Приведение ДУЧП 2 порядка к канонич. виду

$u(x,y)$

$$A(x,y)\,u_{xx}+B(x,y)\,u_{xy}+C(x,y)\,u_{yy}+F(x,y,u,u_x,u_y)=0 \qquad (1)$$

A, B, C определены в $\Omega \subset O_{xy}$, имеют непр. произв. до 2-го порядка. F - непр. ф-я

$$\begin{cases} \xi=\xi(x,y) \\ \eta=\eta(x,y) \end{cases} \qquad (2)$$

ξ, η - дважды непр. дифф и $\begin{vmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0$ в Ω

$$u(x,y) \to u(\xi,\eta) \Rightarrow u_x=u_\xi \xi_x+u_\eta \eta_x$$
$$u_y=u_\xi \xi_y+u_\eta \eta_y$$

$$u_{xx}=(u_\xi \cdot \xi_x+u_\eta \eta_x)'_x=(u_{\xi\xi}\xi_x+u_{\xi\eta}\eta_x)\xi_x+u_\xi \xi_{xx}+(u_{\eta\xi}\xi_x+u_{\eta\eta}\eta_x)\eta_x+$$
$$+u_\eta \eta_{xx}=$$
$$=u_{\xi\xi}\xi_x^2+2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+u_{\eta\eta}\eta_x^2+u_\xi \xi_{xx}+u_\eta \eta_{xx}$$

$$u_{xy}=(u_\xi \xi_x+u_\eta \eta_x)'_y=u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y+u_{\xi\eta}\xi_x\eta_y+u_\xi \xi_{xy}+u_{\eta\xi}\xi_y\eta_x+$$
$$+u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y+u_\eta \eta_{xy}$$

$$u_{yy} = \left(u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y\right)'_y = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + \underline{u_{\xi\eta}\eta_y\xi_y} + u_\xi \xi_{yy} + \underline{u_{\eta\xi}\xi_y\eta_y} + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\eta \eta_{yy}$$

$$\begin{aligned} & u_{\xi\xi}\Big[\underbrace{A\xi_x^2 + B\,\xi_x\xi_y + C\xi_y^2}_{\overline{A}}\Big] + u_{\xi\eta}\Big[\underbrace{A\,2\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + C\,2\,u_{\eta\xi}\xi_y\eta_y}_{\overline{B}}\Big] + \\ & u_{\eta\eta}\Big[\underbrace{A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2}_{\overline{C}}\Big] + \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0 \end{aligned}$$

$$\overline{A} = A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2$$
$$\overline{B} = 2A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + 2C\eta_y\xi_y$$
$$\overline{C} = A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2$$

$$\overline{A}u_{\xi\xi} + \overline{B}u_{\xi\eta} + \overline{C}u_{\eta\eta} + \Phi = 0 \qquad (3)$$

$$A(x,y)u_{xx} + B(x,y)u_{yy} + C(x,y)u_{xy} + F(x,y,u,u_x,u_y) = 0 \qquad (1)$$

$\begin{cases} \xi = \xi(x,y) \\ \eta = \eta(x,y) \end{cases}$ – замена переменных

$$\bar{A}\, u_{\xi\xi} + \check{B}\, u_{\xi\eta} + \bar{C}\, u_{\eta\eta} + \varphi(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta) = 0 \qquad (2)$$

$$\bar{A} = A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2$$

$$\bar{B} = 2A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + 2C\eta_y\xi_y$$

$$\bar{C} = A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2$$

$\bar{A} = 0$:

$$A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = 0 \quad \Big| : \xi_y^2$$

$$A\left(\frac{\xi_x}{\xi_y}\right)^2 + B\frac{\xi_x}{\xi_y} + C = 0 \qquad \boxed{t = \frac{\xi_x}{\xi_y}}$$

$$At^2 + Bt + C = 0$$

$\bar{C} = 0$:

$$A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2 = 0 \quad \Big| : \eta_y^2$$

$$A\left(\frac{\eta_x}{\eta_y}\right)^2 + B\frac{\eta_x}{\eta_y} + C = 0 \qquad \boxed{t = \frac{\eta_x}{\eta_y}} \Rightarrow At^2 + Bt + C = 0$$

1. Уравнения гиперболич. типа

$D = B^2 - 4AC > 0 \Rightarrow (1)$ – ур-е гиперб. типа

$At^2 + Bt + C = 0 \Rightarrow t_1, t_2$ – корни

$$\begin{cases} t_1 = \dfrac{\xi_x}{\xi_y} \\ t_2 = \dfrac{\eta_x}{\eta_y} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \xi(x,y) \\ \eta(x,y) \end{matrix} \text{ – замена}$$

(2) =>

$$\overline{B} u_{\xi\eta} + \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0$$

$u_{\xi\eta} = \overline{\Phi}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$ — I канонич. форма гип. ур-я

Замена переменных

$$\begin{cases} \alpha = \xi + \eta \\ \beta = \xi - \eta \end{cases}$$ => приходим ко II кан. форме гип. ур-я

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Psi(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta)$$

Пример

$u_{tt} = u_{xx} + f(t, x)$ — одномерное ур-е колебаний

② Уравнения параболич. типа

$D = B^2 - 4AC = 0$ (1) – параболич. типа

$At^2 + Bt + C = 0 \Rightarrow t_0 = -\frac{B}{2A}$

$$\begin{cases} t_0 = \frac{\xi_x}{\xi_y} \\ \eta = x \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \overline{A} = 0 \\ \overline{B} = 0 \end{matrix}$$

$$\overline{B} = 2A\xi_x \overset{1}{\eta_x} + B(\xi_x \overset{0}{\eta_y} + \xi_y \overset{1}{\eta_x}) + 2C\overset{0}{\eta_y}\xi_y = 2A\xi_x + B\xi_y =$$
$$= 2A\, t_0 \xi_y + B\xi_y = \xi_y(2At_0 + B) = \xi_y(-B + B) = 0$$

$$\overline{C} u_{\eta\eta} + \Phi(\eta, \xi, u, u_\xi, u_\eta) = 0$$

$u_{\eta\eta} = \overline{\Phi}(\eta, \xi, u, u_\xi, u_\eta)$ — канонич. вид параболич. ур-я

Пример

$u_t = u_{xx}$

③ Уравнения эллиптического типа

$D = B^2 - 4AC < 0$ (1) - эл. типа

$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = \Psi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$ - каконич. форма эл. ур-я

Пример

$u_{xx} + u_{yy} = 0$

Схема приведения эл. ур-я к каконич. форме

$A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = 0$ (*) $t = \frac{\xi_x}{\xi_y}$

$At^2 + Bt + C = 0 \Rightarrow k$ - комплексное решение

$\frac{\xi_x}{\xi_y} = k \Rightarrow$ $\xi_x - k\xi_y = 0 \leftarrow (**)$ $\Rightarrow \frac{dx}{1} = \frac{dy}{-k}$

$\varphi_1(x,y) + i\varphi_2(x,y) = C$

$\xi = F(\varphi_1 + i\varphi_2)$ - решение (**)

Делаем замену

$\begin{cases} \xi = \varphi_1(x,y) \\ \eta = \varphi_2(x,y) \end{cases} \rightarrow$ к каконич. виду

Д-ем

$\gamma = \varphi_1(x,y) + i\varphi_2(x,y)$ - решение (**)

Подставляем γ в (*)

$$A[(\varphi_1)'_x + i(\varphi_2)'_x]^2 + B[(\varphi_1)'_x + i(\varphi_2)'_x][(\varphi_1)'_y + i(\varphi_2)'_y] +$$

$$C[(\varphi_1)'_y + i(\varphi_2)'_y]^2 = 0$$

$$A(\varphi_1)'^2_x + 2Ai(\varphi_1)'_x(\varphi_2')_x - A(\varphi_2)'^2_x + B(\varphi_1)'_x(\varphi_1)'_y + iB((\varphi_1)'_x(\varphi_2)'_y +$$

$$+ (\varphi_2)'_x(\varphi_1)'_y) - B(\varphi_2)'_x(\varphi_2)'_y + C(\varphi_1)'^2_y + 2Ci(\varphi_1)'_y(\varphi_2)'_y - C(\varphi_2)'^2_y = 0$$

$$A(\varphi_1)'^2_x - A(\varphi_2)'^2_x + B(\varphi_1)'_x(\varphi_1)'_y - B(\varphi_2)'_x(\varphi_2)'_y + C(\varphi_1)'^2_y - C(\varphi_2)'^2_y +$$

$$+i\{2A(\varphi_1)'_x(\varphi_2)'_x + B(\varphi_1)'_x(\varphi_2)'_y + B(\varphi_2)'_x(\varphi_1)'_y + 2C(\varphi_1)'_y(\varphi_2)'_y = 0$$

$$A(\varphi_1)'^{2}_x + B(\varphi_1)'_x(\varphi_1)'_y + C(\varphi_1)'^{2}_y = A(\varphi_2)'^{2}_x + B(\varphi_2)'_x(\varphi_2)'_y + C(\varphi_2)'^{2}_y$$

$$\underbrace{A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2}_{\overline{A}=0} = A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2 = 0$$

$$2A\xi_x\eta_x + B\xi_x\eta_y + B\eta_x\xi_y + 2C\xi_y\eta_y = \overline{B}$$