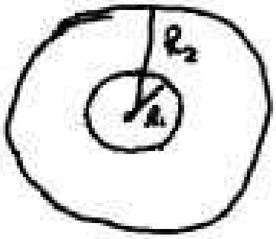
Решение уравнения Лапласа в кольце



$\Delta u = 0$

$0 \le \varphi < 2\pi$

$R_1 < r < R_2$

$u(R_1, \varphi) = g_1(\varphi)$

$u(R_2 \varphi) = g_2(\varphi)$

$$u(r,\varphi) = A_0 \ln r + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) +$$
$$+ r^{-n} (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi) \Big]$$

$$u(R_1 \varphi) = A_0 \ln R_1 + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[R_1^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) + R_1^{-n} (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi) \Big] =$$
$$= g_1(\varphi) \qquad \Big| \int_0^{2\pi} \cdot \quad d\varphi$$

$$u(R_2 \varphi) = A_0 \ln R_2 + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[R_2^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) + R_2^{-n} (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi) \Big] =$$
$$= g_2(\varphi) \qquad \Big| \int_0^{2\pi} \cdot \quad d\varphi$$

/* $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin n\varphi \, d\varphi = 0 \qquad \int_0^{2\pi} \cos n\varphi \, d\varphi = 0$

$$\int_0^{2\pi} \sin n\varphi \cos k\varphi \, d\varphi = 0 \qquad \int_0^{2\pi} \sin n\varphi \sin k\varphi \, d\varphi = \begin{cases} 0, & n \ne k \\ \pi, & n = k \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos n\varphi \cos k\varphi \, d\varphi = \begin{cases} 0, & n \ne k \\ \pi, & n = k \end{cases}$$

*/

$$\begin{cases}\left(R_1^{k} B_k + R_1^{-k} D_k\right)\pi = \int\limits_0^{2\pi} g_1(\varphi)\sin k\varphi \, d\varphi \\ \left(R_2^{k} B_k + R_2^{-k} D_k\right)\pi = \int\limits_0^{2\pi} g_2(\varphi)\sin k\varphi \, d\varphi \end{cases} \Rightarrow B_k, D_k \qquad k=1,2,\dots$$

$$\begin{cases}\left(R_1^{k} A_k + R_1^{-k} C_k\right)\pi = \int\limits_0^{2\pi} g_1(\varphi)\cos k\varphi \, d\varphi \\ \left(R_2^{k} A_k + R_2^{-k} C_k\right)\pi = \int\limits_0^{2\pi} g_2(\varphi)\cos k\varphi \, d\varphi \end{cases} \Rightarrow A_k, C_k \qquad k=1,2,\dots$$

$$\begin{cases}\left(A_0 \ln R_1 + B_0\right)2\pi = \int\limits_0^{2\pi} g_1(\varphi) \, d\varphi \\ \left(A_0 \ln R_2 + B_0\right)2\pi = \int\limits_0^{2\pi} g_2(\varphi) \, d\varphi \end{cases} \Rightarrow A_0, B_0$$

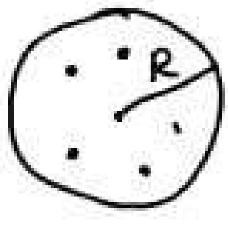
Задача решена.

Решение уравнения Пуассона в полярной системе координат

$0 \le \varphi < 2\pi \qquad u(r,\varphi)$

$$\Delta u = -f(r,\varphi)$$

$$u(R,\varphi) = g(\varphi)$$



1. Внутренняя задача
   $0 \le r < R$
2. Внешняя задача
   $r > R$

$$u = v + \underbrace{w}_{\text{известна}}$$

w - любое частное решение ур-я $\Delta w = -f(r,\varphi)$

$\Delta v + \Delta w = -f(r,\varphi)$

$\Downarrow$

$\boxed{\Delta v = 0}$

$v(R,\varphi) + w(R,\varphi) = g(\varphi)$

$\boxed{v(R,\varphi) = g(\varphi) - w(R,\varphi)}$

$\rightarrow$ Такую задачу решать умеем

$\Downarrow$

v - изв. ф-я

Ответ: $u = v + w$

Решение уравнения Пуассона в кольце

$\Delta u = -f(r,\varphi)$

$R_1 < r < R_2$

$0 \leq \varphi < 2\pi$

$u(R_1,\varphi) = g_1(\varphi)$

$u(R_2,\varphi) = g_2(\varphi)$

$u = v + w$

$\Delta w = -f(r,\varphi) \Rightarrow w$ - любое частное решение

$\Delta v + \Delta w = -f(r,\varphi) \Rightarrow \Delta v = 0$

$v(R_1\varphi) + w(R_1\varphi) = g_1(\varphi) \Rightarrow v(R_1\varphi) = g_1(\varphi) - w(R_1,\varphi)$

$v(R_2\varphi) + w(R_2\varphi) = g_2(\varphi) \Rightarrow v(R_2\varphi) = g_2(\varphi) - w(R_2,\varphi)$

Задача для V – ур-е Лапласа в кольце решать умеем => V – изв. ф-ия.

Ответ $u = V + W$

<u>Пример</u>

$$u(x,y)$$

$$\Delta u = x \qquad (x,y) \in \Omega = \{ (x,y) \mid x^2+y^2 < R^2 \}$$

$$u\big|_\Gamma = 0 \qquad \Gamma = \{ (x,y) \mid x^2+y^2 = R^2 \}$$

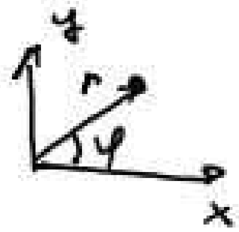
$u = V + W$

$\Delta W = X \quad \Rightarrow \quad W_{xx} + W_{yy} = x$

$W = \dfrac{x^3}{6}$ – частное решение

$u = V + \dfrac{x^3}{6}$

$$\Delta V = 0$$
$$V\big|_\Gamma + \frac{x^3}{6}\Big|_\Gamma = 0$$



$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$

$0 \le \varphi < 2\pi$
$0 \le r < R$

$$\Delta V = 0 \qquad\qquad \Delta V = 0$$
$$V(R,\varphi) + \frac{R^3\cos^3\varphi}{6} = 0 \qquad\Big|\qquad V(R,\varphi) = -\frac{R^3\cos^3\varphi}{6}$$

$$V(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \left(A_n \sin n\varphi + B_n \cos n\varphi\right)$$

$$v(R,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} R^n (A_n \sin n\varphi + B_n \cos n\varphi) = -\frac{R^3 \cos^3\varphi}{6} =$$

/* $\cos^3\varphi = \frac{3\cos\varphi + \cos 3\varphi}{4}$ */

$$= -\frac{R^3}{24}\cos 3\varphi - \frac{R^3}{8}\cos\varphi$$

$A_n = 0$; $\quad B_1 \cdot R = -\frac{R^3}{8} \Rightarrow B_1 = -\frac{R^2}{8}$

$B_n = 0 \quad n \neq 1, 3$; $\quad B_3 \cdot R^3 = -\frac{R^3}{24} \Rightarrow B_3 = -\frac{1}{24}$

$$v = -\frac{R^2}{8} r\cos\varphi + \left(-\frac{1}{24}\right) r^3 \cos 3\varphi$$

$$u(r,\varphi) = -\frac{R^2}{8} r\cos\varphi - \frac{1}{24} r^3 \cos 3\varphi + \frac{r^3\cos^3\varphi}{6} \; -$$

– ответ в полярной системе координат

Можно перейти в декартову сист. коорд

$$u(x,y) = -\frac{R^2}{8}x - \frac{1}{24} r^3 (4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi) + \frac{x^3}{6} =$$

$$= -\frac{R^2}{8}x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{8}x(x^2+y^2) + \frac{x^3}{6} =$$

$$= -\frac{R^2}{8}x + \frac{1}{8}x(x^2+y^2)$$ — ответ в дек с к

Пример

$$\Delta u = x^2 + y^2 \qquad (x,y) = \Omega = \{(x,y) \mid x^2+y^2 < R^2\}$$

$$u|_\Gamma = 0 \qquad \Gamma = \{(x,y) \mid x^2+y^2 = R^2\}$$

$$w = \frac{x^4+y^4}{12} \Rightarrow V(r,\varphi) = -\frac{R^4}{16} - \frac{r^4}{48}\cos 4\varphi$$

$$u(x,y) = -\frac{R^4}{16} + \frac{(x^2+y^2)^2}{16}$$