УДК 517.518.238+519.6

А. В. Лютенков

Минимальные нормы интерполяционных проекторов

В работе рассматривается задача о построении минимального проектора (проектора, имеющего минимальную норму) при интерполяции непрерывной на кубе функции с помощью полиномов n переменных степени не выше единицы. Автором разработана компьютрная программа для численной минимизации функции многих переменных. С помощью этой программы удалось уточнить верхние границы минимальных норм проекторов при $n = 5, 6, 10, 14, 18, 20$.

1. Задача линейной интерполяции на n-мерном кубе

Положим $Q_n := [0..1]^n$, где $n \in \mathbb{R}^n$, Q_n — n-мерный куб, множество вершин куба будем обозначать как $ver(Q_n)$. $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ — совокупность многочленов n переменных степени $\leqslant 1$. Пусть S — невырожденный сиплекс в $\mathbb{R}^n$, вершины симплекса зададаются, как $x^{(j)} = (x_1^{(j)}, ..., x_n^{(j)}), j = 1, \ldots, n$. Рассмотрим матрицу

$$A := \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \ldots & x_n^{(1)} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n+1)} & \ldots & x_n^{(n+1)} & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Будем говорить, что набор точек $x^{(j)}$ — допустим для интерполяции многочленами из $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$. Это условие эквивалентно тому, что матрица A является невырожденной.

$\Delta := det(A)$, определитель, который получается из Δ заменой j-й строки на строку $(x_1, \ldots, x_n, 1)$. Многочленый $\lambda_j(x) := \Delta_j(x)/\Delta$ из $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ называются базисными многочленами Лагранжа симплекса S и обладают свойством $\lambda_j(x^k) = \delta_j^k$, где δ_j^k — символ Кронекера. $\lambda_j = l_{1j}x_1 + \cdots + l_{nj}x_n + l_{n+1j}$, коэффициентны l_{ij} составляют столбцы матрицы

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \ldots & l_{1,j} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \ldots & l_{n,j} & \ldots \\ \ldots & l_{n+1,j} & \ldots \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Так как $\lambda_j(x^k) = \delta_j^k$ любой многочлен $p \in \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет равенству

$$p(x) = \sum_{j=1}^{n+1} p(x^{(j)})\lambda_j(x). \tag{1.3}$$

Так как $det(A) \neq 0$, то для любой $f \in C(Q_n)$, где $C(Q_n)$ — совокупность $f : Q_n \to \mathbb{R}$ найдется единственный многочлен $p \in \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяющий условиям:

$$p(x^{(j)}) = f(x^{(j)}). \tag{1.4}$$

1.1 Интерполяционный проектор

Введем в рассмотрение оператор $P : C(Q_n) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$, который далее будем называть интеполяционным проектором. Интерполяционный проектор по системе узлов $x^{(j)}$ определяется с помощью равенств:

$$Pf(x^{(j)}) = f_j := f(x^{(j)}), j = 1, \ldots, n+1. \tag{1.1.1}$$

Из этих равенств следует, что данный оператор является линейным и справедлив следующий аналог интерполяционной формулы Лагранжа:

$$Pf(x^{(j)}) = p(x) = \sum_{j=1}^{n+1} f_j\lambda_j(x). \tag{1.1.2}$$

1.2 Норма интерполяционного проектора. Минимальная норма проектора

Обозначим через $||P||$ норму проектора P как оператора из $C(Q_n)$ в $C(Q_n)$. Эта величина зависит от от выбора узлов интерполяции $x^{(j)}$.

Лемма 1. *Для любого интерполяционного проектора $P : C(Q_n) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ и симплекса S с вершинами в его узлах имеет место равенство*

$$||P|| = \max_{x \in ver(Q_n)} \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)| \tag{1.2.1}$$

Доказательство этого утверждения можно найти в монографии [1].

Обозначим через θ_n минимальну норму проектора, при условии, что все узлы принадлежат кубу Q_n:

$$\theta_n := \min_{x^{(j)} \in Q_n} ||P|| \tag{1.2.2}$$

Интерполяционный проектор P^* с нормой $||P^*|| = \theta_n$ назовем минимальным.

Главной задачей настоящей работы является уточнение оценок для миниммальной нормы проектора при некоторых значениях n.

Отметим, что минимальная норма проектора достигается на границе куба Q_n, т.е. в том случае, когда все вершины невырожденного симплекса принадлежат границе Q_n. Доказательство данного факта приводится в книге М.В. Невского [1].

В монографии [1] приводятся следующие общие оценки:

$$\frac{1}{4}\sqrt{n} < \theta_n < 3\sqrt{n},$$

$$3 - \frac{4}{n+1} \leqslant \theta_n.$$

2. Компьютерная программа для оценивания θ_n

Была реализована компьютерна программа для уточнения оценок θ_n. Задача об отыскании минимальной нормы проектора сводится к задаче отыскания минимума функции многих переменных. Норма проектора вычисляется по формуле(1.2.1), зная это, зададим целевую функцию для минимизации.

$$F(A) = \max_{x \in ver(Q_n)} \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)| \tag{2.1.1}$$

Где A — марица, которая имеет вид (1.1).

Так как задача минимизации функции (2.1.1) является трудоемкой, целесообразным является применение сторонних программных библиотек, поставляющих решения задач линейной алгебры, численных методов и медодов оптимизации, существующих на рынке свободно распространяемого програмного обеспечения.

Программа реализована на языке программировани C++ с использованием библиотек Dlib, Boost, Eigen, которые предоставляют необходимый функционал для оптимального решения поставленной задачи.

Реализация программы

Программа реализована в виде консольного приложения. Приложение зависит от выше указанных программных библиотек, также использует страндартную библиотеку шаблонов STL языка C++.

Так как для вычисления нормы проектора необходим перебор по вершинам куба, то асимптотика алгоритма отыскания θ_n будет порядка $O(C \cdot n^2 \cdot 2^n)$, что требует оптимального выполнения некоторых операций, для обеспечения наилучшего времени работы программы. Для оптимальной работы с матрицами и операций над ними (напимер вычисление обратной матрицы) используется библиотека Eigen.

Для оптимизации целевой функции (2.1.1) используются возможности библиотеки Dlib. Dlib предоставляет метод минимизации нелинейной функции многих переменных внутри куба Q_n, с возможностью использования различных стратегий поиска минимума функции. Для решения текущей задачи стратегиями поиска были выбраны алгоритмы: BFGS и L-BFGS.

3. Результаты

С помощью реализованной программы были получены численные верхние оценки минимальных норм проекторов для $n = 1, \ldots, 20$. Наиболее точные на момент выполнения работы оценки содержатся в книге [1]. Оценки для $n = 4$ и $n = 6$ были улучшены в работе [2]. Нам удалось найти более точные по сравнению с известными оценки при $n = 5, 6, 10, 14, 18, 20$.

В Таблице 3.1 приводятся оценки, известные на настоящее время, и оценки, полученные при выполнении настоящей работы. Знаком «$*$» отмечены оценки, которые удалось улучшить.

Таблица 3.1

Сравнение известных оценок θ_n с оценками, полученными в настоящей работе

n	Известные оценки θ_n	Уточненные оценки θ_n	
1	$\theta_1 = 1$	$\theta_1 = 1$	
2	$\theta_2 = 1.89\ldots$	$\theta_2 = 1.89\ldots$	
3	$\theta_3 = 2$	$\theta_3 = 2$	
4	$2.2\ldots \leqslant \theta_n \leqslant 2.3203\ldots$	$2.2\ldots \leqslant \theta_n \leqslant 2.3204\ldots$	
5	$2.33\ldots \leqslant \theta_n \leqslant 2.6\ldots$	$2.33\ldots \leqslant \theta_n \leqslant 2.44880\ldots$	$*$
6	$2.42\ldots \leqslant \theta_n \leqslant 3$	$2.42\ldots \leqslant \theta_n \leqslant 2.60004\ldots$	$*$
7	$\theta_7 = 2.5$	$\theta_7 = 2.5$	
8	$2.5555\ldots \leqslant \theta_8 \leqslant 3.1428\ldots$	$2.5555\ldots \leqslant \theta_8 \leqslant 3.1428\ldots$	
9	$2.6 \leqslant \theta_9 \leqslant 3.0000\ldots$	$2.6 \leqslant \theta_9 \leqslant 3.0000\ldots$	
10	$2.6363\ldots \leqslant \theta_{10} \leqslant 3.8000\ldots$	$2.6363\ldots \leqslant \theta_{10} \leqslant 3.5186\ldots$	$*$
11	$2.6666\ldots \leqslant \theta_{11} \leqslant 3.0000\ldots$	$2.6666\ldots \leqslant \theta_{11} \leqslant 3.0000\ldots$	
12	$2.6923\ldots \leqslant \theta_{12} \leqslant 3.4000\ldots$	$2.6923\ldots \leqslant \theta_{12} \leqslant 3.4000\ldots$	
13	$2.7142\ldots \leqslant \theta_{13} \leqslant 3.7692\ldots$	$2.7142\ldots \leqslant \theta_{13} \leqslant 3.7692\ldots$	
14	$2.7333\ldots \leqslant \theta_{14} \leqslant 4.1999\ldots$	$2.7333\ldots \leqslant \theta_{14} \leqslant 4.0156\ldots$	$*$
15	$2.75\ldots \leqslant \theta_{15} \leqslant 3.5\ldots$	$2.75\ldots \leqslant \theta_{15} \leqslant 3.5\ldots$	
16	$2.7647\ldots \leqslant \theta_{16} \leqslant 4.2000\ldots$	$2.7647\ldots \leqslant \theta_{16} \leqslant 4.2000\ldots$	
17	$2.7777\ldots \leqslant \theta_{17} \leqslant 4.0882\ldots$	$2.7777\ldots \leqslant \theta_{17} \leqslant 4.0882\ldots$	
18	$2.7894\ldots \leqslant \theta_{18} \leqslant 5.5882\ldots$	$2.7894\ldots \leqslant \theta_{18} \leqslant 5.14006\ldots$	$*$
19	$2.8 \leqslant \theta_{19} \leqslant 4.0000\ldots$	$2.8 \leqslant \theta_{19} \leqslant 4.0000\ldots$	
20	$2.8095\ldots \leqslant \theta_{20} \leqslant 4.7241\ldots$	$2.8095\ldots \leqslant \theta_{20} \leqslant 4.68879\ldots$	$*$

Литература

1. *Невский М. В.* Геометрические оценки в полиномиальной интерполяции. Ярославль: ЯрГУ, 2012.

2. *Кудрявцев, И. С., Озерова Е. А., Ухалов А.Ю.* Новые оценки для норм минимальных проекторов // Современные проблемы математики и информатики: сборник научных трудов молодых ученых, аспирантов и студентов. Вып. 17. / Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. Ярославль: ЯрГУ, 2017. С. 74–81.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова