I. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Определение 1. Функция

$$\mathcal{F}[f](\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx. \qquad (1)$$

Называется *преобразованием Фурье* функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$.

Интеграл здесь понимается в смысле главного значения

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx=\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)e^{-i\xi x}dx.$$

и считается что он существует.

Если $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ — абсолютно интегрируемая на $\mathbb{R}$ функция, то, поскольку $\left|f(x)e^{-i\xi x}\right|=\left|f(x)\right|$ при $x,\xi\in\mathbb{R}$, для любой такой функции имеет смысл преобразование Фурье (1), причем интеграл (1) сходится абсолютно и равномерно по ξ на всей прямой $\mathbb{R}$.

2. Свойства преобразования Фурье

Если не оговорено иное, полагаем, что функции $f(x)$ и $g(x)$ являются оригиналами экспоненциального преобразования Фурье, а $\tilde{f}(\nu)$ и $\tilde{g}(\nu)$ – образы Фурье этих функций. Сформулируем основные свойства преобразования Фурье.

1. ***Линейность преобразования Фурье:***

$$\mathrm{F}\left[\alpha f+\beta g\right](\nu)=\alpha\tilde{f}(\nu)+\beta\tilde{g}(\nu),\quad \alpha,\beta\in\mathbf{R}.$$

2. ***Теорема запаздывания:***

$$\mathrm{F}\left[f(x-m)\right](\nu)=e^{-i2\pi m\nu}\tilde{f}(\nu),\quad m\in\mathbf{R}.$$

3. ***Теорема подобия:***

$$\mathrm{F}\left[f\left(\frac{x}{a}\right)\right](\nu)=a\tilde{f}(\nu a),\quad a\neq 0.$$

4. ***Теорема смещения:***

$$\mathrm{F}\left[e^{i2\pi\lambda x}f(x)\right](\nu)=\tilde{f}(\nu-\lambda),\quad \lambda\in\mathbf{R}.$$