \mu.$$

Falls $|I| < \mu$, verwende man Satz 2.12(iv).

2.16.7 Man definiere h auf ω rekursiv durch $h(\mathbf{0}) = Y$ und $\forall i\, h(i+\mathbf{1}) = \mathrm{Bild}(f \restriction h(i))$. Dann ist $Z := \bigcup \mathrm{Bild}(h)$ eine unter f abgeschlossene Teilmenge von X und $Y \subseteq Z$. Da $\forall i\; |f(i)| \leq |Y|$, ist $|Z| \leq |Y|$, also $|Z| = |Y|$.

2.16.8 Sei $|a| \geq \aleph_{\alpha+\mathbf{2}}$ und $b \subseteq a$ mit $|b| = \aleph_{\alpha+\mathbf{1}}$, zum Beispiel sei b das Bild von $\aleph_{\alpha+\mathbf{1}}$ unter einer Injektion von $\aleph_{\alpha+\mathbf{2}}$ in a. Dann ist $b' := b \cup \bigcup\{r[u] \mid u \in b\}$ ein Anfangsstück von (a, r) der Mächtigkeit $\aleph_{\alpha+\mathbf{1}}$, und für die $v \in a \setminus b'$ ist $|r[v]| \geq \aleph_{\alpha+\mathbf{1}}$, ein Widerspruch.

2.16.9 Wir deuten einen Beweis für Pot an; der für Seq verläuft ähnlich. Da $\mathrm{Pot}_\omega(x) = \bigcup\{\mathrm{Pot}_i(x) \mid i \in \omega\}$, reicht der Nachweis von $\forall i\, |\mathrm{Pot}_i(x)| \leq |x|$ (für unendliches x). Diesen führen wir durch Induktion über i. Im Induktionsschritt für $i \geq \mathbf{1}$ setzen wir $g(y,u) = y \cup \{u\}$ für $(y,u) \in \mathrm{Pot}_i(x) \times x$. Dann ist

$$g : \mathrm{Pot}_i(x) \times x \overset{auf}{\to} \mathrm{Pot}_{i+\mathbf{1}}(x), \quad \text{also} \quad |\mathrm{Pot}_{i+\mathbf{1}}| \leq |\mathrm{Pot}_i(x) \times x| \leq |x|.$$

2.16.10 Da $\mathrm{Bild} \restriction {}^\mu\kappa : {}^\mu\kappa \overset{auf}{\to} \mathrm{Pot}_{\mu^+}(\kappa) \setminus \{\emptyset\}$, ist $|\mathrm{Pot}_{\mu^+}(\kappa)| \leq \kappa^\mu$. Also reicht es zu zeigen, dass $\mathrm{Pot}_{=\mu}(\kappa) := \{y \in \mathrm{Pot}(\kappa) \mid |y| = \mu\}$ eine Mächtigkeit $\geq \kappa^\mu$ hat. Dies gilt wegen ${}^\mu\kappa \subseteq \mathrm{Pot}_{=\mu}(\mu \times \kappa) \sim \mathrm{Pot}_{=\mu}(\kappa)$.

2.16.11 Es ist $|\mathrm{Perm}(x)| \leq |X|^{|X|} = \mathbf{2}^{|X|}$. Um die andere Richtung zu zeigen, sei $g : \mathrm{Pot}(X) \to \mathrm{Perm}(X \times \mathbf{2})$ die Funktion, die einem $y \subseteq X$ diejenige Permutation von $X \times \mathbf{2}$ zuweist, welche auf $y \times \mathbf{2}$ die Identitätsfunktion ist und welche für $v \in X \setminus y$ die Elemente $(v, \mathbf{0})$ und $(v, \mathbf{1})$ vertauscht. Dann gilt $g : \mathrm{Pot}(X) \preceq \mathrm{Perm}(X \times \mathbf{2}) \sim \mathrm{Perm}(X)$, also $\mathbf{2}^{|X|} \leq |\mathrm{Perm}(X)|$.

2.16.12 Es ist $|Y| \leq |\mathrm{Pot}(a \times a)| = |\mathrm{Pot}(a)| = \mathbf{2}^{|a|}$. Indem man die $r \in Y$ betrachtet, die aus einer festen Wohlordnungsrelation $r_0 \in Y$ durch Permutationen von a induziert werden, erhält man $|Y| \geq |\mathrm{Perm}(a)| = \mathbf{2}^{|a|}$. (Man beachte, dass Wohlordnungen keine nicht-trivialen Automorphismen haben.) Also ist $|Y| = \mathbf{2}^{|a|}$.

2.16.13 Es gebe genau κ viele Gruppen mit a als Trägermenge. Da eine zweistellige Verknüpfung über a Teilmenge von $(a \times a) \times a$ ist, erhalten wir $\kappa \leq \mathbf{2}^{|(a\times a)\times a|} = \mathbf{2}^{|a|}$. Die Schranke ist scharf: Man kann zeigen, dass es zu jedem $\mu \geq \aleph_\mathbf{0}$ eine Gruppe mit Trägermenge μ gibt, die μ viele Selbstinverse und μ viele andere Elemente hat. Also ist $\kappa \geq |\{y \subseteq a \mid |y| = |a| \wedge |a \setminus y| = |a|\} \geq$ (man ersetze a durch $a \times \mathbf{2}$) $|\mathrm{Pot}_{=|a|}(a)| = |a|^{|a|} = \mathbf{2}^{|a|}$.

2.16.14 Für $\lambda \geq \aleph_\mathbf{0}$ definiere man f auf ω rekursiv durch $f(\mathbf{0}) = \lambda$ und $\forall i\, f(i+\mathbf{1}) = \mathbf{2}^{f(i)}$. Sei $\kappa := \bigcup \mathrm{Bild}(f)$. Dann ist $\kappa > \lambda$, und für $\mu < \kappa$, etwa $\mu \leq f(i)$, ist $\mathbf{2}^\mu \leq \mathbf{2}^{f(i)} < \kappa$.

3.9.1 Man ändere die Definition von f im Beweis von Bemerkung 3.2(ii) zu

$$f(\gamma) := \max\left\{\bigcup \mathrm{Bild}(h \restriction \gamma{+}\mathbf{1}), \bigcup \mathrm{Bild}(f \restriction \gamma)\right\} + \mathbf{1}.$$

3.9.2 Sei $f : \mu \to \kappa$ monoton und unbeschränkt in κ. Dann hat $a := \mathrm{Bild}(f)$ die geforderten Eigenschaften.

3.9.3 Sei $\lambda \geq \aleph_{\mathbf{0}}$ gegeben. Definiere f auf ω rekursiv durch $f(\mathbf{0}) = \lambda$ und $\forall i\, f(i{+}\mathbf{1}) = f(i)^+$. Dann ist $\bigcup \mathrm{Bild}(f)$ eine Kardinalzahl der Kofinalität ω.

3.9.4 Durch Verallgemeinerung der vorangehenden Aufgabe. Sei $\lambda \geq \aleph_{\mathbf{0}}$. Man definiere f auf κ rekursiv durch $f(\mathbf{0}) = \lambda$, $\forall \beta\,(\beta < \kappa \to f(\beta{+}\mathbf{1}) = f(\beta)^+)$ und $\forall \delta\,(\delta < \kappa \to f(\delta) = \bigcup \mathrm{Bild}(f{\restriction}\delta))$. Dann ist $\mu := \bigcup \mathrm{Bild}(f)$ eine Kardinalzahl $> \lambda$ mit $\mathrm{cof}(\mu) \leq \kappa$. Ist $g : \beta \to \mu$ unbeschränkt in μ, so ist die Funktion $h : \beta \to \kappa$ mit $h(\gamma) :=$ das kleinste $\gamma' \in \kappa$ mit $f(\gamma') \geq g(\gamma)$ unbeschränkt in κ. Also ist $\beta \geq \kappa$ und daher $\kappa \leq \mathrm{cof}(\mu)$.

3.9.5 Für die Summe (c, t) bzw. das lexikografische Produkt (d, u) der Ordnungen (a, r) und (b, s) ergibt sich, falls etwa $a \neq \emptyset \neq b$ (und $a \cap b = \emptyset$ im Falle der Summe): $\mathrm{cof}(c, t) = \mathrm{cof}(b, s)$ und $\mathrm{cof}(d, u) = \mathrm{cof}(a, r)$, falls (b, s) ein letztes Element hat, und $\mathrm{cof}(d, u) = \mathrm{cof}(b, s)$ sonst.

3.9.6 Sei $\kappa := \bigcup\{\kappa_\iota \mid \iota \in I\}$ und $X := \bigcup\{\kappa_\iota \times \{\iota\} \mid \iota \in I\}$. Es ist $X \preceq \kappa \times I$, also $\sum_{\iota\in I} \kappa_\iota \leq \max\{I, \kappa\}$. Umgekehrt ist zunächst $I \sim \{(\mathbf{0}, \iota) \mid \iota \in I\} \subseteq X$, also $|I| \leq \sum_{\iota\in I} \kappa_\iota$. Weiter ist $\kappa \preceq X$ via f mit $f(\beta) := (\beta, \iota)$, wobei ι minimal (bzgl. einer Wohlordnungsrelation über I) mit $\beta \in \kappa_\iota$, also auch $\kappa \leq \sum_{\iota\in I} \kappa_\iota$.

3.9.8 *Zu* (i): Die Behauptung verallgemeinert Satz 2.12(i) und kann ähnlich gezeigt werden. Ein anderer Weg führt über die Verallgemeinerung der Beziehung $\forall x \forall y\,(x \cap y = \emptyset \to \mathrm{Pot}(x \cup y) \sim \mathrm{Pot}(x) \times \mathrm{Pot}(y))$. Da $\mathbf{2}^{\kappa_\iota} \sim \mathrm{Pot}(\kappa_\iota \times \{\iota\})$, genügt dazu der Nachweis von

$$\mathrm{Pot}\Big(\bigcup\{\kappa_\iota \times \{\iota\} \mid \iota \in I\}\Big) \;\sim\; \bigtimes_{\iota\in I} \mathrm{Pot}\big(\kappa_\iota \times \{\iota\}\big).$$

Dies bezeugt die Bijektion f, die einer Teilmenge y von $\bigcup\{\kappa_\iota \times \{\iota\} \mid \iota \in I\}$ die auf I definierte Funktion g mit $g(\iota) = y \cap (\kappa_\iota \times \{\iota\})$ zuordnet.

Zu (ii): Die Behauptung verallgemeinert Satz 2.12(iii). Wir zeigen

$$^{\kappa}\Big(\bigtimes_{\iota\in I} \kappa_\iota\Big) \;\sim\; \bigtimes_{\iota\in I} {}^{\kappa}\kappa_\iota.$$

Dazu ordnen wir einem $f : \kappa \to \bigtimes_{\iota\in I} \kappa_\iota$ die auf I definierte Funktion zu, welche $\iota \in I$ abbildet auf das $h \in {}^{\kappa}\kappa_\iota$ mit $h(\gamma) = f(\gamma)(\iota)$ für $\gamma \in \kappa$.

3.9.9 Mit **AC** gewinnt man auf I eine Funktion h mit $h(\iota) : X_\iota \preceq \kappa_\iota$ für $\iota \in I$, und damit eine Injektion von $\bigtimes_{\iota\in I} X_\iota$ in $\bigtimes_{\iota\in I} \kappa_\iota$.

3.9.10 Mit der Ungleichung 3.7 erhält man $\sum_{\iota\in\delta} \kappa_\iota < \prod_{\iota\in\delta} \kappa_{\iota+\mathbf{1}}$, und leicht ergibt sich $\bigtimes_{\iota\in\delta} \kappa_{\iota+\mathbf{1}} \preceq \bigtimes_{\iota\in\delta} \kappa_\iota$.

4.15.1 Es sind die $\kappa \geq \aleph_{\mathbf{0}}$ mit $\forall \mu\, (\mu < \kappa \rightarrow \mu^+ < \kappa)$, also die Limeskardinalzahlen.

4.15.2 Wir können annehmen, dass $\mu \geq \mathrm{cof}(\kappa)$. Analog zum Beweis von Hilfssatz 4.6 lässt sich für eine unbeschränkte Einbettung f von $\mathrm{cof}(\kappa)$ in κ zeigen, dass $\mathrm{Pot}(\kappa) \preceq \bigtimes_{\beta \in \mathrm{cof}(\kappa)} \mathrm{Pot}(f(\beta))$, dass also $\mathbf{2}^\kappa \leq (\mathbf{2}^\mu)^\mu = \mathbf{2}^\mu$.

4.15.3 Man zeige, dass lineare Bijektionen zwischen beschränkten und nicht leeren offenen Intervallen den CB-Rang von Teilmengen dieser Intervalle erhalten. Genauer: Ist $f : I_0 \rightarrow I_1$ eine solche Bijektion, so gilt für alle α und für alle $X \subseteq I_0$ und $y \in I_0$, dass $y \in X^{(\alpha)} \leftrightarrow f(y) \in (\mathrm{Bild}(f{\restriction}X))^{(\alpha)}$.

4.15.4 Die I_i sind disjunkt zueinander und „konvergieren" von rechts gegen $\mathbf{0}$. Die Vereinigung Y der X_i verschwindet bei Iteration der Bildung der Häufungspunkte so „von rechts her", dass $(\{\mathbf{0}\} \cup Y)^{(\delta)} = \{\mathbf{0}\}$, $([-\mathbf{1}, \mathbf{0}] \cup Y)^{(\delta)} = [-\mathbf{1}, \mathbf{0}]$ und $(\{\mathbf{0}\} \cup Y)^{(\delta+1)} = \emptyset$.

4.15.5 Sei $(I_i)_{i \in \omega}$ wie in Aufgabe 4.15.4 gewählt: z. B. sei

$$I_i = [\mathbf{2}^{-i} - \mathbf{2}^{-i-\mathbf{2}}, \mathbf{2}^{-i} + \mathbf{2}^{-i-\mathbf{2}}] \text{ für } i \in \omega.$$

Man zeigt durch transfinite Induktion über $\alpha < \aleph_{\mathbf{1}}$, dass es beschränkte und abgeschlossene Mengen X_α gibt mit $CB(X_\alpha) = \alpha$, wobei für Nachfolgerzahlen α zusätzlich $X_\alpha^{(\alpha)} = \emptyset$ gilt. Der Anfangsschritt: Es sei $X_{\mathbf{0}} := \emptyset$ und $X_{\mathbf{1}} := \{\emptyset\}$. – Im Limesschritt gelte die Behauptung für alle $\beta < \delta$. Man verfährt wie in Aufgabe 4.15.4. Dabei wählt man die Funktion $f : \omega \rightarrow \delta$ so, dass die $f(i)$ Nachfolgerzahlen sind. Man kann annehmen (vgl. Aufgabe 4.15.3), dass die $X_{f(i)} \subseteq I_i$ und daher die Rolle der abgeschlossenen Teilmengen von I_i übernehmen können. – Der Nachfolgerschritt führt jetzt allgemein von Ordinalzahlen $\alpha + \mathbf{1}$ zu $\alpha + \mathbf{2}$. Sei entsprechend $X_{\alpha+\mathbf{1}}$ gegeben. Für $i \in \omega$ sei, wieder nach Aufgabe 4.15.3, Y_i eine „verkleinerte Kopie" von $X_{\alpha+\mathbf{1}}$, die eine Teilmenge von I_i ist. Dann leistet $X_{\alpha+\mathbf{2}} := \{\mathbf{0}\} \cup \bigcup\{Y_i \mid i \in \omega\}$ das Gewünschte.

4.15.6 Für abgeschlossene $X_i \subseteq \langle i, i+\mathbf{1}\rangle$ mit $CB(X_i) = i$ und $X_i^{(i)} = \emptyset$ für $i \in \omega$ ist $\bigcup\{X_i \mid i \in \omega\}$ eine solche Menge. Ist $CB(X) = \omega$ und X beschränkt und ist $r_i \in X^{(i)} \setminus X^{(i+1)}$ für $i \geq \mathbf{1}$ und r ein Häufungspunkt der Menge der r_i, so ist $r \in X^{(\omega)}$, also $X^{(\omega)} \neq \emptyset$.

4.15.7 Es sei $f(\mathbf{0}) := [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$, und $f(i + \mathbf{1})$ entstehe aus $f(i)$ durch Entfernen des mittleren offenen Drittels aus allen maximalen Teilintervallen. Der Durchschnitt C der $f(i)$ hat die verlangten Eigenschaften. Man beachte dazu, dass alle $f(i)$ abgeschlossen sind (und damit auch C) und dass es in beliebiger Nähe eines $r \in C$ Randpunkte von maximalen abgeschlossenen Teilintervallen eines $f(i)$ gibt, die von r verschieden sind.

Aufgaben zu Kapitel X

1.6.1 Der Beweis erfolgt (in **ZF**) durch metasprachliche Induktion über den Aufbau der mengentheoretischen Ausdrücke, wobei die Parameter jeweils Elemente von u sind. Wir bringen den Induktionsschritt über den Existenzquantor. Es gelte $u \subseteq v$, und $x_1, x_2, \ldots, x_n$ seien Elemente von u. Dann erhalten wir die Äquivalenzkette: $[\exists x\, \varphi(x, \overset{n}{x})]^u \;\leftrightarrow\; \exists x\, (x \in u \wedge [\varphi(x, \overset{n}{x})]^u)$

$\leftrightarrow\;\; \exists x\, \big(x \in v \wedge x \in u \wedge [\,[\varphi(x, \overset{n}{x})]^u]^v\big)$ (da $u \subseteq v$ und nach Ind.-Vor.)

$\leftrightarrow\;\; [\exists x\, (x \in u \wedge [\varphi(x, \overset{n}{x})]^u)]^v \;\leftrightarrow\; [\,[\exists x\, \varphi(x, \overset{n}{x})]^u]^v$.

Ähnlich argumentiert man für $[\varphi^v]^u$.

1.6.2 Durch metasprachliche Induktion wie bei Aufgabe 1.6.1. Der Induktionschritt über den Allquantor: P sei transitiv, und es gelte Py, $Px_1, \ldots, Px_n$. Dann erhalten wir die Äquivalenzkette: $[\forall x\, (x \in y \to \varphi(x, y, \overset{n}{x}))]^P$

$\leftrightarrow\;\; \forall x\, \big(Px \to (x \in y \to [\varphi(x, y, \overset{n}{x})]^P)\big)$

$\leftrightarrow\;\; \forall x\, \big(Px \to (x \in y \to \varphi(x, y, \overset{n}{x}))\big)$ (nach Induktionsvoraussetzung)

$\leftrightarrow\;\; \forall x\, \big(x \in y \to \varphi(x, y, \overset{n}{x})\big)$ (da P transitiv).

Die Ausdrücke $x \subseteq y$ und $x = y \cup \{y\}$ gehen bei Elimination der definierten Symbole in Δ_0-Ausdrücke über, der Ausdruck $x = \emptyset$ in den Ausdruck $\neg\exists z\, z \in x$, und dieser sofort in den Δ_0-Ausdruck $\neg\exists z\, (z \in x \wedge z \in x)$. Diese Umformulierung schadet nicht.

1.6.3 Es ist $\mathbf{Inf}^u$ der Ausdruck

$$\begin{gathered}\exists x\, \big(x \in u \wedge \exists y\, (y \in u \wedge y \in x \wedge [y = \emptyset]^u\big) \wedge \\ \forall z\, \big(z \in u \wedge z \in x \;\to\; \exists w\, (w \in u \wedge w \in x \wedge [w = z \cup \{z\}]^u)\big).\end{gathered}$$

Nach Satz 1.5 ist er für transitive Mengen u äquivalent zu

$$\exists x\, \big(x \in u \wedge \exists y\, (y \in x \wedge y = \emptyset) \wedge \forall z\, \big(z \in x \to \exists\, w(w \in x \wedge w = z \cup \{z\})\big)\big).$$

Ist $\omega \in u$ (also auch $\omega \subseteq u$), erfüllt $x := \omega$ die letzte Aussage; es gilt dann $[\mathbf{Inf}]^u$. Damit gilt $\mathbf{Inf}^{V_\alpha}$ für $\alpha \geq \omega + \mathbf{1}$. Für $\alpha \leq \omega$ gilt es offensichtlich nicht. Da $\mathbf{V}$ ein transitives Prädikat ist, ergibt sich leicht die Gültigkeit von $\mathrm{Inf}^{\mathbf{V}}$.

1.6.4 *Zu* (i): Es sei $F(\overset{n}{x}) = y$ absolut für P, und es gelte $Px_1 \wedge \ldots \wedge Px_n$. Ist etwa $F(\overset{n}{x}) \in P$, erhält man die folgende Kette von Äquivalenzen:

$$\exists y\, F(\overset{n}{x}) = y \;\;\leftrightarrow\;\; \exists y\, \big(y \in P \wedge F(\overset{n}{x}) = y\big)$$

$$\leftrightarrow\;\; \exists y\, \big(y \in P \wedge [F(\overset{n}{x}) = y]^P\big) \;\;\leftrightarrow\;\; [\exists y\, F(\overset{n}{x}) = y]^P.$$

Zu (ii): Sei F eine n-stellige Operation ohne Parameter, nämlich $\emptyset$ (dann ist $n = 0$) oder $\{\,\}$ (dann ist $n = 1$) oder $\cap$ oder $\cup$ (dann ist $n = 2$). Der Ausdruck $F(\overset{n}{x}) = y$ ist Δ_0, also absolut für $\mathbf{V}$, und $\mathbf{V}$ ist abgeschlossen gegen F.

1.6.5 Wir zeigen zunächst, dass $\mathrm{Pot}(x) = y$ für alle V_α absolut ist. Seien dazu $x, y \in V_\alpha$. Dann ist wegen der Transitivität der V_α der Ausdruck $\mathrm{Pot}(x) = y$ äquivalent zu $\forall z\,(z \in V_\alpha \wedge z \in y \to [z \subseteq x]^{V_\alpha}) \wedge \forall z\,(z \subseteq x \to z \in y)$, also wegen $\mathrm{Pot}(x) \subseteq V_\alpha$ zu

$$\forall z\,(z \in V_\alpha \wedge z \in y \to [z \subseteq x]^{V_\alpha}) \wedge \forall z\,(z \in V_\alpha \wedge [z \subseteq x]^{V_\alpha} \to z \in y),$$

d. h. zu $[\mathrm{Pot}(x) = y]^{V_\alpha}$.

Pot ist für $V_\mathbf{0}$ absolut. Ist α eine Limeszahl, so gilt $\forall x\,(x \in V_\alpha \to \mathrm{Pot}(x) \in V_\alpha)$; wegen der Absolutheit von $\mathrm{Pot}(x) = y$ ist also (vgl. Aufgabe 1.6.4(i)) Pot ebenfalls absolut für V_α. Ist $\alpha = \beta + \mathbf{1}$, so ist $V_\beta \in V_\alpha$, aber $\mathrm{Pot}(V_\beta) \notin V_\alpha$; Pot ist nicht absolut für V_α. – Leicht sieht man, dass Pot absolut für $\mathbf{V}$ ist.

2.7.1 Durch metasprachliche Induktion über $m \geq 2$ zeigt man in Verallgemeinerung von Hilfssatz 2.5(i), dass der Durchschnitt von m club-Prädikaten wieder club ist. Das liefert sofort die Behauptung. Ein anderer Weg: Man wende **RP** an auf den Ausdruck $\big(\varphi_1(\overset{n}{x}) \wedge x_{n+1} = \mathbf{1}\big) \vee \ldots \vee \big(\varphi_m(\overset{n}{x}) \wedge x_{n+1} = \mathbf{m}\big)$ und stelle sicher, dass die reflektierende Stufe die Zahlen $\mathbf{1}, \ldots, \mathbf{m}$ enthält. Dann ergibt sich z. B. für $x_{n+1} := \mathbf{1}$, dass φ_1 gespiegelt wird. (Vgl. dazu den Beweis auf S. 173.)

2.7.2 Sei P club. Es reicht, für ein β mit $x \in V_\beta$ (und $P\beta$) zu zeigen:

$$\exists \delta_1 \exists \delta_2\,\big(\beta \leq \delta_1 \wedge \beta \leq \delta_2 \wedge P\delta_1 \wedge P\delta_2 \wedge \mathrm{cof}(\delta_1) = \aleph_\mathbf{0} \wedge \mathrm{cof}(\delta_2) = \aleph_\mathbf{1}\big).$$

Hierzu definiere man f auf $\aleph_\mathbf{1}$ mit Bildern in P rekursiv durch $f(\mathbf{0}) = \beta$ und

$$\forall \beta\,\big(\beta < \aleph_\mathbf{1} \;\to\; f(\beta + \mathbf{1}) = \text{ das kleinste } \gamma \text{ mit } P\gamma \wedge f(\beta) < \gamma\big),$$
$$\forall \delta\,\big(\delta < \aleph_\mathbf{1} \;\to\; f(\delta) = \bigcup \mathrm{Bild}(f{\restriction}\delta)\big).$$

Man setze $\delta_1 := f(\omega)$ und $\delta_2 := \bigcup \mathrm{Bild}(f)$.

2.7.3 (Zur Erinnerung: Wir argumentieren in **ZF**.) Es sei δ eine Limeszahl. Dann spiegelt V_δ die Axiome **Ex** (trivial), **Ext** (nach Aufgabe 1.6.2), $\cup$-**Ax** (ähnlich wie für $\mathbf{V}$ in Aufgabe 1.6.4(ii)), $\bigcup$-**Ax** (analog zu $\cup$-**Ax**), **Pot** (vgl. die Lösung zu Aufgabe 1.6.5), **Fund** (vgl. den Beweis von Satz VII.3.7 „$\leftarrow$“) und, sofern $\delta > \omega$, offenbar auch **Inf**.

Zur Spiegelung von **Aus**: Sei $\varphi(z, \overset{n}{x})$ gegeben, und seien $x, x_1, \ldots, x_n \in V_\delta$. Wir haben zu zeigen, dass

$$\exists y\,\big(y \in V_\delta \wedge \big[\forall z\,\big(z \in y \;\leftrightarrow\; z \in x \wedge \varphi(z, \overset{n}{x})\big)\big]^{V_\delta}\big),$$

d. h. wegen der Transitivität von V_δ, dass

$$\exists y\,\big(y \in V_\delta \wedge y = \big\{z \in x \mid [\varphi(z, \overset{n}{x})]^{V_\delta}\big\}\big).$$

Dies gilt wegen $\mathrm{Pot}(x) \subseteq V_\delta$.

Sei jetzt $\delta = \omega$. Zur Spiegelung von **Ers**: Sei $\varphi(x, y, \overset{n}{x})$ gegeben, und seien $x_1, \ldots, x_n$ Elemente von V_ω mit $[\forall x\, \exists^{=1} y\, \varphi(x, y, \overset{n}{x})]^{V_\omega}$, d. h. mit

$$\forall x\big(x \in V_\omega \;\rightarrow\; \exists^{=1} y\,\big(y \in V_\omega \wedge [\varphi(x, y, \overset{n}{x})]^{V_\omega}\big)\big).$$

Wir zeigen für $u \in V_\omega$:

$$\exists v\,\big(v \in V_\omega \wedge \forall y\,\big(y \in V_\omega \rightarrow \big(y \in v \leftrightarrow \exists x\,(x \in u \wedge x \in V_\omega \wedge [\varphi(x, y, \overset{n}{x})]^{V_\omega})\big)\big)\big).$$

Hierzu wenden wir **Ers** mit $\varphi^*(x, y, \overset{n}{x}) :=$

$$\big(x \in V_\omega \wedge y \in V_\omega \wedge [\varphi(x, y, \overset{n}{x})]^{V_\omega}\big) \vee \big(x \notin V_\omega \wedge y = \emptyset\big)$$

auf u an und definieren v als $v = \big\{y \mid \exists x\,\big(x \in u \wedge \varphi^*(x, y, \overset{n}{x})\big)\big\}$. Dabei beachten wir, dass v eine endliche Teilmenge von V_ω und daher ein Element von V_ω ist. Insgesamt spiegelt V_ω alle Axiome von **ZF** ohne **Inf**.

Da V_ω wohlordenbar ist (vgl. Aufgabe VII.3.8.4(ii)), besitzt jedes $x \in V_\omega$, das aus nicht leeren zueinander disjunkten Mengen besteht, eine Auswahlmenge. Diese liegt in V_ω. Die Beziehung, Auswahlmenge für eine Menge zu sein, ist absolut für V_ω. Also spiegelt V_ω das Auswahlaxiom. Für $V_{\omega\oplus\omega}$ gilt das Gleiche, wenn man statt in **ZF** in **ZFC** argumentiert.

2.7.4 *Zu* (ii): Sei $\emptyset \neq y \subseteq \mathbb{D}$ und $|y| \leq \aleph_{\mathbf{0}}$. Da man (mit **AC**) für die $u \in y$ $\aleph_{\mathbf{1}}$-club-Teilmengen auswählen kann, können wir annehmen, dass y aus $\aleph_{\mathbf{1}}$-club-Mengen besteht. Wir zeigen, dass $\bigcap y$ unbeschränkt (in $(\aleph_{\mathbf{1}}, \in_{\aleph_{\mathbf{1}}})$) ist. Sei dazu $h : \omega \rightarrow y$ so, dass es für alle $u \in y$ unendlich viele j gibt mit $h(j) = u$. Zu gegebenem $\alpha \in \aleph_{\mathbf{1}}$ definieren wir f auf ω rekursiv durch $f(\mathbf{0}) = \alpha$ und

$$\forall i\, f(i + \mathbf{1}) = \text{ das kleinste } \gamma \text{ mit } \gamma \in h(i) \text{ und } \gamma > f(i).$$

Dann ist $\alpha \leq \bigcup \mathrm{Bild}(f)$ und $\bigcup \mathrm{Bild}(f) \in \bigcap y$.

Zu (iii): Wir können wieder annehmen, dass die u_α $\aleph_{\mathbf{1}}$-club-Mengen sind. Wir zeigen, dass $u := \{\beta < \aleph_{\mathbf{1}} \mid \forall \alpha\,(\alpha < \beta \rightarrow \beta \in u_\alpha)\}$ $\aleph_{\mathbf{1}}$-club ist. Um die Unbeschränktheit von u nachzuweisen, definieren wir zu gegebenem $\alpha_0 < \aleph_{\mathbf{1}}$ die Funktion f auf ω rekursiv durch $f(\mathbf{0}) = \alpha_0$ und

$$\forall i\, f(i + \mathbf{1}) = \text{ das kleinste } \beta \text{ mit } \beta > f(i) \text{ und } \beta \in \bigcap\{u_\alpha \mid \alpha < f(i)\}.$$

Es sei $\delta := \bigcup \mathrm{Bild}(f)$. Dann ist $\delta > \alpha_0$. Ferner ist $\delta \in u$. Ist nämlich $\alpha < \delta$, so ist $f(i{+}\mathbf{1}) \in u_\alpha$ für alle i mit $f(i) > \alpha$, also ist $\delta \in u_\alpha$. – Die Abgeschlossenheit von u zeigt man ähnlich.

2.7.5 *Zu* (iii): Sei u $\aleph_\mathbf{1}$-club und $u \cap y = \emptyset$. Gäbe es eine $\aleph_\mathbf{1}$-club-Menge v mit $v \cap (x \setminus y) = \emptyset$, so wäre $(u \cap v) \cap (x \setminus y) = \emptyset$. Wegen $(u \cap v) \cap x \neq \emptyset$ wäre $(u \cap v) \cap y \neq \emptyset$, ein Widerspruch.

Zu (v): Seien (mit **AC**) die u_i $\aleph_\mathbf{1}$-club-Mengen mit $x_i \cap u_i = \emptyset$ für $i \in \omega$. Dann ist $u := \bigcap\{u_i \mid i \in \omega\}$ $\aleph_\mathbf{1}$-club und $u \cap \bigcup\{x_i \mid i \in \omega\} = \emptyset$.

2.7.6 Wir nehmen an, f sei auf keiner $\aleph_\mathbf{1}$-stationären Teilmenge von x konstant. Dann ist nach Teil (v) der vorangehenden Aufgabe für $\alpha < \aleph_\mathbf{1}$ die Menge $\{\gamma \in x \mid f(\gamma) \leq \alpha\}$ nicht $\aleph_\mathbf{1}$-stationär; es gibt also eine Familie $(u_\alpha)_{\alpha < \aleph_\mathbf{1}}$ von $\aleph_\mathbf{1}$-club-Mengen u_α mit $u_\alpha \cap \{\gamma \in x \mid f(\gamma) \leq \alpha\} = \emptyset$, d. h. mit der Eigenschaft $\forall\gamma\,(\gamma \in x \cap u_\alpha \to f(\gamma) > \alpha)$. Es sei v der diagonale Durchschnitt der u_α, d. h. $v = \{\beta < \aleph_\mathbf{1} \mid \forall\alpha\,(\alpha < \beta \to \beta \in u_\alpha)\}$. Wie wir bei Aufgabe 2.7.4(iii) gezeigt haben, ist v $\aleph_\mathbf{1}$-club. Sei $\gamma \in x \cap v$. Dann gilt $\forall\alpha\,(\alpha < \gamma \to \gamma \in u_\alpha)$ und daher $\forall\alpha\,(\alpha < \gamma \to f(\gamma) > \alpha)$, also $f(\gamma) \geq \gamma$, ein Widerspruch.

2.7.7 Da der Durchschnitt einer $\aleph_\mathbf{1}$-stationären mit einer $\aleph_\mathbf{1}$-club-Menge $\aleph_\mathbf{1}$-stationär und die Menge der abzählbaren Limeszahlen $\aleph_\mathbf{1}$-club ist, ist mit x auch $x \cap \{\delta \mid \delta < \aleph_\mathbf{1}\}$ $\aleph_\mathbf{1}$-stationär. Wir können also annehmen, dass x aus Limeszahlen besteht. Für $\alpha \in x$ sei $g_\alpha : \omega \to \alpha$ unbeschränkt in $(\alpha, \in_\alpha)$ und echt monoton wachsend, und $f : x \times \omega \to \aleph_\mathbf{1}$ sei definiert durch $f(\alpha, i) := g_\alpha(i)$ für $\alpha \in x$ und $i \in \omega$.

Zu (i): Sei $\beta < \aleph_\mathbf{1}$. Wären die Mengen $\{\alpha \in x \mid f(\alpha, i) > \beta\}$ für $i \in \omega$ alle nicht $\aleph_\mathbf{1}$-stationär, so wäre auch ihre Vereinigung $\{\alpha \in x \mid f(\alpha, i) > \beta$ für ein $i \in \omega\}$ nicht $\aleph_\mathbf{1}$-stationär (vgl. Aufgabe 2.7.4(ii)) und daher disjunkt zu einer $\aleph_\mathbf{1}$-club-Menge, etwa zu der Menge u. Damit wäre $f(\alpha, i) \leq \beta$ für alle $\alpha \in u \cap x$ und alle i, also $u \cap x \subseteq \beta \cup \{\beta\}$, ein Widerspruch. – Teil (ii) ergibt sich unmittelbar aus (i).

Seien jetzt i_0 und y gemäß (ii) gewählt. Die Funktion $h : x \to \aleph_\mathbf{1}$ sei definiert durch $h(\alpha) = f(\alpha, i_0)$. Für alle $\beta \in y$ ist dann die Menge $x_\beta := \{\alpha \in x \mid h(\alpha) > \beta\}$ $\aleph_\mathbf{1}$-stationär. Wir zeigen, dass es unbeschränkt viele (und daher $\aleph_\mathbf{1}$ viele) $\gamma < \aleph_\mathbf{1}$ gibt, für die $h^{-1}[\gamma] := \{\alpha \in x \mid h(\alpha) = \gamma\}$ $\aleph_\mathbf{1}$-stationär ist. Dann sind wir fertig. Sei dazu $\beta_0 \in y$. Nach Definition von h ist $h{\restriction}x_{\beta_0}$ regressiv. Nach dem Satz von Fodor gibt es daher eine $\aleph_\mathbf{1}$-stationäre Teilmenge v von x_{β_0} und ein $\gamma_0 < \aleph_\mathbf{1}$ mit $\mathrm{Bild}(h{\restriction}v) = \{\gamma_0\}$, also mit $\gamma_0 > \beta_0$ und mit $\aleph_\mathbf{1}$-stationärem $h^{-1}[\gamma_0]$. Man beachte abschließend, dass y unbeschränkt in $\aleph_\mathbf{1}$ ist.

2.7.8 Der Beweis kann vollständig dem für **RP** folgen. Man beachte dabei, dass wegen $\forall x\,\mathbf{V}x$ stets $\varphi(\overset{n}{x}) \leftrightarrow \varphi(\overset{n}{x})^{\mathbf{V}}$ gilt.

2.7.9 Sei **ZF** äquivalent zu φ_0. Nach **RP** gilt dann $\exists\alpha\,(\varphi_0 \leftrightarrow \varphi_0^{V_\alpha})$. Sei β das minimale α mit dieser Eigenschaft. Dann ist $\beta \neq \emptyset$ und

$$\varphi_0^{V_\beta} \wedge \forall\alpha\,\big(\alpha < \beta \to \neg\varphi_0^{V_\alpha}\big).$$

Da $V_\beta \neq \emptyset$, haben wir ψ^{V_β} für jedes in **ZF**, also aus φ_0 beweisbare parameterfreie ψ (vgl. die Argumentation zu Satz XI.1.2). Insbesondere gilt daher

$$\left[\exists\alpha\, \varphi_0^{V_\alpha}\right]^{V_\beta}, \text{ d. h. } \exists x \exists y\, \big(x, y \in V_\beta \wedge [\mathrm{Oz}\, x]^{V_\beta} \wedge [y = V_x]^{V_\beta} \wedge [\varphi_0^y]^{V_\beta}\big).$$

Aufgrund von **Fund** haben wir $\forall x\, (\mathrm{Oz}\ x \leftrightarrow \text{ transitiv}\, x \wedge \text{konnex}\, x)$. Mit Aufgabe 1.6.2 und wegen $\forall\alpha\, (\alpha \in V_\beta \leftrightarrow \alpha < \beta)$ gewinnen wir

$$\exists\alpha\exists y\, \big(\alpha < \beta \wedge y \in V_\beta \wedge [y = V_\alpha]^{V_\beta} \wedge [\varphi_0^y]^{V_\beta}\big).$$

Wegen $[\forall x \exists y\, y = x \cup \{x\}]^{V_\beta}$ ist β eine Limeszahl. Gemäß der Lösung von Aufgabe 1.6.5 ist daher Pot absolut für V_β. Die Definition von V und die Absolutheit der darin vorkommenden Operationen und Prädikate für V_β zeigt, dass $y = V_z$ absolut für V_β ist. Beachten wir noch Aufgabe 1.6.1 und $V_\alpha \subseteq V_\beta$, gelangen wir zu $\exists\alpha\, (\alpha < \beta \wedge \varphi_0^{V_\alpha})$, ein Widerspruch zur Minimalität von β.

3.9.1 Man verfahre, wie im zweiten Lösungsvorschlag für Aufgabe 2.7.1 angedeutet, mit $\{x, \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{m}\}$ anstelle von x und benutze, dass die Stufen transitiv sind.

3.9.2 Da **RP′** in **ZF** beweisbar ist, reicht es, in **ZF** ohne **Ers** unter Benutzung von **RP′** die Ersetzungsaxiome zu beweisen. Der Einfachheit halber betrachten wir ein parameterfreies Beispiel. Sei $\varphi(x, y)$ gegeben, und gelte $\forall x \exists^{=1} y\, \varphi(x, y)$. Wir zeigen (das reicht wegen **Aus**):

$$\forall u \exists v \forall x\, \big(x \in u \rightarrow \exists y\, \big(y \in v \wedge \varphi(x, y)\big)\big).$$

Der Beweis kann wie der Beweis von (2) auf Seite 172 geführt werden, wobei man zu vorgegebenem u die Menge v – sie übernimmt die Rolle von s – nach **RP′** so wählt, dass $u \cup \{u\} \subseteq v$.

3.9.3 Der Ausdruck $\psi(\overset{n}{x})$ entstehe aus $\varphi(\overset{n}{x})$, indem man in $\varphi(\overset{n}{x})$ alle Teilausdrücke der Gestalt Σw durch $\exists z\, (\mathrm{Oz}\, z \wedge w = V_z)$ ersetzt. Mit Satz 3.7 können wir jetzt $\varphi(\overset{n}{x})$ dadurch spiegeln, dass wir die Σ-freien Ausdrücke $\psi(\overset{n}{x})$ und $\exists z (\mathrm{Oz}\, z \wedge\ y = V_z)$ simultan spiegeln.

Aufgaben zu Kapitel XI

1.5.1 Die Behauptung ergibt sich mit Satz 1.2. Denn nach Aufgabe X.2.7.3 ist die Stufe V_ω ein inneres Modell von **ZF** ohne **Inf**, und da das Prädikat, eine induktive Menge zu sein, absolut für V_ω ist (vgl. Satz X.1.5) und V_ω keine induktive Menge enthalten kann, gilt auch $[\neg\mathbf{Inf}]^{V_\omega}$ für V_ω.

1.5.2 *Zu* (i): Man orientiere sich am Beweis von Satz 1.3 (ohne **Ers**).

Zu (ii): Nach Teil (i) (oder nach Aufgabe X.2.7.3) gilt $\mathbf{ZF} \vdash \varphi^{V_{\omega\oplus\omega}}$ für alle $\mathbf{Z}$-Axiome φ. Ferner gilt

$$\mathbf{ZF} \vdash \big[\forall z\,(\text{Limeszahl}\, z \to z = \omega)\big]^{V_{\omega\oplus\omega}}.$$

Man beachte hierzu, dass das Prädikat, eine Ordinalzahl zu sein (d. h. transitiv und konnex zu sein), das Prädikat, eine Limeszahl zu sein, und das Prädikat, gleich ω zu sein, bzgl. $\mathbf{ZF}$ absolut für $V_{\omega\oplus\omega}$ sind. Nach Satz 1.2 ist daher mit $\mathbf{ZF}$ auch $\mathbf{Z} + \forall\delta\, \delta = \omega$ widerspruchsfrei.

Zu (iii): Wir brauchen – wieder nach Satz 1.2 und mit der Lösung von Aufgabe X.1.6.5 – nur zu zeigen, dass $V_{\omega\oplus\omega}$ keine Menge x enthält mit $\omega \in x$ und mit $\forall z\,(z \in x \to \text{Pot}(z) \in x)$. Sei dazu x eine solche Menge. Wir definieren die Funktion f auf ω rekursiv durch $f(\mathbf{0}) = \omega$ und $\forall i\, f(i + \mathbf{1}) = \text{Pot}(f(i))$. Dann ist zunächst $\text{Bild}(f) \subseteq x$. Für $i \in \omega$ ist $f(i) \in \text{Pot}(f(i))$ und daher $\text{Rg}\,(f(i + \mathbf{1})) \geq \text{Rg}\,(f(i)) + \mathbf{1}$. Da $\text{Rg}\,(\omega) = \text{Rg}\,(f(\mathbf{0})) = \omega$, erhalten wir insgesamt, dass $\text{Rg}\,(x) \geq \bigcup\{\text{Rg}(f(i)) \mid i \in \omega\} \geq \omega \oplus \omega$ und daher $x \notin V_{\omega\oplus\omega}$.

Liste der Axiome und Axiomensysteme

Ex (Existenzaxiom):
$\exists x\, x = x$

Ext (Extensionalitätsaxiom):
$\forall x \forall y \,\big(\forall z\,(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y\big)$

Aus (Schema der Aussonderungsaxiome):
Zu jedem Ausdruck der Gestalt $\varphi(z, \overset{n}{x})$ das Axiom
$\forall \overset{n}{x}\, \forall x\, \exists y\, \forall z\, \big(z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge \varphi(z, \overset{n}{x})\big)$

$\cup$-Ax (kleines Vereinigungsmengenaxiom):
$\forall x\, \forall y\, \exists w\, \forall z\, (z \in w \leftrightarrow (z \in x \vee z \in y))$

$\bigcup$-Ax (großes Vereinigungsmengenaxiom):
$\forall X\, \exists y\, \forall z\, \big(z \in y \leftrightarrow \exists x\, (x \in X \wedge z \in x)\big)$

Pot (Potenzmengenaxiom):
$\forall x\, \exists y\, \forall z\, (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$

Inf (Unendlichkeitsaxiom):
$\exists x\, \big(\emptyset \in x \wedge \forall z\, (z \in x \rightarrow z \cup \{z\} \in x)\big)$

Ers (Schema der Ersetzungsaxiome):
Zu jedem Ausdruck der Gestalt $\varphi(x, y, \overset{n}{x})$ das Axiom
$\forall \overset{n}{x}\, \big(\forall x\, \exists^{=1} y\, \varphi(x, y, \overset{n}{x}) \rightarrow \forall u\, \exists v\, \forall y\, \big(y \in v \leftrightarrow \exists x\, (x \in u \wedge \varphi(x, y, \overset{n}{x}))\big)\big)$

Fund (Fundierungsaxiom):
$\forall X\, \big(X \neq \emptyset \rightarrow \exists x\, (x \in X \wedge x \cap X = \emptyset)\big)$

H.-D. Ebbinghaus, *Einführung in die Mengenlehre*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-63866-8

AC (Auswahlaxiom):

$$\forall X \left(\forall x \forall y \left(x \in X \wedge y \in X \to x \neq \emptyset \wedge (x = y \vee x \cap y = \emptyset)\right) \right.$$
$$\left. \to\ \exists Y\, \forall x \left(x \in X \to \exists z\, Y \cap x = \{z\}\right)\right)$$

Das Zermelo-Fraenkelsche Axiomensystem:

ZF $:=$ **Ex** $+$ **Ext** $+$ **Aus** $+ \cup$-**Ax** $+ \bigcup$-**Ax** $+$ **Pot** $+$ **Inf** $+$ **Ers** $+$ **Fund**

ZFC $:=$ **ZF** $+$ **AC**

ZF^0 $:=$ **ZF** ohne **Fund**

Literaturverzeichnis

Barwise, Jon

1975 *Admissible Sets and Structures.* Springer.

Bolzano, Bernard

1851 *Paradoxien des Unendlichen.* C. H. Reclam. Nachdruck Felix Meiner 2012.

Bourbaki, Nicolas

1939 *Eléments de mathématique. Première partie: Les structures fondamentales de l'analyse. Livre I. Théorie des ensembles.* Hermann.

Cantor, Georg

1878 *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre.* Journal für die Reine und Angewandte Mathematik **84**, Seiten 242–258.

1895 *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* (*Zweiter Artikel*). Mathematische Annalen **46**, Seiten 481–512.

1897 *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre.* Mathematische Annalen **49**, Seiten 207–246.

1932 *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts.* Herausgegeben von E. Zermelo. Springer.

Chang, Chen Chung, und H. Jerome Keisler

1990 *Model Theory,* 3. Auflage. Elsevier.

Dedekind, Richard

1872 *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Vieweg, ^{7}1965.

1888 *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Vieweg, ^{7}1965.

Devlin, Keith J.

1984 Constructibility. Springer.

H.-D. Ebbinghaus, *Einführung in die Mengenlehre*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-63866-8

1993 *The Joy of Sets. Fundamentals of Contemporary Set Theory.* Springer.

Drake, Frank R.

1974 *Set Theory. An Introduction to Large Cardinals.* North-Holland Publishing Company.

Ebbinghaus, Heinz-Dieter, Hans Hermes et al.

1992 *Zahlen*, 3. Auflage. Springer.

Ebbinghaus, Heinz-Dieter, Jörg Flum und Wolfgang Thomas

2018 *Einführung in die mathematische Logik*, 6. Auflage. Springer Spektrum.

Felgner, Ulrich

2020 *Philosophie der Mathematik in der Antike und in der Neuzeit.* Birkhäuser.

Fenstad, Jens Erik

1971 *The Axiom of Determinateness.* In: Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium. North-Holland Publishing Company, Seiten 41–61.

Foreman, Matthew, und Akihiro Kanamori (Herausgeber)

2010 *Handbook of Set Theory,* drei Bände. Springer.

Fraenkel, Abraham A., Yoshua Bar-Hillel and Azriel Levy

1973 *Foundations of Set Theory*, 2. Auflage. North-Holland Publishing Company.

Frege, Gottlob

1893 *Grundgesetze der Arithmetik*, Band I. Verlag Hermann Pohle. Nachdruck Georg Olms 1962.

Hallett, Michael

2010 *Introductory note to Zermelo 1904 and Zermelo 1908a.* In *Zermelo 2010*, Seiten 80–115.

Heyting, Arend

1956 *Intuitionism. An Introduction.* North-Holland Publishing Company.

Jech, Thomas J.

1973 *The Axiom of Choice.* North-Holland Publishing Company; Nachdruck Dover 2008.

1992 *Singular Cardinal Problem: Shelah's Theorem on* $\mathbf{2}^{\aleph_\omega}$. Bulletin of the London Mathematical Society **24**, Seiten 127–139.

Kanamori, Akihiro

2003 *The Higher Infinite*, 2. Auflage. Springer.

Kunen, Kenneth

1980 *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs.* North-Holland Publishing Company.

2011 *Set Theory.* College Publications. Revised edition 2013.

Maddy, Penelope

1990 *Realism in Mathematics.* Clarendon Press.

Moore, Gregory H.

1982 *Zermelo's Axiom of Choice. Its Origins, Development, and Influence.* Springer.

von Neumann, John

1929 *Über eine Widerspruchsfreiheitsfrage der axiomatischen Mengenlehre.* Journal für die Reine und Angewandte Mathematik **160**, Seiten 227–241.

Purkert, Walter, und Hans Joachim Ilgauds

1987 *Georg Cantor 1845–1918.* Birkhäuser Verlag.

Richter, Michael M.

1978 *Logikkalküle.* Teubner.

Scott, Dana

1974 *Axiomatizing Set Theory.* In: Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Volume XIII, Part II: *Axiomatic Set Theory.* American Mathematical Society, Providence, R. I., Seiten 207–214.

Skolem, Thoralf

1923 *Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre.* In: Wissenschaftliche Vorträge gehalten auf dem fünften Kongress der skandinavischen Mathematiker in Helsingfors vom 4. bis 7. Juli 1922. Akademiska Bokhandeln, Seiten 217–232.

Tent, Katrin, und Martin Ziegler

2012 *A Course in Model Theory.* Cambridge University Press.

Thiel, Christian

1995 *Philosophie und Mathematik. Eine Einführung in ihre Wechselwirkungen und in die Philosophie der Mathematik.* Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Weyl, Hermann

1921 *Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik.* Mathematische Zeitschrift **10**, Seiten 39–70.

Whitehead, Alfred North, und Bertrand Russell

1910ff *Principia Mathematica,* Vol. I: 1910, Vol. 2: 1912, Vol. III: 1913. Cambridge University Press, ^{2}1925–1927.

Zermelo, Ernst

1904 *Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann.* Mathematische Annalen **59**, Seiten 514–516.

1908a *Neuer Beweis für die Möglichkeit der Wohlordnung.* Mathematische Annalen **65**, Seiten 107–128.

1908b *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I.* Mathematische Annalen **65**, Seiten 261–281.

1930 *Über Grenzzahlen und Mengenbereiche. Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre.* Fundamenta Mathematicae **16** (1930), Seiten 29–47.

2010 Collected Works/Gesammelte Werke, Volume I/Band I: *Set Theory, Miscellanea/Mengenlehre, Varia.* Herausgegeben von H.-D. Ebbinghaus und A. Kanamori. Springer.

Symbolverzeichnis

H.-D. Ebbinghaus, *Einführung in die Mengenlehre*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-63866-8

Namen- und Sachverzeichnis

H.-D. Ebbinghaus, *Einführung in die Mengenlehre*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-63866-8