Лекция №7

20.10.2020

Л.Г \ П.Г	I	II
I	$X_n = \sin\lambda_n x$ $\lambda_n = \frac{\pi n}{l}$, $n=1,2$	$X_n = \sin\lambda_n x$ $\lambda_n = \frac{\pi}{2l} + \frac{\pi n}{l}$, $n=0,1,\ldots$
II	$X_n = \cos\lambda_n x$ $\lambda_n = \frac{\pi}{2l} + \frac{\pi n}{l}$ $n=0,1,\ldots$	$X_n = \cos\lambda_n x$ $\lambda_n = \frac{\pi n}{l}$, $n=0,1,\ldots$

$$\rho(x) u_{tt} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x)u, \quad t>0, \quad 0<x<l$$

н.у. $u(0,x) = \varphi(x)$

$u_t(0,x) = \psi(x)$

$$\rho(x) u_{tt} = L[u]$$

г.у. $u(t,0) = 0$

$u(t,l) = 0$

$k(x), q(x), \rho(x)$ – непрерывны на $0 \le x \le l$;

$k(x) > 0$; $\rho(x) > 0$; $q(x) \geq 0$

$$u(t,x) = T(t)\cdot X(x)$$

подставляем в уравнение

$$\rho(x) T'' X = T\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)X'\right) - qTX \quad \Big| : TX\cdot\rho(x)$$

$$\frac{T''}{T} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)X'\right)\frac{1}{\rho(x)X} - \frac{q}{\rho(x)} = C = -\lambda^2$$

$T'' = -\lambda^2 T$;

З Ш-Л. $$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dX}{dx}\right) - q(x)X = -\lambda^2\rho(x)X \\ X(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases}$$

$$L[X] = \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dX}{dx}\right) - q(x)X$$

3\. Ш-Л
$$\begin{cases} L[X] + \lambda^2 \rho(x) X = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Т. Стеклова (теорема о разложимости ф-ий)

Произвольная ф-я $F(x)$, дважды непр. дифф. и удовл. гран. усл. $F(0)=0$; $F(l)=0$ разлагается в равномерно и абсолютно сходящ. ряд по собств. ф-ям з Ш-Л $(*)$

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n X_n(x) \quad ; \quad \{X_n\} \text{ - собств. ф-ии } (*)$$

$$F_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^l F(x) X_n(x) \rho(x)\, dx$$

$$\|X_n\|^2 = \int_0^l X_n^2(x) \rho(x)\, dx$$