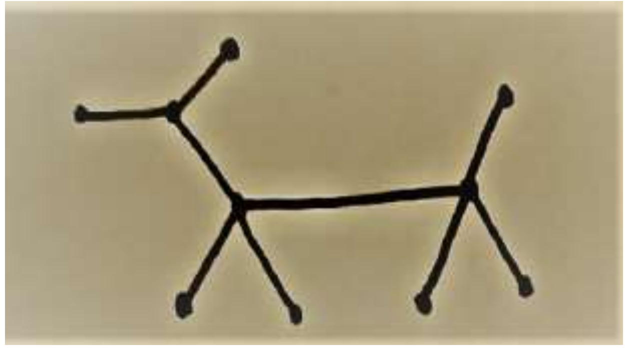
ЛЕСА,
ДЕРЕВЬЯ, ОСТОВЫ

Ациклический граф, т. е. граф без циклов, называется ***лесом***. ***Дерево*** — это связный ациклический граф.

Очевидно, лес не содержит петель и кратных ребер, т. е. лес является обыкновенным графом.



Теорема 1. Для (n, m)-графа G следующие условия эквивалентны:

1) G — дерево;
2) в G нет циклов и $m = n - 1$;
3) G связен и $m = n - 1$;
4) G связен и каждое его ребро – мост;
5) в G любые две вершины соединены точно одной простой цепью;
6) в G нет циклов, и при добавление к G нового ребра возникает точно один цикл.

Доказательство. 1) ⇒ 2). Индукцией по m проверим, что в дереве выполнено равенство $m = n - 1$.

Если $m = 0$, то, очевидно, $n = 1$.

Пусть $m > 0$ и для всех деревьев с числом ребер меньшим m требуемое равенство выполнено.

Рассмотрим дерево G с m ребрами, и выберем в нем произвольное ребро e. Очевидно, e — ациклическое ребро, поэтому граф $G - e$ состоит из двух компонент связности G_1 и G_2, являющихся деревьями.

Применяя к деревьям G_1 и G_2 предположение индукции, получаем, что в каждом из них число ребер на единицу меньше числа вершин. Отсюда сразу следует равенство $m = n_1 - 1 + n_2 - 1 + 1 = n - 1$.

2) ⇒ 3). Пусть G – (n, m, k)-граф и $n_1, n_2, \ldots, n_k$ − число вершин в соответствующих компонентах связности. Поскольку каждая компонента связности является деревом, в силу 1) ⇒ 2) получаем $m = n_1 - 1 + n_2 - 1 + \ldots + n_k - 1 = n - k$ и, следовательно, k = 1.

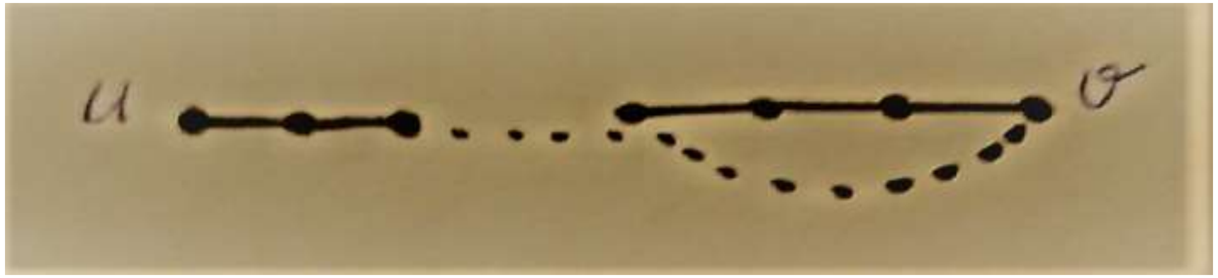
3) ⇒ … ⇒ 1).

Следствие 1. Произвольный (n, m, k)-граф является лесом iff, когда $m = n - k$.

Доказательство. Пусть $n_1, n_2, \dots, n_k$ – число вершин в соответствующих компонентах связности. Поскольку каждая компонента связности является деревом, в силу теоремы1 получаем $m = n_1 - 1 + n_2 - 1 + \dots + n_k - 1 = n - k$.

Лемма 1. В любом неодноэлементном дереве имеется не менее двух висячих вершин.

Доказательство. Пусть u → ... → v – самая длинная незамкнутая простая цепь в дереве. Покажем, что u и v – висячие вершины. Действительно, взятую цепь нельзя продлить, поэтому при deg v ≥ 2 получаем цикл, что невозможно:



Следовательно, deg v = 1 и, аналогично, deg u = 1.
Лемма доказана.

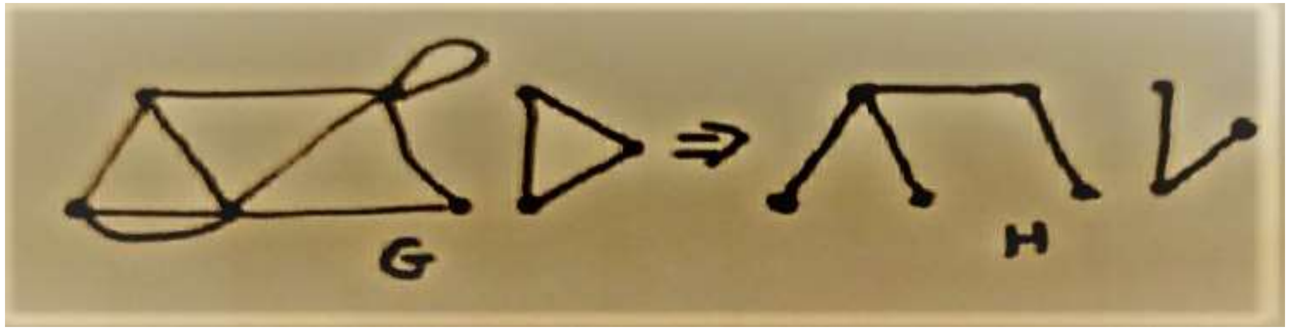
Пусть G — связный (n, m)-граф. Если G содержит хотя бы один цикл, то, удаляя из графа G некоторое ребро этого цикла, мы уменьшим число циклов по крайней мере на единицу, сохранив связность графа. Ясно, что последовательно разрушая циклы данного графа, можно прийти к остовному подграфу, являющемуся деревом.

Такой подграф называется ***остовным деревом связного графа*** G. Поскольку дерево с n вершинами содержит $n - 1$ ребер, для получения остовного дерева из графа G нужно удалить $m - n + 1$ ребер.

Если G — произвольный (n, m, k)-граф, то объединение остовных деревьев его компонент связности приводит к ***остовному лесу*** или ***остову графа*** G.

Поскольку лес с n вершинами и k компонентами связности содержит $n - k$ ребер (это ранг r(G) графа G), для получения остова из графа G нужно удалить $m - n + k$ ребер (это цикломатическое число r*(G) графа G).

Пример графа G и его остова H:



Лемма 2. Максимальные ациклические наборы ребер графа G = (V, E) и только они являются наборами ребер остовов графа *G*.

Доказательство достаточно провести для случая связного графа G.

⇒. Пусть S – максимальный ациклический набор ребер связного графа G. Если подграф H = (V, S) не является остовом графа G, то он имеет не менее двух компонент связности. Тогда в силу связности графа G существует ребро e = uv, которое соединяет вершины u и v из разных компонент графа H. Тогда граф H + e не содержит циклов, что противоречит максимальности ациклического набора ребер S.

⇐. Пусть S – набор ребер остовного дерева H графа *G*. Тогда по определению остова набор S является ациклическим. Если к H добавить любое новое ребро графа G, то в силу теоремы 1 возникнет точно один цикл. Следовательно, S – максимальный ациклический набор ребер графа G.

Лемма доказана.

Лемма 3. Любой ациклический подграф графа *G* содержится в некотором его остове.

Аналоги лемм 2 и 3 для векторных пространств.

Лемма 4. Пусть S и T — остовы графа G. Для любого ребра e из S существует такое ребро f из T, что подграф $S - e + f$ является остовом.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда G — связный граф. Подграф $S - e$ имеет две компоненты связности; обозначим через U и W множества вершин этих компонент. Поскольку остов T является связным графом, существует ребро f из T, соединяющее вершины, одна из которых принадлежит U, а другая — W. Легко понять, что подграф $S - e + f$ ацикличен и связен. Следовательно, $S - e + f$ является остовом.

Лемма доказана.

Лемма Штейница о замене для векторных пространств.