Нормы интерполяционных проекторв и экстремальные симплексы

А. В. Лютенков

ЯрГУ им. П.Г. Демидова
Научный руководитель доцент кафедры математического анализа ЯрГУ им. П. Г. Демидова, кандидат физико-математических наук А.Ю. Ухалов.

16 июня 2018

Объект исследования ицель работы

Объектом исследования является задача о построении минимального проектора (проектора, имеющего минимальную норму) при интерполяции непрерывной на кубе функции с помощью полиномов n переменных степени не выше единицы.

Цель работы — разработать компьютерную программу для численной минимизации функции многих переменных и применить ее для решения задачи о минимальном проекторе.

Положим $Q_n := [0..1]^n$, где $n \in \mathbb{R}^n$, Q_n — n-мерный куб, множество вершин куба будем обозначать как $ver(Q_n)$.

$\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ — совокупность многочленов n переменных степени $\leqslant 1$.

Симплекс(размерности n) — это выпуклая оболочка $n+1$ точки аффинного пространства, которые предполагаются аффинно независимыми (то есть не лежат в подпространстве размерности $n-1$). Эти точки называются вершинами симплекса.

Пусть вершины невырожденного симплекса $S \subset \mathbb{R}^n$
$x^{(j)} = \left(x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}\right), \quad 1 \le j \le n+1.$
Матрица для сипмлекса S имеет вид:

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \ldots & x_n^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & \ldots & x_n^{(2)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n+1)} & \ldots & x_n^{(n+1)} & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Скажем, что набор точек $x^{(j)}$ — допустим для интерполяции многочленами из $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$. Это условие эквивалентно тому, что матрица A является невырожденной.

$\Delta := det(A)$, определитель, который получается из Δ заменой j-й строки на строку $(x_1, \ldots, x_n, 1)$

Многочленый $\lambda_j(x) := \Delta_j(x)/\Delta$ из $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ называются базисными многочленами Лагранжа симплекса S и обладают свойством $\lambda_j(x^k) = \delta_j^k$, где δ_j^k — символ Кронакера.

$\lambda_j = l_{1j}x_1 + \cdots + l_{nj}x_n + l_{n+1j}$, коэффициентны l_{ij} составляют столбцы матрицы

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \ldots & l_{1,j} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \ldots & l_{n,j} & \ldots \\ \ldots & l_{n+1,j} & \ldots \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Так как $\lambda_j(x^k) = \delta_j^k$ любой многочлен $p \in \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет равенству

$$p(x) = \sum_{j=1}^{n+1} p(x^{(j)})\lambda_j(x). \tag{3}$$

Так как $det(A) \neq 0$, то для любой $f \in C(Q_n)$, где $C(Q_n)$ — совокупность $f : Q_n \to \mathbb{R}$ найдется единственный многочлен $p \in \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяющий условиям:

$$p(x^{(j)}) = f(x^{(j)}). \tag{4}$$

Интерполяционный проектор

Интерполяционный проектор по системе узлов $x^{(j)}$

$P : C(Q_n) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$

Интерполяционный проектор по системе узлов $x^{(j)}$ определяется с помощью равенств:

$$Pf(x^{(j)}) = f_j := f(x^{(j)}), j = 1, \ldots, n+1. \tag{5}$$

Из (5) следует, что данный оператор является линейным и справедлив следующий аналог интерполяционной формулы Лагранжа:

$$Pf(x^{(j)}) = p(x) = \sum_{j=1}^{n+1} f_j \lambda_j(x). \tag{6}$$

Норма интерполяционного проектора

Обозначим $||P||$ норму оператора P. Эта величина зависит от от узлов $x^{(j)}$.

Для любого интерполяционного проектора $P : C(Q_n) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ и симплекса S с вершинами в его узлах имеет место равенство

$$||P|| = \max_{x \in ver(Q_n)} \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)| \tag{7}$$

Минимальная норма проектора

Обозначим через θ_n минимальну норму проектора, при условии, что все узлы принадлежат кубу Q_n:

$$\theta_n := \min_{x^{(j)} \in Q_n} ||P|| \tag{8}$$

Интерполяционный проектор P^* с нормой $||P^*|| = \theta_n$ назовем минимальным.

Оценки минимальной нормы проектора

$$\frac{1}{4}\sqrt{n} < \theta_n < 3\sqrt{n},$$

$$3 - \frac{4}{n+1} \leqslant \theta_n.$$

Примеры оценок θ_n

n	θ_n
1	$\theta_n = 1$
2	$\theta_n = 1.89\dots$
3	$\theta_n = 2$
4	$2.2\dots \leqslant \theta_n \leqslant 2.33\dots$
5	$2.33\dots \leqslant \theta_n \leqslant 2.6\dots$
6	$2.42\dots \leqslant \theta_n \leqslant 3$
7	$\theta_n = 2.5$

Компьютерная программа для расчета θ_n

Задача об отыскании минимальной нормы проектора сводится к задаче отыскания минимума функции многих переменных. Норма проектора вычисляется по формуле(7), зная это, зададим целевую функцию для минимизации:

$$F(A) = \max_{x \in ver(Q_n)} \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)| \tag{9}$$

Где A — марица, которая имеет вид (1).

Программа реализована на языке программировани C++ с использованием библиотек Dlib, Boost, Eigen, которые предоставляют необходимый функционал для оптимального решения поставленной задачи.

Так как для вычисления нормы проектора необходим перебор по вершинам куба, то асимптотика алгоритма отыскания θ_n будет порядка $O(2^n)$. Для оптимальной работы с матрицами и операций над ними (напимер вычисление обратной матрицы) используется библиотека Eigen. Для оптимизации целевой функции (9) используются решения, поставляемые библиотекой Dlib. Dlib предоставляет метод минимизации нелинейной функции многих переменных внутри куба Q_n, с возможностью использования различных стратегий поиска минимума функции. Для решения текущей задачи стратегиями поиска были выбраны алгоритмы: BFGS и L-BFGS.

Результаты

С помощью реализованной программы были получены численные верхние оценки минимальных норм проекторов для $n = 1, \ldots, 20$.
Наиболее точные на момент выполнения работы оценки содержатся в книге Невского М. В. Геометрические оценки в полиномиальной интерполяции.
Оценки для $n = 4$ и $n = 6$ были улучшены в работе Кудрявцев, И. С., Озерова Е. А., Ухалов А.Ю. Новые оценки для норм минимальных проекторов, 2017. Нам удалось найти более точные по сравнению с известными оценки при $n = 5, 6, 10, 14, 18, 20$.

Полученные верхние оценки минимальной нормы интерполяционного проектора

n	Известные оценки θ_n	Уточненные оценки θ_n	
1	$\theta_1 = 1$	$\theta_1 = 1$	
2	$\theta_2 = 1.89\ldots$	$\theta_2 = 1.89\ldots$	
3	$\theta_3 = 2$	$\theta_3 = 2$	
4	$2.2\ldots \leqslant \theta_n \leqslant 2.3203\ldots$	$2.2\ldots \leqslant \theta_n \leqslant 2.3204\ldots$	
5	$2.33\ldots \leqslant \theta_n \leqslant 2.6\ldots$	$2.33\ldots \leqslant \theta_n \leqslant 2.44880\ldots$	$*$
6	$2.42\ldots \leqslant \theta_n \leqslant 3$	$2.42\ldots \leqslant \theta_n \leqslant 2.60004\ldots$	$*$
7	$\theta_7 = 2.5$	$\theta_7 = 2.5$	
8	$2.5555\ldots \leqslant \theta_8 \leqslant 3.1428\ldots$	$2.5555\ldots \leqslant \theta_8 \leqslant 3.1428\ldots$	
9	$2.6 \leqslant \theta_9 \leqslant 3.0000\ldots$	$2.6 \leqslant \theta_9 \leqslant 3.0000\ldots$	
10	$2.6363\ldots \leqslant \theta_{10} \leqslant 3.8000\ldots$	$2.6363\ldots \leqslant \theta_{10} \leqslant 3.5186\ldots$	$*$
11	$2.6666\ldots \leqslant \theta_{11} \leqslant 3.0000\ldots$	$2.6666\ldots \leqslant \theta_{11} \leqslant 3.0000\ldots$	
12	$2.6923\ldots \leqslant \theta_{12} \leqslant 3.4000\ldots$	$2.6923\ldots \leqslant \theta_{12} \leqslant 3.4000\ldots$	

n	Известные оценки θ_n	Уточненные оценки θ_n	
13	$2.7142\ldots \leqslant \theta_{13} \leqslant 3.7692\ldots$	$2.7142\ldots \leqslant \theta_{13} \leqslant 3.7692\ldots$	
14	$2.7333\ldots \leqslant \theta_{14} \leqslant 4.1999\ldots$	$2.7333\ldots \leqslant \theta_{14} \leqslant 4.0156\ldots$	$*$
15	$2.75\ldots \leqslant \theta_{15} \leqslant 3.5\ldots$	$2.75\ldots \leqslant \theta_{15} \leqslant 3.5\ldots$	
16	$2.7647\ldots \leqslant \theta_{16} \leqslant 4.2000\ldots$	$2.7647\ldots \leqslant \theta_{16} \leqslant 4.2000\ldots$	
17	$2.7777\ldots \leqslant \theta_{17} \leqslant 4.0882\ldots$	$2.7777\ldots \leqslant \theta_{17} \leqslant 4.0882\ldots$	
18	$2.7894\ldots \leqslant \theta_{18} \leqslant 5.5882\ldots$	$2.7894\ldots \leqslant \theta_{18} \leqslant 5.1401\ldots$	$*$
19	$2.8 \leqslant \theta_{19} \leqslant 4.0000\ldots$	$2.8 \leqslant \theta_{19} \leqslant 4.0000\ldots$	
20	$2.8095\ldots \leqslant \theta_{20} \leqslant 4.7241\ldots$	$2.8095\ldots \leqslant \theta_{20} \leqslant 4.6888\ldots$	$*$

Нормы интерполяционных проекторов и экстремальные симплексы

А. В. Лютенков

ЯрГУ им. П.Г. Демидова
Научный руководитель доцент кафедры математического анализа ЯрГУ им. П. Г. Демидова, кандидат физико-математических наук А.Ю. Ухалов.

16 июня 2018