Уравнения параболического типа

Уравнение диффузии / уравнение теплопроводности

$u_t = a^2 \Delta u$ /* $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ */

u - концентрация

u - температура

$a^2 = D$ - коэффициент диффузии

$a^2 = \dfrac{\lambda}{c\rho}$ - коэф. температуропроводности

λ - коэф. теплопроводности

c - удельная теплоемкость

ρ - плотность вещества

<u>Внутренний источник тепла/концентрации</u>

$u_t = a^2 u_{xx} + f(t,x)$ (в одномерном простр-ве)

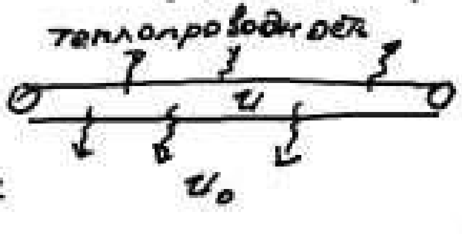
$f(t,x)$ - плотность потока тепла/конц.

$u_t = a^2 \Delta u + f(t,x,y,z)$

(обмен концентраций)

<u>Теплообмен ч/з боковую поверхность</u>

$u_t = a^2 u_{xx} - \beta(u - u_0)$ (в одномерном пр-ве)



u - температура стержня

u_0 - температура среды

$\beta > 0$ - отток тепла; $\beta < 0$ - приток тепла

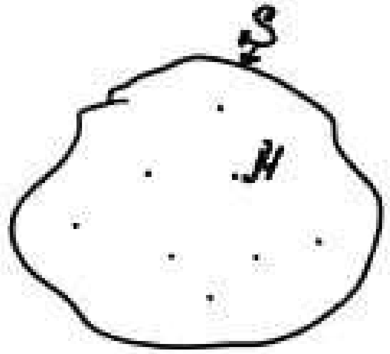
в трехмерном пр-е

$u_t = a^2 \Delta u - \beta(u - u_0)$

В частном случае, когда температура/концентрация не меняется со временем

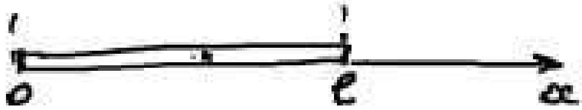
$$\left.\begin{array}{ll} \Delta u = 0 & \text{– ур-е Лапласа} \\ \Delta u = -f & \text{– ур-е Пуассона} \end{array}\right\} \text{ур-я эл. типа}$$

1. Начальные условия



$M(x,y,z)$

$u(0,M) = \varphi(M)$ – начальное распред. температуры/конц. /* 3-х мерн. об-ть */



$u(0,x) = \varphi(x)$ /* 1-мерн пр-во */

2. Граничные усл-я

I-рода

На границе поддерживается определенная температура/конц.

$$u\Big|_S = \mu(t,S)$$ /* 3-х мерн. пр-во */

$$u(t,0) = \mu_1(t)$$
$$u(t,l) = \mu_2(t)$$ /* 1 мерн. пр-во */

II-рода

Через границу подается тепловой/концентрационный поток. ν – плотность потока ч/з границу

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = \frac{\nu(t,S)}{\lambda}$$ /* 3-х мерн. пр-во */

$$u_x(t,0) = \frac{\nu_1(t)}{\lambda}$$
$$u_x(t,l) = \frac{\nu_2(t)}{\lambda}$$ /* 1 мерн. пр-во */

III рода

теплообмен/обмен концентр. с внешней средой, температура/конц которой известна

$Q(t)$ – темп/конц внешн. среды

H – коэф. теплообмена

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{H}{\lambda}u\right)\Big|_S = \frac{H}{\lambda}Q(t)$$ /в 3-х мерн. обл./

$$u_x(t,0) + \frac{H_1}{\lambda}u(t,0) = \frac{H_1}{\lambda}Q_1(t)$$ /в 1-мерн. пр-ву/

$$u_x(t,l) + \frac{H_2}{\lambda}u(t,l) = \frac{H_2}{\lambda}Q_2(t)$$

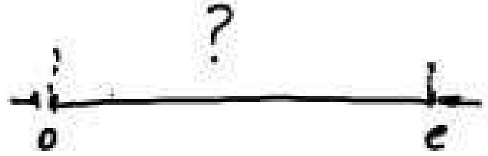
Решение уравнений параболического типа на отрезке

$u_t = a^2 u_{xx}$ $\qquad t>0;\quad 0<x<l$

н.у. $u(0,x) = \varphi(x)$

г.у. $u(t,0) = 0$

$u_x(t,l) = 0$



Метод разделения переменных

$$u(t,x) = T(t)X(x)$$

$$T'X = a^2 T X'' \qquad \Big|: T X a^2$$

$$\frac{T'}{a^2T} = \frac{X''}{X} = C$$

$t = t_0 \qquad \forall x \in (0,l)$

$$X'' = CX \qquad\qquad T' = a^2 C T$$

г.у. $T(t)X(0) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$

$T(t)X'(l) = 0 \Rightarrow X'(l) = 0$

$$X'' = cX$$

$$X(0) = 0 \qquad \text{— задача Ш-Л}$$

$$X'(l) = 0$$

$$C = -\lambda^2$$

$$X_n = \sin \lambda_n x$$

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{l}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$X_n = \sin \lambda_n x \qquad n = 0, 1, \ldots$$

$$\lambda_n = \frac{\pi}{2l} + \frac{\pi n}{l}$$

Решаем задачу для T

$$T_n' = -a^2 \lambda_n^2 T_n$$

$$\frac{dT_n}{dt} = -a^2 \lambda_n^2 T_n \Rightarrow \int \frac{dT_n}{T_n} = \int -a^2 \lambda_n^2 \, dt$$

$$\ln T_n = -a^2 \lambda_n^2 t + \tilde{C}_n$$

$$T_n = C_n^* e^{-a^2 \lambda_n^2 t}$$

$$\lambda_n = \frac{\pi}{2l} + \frac{\pi n}{l}$$

Общее решение исходной задачи

$$\boxed{u(t,x) = \sum_{\substack{n=1\\0}}^{\infty} T_n X_n = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^* e^{-a^2 \lambda_n^2 t} \overset{X_n}{\sin \lambda_n x}, \qquad \lambda_n = \frac{\pi n}{l}}$$

Нач. усл.:

$$u(0,x) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \overset{X_n}{\sin \lambda_n x} = \varphi(x)}$$

$$\int_0^l \sin \lambda_k x \, dx$$

$$C_n^* \frac{l}{2} = \int_0^l \varphi(x) \overset{X_n}{\sin \lambda_n x} \, dx$$

$$\boxed{C_n^* = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \underset{X_n}{\sin \lambda_n x} \, dx} \quad \forall n = 1, \ldots$$