РАЗЛИЧНЫЕ АКСИОМАТИЗАЦИИ МАТРОИДОВ

.

Теорема 1 (Аксиомы независимости). 1) Пусть $M(E)$ — (конечный) матроид и Ind – семейство его независимых множеств. Тогда

(I.1) $\emptyset \in \mathrm{Ind}$; для любого X условие $X \subseteq I \in \mathrm{Ind}$ влечет условие $X \in \mathrm{Ind}$;

(I.2) для любых $I, J \in \mathrm{Ind}$ если $|I| < |J|$, то существует $p \in J \setminus I$, такой что $I \cup p \in \mathrm{Ind}$;

(I.2′) для любого $A \subseteq E$ максимальные независимые подмножества из A равномощны.

2) Обратно, пусть семейство $\mathcal{J}$ подмножеств конечного непустого множества E удовлетворяет условиям (I.1), (I.2) или, что эквивалентно, условиям (I.1), (I.2′), где $\mathcal{J}$ играет роль Ind. Тогда $\mathcal{J}$ совпадает с семейством независимых множеств однозначно определенного матроида на E.

Доказательство. 1) Свойство (I.1) было уже отмечено в лемме 1 из предыдущего раздела, а свойство (I.2′) — в лемме 2. Применив (I.2′) к $I \cup J$, где $I, J \in \mathrm{Ind}$ и $|I| < |J|$, получим (I.2).

2) Обратно, пусть $\mathcal{J}$ удовлетворяет условию (I.1), где вместо Ind фигурирует $\mathcal{J}$. Легко видеть, что (I.2) эквивалентно (I.2′). Поэтому будем считать, что выполняются все три свойства (I.1), (I.2) и (I.2′).

Определим оператор замыкания $A \to \langle A \rangle$ ($A \subseteq E$), полагая для $p \in E$:

$$p \in \langle A \rangle \Leftrightarrow p \in A \text{ или существует } I \subseteq A \text{ такое, что } I \in \mathcal{J} \text{ и } I \cup p \notin \mathcal{J}$$

и т.д..

Теорема 2 (Аксиомы баз).

1) Пусть $M(E)$ — конечный матроид и Bs — семейство его баз. Тогда

(B.1) Bs $\neq \emptyset$; если $B_1, B_2 \in$ Bs и $B_1 \neq B_2$, то B_1 и B_2 несравнимы относительно $\subseteq$;

(B.2) если $B_1, B_2 \in$ Bs, то для любого $b_1 \in B_1$ существует $b_2 \in B_2$ такой, что

$$(B_1 \setminus b_1) \cup b_2 \in \mathrm{Bs}.$$

2) Обратно, пусть семейство $\mathscr{B}$ подмножеств конечного непустого множества E удовлетворяет условиям (B.1) и (B.2), где $\mathscr{B}$ играет роль Bs. Тогда $\mathscr{B}$ является семейством баз однозначно определенного матроида на E.

(B.2) – ***это аксиома Штейница о замене для баз.***

Доказательство. 1) Свойство (B.1) очевидно, а свойство (B.2) вытекает из (I.2) и условия равномощности баз.

2) Обратно, пусть семейство $\mathscr{B}$ удовлетворяет аксиомам (B.1) и (B.2), где вместо Bs фигурирует $\mathscr{B}$.

Покажем сначала, что все $\mathscr{B}$-множества равномощны.

Пусть $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$, $|B_1| = t$ и

$$B_1 = \{b_1, b_2, \ldots, b_t\}.$$

По аксиоме (B.2) существует $c_1 \in B_2$ такой, что

$$\{c_1, b_2, \ldots, b_t\} \in \mathscr{B}.$$

Здесь $c_1 \notin \{b_2, \ldots, b_t\}$ в силу условия (B.1). Аналогично, существует $c_2 \in B_2$ такой, что

$$\{c_1, c_2, b_3, \ldots, b_t\} \in \mathscr{B}$$

и $c_2 \notin \{c_1, b_3, \ldots, b_t\}$. Продолжая этот процесс, получим

$$\{c_1, c_2, \ldots, c_t\} \in \mathscr{B}$$

для некоторых попарно различных элементов $c_1, c_2, \ldots, c_t \in B_2$. В силу аксиомы (B.1) получаем

$$\{c_1, c_2, \ldots, c_t\} = B_2,$$

т. е. $|B_2| = t = |B_1|$.

Подмножество A из E назовём ***$\mathscr{B}$-независимым***, если оно содержится в некотором $\mathscr{B}$-множестве.

Ясно, что $\mathscr{B}$-множества — это максимальные $\mathscr{B}$-независимые множества.

Обозначим через $\mathscr{J}$ совокупность всех $\mathscr{B}$-независимых множеств.

Заметим, что семейство $\mathscr{J}$ удовлетворяет аксиоме независимости (I.1).

Для завершения доказательства теоремы достаточно проверить, что семейство $\mathscr{J}$ удовлетворяет аксиоме (I.2) и воспользоваться теоремой 1.

Проверка того, что семейство $\mathscr{J}$ удовлетворяет аксиоме (I.2).

Пусть $I, J \in \mathscr{J}$ и $|I| < |J|$. Зафиксируем $\mathscr{B}$-множество B_2, содержащее J.

Среди $\mathscr{B}$-множеств, содержащих I, выберем такое $\mathscr{B}$-множество B_1, для которого пересечение $B_1 \cap B_2$ содержит наибольшее возможное число элементов.

Покажем, что $B_1 \setminus I \subseteq B_2$.

Действительно, если существует $b_1 \in B_1 \setminus I$ такой, что $b_1 \notin B_2$, то по аксиоме (B.2) существует $b_2 \in B_2$, для которого

$$B = (B_1 \setminus b_1) \cup b_2 \in \mathscr{B}$$

и $b_1 \neq b_2$, так как $b_1 \notin B_2$, а $b_2 \in B_2$. Тогда $|B \cap B_2| > |B_1 \cap B_2|$, что невозможно, поскольку $I \subseteq B$.

Таким образом, $B_1 \setminus I, J \subseteq B_2$, причем $|B_1 \setminus I| + |J| = |B_1| - |I| + |J| > |B_1| = |B_2|$. Следовательно, существует $p \in (B_1 \setminus I) \cap J$. Так как $I \cup p \subseteq B_1$ и $p \in J \setminus I$, элемент p является искомым и **теорема доказана**.

Примеры. 1) Пусть $E = \{v_1, \ldots, v_m\}$ — некоторое множество векторов векторного пространства V над телом F.

Рассмотрим множество всех максимальных линейно независимых подмножеств из E.

Оно удовлетворяет аксиомам баз (B.1) и (B.2), т.е. мы имеем матроид на E с таким семейством баз.

Этот матроид называют ***векторным матроидом*** над телом F.

2) Пусть G — произвольный ненулевой (n, m)-граф.

Построим ***матроид циклов*** графа G, который будем обозначать через $M(G)$.

В качестве основного множества E возьмем EG, а в качестве баз этого матроида — остовы (точнее, каждая база — это множество всех ребер некоторого остова).

Аксиома (B.1) очевидна, а аксиома (B.2) выполняется в силу леммы 4 из раздела, посвященного остовам.

Ясно, что в этом матроиде независимыми множествами будут ациклические множества ребер, а циклами — обычные циклы графа.

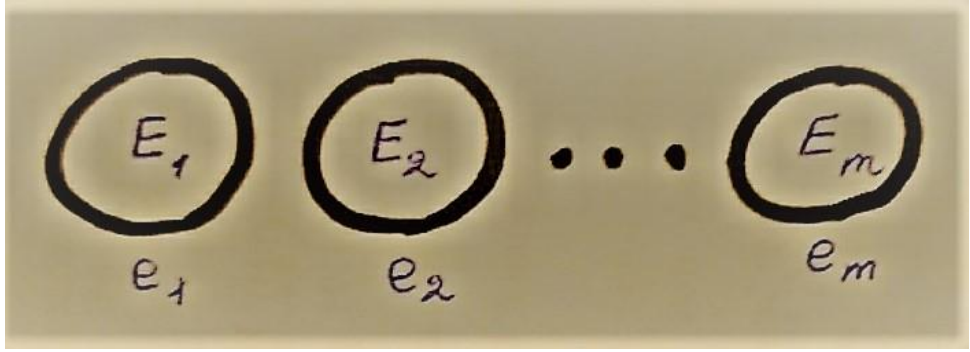
3) Пусть $M(E)$ — произвольный матроид на конечном множестве E.

Возьмем $A \subseteq E$. В качестве системы независимых множеств на A рассмотрим независимые множества исходного матроида, содержащиеся в A.

Ясно, что на A мы получили матроид, который обозначают через $M(A)$ и называют ***подматроидом*** исходного матроида.

4) Пусть $M(E)$ — произвольный матроид на конечном множестве $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$. Каждый элемент $e_i \in E$ заменим на некоторое множество E_i. Пусть

$E' = E_1 \uplus E_2 \uplus \ldots \uplus E_m$



E_i — это семейство «близнецов» для элемента e_i. Построим семейство баз на E'. Берём базу B в $M(E)$, в базу B' из E' собираем по одному элементу $e_i' \in E_i$ для каждого $e_i \in B$. Совокупность новых баз удовлетворяет (B.1) и (B.2). Каждая база B' состоит из набора двойников по одному для каждого элемента соответствующей базы B.

Полученный матроид $M(E')$ называется ***раздуванием матроида*** $M(E)$. Независимые множества в $M(E')$ устроены аналогично базам в $M(E')$.

5) Пусть V — векторное пространство над телом F.

Возьмем некоторую систему векторов $v_1, \ldots, v_m$ из V (возможно с повторениями векторов).

Построим матроид M, отвечающий этой системе векторов.

Матроид M будет иметь m элементов. Для простоты мы можем считать, что элементами матроида M являются элементы $v_1, \ldots, v_m$, т. е. все они различны как элементы матроида M (берем вектор вместе с его номером), но некоторые из них могут совпадать как элементы векторного пространства V .

В качестве баз возьмем все максимальные линейно независимые подсистемы из $v_1, \ldots, v_m$.

Мы получили матроид M, который, очевидно, является раздуванием некоторого векторного матроида над телом F.

В дальнейшем раздувание векторного матроида над телом F также будем называть ***векторным матроидом над телом*** F.

6) Пусть

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ & & \dots & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nm} \end{bmatrix}$$

— некоторая матрица над телом F.

Строки матрицы A являются элементами пространства векторов-строк длины m над F. Поэтому матрице A отвечает векторный матроид над телом F, состоящий из n элементов — строк матрицы A.

Этот матроид называют ***матроидом строк матрицы*** A.

Отметим, что здесь строки с разными номерами являются разными элементами матроида, хотя некоторые из них могут совпадать как элементы пространства векторов-строк длины m над F.

Аналогично определяется ***матроид столбцов матрицы*** A.

Теорема 3 (Ранговые аксиомы). 1) Пусть $M(E)$ — конечный матроид и r — его ранговая функция из $\mathcal{P}(E)$ в $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда для любых $A, B \subseteq E$ выполняется

(r.1) $0 \leqslant r(A) \leqslant |A|$;

(r.2) $A \subseteq B \to r(A) \leqslant r(B)$;

(r.3) $r(A \cap B) + r(A \cup B) \leqslant r(A) + r(B)$.

2) Обратно, пусть некоторая функция τ из $\mathcal{P}(E)$ в $\mathbb{N} \cup \{0\}$, где E — конечное непустое множество, удовлетворяет условиям (r.1), (r.2) и (r.3). Тогда она является ранговой функцией однозначно определенного матроида на E.

Доказательство. 1) Свойства (r.1) и (r.2) очевидны. Докажем (r.3). Ясно, что

$$A \cap B \subseteq \langle A \rangle \cap \langle B \rangle \text{ и } A \cup B \subseteq \langle A \rangle \vee \langle B \rangle.$$

Используя неравенство полумодулярности, которое выполняется в решетке листов, получаем

$$r(A \cap B) + r(A \cup B) \leqslant r(\langle A \rangle \cap \langle B \rangle) + r(\langle A \rangle \vee \langle B \rangle) \leqslant r(\langle A \rangle) + r(\langle B \rangle) = r(A) + r(B).$$

2) Обратно, пусть некоторая функция τ из $\mathcal{P}(E)$ в $\mathbb{N} \cup \{0\}$, где E — конечное непустое множество, удовлетворяет условиям (r.1), (r.2) и (r.3).

Подмножество $I \subseteq E$ назовем ***τ-независимым***, если выполняется $\tau(I) = |I|$. Обозначим через $\mathcal{J}$ множество всех τ -независимых подмножеств из E.

Семейство $\mathcal{J}$ удовлетворяет аксиомам независимости (I.1) и (I.2′) и т.д.

Теорема 4 (Аксиомы циклов). 1) Пусть $M(E)$ — конечный матроид и Ccl — семейство его циклов. Тогда

(C.1) $\emptyset \notin$ Ccl; если $C_1, C_2 \in Ccl$ и $C_1 \neq C_2$, то C_1 и C_2 несравнимы относительно $\subseteq$.

(C.2) если $C_1, C_2 \in Ccl$, $C_1 \neq C_2$ и $p \in C_1 \cap C_2$, то существует $C \in$ Ccl такой, что

$$C \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus p.$$

2) Обратно, пусть семейство $\mathcal{C}$ подмножеств конечного непустого множества E удовлетворяет условиям (C.1) и (C.2), где вместо Ccl фигурирует $\mathcal{C}$. Тогда семейство $\mathcal{C}$ совпадает с семейством циклов однозначно определенного матроида на E.

Доказательство. 1) Свойство (C.1) очевидно вытекает из определения цикла. Для доказательства (C.2) достаточно проверить, что множество $D = (C_1 \cup C_2) \setminus p$ зависимо (тогда оно содержит минимальное зависимое множество — цикл). Так как $D \subseteq C_1 \cup C_2$, мы получаем

$$r(D) \leqslant r(C_1 \cup C_2) \leqslant r(C_1) + r(C_2) - r(C_1 \cap C_2) = |C_1| - 1 + |C_2| - 1 - |C_1 \cap C_2| =$$
$$= |C_1 \cup C_2| - 2 < |C_1 \cup C_2| - 1 = |D|,$$

т. е. D — зависимое множество.

2) Обратно, пусть семейство $\mathcal{C}$ удовлетворяет условию теоремы. Множество $I \subseteq E$ назовем $\mathcal{C}$-***независимым***, если оно не содержит ни одного из множеств $C \in \mathcal{C}$. Семейство $\mathcal{J}$ всех $\mathcal{C}$-независимых множеств удовлетворяет аксиомам (I.1) и (I.2) и т.д.

Следствие 1. Пусть I — произвольное независимое множество матроида $M(E)$ и $p \in E \setminus I$. Тогда $I \cup p$ содержит не более одного цикла.

Доказательство. Пусть в $I \cup p$ содержится два различных цикла C_1 и C_2. Очевидно, $p \in C_1 \cap C_2$ в силу независимости множества I. Тогда по аксиоме $(C.2)$ существует цикл C такой, что

$$C \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus p \subseteq I,$$

что невозможно.

Следствие 2. Для любой базы B матроида $M(E)$ и любого $p \in E \setminus B$ множество $B \cup p$ содержит точно один цикл и этот цикл проходит через p.