ДВОЙСТВЕННЫЙ МАТРОИД

Пусть $M = M(E)$ — произвольный матроид.

Для $X \subseteq E$ через $\overline{X}$ будем обозначать, как обычно, его теоретико-множественное дополнение $E \setminus X$.

Для произвольной базы $B \in \mathrm{Bs}$ матроида M множество $\overline{B}$ будем называть его ***кобазой***.

Через Bs^* обозначим множество всех кобаз матроида M, т. е.

$$\mathrm{Bs}^* = \{\overline{B} \mid B \in \mathrm{Bs}\}.$$

Теорема 1. Множество Bs^* всех кобаз матроида удовлетворяет аксиомам баз $(B.1)$ и $(B.2)$.

Доказательство.

Поскольку для любых $X, Y \subseteq E$ условия $X \subseteq Y$ и $\overline{X} \supseteq \overline{Y}$ эквивалентны, аксиома $(B.1)$ очевидно выполняется для Bs^*.

Проверим теперь аксиому Штейница о замене для кобаз (B. 2).

Пусть теперь $\overline{B}_1$ и $\overline{B}_2$ — две кобазы и $p \in \overline{B}_1$. Так как $p \notin B_1$, в множестве $B_1 \cup p$ имеется точно один цикл C.

Поскольку цикл C не лежит в B_2, существует $q \in C \cap \overline{B}_2$. Множество $(B_1 \cup p) \setminus q$ не содержит циклов, так как мы разрушили единственный цикл, удалив элемент q.

Поэтому это множество независимо и его мощность равна мощности базы B_1. Следовательно, $(B_1 \cup p) \setminus q$ — база. Тогда для соответствующей кобазы выполняется

$$\overline{(B_1 \cup p) \setminus q} = \overline{(B_1 \cup p)} \cup q = (\overline{B}_1 \setminus p) \cup q,$$

где $q \notin B_2$, и **терема доказана**.

В силу доказанной теоремы семейство кобаз Bs* задает на E матроид, в котором исходные кобазы играют роль баз. Этот матроид называется ***двойственным*** к матроиду M и обозначается через $M^* = M^*(E)$. Конечно, $(M^*)^* = M$.

Зависимые и независимые множества, циклы матроида M^* называются соответственно ***козависимыми*** и ***конезависимыми*** множествами, ***коциклами*** матроида M.

Ранговая функция матроида M^* называется ***коранговой*** функцией матроида M и обозначается через r^*. Очевидно,

$$r(M) + r^*(M) = |E|.$$

Другие копонятия: ***козамыкание***, ***козамкнутые множества*** или ***колисты***.

Пусть имеется некоторое утверждение о произвольном матроиде.

Если в нем заменить все используемые матроидные понятия на соответствующие копонятия и наоборот, то мы получим утверждение, которое называется ***двойственным*** к исходному утверждению.

Очевидно справедлив

Принцип двойственности. *Если некоторое утверждение верно для любого матроида, то двойственное к нему утверждение также верно для любого матроида.*

Следующая лемма легко вытекает из определений.

Лемма 1. Произвольное подмножество элементов матроида зависимо iff, когда оно имеет непустое пересечение с каждой кобазой.

В силу принципа двойственности верно следующее двойственное утверждение.

Лемма 1*. Произвольное подмножество элементов матроида козависимо iff, когда оно имеет непустое пересечение с каждой базой.

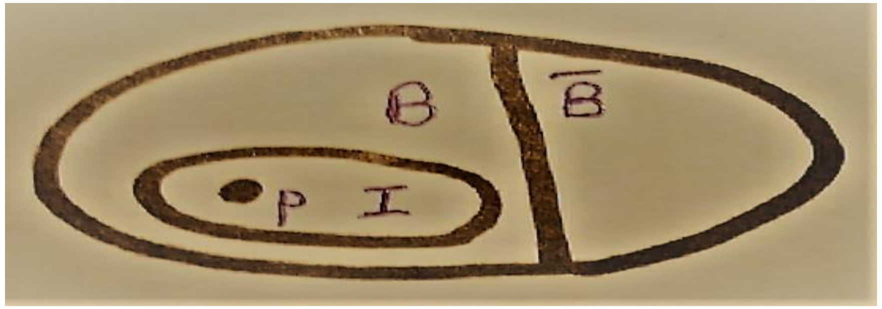
Лемма 2. Для любого непустого независимого множества $I \subseteq E$ матроида M существует такой коцикл C^*, что $|I \cap C^*| = 1$.

Доказательство. Продолжим множество I до некоторой базы B. Возьмем $p \in I$.

Тогда $\overline{B} \cup p$ содержит точно один коцикл C^*, для которого выполняется

$$C^* \cap B = \{p\} = C^* \cap I.$$

Лемма доказана.



Лемма 3. Для любого цикла C и любого коцикла C^* выполняется условие

$$|C \cap C^*| \neq 1.$$

Доказательство. Предположим, от противного, что $C \cap C^* = \{p\}$. Поскольку в силу леммы 2 коцикл C^* — это минимальное подмножество из E, имеющее непустое пересечение с каждой базой, множество $\overline{C^*}$ — это максимальное подмножество из E, не содержащее баз. Следовательно, $\overline{C^*} \cup p$ содержит некоторую базу B. Множество $C \setminus p$ независимо и лежит в $\overline{C^*} \cup p$. По аксиоме независимости $(I.2')$ существует база B_1 такая, что

$$C \setminus p \subseteq B_1 \subseteq \overline{C^*} \cup p$$

(поскольку $\overline{C^*} \cup p$ содержит базу B, любое максимальное независимое подмножество из $\overline{C^*} \cup p$ является базой матроида). Так как $\overline{C^*}$ не содержит баз, имеем $p \in B_1$. Следовательно, $C \subseteq B_1$, что невозможно.

Лемма доказана.

Теорема 2. Подмножество $X \subseteq E$ является циклом матроида M iff, когда X есть минимальное множество среди непустых подмножеств из E, удовлетворяющих свойству:

$$|X \cap C^*| \neq 1 \text{ для любого коцикла } C^*.$$

Доказательство. Если X является циклом матроида, то силу леммы 3 он удовлетворяет требуемому свойству, а в силу леммы 2 имеет место необходимая минимальность.

Обратно, пусть X — минимальное множество среди непустых подмножеств из E, удовлетворяющих указанному свойству.

В силу леммы 2 множество X зависимо и, следовательно, содержит некоторый цикл C.
На основании леммы 3 и минимальности X получаем $X = C$.

Теорема доказана.

Пусть E — конечное непустое множество.

Если в качестве единственной базы взять множество E, то получим, очевидно, матроид, который называют ***свободным*** или ***дискретным матроидом*** на E.

Для свободного матроида выполняется $\mathrm{Ind} = \mathcal{P}(E)$, $r(A) = |A|$ $(A \subseteq E)$ и $\mathrm{Ccl} = \emptyset$.

Матроид на E, двойственный к свободному матроиду, называется ***тривиальным матроидом***.

Он имеет единственное независимое множество и единственную базу — пустое множество, поэтому $r(A) = 0$ для любого $A \subseteq E$.

Его циклами являются одноэлементные подмножества из E.

Пусть G — ненулевой (n, m, k)-граф. Рассмотрим ***матроид циклов*** $M = M(G)$ графа G на множестве $E = EG$.

Базы этого матроида — это множества ребер графа, составляющие его остовы, ранг $r(M) = n - k$ есть ранг графа G, а его коранг $r^*(M) = m - r(M) = m - n + k$ совпадает с цикломатическим числом графа G.

Пусть B — база матроида $M(G)$. Соответствующую кобазу $\overline{B}$ называют ***коостовом*** (это множество ребер графа, которые нужно отбросить, чтобы получить его остов).

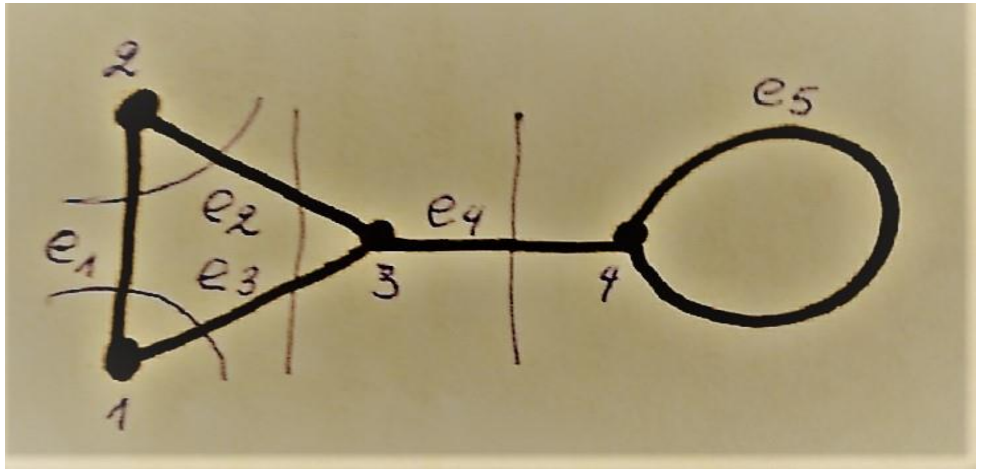
В силу леммы 1* козависимые множества матроида $M(G)$ — это те и только те множества ребер графа, которые имеют непустое пересечение с каждой базой.

Следовательно, козависимые множества из $M(G)$ – это те и только те множества ребер, при удалении которых в графе G разрушаются все остовы, т. е. увеличивается число компонент связности.

Таким образом, козависимые множества из $M(G)$ — это в точности разрезающие множества ребер графа, а коциклы — это разрезы.

Следовательно, циклы и разрезы графа — это взаимно двойственные объекты! Матроид $M^*(G)$, двойственный к $M(G)$, называют ***матроидом разрезов*** графа G. Отметим, что для любого дерева T матроид $M(T)$ свободен, а матроид $M^*(T)$ тривиален.

Пример. Рассмотрим матроид циклов следующего графа G = (V, E):



Тогда

1) $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ — основное множество матроида циклов $M(G)$ графа G;

2) $B_1 = \{e_2, e_3, e_4\}$, $B_2 = \{e_1, e_3, e_4\}$, $B_3 = \{e_1, e_2, e_4\}$ — множество баз (остовов);

3) $\overline{B}_1 = \{e_1, e_5\}$, $\overline{B}_2 = \{e_2, e_5\}$, $\overline{B}_3 = \{e_3, e_5\}$ — множество кобаз (коостовов);

4) $C_1^* = \{e_1, e_2\}$, $C_2^* = \{e_1, e_3\}$, $C_3^* = \{e_2, e_3\}$, $C_4^* = \{e_4\}$ — множество коциклов, совпадающее с множеством разрезов этого графа G.