Лекция №2

Решение ДУЧП 1 порядка

Def Лин. диф. ур. в ч.п. 1-го порядка наз. ур-е вида

$$A_1(x_1, \ldots x_n) u_{x_1} + \ldots A_n(x_1, \ldots x_n) u_{x_n} = G(x_1, \ldots x_n, u)$$

A_i – непр. ф-ии, имеющ ч.п 1-го порядка, одновремен не обращ. в 0.

Однородные ур-я

$u(x, y)$

$$a u_x + b u_y = 0$$

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} \quad \text{– ур-е характеристик ОДУ}$$

$g(x,y) = C$ – решение ур-я хар-к

$u(x,y) = G(g(x,y))$ – общее решение исх. задачи.

Замечание 1

a, b – const

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} \Rightarrow \int b\,dx = \int a\,dy \Rightarrow bx = ay + C \Rightarrow bx - ay = C$$

$u(x,y) = G(bx - ay)$ – ответ.

Проверка

$$a \cdot G'(bx - ay)'_x + b\,G'(bx - ay)'_y = aG'b + bG'(-a) = 0$$

Замечание 2

НУ и/или ГУ позволяют определить G единств. образом

Пример

$$\begin{cases} u_x + x u_y = 0 & y \in \mathbb{R},\ x > 0 \\ u(0,y) = 5y \end{cases}$$

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{x} \Rightarrow \int x\,dx = \int dy \Rightarrow \frac{x^2}{2} = y + C \Rightarrow \frac{x^2}{2} - y = C$$

$u(x,y) = G\left(\frac{x^2}{2} - y\right)$ – общее решение

$u(0,y) = G(-y) = 5y$ /* $z = -y \Rightarrow y = -z$ */

$G(z) = -5z$

Ответ $u(x,y) = -5\left(\frac{x^2}{2} - y\right)$.