Th Коши-Ковалевской (о $\exists!$ з. Коши для ДУЧП)

Существует единственное аналитическое в окрестности т. $(x_1^0 \ldots x_n^0)$ решение ДУЧП, разрешенного относительно одной из старших производных

$$\frac{\partial^p u}{\partial x_1^p} = f\left(x_1, \ldots x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial^p u}{\partial x_2^p}, \ldots \frac{\partial^p u}{\partial x_n^p}\right)$$

с заданными условиями

$$u(x_1^0, x_2, \ldots x_n) = \varphi_0(x_2, \ldots x_n)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1^0, x_2, \ldots x_n) = \varphi_1(x_2, \ldots x_n)$$

. . . . - - - - - - .

$$\frac{\partial^{p-1} u(x_1^0, x_2, \ldots x_n)}{\partial x_1^{p-1}} = \varphi_{p-1}(x_2, \ldots x_n)$$

если

1) ф-ии $\varphi_0, \varphi_1 \dots \varphi_{p-1}$ являются аналитическими ф-ями в окр т. $(x_2^0 \dots x_n^0)$

2) ф-я f является аналит. ф-ей своих аргументов

<u>Def</u> Ф-я $f(x_1, \dots x_n)$ наз. аналитической, если она совпадает с рядом Тейлора в окр. любой т. обл. определения.

<u>Т.</u> Устойчивости з. Коши
Для любого промежутка времени $[0, t_0]$ и $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta(\varepsilon, t_0)$: любые 2-а решения $u_1(t,x)$, $u_2(t,x)$ ур-я

✓ $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ •

будут отличаться меньше, чем на ε
$|u_1(t,x) - u_2(t,x)| < \varepsilon$, если только нач. условия

✓ $\begin{cases} u_1(0,x) = \varphi_1(x) \\ (u_1)'_t(0,x) = \psi_1(x) \end{cases}$; $\begin{cases} u_2(0,x) = \varphi_2(x) \\ (u_2)'_t(0,x) = \psi_2(x) \end{cases}$ •

отличаются меньше, чем на δ

$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \delta$; $|\psi_1(x) - \psi_2(x)| < \delta$

▶ $u_1(t,x) = \dfrac{\varphi_1(x+at) + \varphi_1(x-at)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at} \psi_1(\xi)\, d\xi$

$u_2(t,x) = \dfrac{\varphi_2(x+at) + \varphi_2(x-at)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at} \psi_2(\xi)\, d\xi$

$|u_1(t,x) - u_2(t,x)| \leq \frac{1}{2}|\varphi_1(x+at) - \varphi_2(x+at)| + \frac{1}{2}|\varphi_1(x-at) -$
$- \varphi_2(x-at)| + \frac{1}{2a}\left|\int_{x-at}^{x+at} \psi_1(\xi) - \psi_2(\xi)\, d\xi\right| \leq$

$$\leq \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} |\psi_1(\xi) - \psi_2(\xi)|\, d\xi <$$

$$< \delta + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \delta\, d\xi = \delta + \frac{1}{2a}\delta\, 2at = \delta(1+t) \leq \delta(1+t_0)$$

$$\varepsilon = \delta(1+t_0) \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{1+t_0} \Rightarrow |u_1(t,x) - u_2(t,x)| < \varepsilon$$

◄