DHBW Mannheim
Informatik

Mannheim, 23.11.2022
Mathematik II/1

Lösungen zu Übungsblatt 7

Aufgabe 1.

a) Bestimmen Sie die Lösung von $(x^3+6x-6)\cdot y' = (x^2+2)\cdot y^2 \quad$ mit $y(1) = 3$.

Lösung:

Diese Differentialgleichung kann umgeformt werden zu

$$y' = \frac{x^2+2}{x^3+6x+6} \cdot y^2$$

Damit handelt es sich um eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen, wobei

$$h(x) = \frac{x^2+2}{x^3+6x-6}, \qquad g(y) = y^2$$

Zur Lösung der Differentialgleichung benötigen wir eine Stammfunktion von h. Dazu benutzen wir die Substitutionsregel mit $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$ und mit $u(x) = x^3 + 6x - 6$ (mit $u'(x) = 3x^2 + 6$). Dann ist

$$h(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^3+6x-6} \cdot (3x^2+6) = \frac{1}{3} \cdot f(u(x)) \cdot u'(x)$$

Da $F(x) = \ln(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist, erhalten wir, dass

$$\frac{1}{3} \cdot F(u(x)) = \frac{1}{3} \cdot \ln(x^3+6x-6)$$

eine Stammfunktion von $h(x)$ ist.

Wir machen den Ansatz

$$\begin{aligned} H(x) &= \int_1^x \tfrac{t^2+2}{t^3+6t-6}\,dt &&= \left[\tfrac{1}{3}\cdot\ln(t^3+6t-6)\right]_1^x &&= \tfrac{1}{3}\cdot\ln(x^3+6x-6) \\ G(y) &= \int_3^y \tfrac{1}{t^2}\,dt &&= \left[\tfrac{-1}{t}\right]_3^y &&= \tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{y} \end{aligned}$$

Wir erhalten die Gleichung

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{y(x)} = \frac{1}{3} \cdot \ln(x^3+6x-6)$$

also
$$\frac{1}{y(x)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \ln(x^3 + 6x - 6) = \frac{1 - \ln(x^3 + 6x - 6)}{3}$$
und damit also
$$y(x) = \frac{3}{1 - \ln(x^3 + 6x - 6)}$$
Beachten Sie, dass diese Lösung nur auf dem Intervall $]a, b[$ definiert ist, wobei a die Lösung der Gleichung $x^3 + 6x - 6 = 0$ und b die Lösung der Gleichung $x^3 + 6x - 6 = e$ ist.

b) Bestimmen Sie die Lösung von $x^2 \cdot y' = y^2 + xy - 4x^2$ mit $y(2) = 6$.

Lösung:

Diese Differentialgleichung schreibt sich auch als
$$y' = \frac{y^2}{x^2} + \cdot \frac{y}{x} - 4$$
Es handelt sich also um eine Differentialgleichung vom Typ $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, wobei
$$f(u) = u^2 + u - 4$$
Daher führen wir die Substitution $u = \frac{y}{x}$ und erhalten die Differentialgleichung
$$u' = \frac{1}{x} \cdot (f(u) - u) = \frac{u^2 - 4}{x}$$
mit Anfangsbedingung
$$u(2) = \frac{6}{2} = 3$$
Dabei handelt sich um eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen. Partialbruchzerlegung führt zu
$$\frac{1}{u^2 - 4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{u - 2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{u + 2}$$

Daher berechnen wir

$$\begin{aligned}
G(u) &= \int_3^u \tfrac{1}{t^2-4}\,dt \\
&= \tfrac{1}{4}\cdot\int_3^u \tfrac{1}{t-2}\,dt - \tfrac{1}{4}\cdot\int_3^u \tfrac{1}{t+2}\,dt \\
&= \tfrac{1}{4}\cdot[\ln(t-2)-\ln(t+2)]_3^u \\
&= \tfrac{1}{4}\cdot((\ln(u-2)-\ln(u+2))-(\ln(1)-\ln(5))) \\
&= \tfrac{1}{4}\cdot\ln\left(\tfrac{u-2}{u+2}\right)+\tfrac{1}{4}\cdot\ln(5) \\
&= \tfrac{1}{4}\cdot\ln\left(5\cdot\tfrac{u-2}{u+2}\right) \\
&= \ln\left(\sqrt[4]{5\cdot\tfrac{u-2}{u+2}}\right) \\
H(x) &= \int_1^x \tfrac{1}{t}\,dt \\
&= \ln(x)
\end{aligned}$$

Damit haben wir zunächst die Gleichung

$$\ln\left(\sqrt[4]{5\cdot\frac{u-2}{u+2}}\right)=\ln(x)$$

zu lösen und erhalten durch Anwenden der Exponentialfunktion

$$\sqrt[4]{5\cdot\frac{u-2}{u+2}}=x$$

und durch potenzieren mit 4:

$$5\cdot\frac{u-2}{u+2}=x^4$$

bzw.

$$5\cdot(u-2)=x^4\cdot(u+2)$$

also

$$5u-x^4\cdot u=2x^4+10$$

mit der Lösung

$$u(x)=\frac{10+2x^4}{5-x^4}$$

Damit hat die Ausgangsgleichung die Lösung

$$y(x)=x\cdot u(x)=\frac{10x+2x^5}{5-x^4}$$

Aufgabe 2.

a) Bestimmen Sie die Lösung von $(x^2+1)\cdot y' = (2x+1)\cdot y \quad$ mit $y(-1)=1$.

Lösung:

Diese Differentialgleichung schreibt sich auch als

$$y' = \frac{2x+1}{x^2+1}\cdot y$$

Hier handelt es sich um eine homogene lineare Differentialgleichung (mit nicht–konstanten Koeffizienten). Wir bestimmen zunächst

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \int_{-1}^{x} \tfrac{2t+1}{t^2+1}\,dt \\
&= \int_{-1}^{x} \tfrac{2t}{t^2+1}\,dt + \int_{-1}^{x} \tfrac{1}{t^2+1}\,dt \\
&= \left[\ln(t^2+1)\right]_{-1}^{x} + \left[\arctan(t)\right]_{-1}^{x} \\
&= \ln(x^2+1) + \arctan(x) - \ln(2) - \arctan(-1)
\end{aligned}$$

Die Lösungsformel für homogene lineare Differentialgleichungen ergibt

$$y(x) = e^{\varphi(x)} = c\cdot(x^2+1)\cdot e^{\arctan(x)}$$

wobei

$$c = e^{-\ln(2)-\arctan(-1)} = \frac{1}{2}\cdot e^{-\arctan(-1)}$$

b) Bestimmen Sie die Lösung von $y' - \frac{(x-2)\cdot y}{x^2-4x+5} = x-2 \quad$ mit $y(2)=1$.

Lösung:

Wir schreiben die Differentialgleichung als

$$y' = \frac{(x-2)\cdot y}{x^2-4x+5} + x - 2$$

Es handelt sich um eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung, die wir nach dem Lösungsverfahren aus der Vorlesung behandeln. Wir bestimmen zunächst

$$\begin{aligned}
\int_{2}^{x} \tfrac{t-2}{t^2-4t+5}\,dt &= \tfrac{1}{2}\cdot\int_{2}^{x} \tfrac{2t-4}{t^2-4t+5}\,dt \\
&= \left[\tfrac{1}{2}\cdot\ln(t^2-4t+5)\right]_{2}^{x} \\
&= \tfrac{1}{2}\cdot\ln(x^2-4x+5) - \tfrac{1}{2}\cdot\ln(1) \\
&= \ln\left(\sqrt{x^2-4x+5}\right)
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \exp\left(\int\limits_2^x \tfrac{t-2}{t^2-4t+5}\,dt\right)\\ &= \sqrt{x^2-4x+5})\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}y(x) &= \varphi(x)\cdot\left(1+\int\limits_2^x \tfrac{t-2}{\varphi(t)}\,dt\right)\\ &= \sqrt{x^2-4x+5}\cdot\left(1+\int\limits_2^x \tfrac{(t-2)}{\sqrt{t^2-4t+5}}\,dt\right)\\ &= \sqrt{x^2-4x+5}\cdot\left(1+\left[\sqrt{t^2-4t+5}\right]_2^x\right)\\ &= \sqrt{x^2-4x+5}\cdot\left(1+\sqrt{x^2-4x+5}-\sqrt{1}\right)\\ &= x^2-4x+5\end{aligned}$$