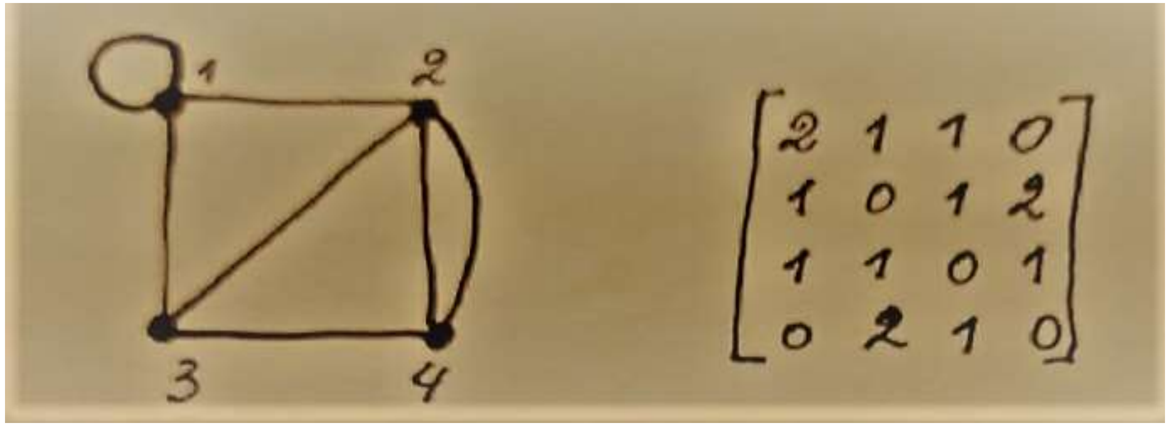
# МАТРИЦЫ,
# АССОЦИИРОВАННЫЕ С ГРАФОМ

Пусть $G$ — произвольный $n$-граф. Упорядочим множество вершин графа

$$VG = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}.$$

Граф, у которого множество занумеровано натуральными числами от 1 до $n$, где $n$ — число вершин графа, называется ***помеченным графом***.

Определим ***матрицу смежности*** $A = A(G) = (\alpha_{ij})_{n\times n}$ графа $G$, полагая $\alpha_{ij}$ равным числу ребер, соединяющих вершины $v_i$ и $v_j$, причем при $i = j$ каждую петлю учитываем дважды.




$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} = \deg v_i$ для любого i и матрица смежности обыкновенного графа бинарна.

Для данного графа имеется, вообще говоря, несколько матриц смежности, отвечающих различным его упорядочениям.

Одна матрица смежности графа получается из другой его матрицы смежности с помощью некоторой перестановки строк и точно такой же перестановки столбцов.

Пусть σ — произвольная подстановка на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$. Определим матрицу $S(\sigma) = (\sigma_{ij})_{n\times n}$, полагая

$$\sigma_{ij} = 1, \text{ если } \sigma(i) = j, \text{ и } \sigma_{ij} = 0, \text{ если } \sigma(i) \neq j.$$

Нетрудно проверить, что $S(\sigma^{-1}) = S^{-1}(\sigma)$ и $S^{-1}(\sigma) A S(\sigma) = S(\sigma^{-1}) A S(\sigma)$.

Последняя матрица получается из матрицы $A$ с помощью перестановки строк и перестановки столбцов, отвечающих подстановке σ. Таким образом, две матрицы смежности графа $G$ подобны.

В силу этого корректно следующее определение. ***Характеристическим многочленом*** графа $G$ называется характеристический многочлен любой из его матриц смежности. Совокупность всех корней характеристического многочлена, с учетом их кратности, называется ***спектром*** графа $G$.

Пусть $G$ — произвольный обыкновенный граф. Упорядочим множество его вершин

$$VG = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}.$$

Определим ***матрицу Кирхгофа*** $B = B(G) = (\beta_{ij})_{n\times n}$, полагая

$$B = \begin{bmatrix} \deg v_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \deg v_2 & \ldots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & \deg v_n \end{bmatrix} - A(G).$$

Отметим, что обыкновенный граф $G$ может иметь несколько различных матриц Кирхгофа, отвечающих различным упорядочениям графа $G$, и все эти матрицы подобны между собой.

**Лемма 1.** Алгебраические дополнения всех элементов матрицы Кирхгофа равны между собой.

**Доказательство.** Обозначим через $\mathbf{1}$ и $\mathbf{1}^{T}$ соответственно столбец и строку длин $n$, состоящие из единиц.

Для матрицы Кирхгофа $B = (\beta_{ij})_{n\times n}$ выполняется

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} = 0 \ (i = 1, 2, \dots, n), \text{ т. е. } B \cdot \mathbf{1} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} = 0 \ (j = 1, 2, \dots, n), \text{ т. е. } \mathbf{1}^{T} \cdot B = 0.$$

Отсюда следует, что $\det B = 0$ и $\operatorname{rank} B \leqslant n - 1$.

Если $\operatorname{rank} B < n - 1$, то все алгебраические дополнения элементов матрицы $B$ равны 0.

Пусть $\operatorname{rank} B = n - 1$ и $B\hat{}$ — присоединенная к $B$ матрица, составленная из алгебраических дополнений $B_{ij}$ элементов $\beta_{ij}$, т. е.

$$B\hat{} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{n1} \\ B_{12} & B_{22} & \dots & B_{n2} \\ & & \ddots & \\ B_{1n} & B_{2n} & \dots & B_{nn} \end{bmatrix}$$

В силу свойств матрицы $B\hat{}$ получаем

$$BB\hat{} = B\hat{}B = (\det B)E = 0.$$

Так как $BB\hat{} = 0$, любой столбец $X$ матрицы $B\hat{}$ удовлетворяет системе $BX = 0$.
Эта система линейных уравнений имеет ранг $n - 1$ и дефект 1.
Так как $B \cdot \mathbf{1} = 0$, этой системе удовлетворяет столбец **1**.

Следовательно, столбцы матрицы $B\hat{}$ пропорциональны столбцу **1**, откуда следует

$$B_{i1} = B_{i2} = \cdot \cdot \cdot = B_{in} \ (i = 1, 2, \dots, n).$$

Аналогично получаем

$$B_{1j} = B_{2j} = \cdot \cdot \cdot = B_{nj} \ (j = 1, 2, \dots, n).$$

Поэтому все элементы матрицы $B\hat{}$ одинаковы.

**Лемма доказана**.

Пусть $G$ — произвольный $(n,m)$-граф. Упорядочим его множества вершин и ребер.

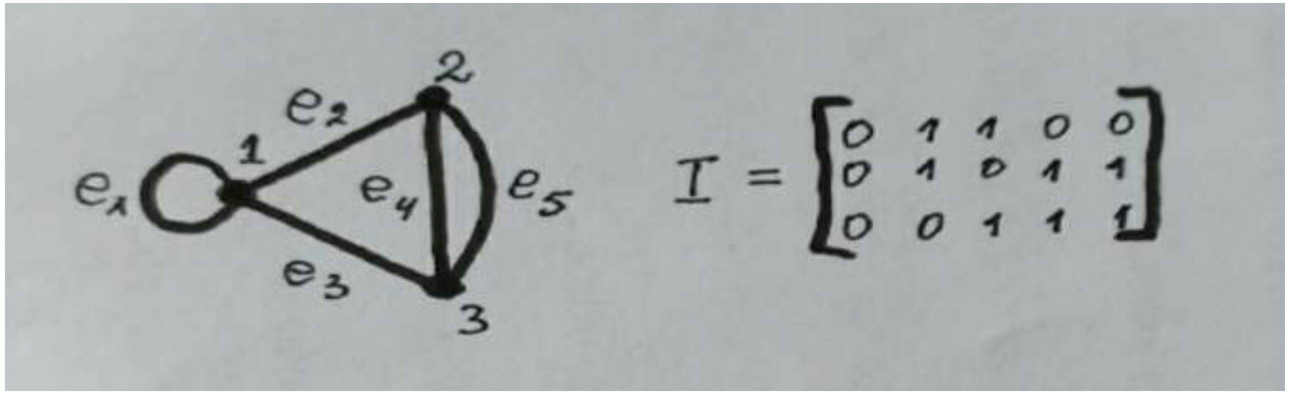
$$VG = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \text{ и } EG = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}.$$

Будем говорить, что граф является ***дважды помеченным***.

Определим бинарную ***матрицу инцидентности*** $I = I(G) = (\iota_{ij})_{n\times m}$ графа $G$, полагая

1) $\iota_{ij} = 1$, если вершина $v_i$ инцидентна ребру $e_j$ и $e_j$ не является петлей;

2) $\iota_{ij} = 0$ во всех остальных случаях.




Здесь вершинам отвечают строки, а ребрам — столбцы.

Заметим, что одна матрица инцидентности графа $G$ получается из другой его матрицы инцидентности с помощью некоторой перестановки строк и некоторой перестановки столбцов.

Рассмотрим теперь произвольный $(n, m)$-орграф $G = (V, D)$. Упорядочим множества вершин и дуг орграфа

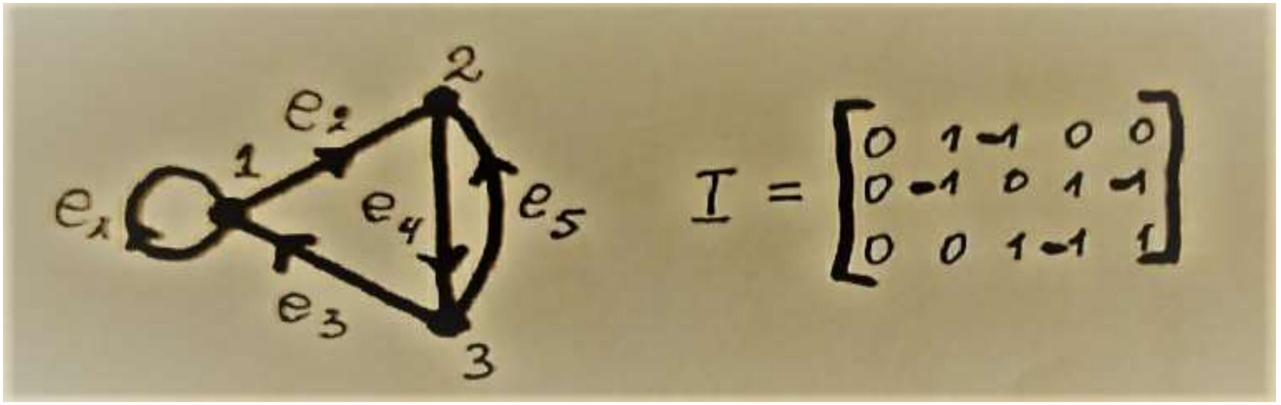
$$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \text{ и } D = \{\mathrm{f}_1, f_2, \ldots, f_m\}.$$

Определим ***матрицу инцидентности*** $I = I(G) = (\iota_{ij})_{n\times m}$ ***ографа*** $G$, полагая

1) $\iota_{ij} = 1$ если $v_i$ начало дуги $f_j$ и $f_j$ не петля;

2) $\iota_{ij} = -1$ если $v_i$ конец дуги $f_j$ и $f_j$ не петля;

3) $\iota_{ij} = 0$ во всех остальных случаях.




Здесь вершинам отвечают строки, а дугам — столбцы.

Пусть $G$ — произвольный обыкновенный (n, m)-граф.

Превратим каждое его ребро в дугу, придав ребру одно из двух возможных направлений. Полученный орграф H на том же множестве вершин V будем называть ***ориентацией*** графа $G$.

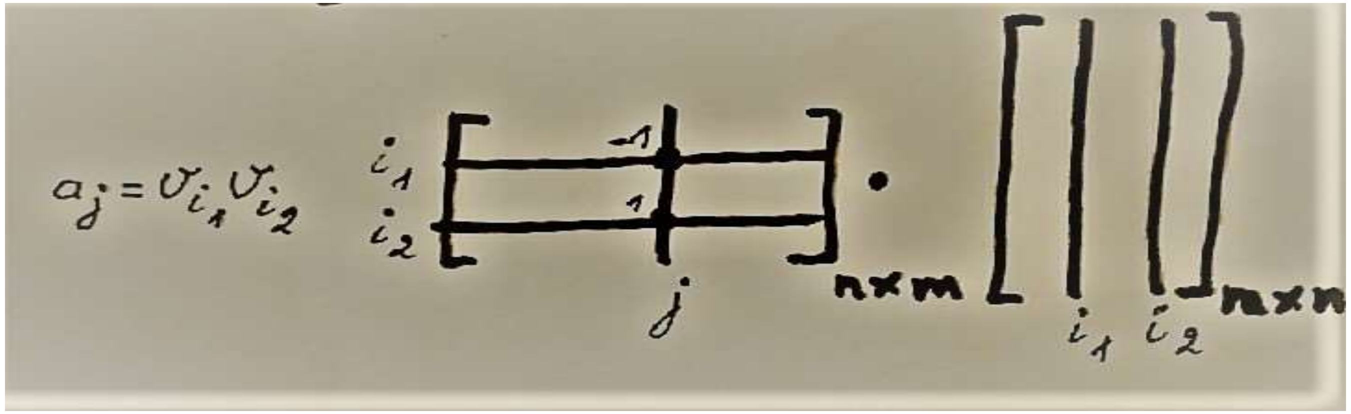
Зафиксируем в $G$ и $H$ одинаковую нумерацию вершин и одинаковую нумерацию соответствующих ребер и дуг.

**Лемма 2.** Пусть $B = B(G)$ — матрица Кирхгофа обыкновенного графа $G$ и $I = I(H)$ — соответствующая матрица инцидентности некоторой его ориентации $H$. Тогда

$$B = I \cdot I^{⍰}.$$

**Доказательство**.

Если умножить $i$-ю строку матрицы $I$ на $i$-й столбец матрицы $I$⍰, то получим сумму квадратов элементов $i$-й строки матрицы $I$, которая равна, очевидно, deg $v_i$.




Пусть теперь $i_1$-строка матрицы $I$ умножается на $i_2$-столбец матрицы $I$⍰. Если имеется дуга из $v_{i_1}$ в $v_{i_2}$ или из $v_{i_2}$ в $v_{i_1}$ с номером j, то получим -1. Если такой дуги нет, то получим 0. **Лемма доказана**.

Заметим, что

1) матрица B является матрицей Грама, составленной из естественных скалярных произведений строк матрицы I;

2) соотношение, указанное для обыкновенного графа в лемме 2, можно переписать в виде:

$$I \cdot I^T = \begin{bmatrix} \deg v_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \deg v_2 & \ldots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \deg v_n \end{bmatrix} - A.$$

Эта формула связывает матрицу смежности *A* обыкновенного графа с матрицей инцидентности *I* его ориентации.