Разбиения натуральных чисел

Графические разбиения

Пример. $26 = 6 + 5 + 4 + 4 + 3 + 2 + 1 + 1$;

$$\lambda = (6, 5, 4, 4, 3, 2, 1, 1, 0, 0, \dots);$$

$$\ell(\lambda) = 8; \ \mathrm{sum}(\lambda) = 26.$$

Р*азбиение* – последовательность $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ целых неотрицательных чисел, которая является невозрастающей и содержит конечное число ненулевых компонент.

sum(λ) – сумма всех компонент разбиения λ, называется весом *разбиения* λ.

Длина ℓ(λ) разбиения λ – число его ненулевых компонент. Для удобства разбиение λ иногда будем записывать в виде $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t)$, где $t \geq \ell(\lambda)$, т. е. будем опускать нули, начиная с некоторой нулевой компоненты.

Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646 - 1716).

Задача о вычислении функции p(n), равной числу разбиений натурального числа n.

Филипп Ноде в 1740 г. Предложил эту задачу **Леонарду Эйлеру.**

Примеры результатов Эйлера (опубликовал более 850 работ).

1) **Тождество**: Для любого натурального числа n число разбиений

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_t$$

таких, что $n_i \neq n_j$ для любых n_i и n_j, равно числу разбиений n таких, что все n_i нечетны.

2) **Пентагональная терема Эйлера**: Пусть $S_0(n)$ и $S_1(n)$ – соответственно число разбиений числа n на четное и нечетное число слагаемых. Тогда

а) если $n \neq (3q^2 + q) / 2$, то $S_0(n) = S_1(n)$;

б) если $n = (3q^2 + q) / 2$, то $S_0(n) - S_1(n) = (-1)^q$.

Тождества Роджерса-Рамануджана

Для любого натурального числа n

а) число разбиений $n = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_t$

таких, что $|n_i - n_j| > 1$ для любых $i \neq j$, , равно числу разбиений n таких, что для любого i выполняется

$$n_i \equiv 1 \ (\mathrm{Mod}\ 5) \text{ или } n_i \equiv 4 \ (\mathrm{Mod}\ 5);$$

б) число разбиений $n = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_t$

таких, что $|n_i - n_j| > 1$ для любых $i \neq j$ и $n_i > 1$ для любого i, равно числу разбиений n таких, что для любого i выполняется

$$n_i \equiv 2 \ (\mathrm{Mod}\ 5) \text{ или } n_i \equiv 3 \ (\mathrm{Mod}\ 5).$$

Школа Сильвестра и тождества. Дёрфи.

В начале 20-го века майор английской армии **Мак-Магон** вычислил все числа p(n) при $n \le 200$.

Изучение тождеств в США в 19-ом веке .

Формула Харди-Рамануджана:

$$p(n) \approx \exp(\pi \cdot (2n/3)^{0,5}) / 4n \cdot 3^{0,5} \text{ (при } n \to \infty).$$

Формула Харди-Рамануджана-Радемахера. Эндрюс Г. Теория разбиений. – Москва: Наука, 1982. – 256 С.

NPL – множество всех разбиений,

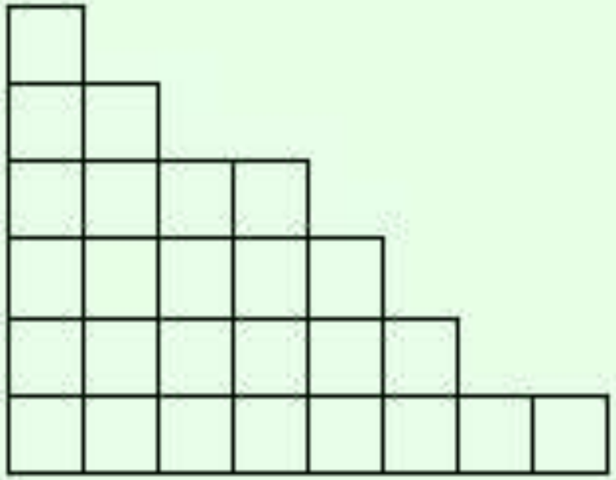
NPL(m) – множество всех разбиений заданного веса m.

()

Разбиение $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ *доминируется* разбиением $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$, а μ *доминирует* λ, если

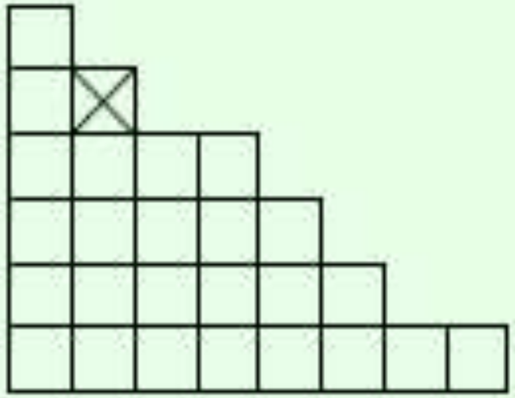
$$\begin{aligned}
\lambda_1 &\leq \mu_1 \\
\lambda_1 + \lambda_2 &\leq \mu_1 + \mu_2 \\
&\dots \\
\lambda_1 + \dots + \lambda_i &\leq \mu_1 + \dots + \mu_i \\
&\dots
\end{aligned}$$

Будем визуализировать разбиения с помощью *диаграмм Ферре*. Следующая диаграмма соответствует разбиению $(6, 5, 4, 4, 3, 2, 1, 1)$.



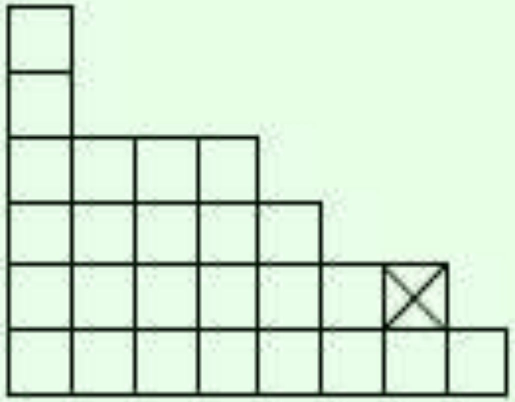
Число блоков в i-столбце равно λ_i.

Определим два типа *элементарных преобразований* множества NPL. Первый — *перекидывание блока*, второй — *удаление блока*.



$\mu = (6, 5, 4, 4, 3, 2, 1, 1)$

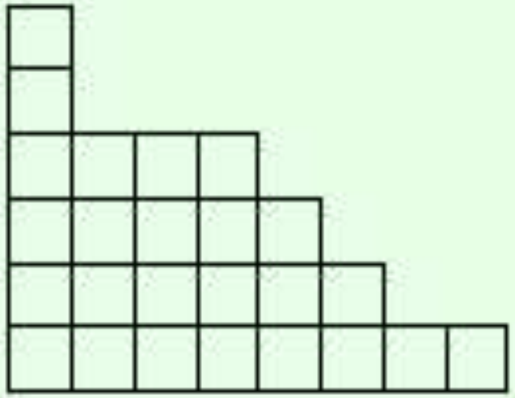
$\xrightarrow{1}$



$\lambda = (6, 4, 4, 4, 3, 2, 2, 1)$

перекидывание блока

$\xrightarrow{2}$



$\lambda = (6, 4, 4, 4, 3, 2, 1, 1)$

удаление блока

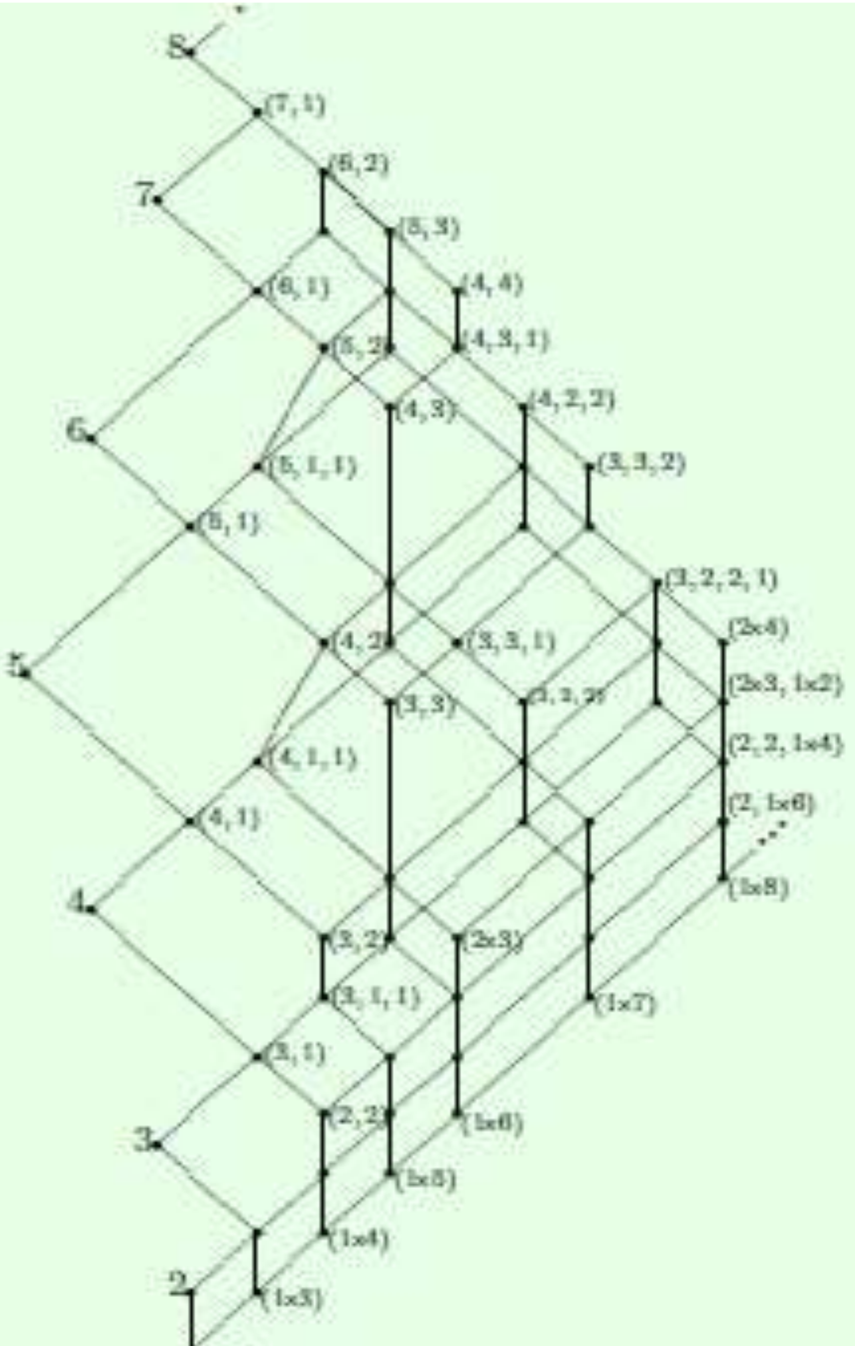
Элементарное преобразование первого типа
(или перекидывание блока):
$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_i, \ldots, \lambda_j, \ldots, \lambda_n) \to \mu = (\lambda_1, \ldots, \lambda_i - 1, \ldots, \lambda_j + 1, \ldots, \lambda_n)$.

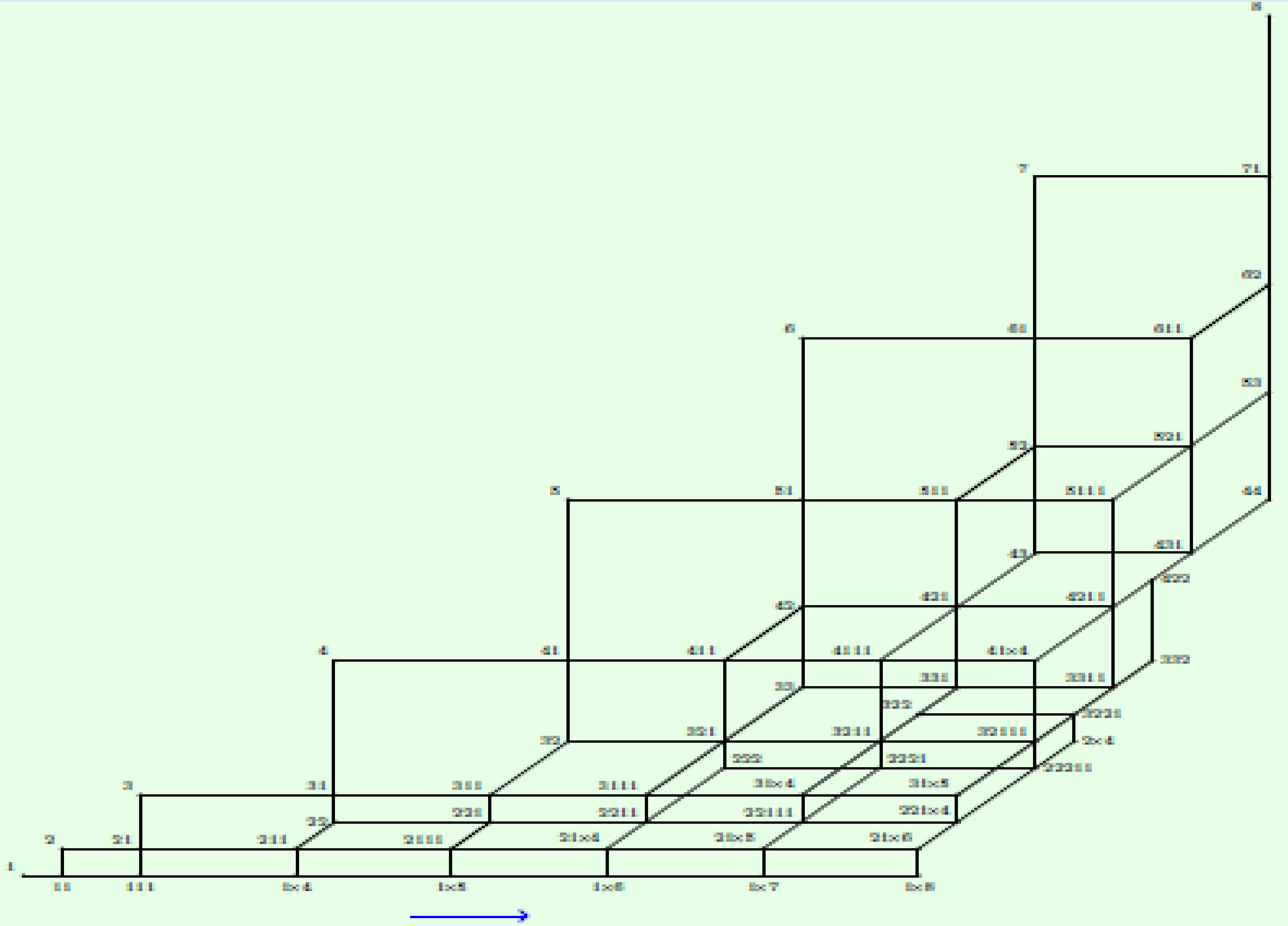
Пусть $i \in \{1, \ldots, l(\lambda)\}$ и $\lambda_i - 1 \geq \lambda_{i+1}$.
Элементарное преобразование второго типа
(или удаление блока):
$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1}, \lambda_i, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_n) \to \mu = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1}, \lambda_i - 1, \lambda_{i+1})$.

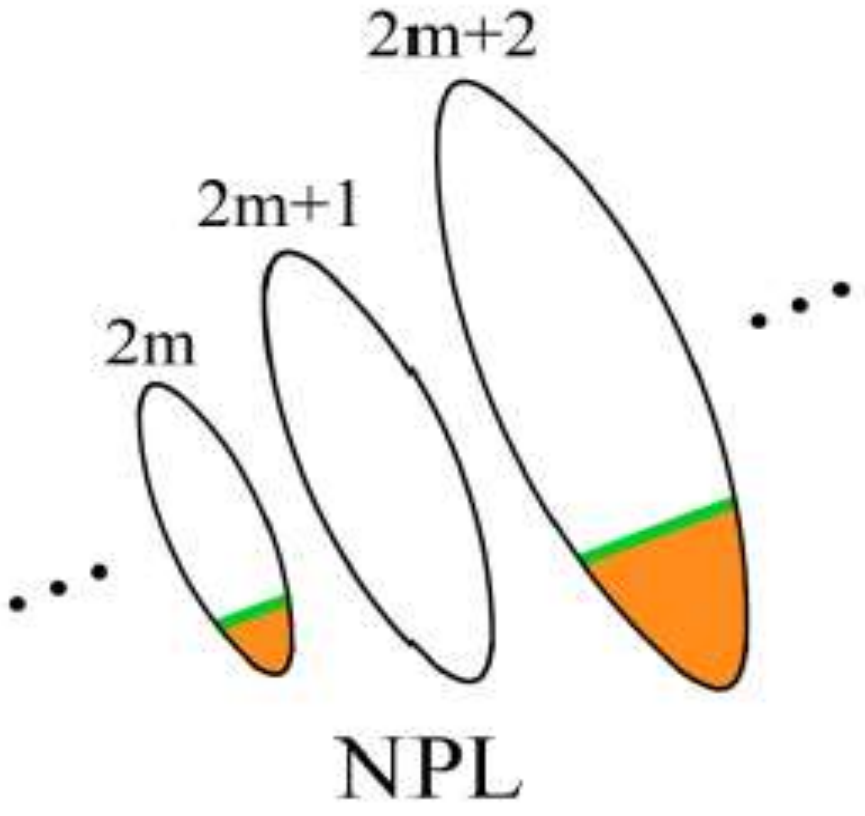
Определим порядок $\leq$ на NPL, полагая $\lambda \leq \mu$ iff, когда λ может быть получено из μ с помощью конечной последовательности элементарных преобразований.

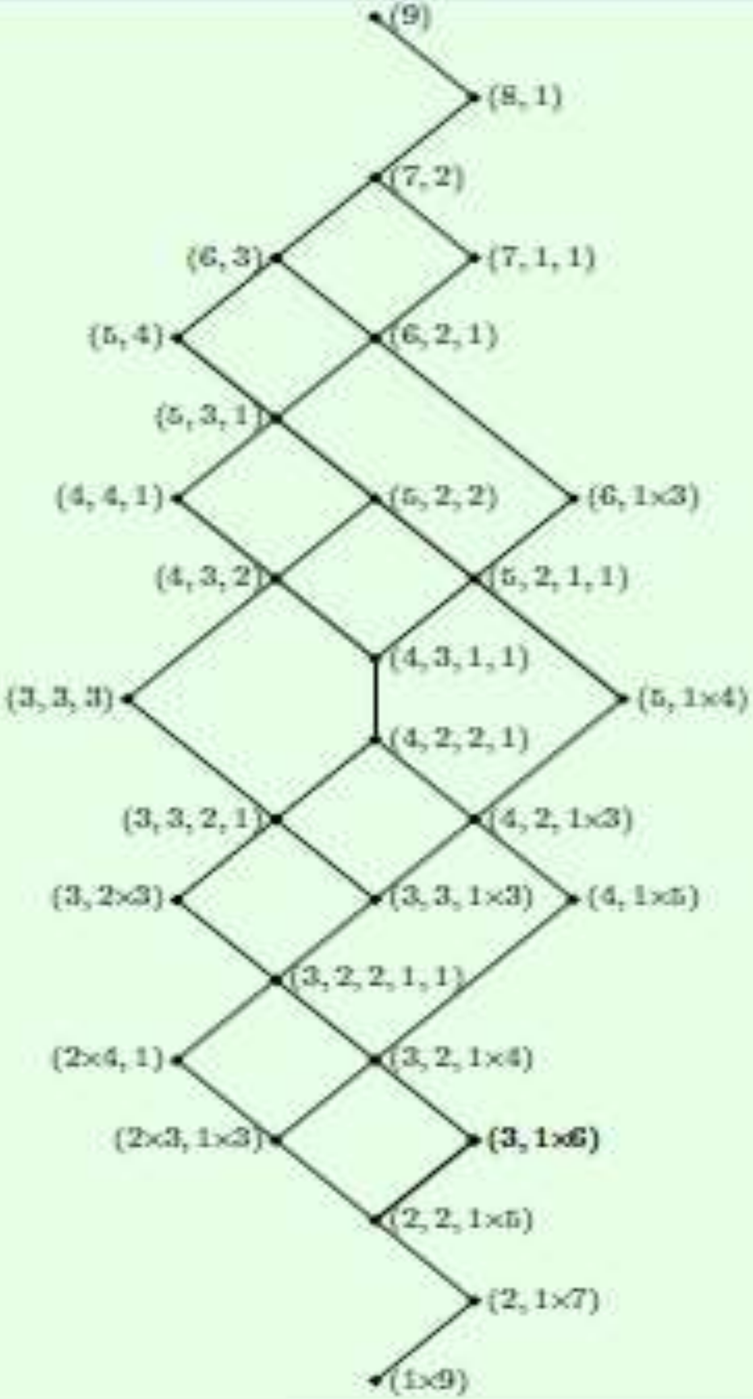
Порядок $\leq$ совпадает с порядком доминируемости.

NPL и $NPL(m)$ – решётки относительно $\leq$.


8
(7, 1)
7
(6, 2)
(5, 3)
(6, 1)
(4, 4)
(5, 2)
(4, 3, 1)
(4, 3)
(4, 2, 2)
6
(5, 1, 1)
(3, 3, 2)
(5, 1)
(3, 2, 2, 1)
(2x4)
5
(4, 2)
(3, 3, 1)
(2x3, 1x2)
(3, 3)
(2, 2, 1x4)
(4, 1, 1)
(2, 1x6)
(4, 1)
4
(1x8)
(3, 2)
(2x3)
(3, 1, 1)
(1x7)
(3, 1)
(2, 2)
(1x6)
3
(1x5)
(1x4)
2
(1x3)




2m+2
2m+1
2m
NPL


(9)
(8, 1)
(7, 2)
(6, 3)
(7, 1, 1)
(5, 4)
(6, 2, 1)
(5, 3, 1)
(4, 4, 1)
(5, 2, 2)
(6, 1×3)
(4, 3, 2)
(5, 2, 1, 1)
(4, 3, 1, 1)
(3, 3, 3)
(5, 1×4)
(4, 2, 2, 1)
(3, 3, 2, 1)
(4, 2, 1×3)
(3, 2×3)
(3, 3, 1×3)
(4, 1×5)
(3, 2, 2, 1, 1)
(2×4, 1)
(3, 2, 1×4)
(2×3, 1×3)
(3, 1×6)
(2, 2, 1×5)
(2, 1×7)
(1×9)

Пересечение элементов в NPL

$\lambda = (6, 6, 2, 1)$, $\mu = (7, 4, 4, 2, 2, 1)$.
$\mathrm{sum}(\lambda) = 15$, $\mathrm{sum}(\mu) = 20$

$$\begin{array}{rccccccc}
\Delta_i(\lambda) & \mathit{0} & \mathit{0} & \mathit{1} & \mathit{0} & \mathit{0} & \mathit{0} & \mathit{0} \\
\lambda = & 6 & 6 & 2 & 1 & 0 & 0 & \\
\mu = & 7 & 4 & 4 & 2 & 2 & 1 & \\
\Delta_i(\mu) & \mathit{0} & \mathit{1} & \mathit{0} & \mathit{1} & \mathit{2} & \mathit{4} & \mathit{5 = 20 - 15} \\
\hline
\lambda \wedge \mu = & 6 & 5 & 3 & 1 & 0 & 0 &
\end{array}$$

$\lambda \wedge \mu = (6, 5, 3, 1)$

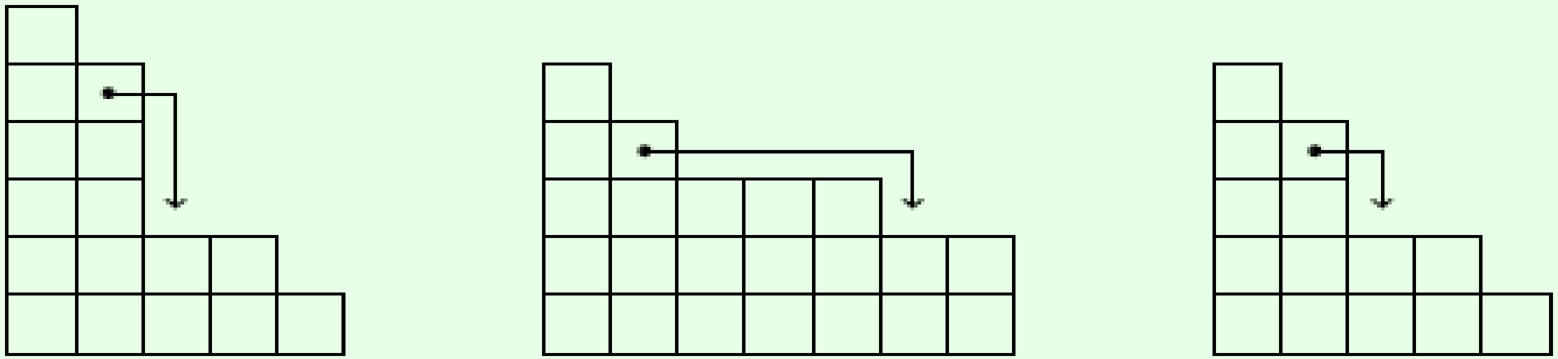
Пересечение элементов в $NPL(m)$

$\lambda = (5,4,2,2,2,1)$, $\mu = (4,4,4,3,1)$.
$\mathrm{sum}(\lambda) = \mathrm{sum}(\mu) = 16$, $m = 16$

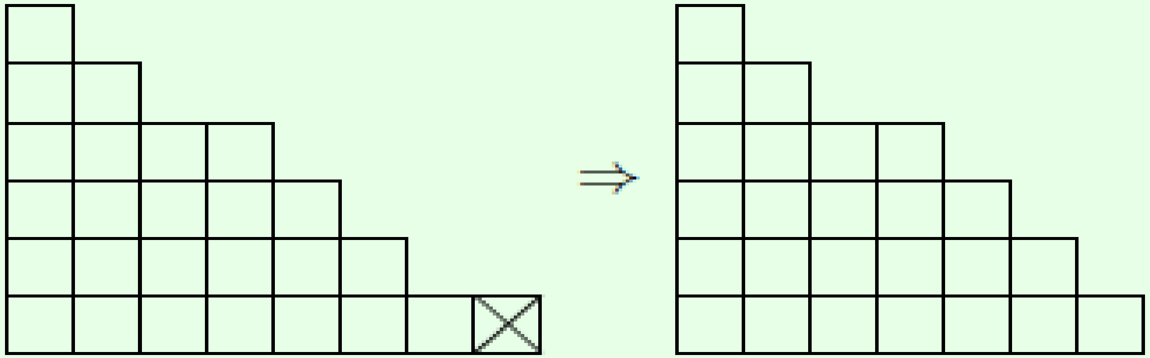
$$\begin{array}{rccccccc}
\Delta_i(\lambda) & \mathit{0} & \mathit{1} & \mathit{1} & \mathit{0} & \mathit{0} & \mathit{0} & \mathit{0} \\
\lambda = & 5 & 4 & 2 & 2 & 2 & 1 & \\
\mu = & 4 & 4 & 4 & 3 & 1 & 0 & \\
\Delta_i(\mu) & \mathit{0} & \mathit{0} & \mathit{0} & \mathit{1} & \mathit{2} & \mathit{1} & \mathit{0} \\
\hline
\lambda \wedge \mu = & 4 & 4 & 3 & 2 & 2 & 1 &
\end{array}$$

$\lambda \wedge \mu = (4,4,3,2,2,1)$

Отношение покрытия в NPL

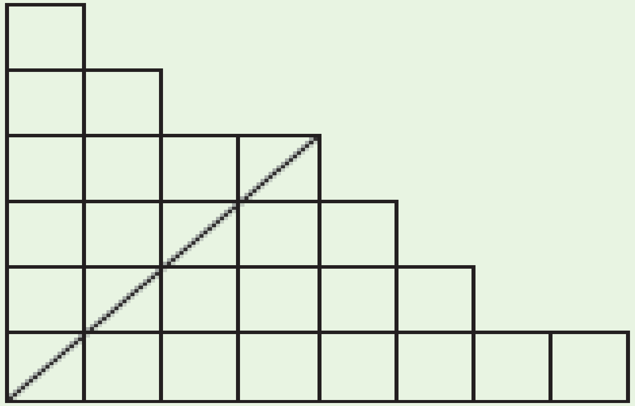


(а) (б) (в)



(г)

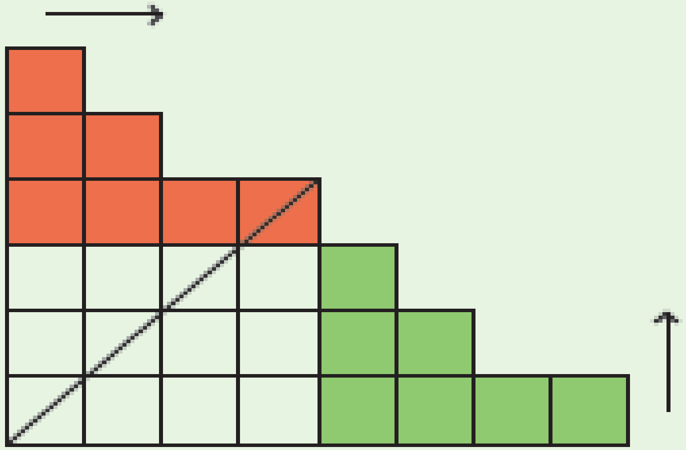
Рангом Дёрфи или просто *рангом* $r(\lambda)$ разбиения λ называется число блоков на главной диагонали диаграммы Ферре, т. е. $r(\lambda) = \max\{k|\lambda_k \geq k\}$. Максимальный квадрат в диаграмме Ферре называется *квадратом Дёрфи* разбиения λ.



$$\lambda = (6, 5, 4, 4, 3, 2, 1, 1)$$

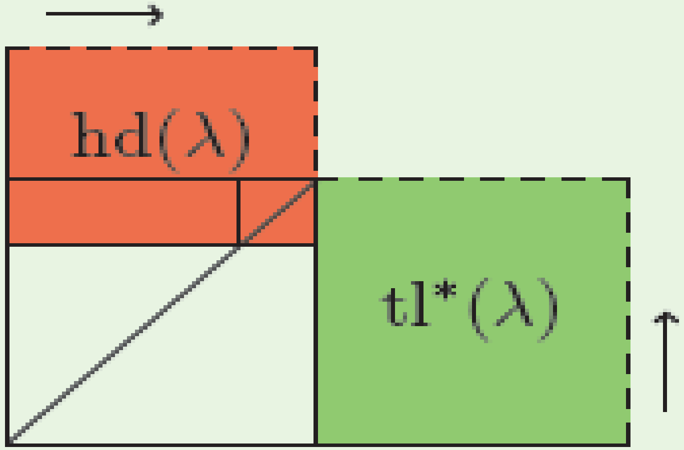
$$\lambda^* = (8, 6, 5, 4, 2, 1)$$

$$r(\lambda) = r(\lambda^*) = 4$$



$$\mathrm{hd}(\lambda) = (3, 2, 1, 1)$$

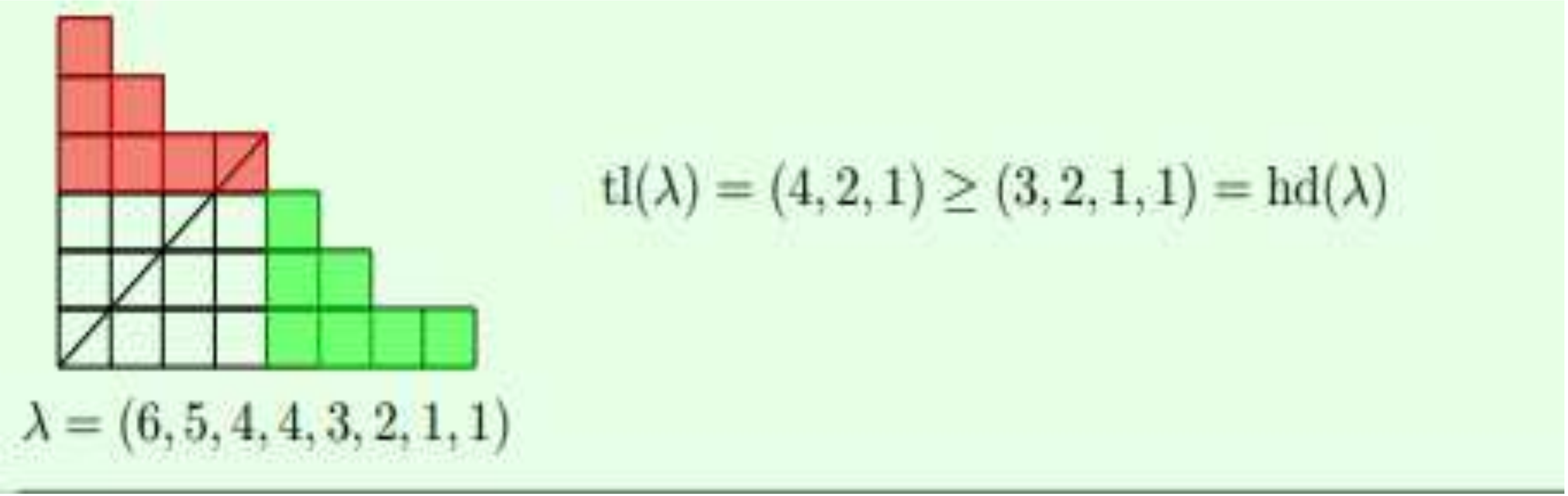
$$\mathrm{tl}(\lambda) = (4, 2, 1)$$



Графическое разбиение $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ – невозрастающая последовательность степеней обыкновенного графа G, дополненная нулями. Граф G называют *реализацией* разбиения λ.

Первый критерий графичности разбиений был найден Эрдёшем и Галлаи в 1960 году.
Приведем его в виде, найденном Б&С.

ht-критерий.
Разбиение λ чётного веса является графическим iff, когда $hd(\lambda) \leq tl(\lambda)$.



P. Erdös, T. Gallai (1960) Критерий графичности правильной n-последовательности λ

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \leq k \cdot (k-1) + \sum_{j=k+1}^{n} \min\{k, \lambda_j\} \quad (k = 1, \ldots, n-1)$$

(Достаточно рассмотреть $k = 1, \ldots, r(\lambda)$)

1. D.R. Fulkerson, A.J. Hofman, M.H. McAndrew (1965)

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \le k(n-m-1) + \sum_{i=n-m+1}^{n} \lambda_i \quad (k=1,\ldots,n;\ 0 \le m \le n-k)$$

2. G. Grünbaum (1969)

$$\sum_{i=1}^{k} \max\{k-1,\lambda_i\} \le k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i \quad (k=1,\ldots,n-1)$$

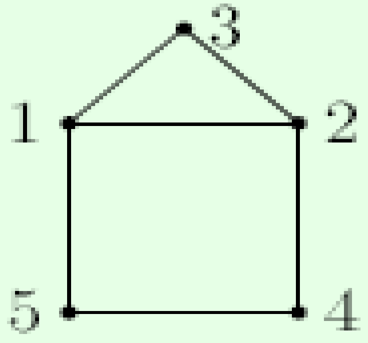
3. C. Berge (1973)
   На языке (0,1)-матриц
4. B. Bollobás (1978)

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \le \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i + \sum_{i=1}^{k} \min\{\lambda_i, k-1\} \quad (k=1,\ldots,n-1)$$

V. Havel (1955), S.L. Hakimi (1962) *l-процедура*

Последовательность (3,3,2,2,2) алгоритм Гавела-Хакими

1	3	0	0	0
2	3	2	1	0
3	2	1	0	0
4	2	2	2	0
5	2	1	1	0



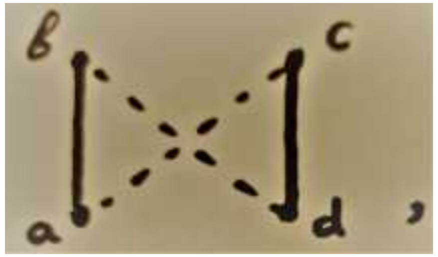
$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_i \neq 0$, $|\mathcal{S}| = \lambda_i$, $i \notin \mathcal{S}$, $\lambda^{(i)}$ — остаточная последовательность.

Теорема

Неотрицательная n-последовательность графична тогда и только тогда, когда её остаточная последовательность графична.

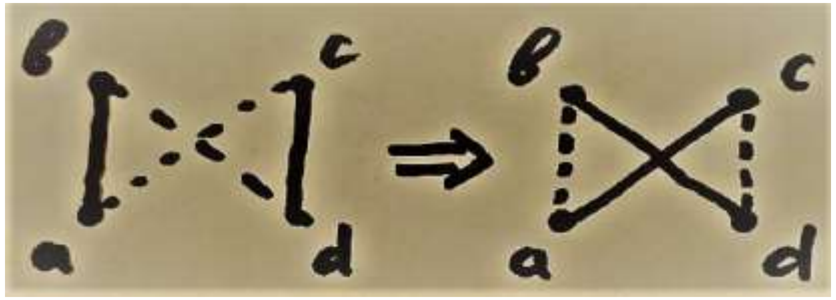
Два графа $G_1 = (V, E_1)$ и $G_2 = (V, E_2)$ будем называть ***согласованными*** на множестве V, если для любой вершины v из V ее степени в G_1 и в G_2 совпадают.

Пусть в графе G для четырех различных вершин a, b, c, d выполняется



где имеются ребра ab и cd, а ребер ac и bd нет (это ребра в дополнении графа G).

Обозначим через s = (ab; dc) операцию ***переключения ребер***:



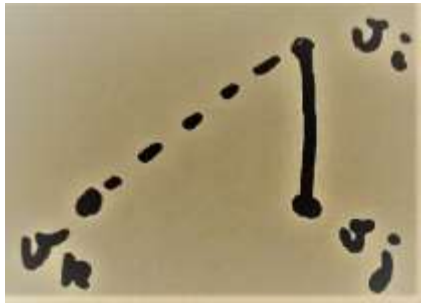
Граф G преобразуется в граф sG = G - ab - dc + ca + bd. Граф sG согласован с графом G на V, так как операция переключения ребер не меняет степеней вершин. Имеется обратная операция переключения ребер s^{-1} = (ca; bd), для которой s^{-1} sG = G.

Лемма 1. Пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ – правильная n-последовательность степеней n-графа $G = (V, E)$, т.е. $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ и $\deg v_j = \lambda_j$ для любого $j = 1, 2, \dots, n$. Зафиксируем некоторую вершину v_i. Тогда существует такая конечная последовательность операций переключения ребер $s_1, \dots, s_t$, что в графе $H = s_t \dots s_1 G$ окрестность $N_H(v_i)$ вершины v_i состоит из λ_i вершин с наименьшими возможными номерами, отличными от i, т.е.

$$N_H(v_i) = \{v_1, v_2, \dots, v_{\lambda_i}\}, \text{ если } i > \lambda_i;$$

$$N_H(v_i) = \{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_{(\lambda_i+1)}\}, \text{ если } i \leq \lambda_i.$$

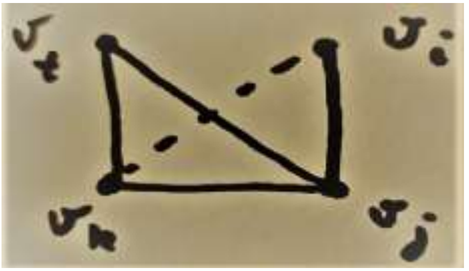
Доказательство. Предположим, что для вершины v_i существуют две отличные от нее вершины v_k и v_j такие, что $k < j$ и



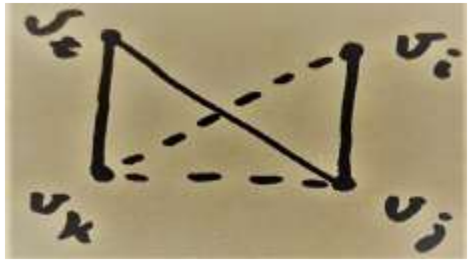
Очевидно, $v_k \neq v_j$ и в силу условия $k < j$ выполняется $\lambda_k \geq \lambda_j > 0$.

1 случай. Предположим, что любая вершина v_t, смежная с v_k и отличная от v_j, смежна и с v_j.

1.1. Пусть v_k смежна с v_j. Тогда $\lambda_j \geq (\lambda_k - 1) + 2 = \lambda_k + 1 > \lambda_k$ – противоречие.

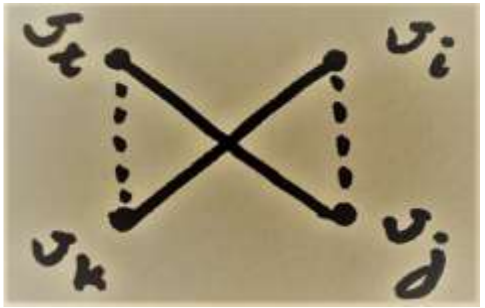


1.2. Пусть v_k не смежна с v_j. Тогда $\lambda_j \geq \lambda_k + 1 > \lambda_k$ – противоречие.



2 случай. Будем считать, что существует вершина v_t, которая отлична от v_j, смежна с v_k и не смежна с v_j.

Очевидно, все четыре вершины различны. Совершим в графе G операцию переключения ребер $s_1 = (v_k v_t; v_j v_i)$. В графе s_1G будет выполняться



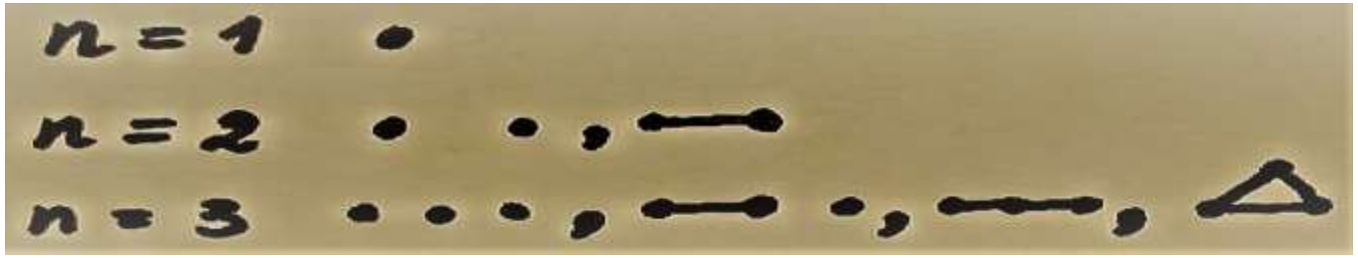
Совершив последовательно конечное число подобных переключений, мы получим нужный нам граф H. **Лемма доказана.**

Теорема Хакими 1. Два графа $G_1 = (V, E_1)$ и $G_2 = (V, E_2)$ согласованы на множестве V iff, когда G_1 можно получить из G_2 с помощью применения конечного числа операций переключения ребер.

Доказательство. ⇐. Очевидно.

⇒. Индукция по $n = | V |$.

Б.И. Очевидно, при $n \leq 3$ из согласованности G_1 и G_2 на V следует, что $G_1 = G_2$.



Ш.И. Пусть $n \geq 4$ и утверждение верно для $n - 1$. Предположим, что графы G_1 и G_2 согласованы на V, где $n = | V |$.

Упорядочим вершины $v_1, v_2, \ldots, v_n$ из V таким образом, что выполняется

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n,$$

где λ_i равно степени вершины v_i в графах G_1 и G_2 для любых $i = 1, 2, \ldots, n$.

Рассмотрим вершину v_1. Согласно лемме 1 существуют такие операции переключения ребер $s_1, \ldots, s_{t1}$ и $s'_1, \ldots, s'_{t2}$, что в графах

$$H_1 = s_{t1} \ldots s_1 G_1 \text{ и } H_2 = s'_{t2} \ldots s'_1 G_2$$

окрестности вершины v_1 одинаковы и совпадают с множеством

$$\{v_2, v_3, \ldots, v_{(\lambda 1 + 1)}\}.$$

Поэтому графы $H_1 - v_1$ и $H_2 - v_1$ согласованы на $V \setminus \{v_1\}$.

По предположению индукции существуют такие операции переключения ребер $s''_1, \ldots, s''_{t3}$, что

$$H_1 - v_1 = s''_{t3} \ldots s''_1(H_2 - v_1).$$

Эти переключения не затрагивают ребер, инцидентных вершине v_1. Следовательно,

$$H_1 = s''_{t3} \ldots s''_1 H_2.$$

Поэтому мы получаем

$$G_1 = s_1^{-1} \ldots s_{t1}^{-1} H_1 = s_1^{-1} \ldots s_{t1}^{-1} s''_{t3} \ldots s''_1 H_2 = s_1^{-1} \ldots s_{t1}^{-1} s''_{t3} \ldots s''_1 s'_{t2} \ldots s'_1 G_2.$$

Лемма доказана.

Теорема Хакими 2. Пусть G_1 и G_2 - два n-графа. Тогда G_1 и G_2 являются реализациями одной и той же n-последовательности iff, когда G_1 изоморфен некоторому графу H_2, полученному из G_2 с помощью применения конечного числа операций переключения ребер.

Доказательство. $\Leftarrow$. Очевидно.

$\Rightarrow$. Пусть $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$, $V_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $V_2 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ и для любого $i = 1, 2, \dots, n$ степени вершин v_i и u_i в графах G_1 и G_2, соответственно, совпадают и равны λ_i.

Рассмотрим биекцию φ из V_1 в V_2 такую, что $\varphi(v_i) = u_i$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$, и граф H_2 на V_2, для которого φ является изоморфизмом G_1 на H_2. Тогда H_2 и G_2 согласованы на V_2, поэтому в силу теоремы Хакими 1 граф H_2 является искомым графом.

Теорема доказана.

Алгоритм построения всех реализаций n-последовательности.

Пал Эрдёш **Дата рождения**	26 марта 1913
Место рождения	Будапешт, Австро-Венгерская империя
Дата смерти	20 сентября 1996 (83 года)
Место смерти	• Варшава, Польша
Место работы	• Принстонский университет • Манчестерский университет Виктории[• Университет Нотр-Дам
Альма-матер	Будапештский университет

1934 г. США, маккартизм. Злоупотреблял крепким кофе и амфетаминами. «Странствующий математик», конференции, дома коллег и написание совместных статей, более 500 статей. «Число Эрдёша» (длина кратчайшего пути от автора до Эрдёша по совместным публикациям). На вопрос журналиста, не слишком ли он пессимистичен, Эрдёш ответил, что в нашей судьбе пессимистично только одно: «Человек живёт недолго и надолго умирает».