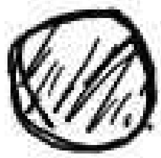
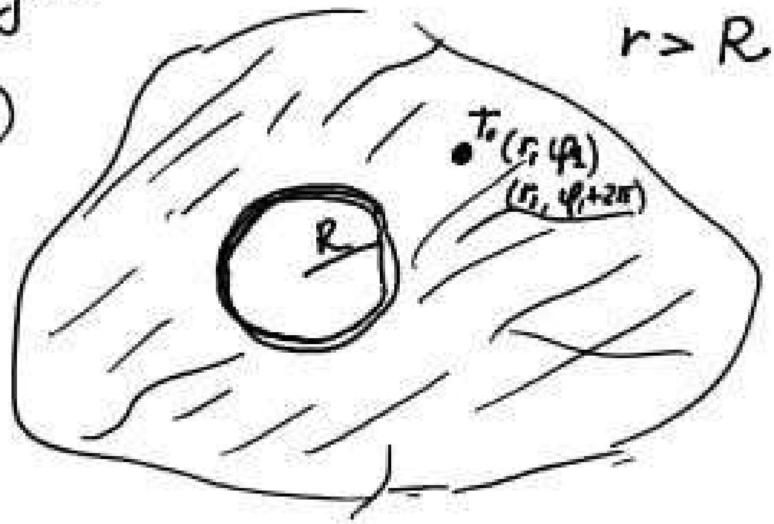
Решение уравнения Лапласа для круга

1)



$0 \le r < R$

2)



$r > R$

$u(r,\varphi)$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(R,\varphi) = g(\varphi) \end{cases}$$

1. Внутренняя $0 \le r < R; \quad \varphi \in [0, 2\pi)$
2. Внешняя $r > R; \quad \varphi \in [0, 2\pi)$

Важно! Решение задачи – периодическая ф-я с периодом укладывающимся в 2π.

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = 0$$

$$u(r,\varphi) = Y(r)\Phi(\varphi)$$

$$Y''\Phi + \frac{1}{r} Y'\Phi + \frac{1}{r^2} Y\Phi'' = 0 \quad \Big| : Y\Phi$$

$$\frac{Y''}{Y} + \frac{Y'}{rY} + \frac{\Phi''}{r^2\Phi} = 0 \quad \Big| \cdot r^2$$

$$\frac{r^2Y''+rY'}{Y} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = C$$

$$r^2Y''+rY' = CY$$

$$\Phi'' = -C\Phi$$

1. $C = -\lambda^2 < 0$

$\Phi'' = \lambda^2\Phi \Rightarrow \mu^2 = \lambda^2 \Rightarrow \mu = \pm\lambda$

$\Phi = Ae^{\lambda\varphi} + Be^{-\lambda\varphi}$ не периодич. ф-я.

$\varnothing$

2. $C = 0$

$\Phi'' = 0 \Rightarrow \Phi = A\varphi + B \Rightarrow A = 0$

$\Phi = B$ - подходит.

3. $C = \lambda^2 > 0$

$\Phi'' = -\lambda^2\Phi$; $\mu^2 = -\lambda^2 \Rightarrow \mu = \pm i\lambda$

$\Phi = A\sin\lambda\varphi + B\cos\lambda\varphi$

$\lambda = n = 0, 1, 2, \ldots$ Φ - периодич. ф-я с периодом, уклад. в 2π

$$\Phi_n(\varphi) = A_n\sin n\varphi + B_n\cos n\varphi \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Решаем задачу для $Y(r)$

$$r^2Y_n'' + rY_n' - n^2Y_n = 0$$

$n \neq 0$

уравнение Эйлера

$$Y_n \sim r^\alpha$$

$$\underline{r^2}\,\alpha(\alpha-1)\underline{r^{\alpha-2}} + \underline{r}\,\alpha\,\underline{r^{\alpha-1}} - n^2\,\underline{r^\alpha} = 0$$

$$\alpha^2 - \alpha + \alpha - n^2 = 0$$

$$\alpha^2 = n^2 \Rightarrow \alpha = \pm n$$

$$Y_n = \mathcal{D}_n r^n + \mathcal{E}_n r^{-n} \qquad n = 1, 2, \dots$$

$n = 0$

$$r^2 Y_0'' + r Y_0' = 0$$

$$Y_0' = V$$

$$r^2 V' + r V = 0$$

$$\frac{dV}{V} = -\frac{dr}{r}$$

$$\ln \bar{V} = -\ln r + \tilde{K}$$

$$\bar{V} = \frac{k}{r}$$

$$Y_0' = \frac{k}{r} \Rightarrow \qquad dY_0 = \frac{k\,dr}{r} \Rightarrow Y_0 = k\ln r + F$$

$$Y_0(r) = k\ln r + F$$

Общее решение уравнение Лапласа

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(r)\,\Phi_n(\varphi) = k_0 \ln r + F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathcal{D}_n r^n + \mathcal{E}_n r^{-n}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(A_n \sin n\varphi + B_n \cos n\varphi\right)$$

1. Внутренняя задача

$$0 \le r < R$$

$k_0 \equiv 0 \quad E_n \equiv 0$ => ограниченное решение

$$\boxed{u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \left(A_n \sin n\varphi + B_n \cos n\varphi \right)}$$

Г.У.

$$u(R,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} R^n \left(A_n \sin n\varphi + B_n \cos n\varphi \right) = g(\varphi) \quad \Big| \cdot \int_0^{2\pi} \sin k\varphi \, d\varphi, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\int_0^{2\pi} \cos k\varphi \, d\varphi, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi, \quad k = 0$$

$$R^k A_k \pi = \int_0^{2\pi} g(\varphi) \sin k\varphi \, d\varphi$$

$$\boxed{A_k = \frac{1}{\pi R^k} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \sin k\varphi \, d\varphi, \quad k = 1, 2, \dots}$$

$$R^k B_k \pi = \int_0^{2\pi} g(\varphi) \cos k\varphi \, d\varphi$$

$$\boxed{B_k = \frac{1}{\pi R^k} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \cos k\varphi \, d\varphi}$$

$$B_0 2\pi = \int_0^{2\pi} g(\varphi) \, d\varphi$$

$$\boxed{B_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \, d\varphi}$$

2) Внешняя задача

$$r > R$$

Для ограниченности решения при $r \to \infty$

$k_0 \equiv 0; \; D_n \equiv 0$

$$u(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty} r^{-n}\left(A_n \sin n\varphi + B_n \cos n\varphi\right)$$

$$u(R,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty} R^{-n}\left(A_n \sin n\varphi + B_n \cos n\varphi\right) = g(\varphi) \quad \Big| \int_0^{2\pi} \sin k\varphi \, d\varphi$$

$k=1,2,\dots$

$$\int_0^{2\pi} \cos k\varphi \, d\varphi$$

$k=1,2,\dots$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$A_k = \frac{R^k}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \sin k\varphi \, d\varphi$$

$k=1,2,\dots$

$$B_k = \frac{R^k}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \cos k\varphi \, d\varphi$$

$k=1,2,\dots$

$$B_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \, d\varphi$$