Неоднородные уравнения

$$\begin{cases} P(x,y,u)u_x + Q(x,y,u)u_y = R(x,y,u) \\ u(x_0,y) = H(y) \end{cases}$$

$F(u\sin x,\ u^2\cos y) = 0$ – общ. реш.

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{du}{R}$$

– ур-я характеристик
2-а ОДУ

$$\begin{cases} \psi(x,y,u) = C_1 \\ \varphi(x,y,u) = C_2 \end{cases}$$

– решения ур-ий характеристик

Общее решение ДУЧП в неявном виде

$$F(\psi,\varphi) = 0$$

Общее решение ДУЧП в явном виде

$$\begin{cases} \psi(x,y) = C_1 \\ \varphi(x,y,u) = C_2 \end{cases} \Rightarrow \varphi(x,y,u) = f(\psi(x,y))$$

$u(x,y) = \dots$

Решаем з. Коши

1) подставляем в φ. $x = x_0$

$$\begin{cases} \psi(x_0,y,u) = C_1 \\ \varphi(x_0,y,u) = C_2 \end{cases}$$

2) разрешаем систему отн. y, u

$$\begin{cases} y = \underline{f_1(C_1,C_2)} \\ u = \underline{f_2(C_1,C_2)} \end{cases}$$

3) подставляем правые части в нач. усл.

$$f_2(C_1,C_2) = H(f_1(C_1,C_2))$$

4) Замена $c_1 \to \psi(x, y, u)$

$c_2 \to \varphi(x, y, u)$

$f_2(\psi, \varphi) = H(f_1(\psi, \varphi))$ — решение исх задачи.

Пример

$$\begin{cases} y^2 u_x + xy\, u_y = x \\ u(0, y) = y^2 \end{cases}$$

$$\frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{xy} = \frac{du}{x}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{y^2} = \dfrac{dy}{xy} \\ \dfrac{dy}{xy} = \dfrac{du}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int x\, dx = \int y\, dy \\ \int \dfrac{dy}{y} = \int du \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{y^2}{2} + C \\ \ln y = u + \bar{C} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overbrace{x^2 - y^2}^{\psi} = c_1 \\ \overbrace{u - \ln y}^{\varphi} = c_2 \end{cases}$$

Общее решение в неявн. виде

$F(x^2 - y^2, u - \ln y) = 0$

Общее решение в явном виде

$u - \ln y = f(x^2 - y^2)$

$u(x, y) = \ln y + \underline{\underline{f}}(x^2 - y^2)$

Решаем з. Коши

а). явный вид

$u(0, y) = \ln y + f(-y^2) = y^2$

$f(-y^2) = y^2 - \ln y$ /* $z = -y^2$; $y = \pm\sqrt{-z}$ */

$\underline{\underline{f}}(z) = -z - \ln\sqrt{-z}$

Ответ $u(x, y) = \ln y + y^2 - x^2 - \ln\sqrt{y^2 - x^2}$

б) неявный вид

1) $\begin{cases} -y^2 = C_1 \\ u - \ln y = C_2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} y = +\sqrt{-C_1} \\ u = C_2 + \ln\sqrt{-C_1} \end{cases}$

3) $C_2 + \ln\sqrt{-C_1} = -C_1$

4) $u - \ln y + \ln\sqrt{y^2-x^2} = y^2 - x^2$

$$u(x,y) = \ln y + y^2 - x^2 - \ln\sqrt{y^2-x^2}$$