МАТРОИДЫ И ГРАФЫ

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Пусть V — непустое конечное множество.

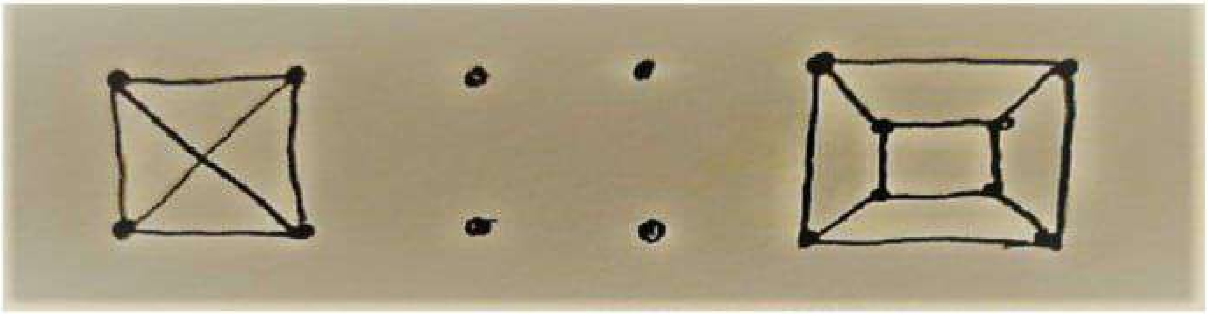
Обыкновенным графом G называется пара множеств (V, E), где E — произвольное множество двухэлементных подмножеств из V.

Элементы множеств V и E называют соответственно ***вершинами*** и ***ребрами*** графа G. Множества вершин и ребер графа G будем обозначать также через VG и EG.

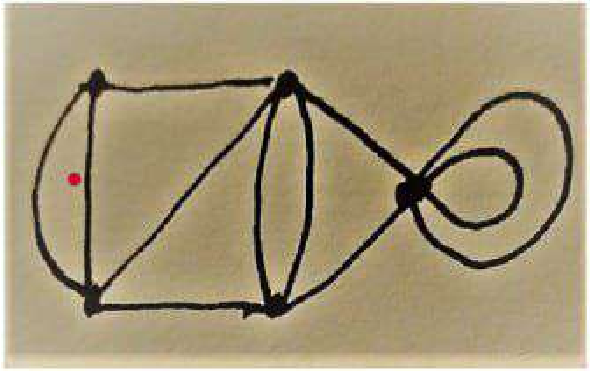
Если n = | V | и m = | E |, то G называют (n, m)-***графом***.

Обыкновенные графы удобно представлять в виде ***диаграмм***, на которых вершинам соответствуют выделенные точки, а ребрам — непрерывные кривые, соединяющие эти точки.

На рис. изображены диаграммы трех обыкновенных графов.



Мы будем рассматривать также объекты более общего вида, чем обыкновенные графы.



Такие объекты в дальнейшем будут называться ***графами***.

На рис. изображен граф, в котором существуют пары вершин, соединенные более чем одним ребром.

Различные ребра, соединяющие две данные вершины, называются ***кратными***.

Граф, изображенный на рис., содержит ребра, соединяющие вершину саму с собой. Такие ребра называют ***петлями***.

Более точно, ***графом*** называют тройку (V, E, φ) , где V, E — конечные множества, $V \neq \varnothing$ и φ — отображение из E в множество не более чем двухэлементных непустых подмножеств из V.

Если $\varphi(e) = \{u, v\}$, где $u \neq v$, то говорят, что ребро e ***соединяет вершины*** u, v.
В этом случае будем писать $e = uv$.

Если $\varphi(e) = \{u\}$, то ребро e называют ***петлей*** в вершине u. В этом случае будем также писать $e = uu$ и говорить, что e ***соединяет вершину*** u ***саму с собой***.

Мы часто будем опускать φ и представлять граф в виде $G = (V, E)$.

Граф есть набор из двух множеств произвольной природы — непустого множества вершин и множества ребер, причем каждому ребру соответствуют две концевые вершины, которые, вообще говоря, могут и совпадать (в этом случае ребро является петлей).

Отметим, что ***обыкновенный граф*** — это граф без петель и кратных ребер.

Граф G, имеющий n вершин, часто называют n-***графом***; если, кроме того, G содержит m ребер, то G — (n,m)-***граф***.

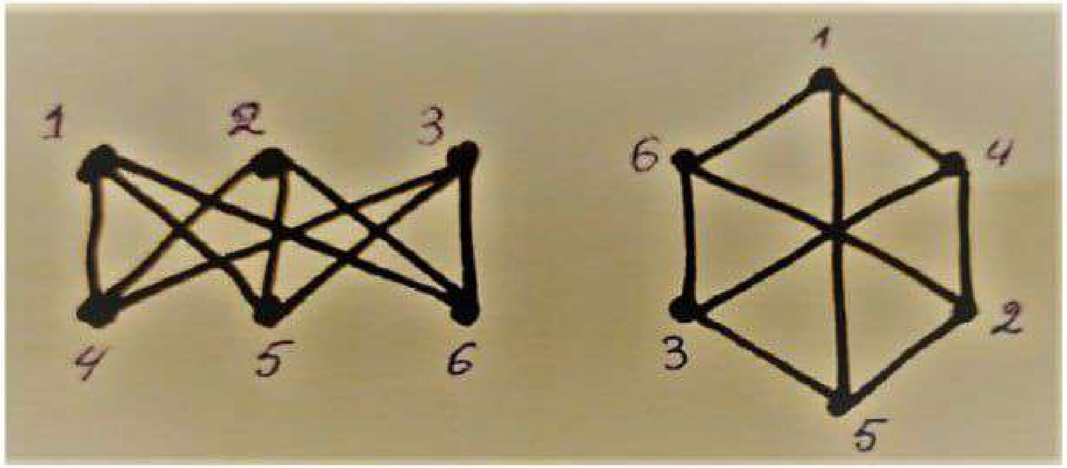
Если $e = uv$ — некоторое ребро данного графа, то вершины u, v называются ***смежными***; говорят также, что u, v — ***концевые вершины*** ребра e.

Ребро e и вершина v ***инцидентны***, если v — концевая вершина для e.

Ребра e и f называются ***смежными***, если они имеют общую концевую вершину.

Пусть $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ — два графа.

Биективное отображение $\psi : V_1 \to V_2$ называется ***изоморфизмом*** G_1 на G_2, если для любых $u, v \in V_1$ число ребер, соединяющих вершины u и v в G_1, равно числу ребер, соединяющих $\psi(u)$ и $\psi(v)$ в G_2
(разумеется, при $u = v$ число петель в вершине u равно числу петель в вершине $\psi(u)$).

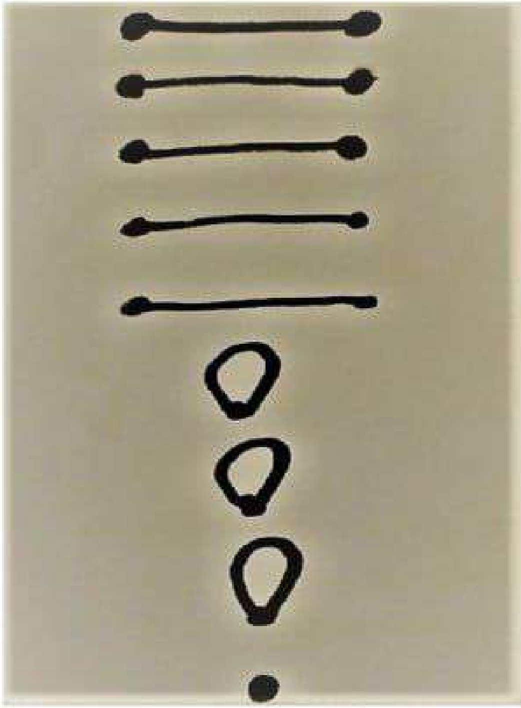


Пример. Школьный класс, учитель и школьники.

Вершины графа – люди в классе,

Ребра графа – парты, за которыми сидят школьники. За каждой партой сидит кто-либо и за каждой партой сидит не более двух школьников.

Возможная диаграмма такого графа:



Отношение ≪***быть изоморфными***≫ на совокупности всех графов является отношением эквивалентности. Совокуность всех графов разбивается на классы попарно изоморфных графов. Заметим, что диаграмма задает граф с точностью до изоморфизма.

Степенью вершины v называется число ребер, инцидентных этой вершине, причем каждая петля учитывается дважды.

Степень вершины v обозначается через $\deg G(v)$ или просто через $\deg v$. Ясно, что в обыкновенном графе степень вершины v равна количеству вершин, смежных с v.

Окружением $N(v)$ вершины v называется множество всех вершин, смежных с v.

Если $\deg v = 0$, то вершина v называется ***изолированной***, а
если $\deg v = 1$, то — ***висячей***.

Ребро e, инцидентное висячей вершине, также называют ***висячим***.

Лемма 1 (о рукопожатиях). Пусть G — произвольный граф. Тогда

$$\sum_{v\in VG} \deg v = 2|EG|.$$

Доказательство. При подсчете суммы степеней произвольное ребро $e = uw$ внесет свой вклад, равный единице, как в $\deg u$, так и в $\deg w$, причем петля будет учитываться дважды.

Следствие. Произвольный граф содержит четное число вершин нечетной степени.

Доказательство. Пусть V_0 и V_1 — соответственно множества вершин четной и нечетной степени. Тогда

$$\sum_{v\in V_0} \deg v + \sum_{v\in V_1} \deg v = 2|EG|.$$

Ясно, что первое слагаемое четно. Поэтому второе слагаемое также четно. Так как во второй сумме все слагаемые нечетны, их число четно. Следовательно, множество V_1 содержит четное число вершин и **следствие доказано**.

Граф G называется ***нулевым*** или ***вполне несвязным***, если множество его ребер EG пусто.

Нулевой n-граф будем обозначать через O_n.

Диаграмма графа O_4 приведена на рис. 1.

Ясно, что нулевой граф является обыкновенным графом.

Обыкновенный граф G называется ***полным графом***, если любые его две различные вершины смежны.

Для полного n-графа применяется обозначение K_n.

На рис. 1 приведена также и диаграмма графа K_4.

Степень каждой вершины в графе K_n равна $n - 1$, а число ребер в K_n равно $n(n - 1) / 2$.

Граф G называют ***двудольным***, если множество VG можно разбить на два непустых подмножества X и Y так, что любое ребро графа соединяет вершину из X с вершиной из Y. Множества X и Y — это доли двудольного графа G.

Если любые вершины $x \in X$ и $y \in Y$ смежны и двудольный граф является обыкновенным графом , то G называют ***полным двудольным графом***.

Если $|X| = p$, $|Y| = q$, то такой полный двудольный граф обозначают через $K_{p,q}$.

Граф H называется ***подграфом*** графа G, если $VH \subseteq VG$ и $EH \subseteq EG$.

В число подграфов графа G будем включать и пустой подграф $\varnothing$.

Если $VH = VG$, то подграф H называется ***остовным подграфом***.

Пусть U — подмножество из VG. Обозначим через D множество всех ребер $e = uv \in EG$ таких, что $u, v \in U$. Граф $G(U) = (U, D)$ называется ***подграфом, порожденным множеством вершин*** U.

Аналогично определяется подграф, порожденный заданным множеством ребер. Пусть $D \subseteq EG$. Обозначим через U множество всех вершин, являющихся концевыми для ребер из D. Граф $G(D) = (U, D)$ называют ***подграфом, порожденным множеством ребер*** D

Пусть G — произвольный граф и H — его подграф.

С каждой вершиной v и каждым ребром e можно связать подграфы

$$H - v,\ H - e \text{ и } H + e.$$

Подграф $H - v$ получается из подграфа H удалением вершины v и всех инцидентных этой вершине ребер. Отметим, что если v не лежит в подграфе H, то $H - v = H$.

Подграф $H - e$ получается из H удалением ребра e. Здесь также $H - e = H$, если e не лежит в H.

Подграф $H + e$ получается из H добавлением ребра e и двух его концевых вершин.

Через $\mathrm{Sub}(G)$ будем обозначать множество всех подграфов графа G.

Определим отношение G на $\mathrm{Sub}(H)$, полагая $H_1 \leqslant H_2$ для подграфов H_1 и H_2 графа G iff, когда H_1 является подграфом в H_2, т. е. когда $VH_1 \subseteq VH_2$ и $EH_1 \subseteq EH_2$.

Отношение $\leqslant$ является частичным порядком на $\mathrm{Sub}(G)$. Будем говорить, что H_1 содержится в H_2, если $H_1 \leqslant H_2$.

Пусть H_1 и H_2 — произвольные подграфы графа G.

Определим объединение $H_1 \cup H_2$ подграфов H_1 и H_2, полагая

$$V(H_1 \cup H_2) = VH_1 \cup VH_2 \quad \text{и} \quad E(H_1 \cup H_2) = EH_1 \cup EH_2.$$

$H_1 \cup H_2$ является точной верхней границей для H_1 и H_2 в $\mathrm{Sub}(G)$ относительно $\leqslant$.

Определим пересечение $H_1 \cap H_2$ подграфов H_1 и H_2, полагая

$$V(H_1 \cap H_2) = VH_1 \cap VH_2 \quad \text{и} \quad E(H_1 \cap H_2) = EH_1 \cap EH_2.$$

$H_1 \cap H_2$ является точной нижней границей для H_1 и H_2 в $\mathrm{Sub}(G)$ относительно $\leqslant$.

Нетрудно установить, что $\mathrm{Sub}(G)$ является дистрибутивной решеткой относительно $\leqslant$ с указанными операциями $\cup$ и $\cap$.

Пусть $H_1, H_2, \ldots, H_t$ — подграфы графа G, которые попарно не пересекаются.
$H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_t$ называется дизъюнктным объединением и обозначается через

$$H_1 \dot\cup H_2 \dot\cup \cdots \dot\cup H_t.$$