Лекция 4

Начальные условия

$u(0,x)=\varphi(x)$ – начальное смещение струны

$u_t(0,x)=\psi(x)$ – начальные скорости каждой т. струны

Граничные условия

1. I рода (з. Дирихле)

$$u(t,0)=\mu_1(t)$$
$$u(t,l)=\mu_2(t)$$
– законы перемещения граничных точек $x=0$ и $x=l$

$$u(t,0)=0$$
$$u(t,l)=0$$
– границы струны жестко закреплены

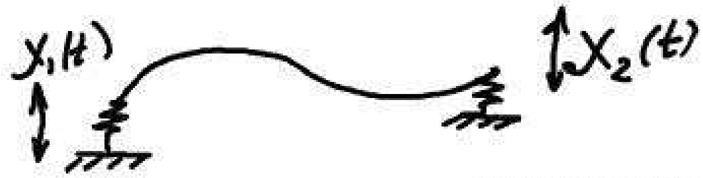
2. II рода (з. Неймана)

$$u_x(t,0)=\nu_1(t)$$
$$u_x(t,l)=\nu_2(t)$$
– силы, действующие на концы струны

$$u_x(t,0)=0$$
$$u_x(t,l)=0$$
– концы струны перемещаются свободно.

3. III рода (з. Робена)

$$u(t,0)+h_1\,u_x(t,0)=\chi_1(t)$$
$$u(t,l)+h_2\,u_x(t,l)=\chi_2(t)$$



Упруго закрепленные концы струны перемещаются по закону $\chi_1(t)$ или $\chi_2(t)$.

$$u(t,0)+h_1u_x(t,0)=0$$

$$u_x(t,0)=\underbrace{-\frac{1}{h_1}u(t,0)}_{\text{сила упругости}}$$

4. Смешанное гр. усл. –

– сочетание гр. усл. разного рода.

Формула Даламбера

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad t>0 \quad x\in R \quad (*) \\ u(0,x) = \varphi(x) \\ u_t(0,x) = \psi(x) \end{cases}$$

1. Приведем ур-е (*) к I канонич. форме

$$\begin{cases} \xi = x+at \\ \eta = x-at \end{cases}$$

$$u_t = u_\xi \xi_t + u_\eta \eta_t = u_\xi a - u_\eta a$$

$$u_{tt} = a(u_\xi - u_\eta)'_t = a(u_{\xi\xi}\xi_t + u_{\xi\eta}\eta_t - u_{\eta\xi}\xi_t - u_{\eta\eta}\eta_t) =$$

$$= a(u_{\xi\xi}a - u_{\xi\eta}a - u_{\eta\xi}a + u_{\eta\eta}a) =$$

$$= \underbrace{a^2(u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta})}$$

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi + u_\eta$$

$$u_{xx} = (u_\xi + u_\eta)'_x = u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x + u_{\eta\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x =$$

$$= \underbrace{u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}}$$

подставляем $\underbrace{\quad}$ в (*)

$$\cancel{a^2}(\cancel{u_{\xi\xi}} - 2u_{\xi\eta} + \cancel{u_{\eta\eta}}) = \cancel{a^2}(\cancel{u_{\xi\xi}} + 2u_{\xi\eta} + \cancel{u_{\eta\eta}})$$

$u_{\xi\eta} = 0 \quad (**)$ – ур-е (*) в I канонич. форме

2. Решаем (**)

$$u_{\xi\eta} = 0$$

$$\int u_{\xi\eta}\, d\eta = \int 0\, d\eta \Rightarrow u_\xi = f(\xi)$$

$$\int u_\xi\, d\xi = \overbrace{\int f(\xi)\, d\xi}^{F(\xi)} \Rightarrow u(\xi,\eta) = F(\xi) + G(\eta) -$$

– общее решение (**)

Обратная замена

$u(t,x) = F(x+at) + G(x-at)$ – общее решение (*)

3. Подставляем решение в нач. усл.

$$u(0,x) = F(x) + G(x) = \varphi(x)$$
$$u_t(0,x) = F'(x)\cdot a + G'(x)(-a) = \psi(x)$$

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = \varphi(x) \\ aF'(x) - aG'(x) = \psi(x) \end{cases} \qquad \int_{x_0}^{x} d\xi$$

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = \varphi(x) \\ \int_{x_0}^{x} F'(\xi) - G'(\xi)\, d\xi = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \psi(\xi)\, d\xi \end{cases} \qquad \left(\int_{x_0}^{x} f'(\xi)\, d\xi = f(x) \right)$$

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = \varphi(x) \\ F(x) - G(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \psi(\xi)\, d\xi + C \end{cases}$$

$$F(x) = \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(\xi)\, d\xi + \frac{C}{2} \quad \checkmark$$

$$G(x) = \frac{\varphi(x)}{2} - \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(\xi)\, d\xi - \frac{C}{2} \quad \checkmark$$

$$u(t,x) = \frac{\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x+at} \psi(\xi)\, d\xi + \cancel{\frac{C}{2}} + \frac{\varphi(x-at)}{2} -$$

$$-\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x-at}\psi(\xi)\,d\xi-\cancel{\frac{C}{2}}=$$

$$=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi+$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x_0}\psi(\xi)\,d\xi=$$

$$\boxed{u(t,x)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi}$$

– ф-ла Даламбера