Notas de Clase para IL

4. Definición de Lógica de Primer Orden

Rafel Farré, Robert Nieuwenhuis,
Pilar Nivela, Albert Oliveras, Enric Rodríguez

3 de septiembre de 2009

1. Lógica de primer orden

En esta sección reproducimos y extendemos para la lógica de primer orden todas las definiciones y resultados vistos en la sección previa para la lógica proposicional. Haremos especial hincapié en las mayores posibilidades en cuanto a poder expresivo, y en el precio a pagar a cambio: la pérdida de la decidibilidad para la mayor parte de los problemas interesantes.

1.1. Sintaxis

Si en la lógica proposicional únicamente disponíamos de un conjunto de símbolos de predicado, aquí tenemos un vocabulario más rico:

- sea $\mathcal{F}$ un conjunto de *símbolos de función*, que denotaremos por $f, g, h, \ldots$
- sea $\mathcal{P}$ un conjunto de *símbolos de predicado*, denotados aquí por $p, q, r, \ldots$
- sea $\mathcal{X}$ un conjunto de *símbolos de variable*, denotados aquí por $x, y, z, \ldots$

Cada símbolo de función f y cada símbolo de predicado p tiene asociado un número natural, que es su *aridad*. Si la aridad de un símbolo f (o p) es n, solemos escribir f^n (o p^n) para indicar este hecho. A los símbolos de función de aridad 0 se los llama *constantes*, y se suelen denotar con la letra c.

Los *términos* se definen como sigue:

- toda variable es un término
- toda constante (símbolo de función de aridad cero) es un término
- $f(t_1, \ldots, t_n)$ es un término si $t_1, \ldots, t_n$ son términos y f es un símbolo de función de aridad n con $n > 0$.
- nada más es un término

Los *átomos* se definen como sigue:

- todo símbolo de predicado de aridad cero es un átomo
- $p(t_1, \ldots, t_n)$ es un átomo si $t_1, \ldots, t_n$ son términos y p es un símbolo de predicado de aridad n con $n > 0$.
- nada más es un átomo

Las *fórmulas de la lógica de primer orden* se definen como sigue:

- todo átomo es una fórmula
- si F y G son fórmulas y x es una variable, entonces son fórmulas:
  $\neg F \qquad (F \vee G) \qquad (F \wedge G) \qquad \forall x\, F \qquad \exists x\, F$
- nada más es una fórmula

Los símbolos $\forall$ y $\exists$ son los *cuantificadores universal y existencial* respectivamente.

1.2. Interpretación

Una *interpretación en lógica de primer orden* I consta de:

- Un conjunto no vacío D_I, llamado el *dominio* de I
- Por cada símbolo de función f de aridad n, una función f_I (*la interpretación de f en I*), que, dados n valores del dominio, devuelve un resultado del dominio. Similarmente por cada símbolo de predicado p tenemos p_I, la interpretación de p en I, sólo que p_I devuelve un resultado Booleano (0 o 1):
  - un valor del dominio $c_I \in D_I$ para cada $c^0 \in \mathcal{F}$
  - una función $f_I \colon D_I \times \ldots^{n)} \times D_I \to D_I$ para cada $f^n \in \mathcal{F}$ con $n > 0$
  - un valor booleano $p_I \in \{0, 1\}$ para cada $p^0 \in \mathcal{P}$
  - una función $p_I \colon D_I \times \ldots^{n)} \times D_I \to \{0, 1\}$ para cada cada $p^n \in \mathcal{P}$ con $n > 0$

1.3. Satisfacción

Asignación: Dada una interpretación I, una *asignación* es una función $\alpha \colon \mathcal{X} \to D_I$ (*asigna* un valor del dominio a cada símbolo de variable).

Denotaremos por $\alpha[x \mapsto d]$ la asignación que es como α, excepto que a x le asigna d, es decir, es la asignación α' tal que $\alpha'(y) = \alpha(y)$ si $y \neq x$, y tal que $\alpha'(x) = d$.

Evaluación de términos: La *evaluación de un término en una interpretación I y una asignación α* viene dada por la función $eval_I^\alpha$ que para cada término devuelve un valor de D_I:

- si x es una variable entonces $eval_I^\alpha(x) = \alpha(x)$
- si $c^0 \in \mathcal{F}$ (símbolo de constante) entonces $eval_I^\alpha(c) = c_I$
- si $f(t_1, \ldots, t_n)$ es un término, $eval_I^\alpha(\ f(t_1, \ldots, t_n)\ ) = f_I(\ eval_I^\alpha(t_1),\ \ldots,\ eval_I^\alpha(t_n)\ )$.

Evaluación de fórmulas: Definimos la *evaluación de una fórmula en una interpretación I y una asignación α*. La denotamos igual que para términos, $eval_I^\alpha$, pero aquí es una función que para cada fórmula devuelve un valor de $\{0, 1\}$:

- si $p^0 \in \mathcal{P}$ (símbolo de predicado de aridad cero) entonces $eval_I^\alpha(p) = p_I$
- si $p(t_1, \ldots, t_n)$ es un átomo, $eval_I^\alpha(\ p(t_1, \ldots, t_n)\ ) = p_I(\ eval_I^\alpha(t_1),\ \ldots,\ eval_I^\alpha(t_n)\ )$
- $eval_I^\alpha(F \wedge G) = \text{mín}\{\ eval_I^\alpha(F),\ eval_I^\alpha(G)\ \}$
- $eval_I^\alpha(F \vee G) = \text{máx}\{\ eval_I^\alpha(F),\ eval_I^\alpha(G)\ \}$
- $eval_I^\alpha(\neg F) = 1 - eval_I^\alpha(F)$
- $eval_I^\alpha(\forall x F) = \text{mín}\{\ eval_I^{\alpha[x \mapsto d]}(F)\ \mid\ d \in D_I\ \}$
- $eval_I^\alpha(\exists x F) = \text{máx}\{\ eval_I^{\alpha[x \mapsto d]}(F)\ \mid\ d \in D_I\ \}$

Noción de satisfacción (de F en I y α): Una interpretación I y una asignación α *satisfacen F* si $eval_I^\alpha(F) = 1$.

1.4. Definición de la Lógica de primer orden: fórmulas cerradas

Apariciones libres y ligadas de variables: En $\forall y \exists x\, p(x, y) \wedge q(x, z)$ se dice que la aparición de x en $p(x, y)$ está *ligada* al cuantificador existencial, y la aparición de x en $q(x, z)$ es *libre*. La aparición de la variable z es también libre. Si denotamos por $Vars(t)$ el conjunto de variables que aparecen en el término t, entonces, el conjunto $Libres(F)$ de las *variables que tienen alguna aparición libre en la fórmula F* se define:

- $Libres(p) = \emptyset$ si p es un símbolo de predicado de aridad 0.
- $Libres(p(t_1, \ldots, t_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} Vars(t_i)$
- $Libres(\neg F) = Libres(F)$
- $Libres(F \vee G) = Libres(F \wedge G) = Libres(F) \cup Libres(G)$
- $Libres(\forall x\ F) = Libres(\exists x\ F) = Libres(F) - \{x\}$
  (aquí el '$-$' denota la resta de conjuntos).

Fórmulas cerradas: Una fórmula F es *cerrada* si $Libres(F) = \emptyset$.

Evaluación de fórmulas cerradas: No resulta difícil de ver que si F es una fórmula cerrada, el resultado de $eval_I^\alpha(F)$ no depende de α. Por ello, si F es una fórmula cerrada, escribiremos simplemente $eval_I(F)$, en vez de $eval_I^\alpha(F)$.

Satisfacción de fórmulas cerradas: Una interpretación I *satisface* una fórmula cerrada F, denotado $I \models F$, si $eval_I(F) = 1$. También se dice que F es cierta en I o que I es modelo de F.

2. Explicaciones sobre la definición de la Lógica de primer orden

Salvo que se diga lo contrario, trabajaremos siempre con fórmulas cerradas. Para favorecer la escritura de fórmulas claras, también evitaremos aquellas que cuantifican una variable que ya está ligada, como pasa, por ejemplo, en $\forall x\ (p(x) \wedge \exists x\ q(x))$, que es equivalente a $\forall x\ (p(x) \wedge \exists y\ q(y))$. Al igual que para la Lógica proposicional, omitiremos los paréntesis en las fórmulas cuando no dé lugar a ambigüedades, y se considera que los cuantificadores son más prioritarios que las otras conectivas, cuyas prioridades son las de la lógica proposicional.

La Lógica de primer orden tiene un mayor poder expresivo que la proposicional. No sólo podemos modelar "proposiciones" (propiedades que son ciertas o falsas sin matices). También podemos hablar de propiedades que son ciertas para algunos individuos (o combinaciones de individuos), y no para otros. Por ejemplo, podemos expresar cosas como "para todo x existe un y tal que x es menor que y" de la forma $\forall x \exists y\ menor(x, y)$.

Como en la Lógica proposicional, una interpretación nos da una manera de dar un significado a cada símbolo: nos dice en qué dominio pueden tomar valores las variables (cuantificadas universalmente o existencialmente) y para cada símbolo de función y predicado, qué función lo interpreta.

Todas las nociones definidas en general para una lógica, como las de fórmula válida, contradicción, consecuencia lógica y equivalencia lógica se aplican, evidentemente, a la Lógica de primer orden con fórmulas cerradas.

2.1. Ejemplo de satisfacción

En la definición de $I \models F$ aparece algún tecnicismo que no debería despistar al estudiante, para lo que a continuación presentamos un ejemplo de cómo se evalúan fórmulas en una interpretación.

Queremos determinar si $I \models F$, donde F es $\forall x \exists y \; p(x, y)$, e I es la interpretación donde $D_I = \{a, b\}$ y la función booleana p_I está definida como:

$$
\begin{array}{rcl}
p_I(a, a) & = & 0 \\
p_I(a, b) & = & 1 \\
p_I(b, a) & = & 1 \\
p_I(b, b) & = & 0
\end{array}
$$

Como F es una fórmula cerrada, hemos de ver si $eval_I(F) = 1$ (sin que importe la asignación α de partida que se considere). Por el cuantificador universal, debe cumplirse la fórmula tanto si x es a como si es b. Por cada uno de esos casos, debemos ver si existe un elemento del dominio para la y tal que la fórmula se satisfaga. Lo podemos analizar usando la siguiente tabla de casos:

x	y	$eval_I(p(x, y))$
a	a	$p_I(a, a) = 0$
	b	$p_I(a, b) = 1$
b	a	$p_I(b, a) = 1$
	b	$p_I(b, b) = 0$

Vemos que, por cada uno de los dos posibles valores d_1 del dominio de x, existe al menos un valor d_2 del dominio para la y que hace que $eval_I(p(d_1, d_2))$ sea 1: si d_1 es a, escogemos b como d_2, y si d_1 es b, escogemos a como d_2. Luego tenemos $I \models F$.

El análisis realizado con esta tabla corresponde a la definición formal de la siguiente manera. Puesto que F es una fórmula cerrada, podemos evaluarla en I con cualquier asignación α (no importa cuál). Por la definición de $eval_I^\alpha$ sobre el cuantificador universal, deben cumplirse los dos casos siguientes:

1. $eval_I^{\alpha[x \mapsto a]}(\; \exists y \; p(x, y) \;) = 1$
2. $eval_I^{\alpha[x \mapsto b]}(\; \exists y \; p(x, y) \;) = 1$

Hacemos sólo el primer caso (el segundo es análogo). Llamemos α' a la asignación $\alpha[x \mapsto a]$. Hemos de ver si existe algún valor $d \in D_I$ para el que se cumpla
$eval_I^{\alpha'[y \mapsto d]}(\; p(x, y) \;) = 1$.
Escogemos $d = b$. Denotando $\alpha'[y \mapsto b]$ como α'', tenemos:

$eval_I^{\alpha''}(\ p(x,y)\ ) =$

$p_I(\ \ eval_I^{\alpha''}(x),\ \ eval_I^{\alpha''}(y)\ \ ) =$

$p_I(\ \ \alpha''(x),\ \ \alpha''(y)\ \ ) = p_I(a,b) = 1.$

3. Lógica de Primer Orden con igualdad (LPOI)

La LPOI es una ampliación de la Lógica de Primer Orden con un símbolo de predicado binario específico para la igualdad. Su significado no va a ser cualquier función que devuelve un resultado en $\{0,1\}$, sino que se interpretará siempre como la relación binaria "ser el mismo elemento del dominio". Formalmente, la sintaxis y la semántica son las siguientes:

1. **Sintaxis:** Es la misma que para la LPO salvo que ahora añadimos un símbolo adicional de predicado *igual* de aridad 2.
2. **Semántica:** Es la misma que para la LPO, salvo que fijamos la interpretación del símbolo *igual*. La función $igual_I : D_I \times D_I \to \{0,1\}$ se define para cada interpretación I de la manera siguiente:
   - $igual_I(a,a) = 1$ para cada $a \in D_I$.
   - $igual_I(a,b) = 0$ para cada par de elementos distintos $a,b \in D_I$.

Notación: Como suele ser habitual, vamos a denotar el símbolo *igual* mediante $=$ con notación infija. Así, el átomo $igual(s,t)$ lo escribiremos con la notación $s = t$. También es habitual usar $s \neq t$ para denotar $\neg igual(s,t)$.

Esta pequeña ampliación en el lenguaje aumenta enormemente el poder expresivo de las fórmulas. Como veremos en los ejercicios, se puede expresar por ejemplo la *unicidad*, como: "hay un único x tal que $p(x)$", o, en general, "el número de elementos del dominio que cumplen la propiedad p es 5" (o cualquier otro número finito).

4. Formalización del lenguaje natural

Por *formalización* de una frase del lenguaje natural entenderemos *formular* esa frase *mediante una fórmula de la lógica de primer orden (con o sin igualdad)*.

El lenguaje natural no tiene una semántica formal por lo que existen frases ambiguas, esto es, que pueden ser expresadas con, al menos, dos fórmulas no lógicamente equivalentes entre sí. Por ejemplo, la frase

"María es sabia si y sólo si estudia y no mira la televisión"

puede formalizarse de dos formas no equivalentes:

$$es.sabia(maria) \leftrightarrow (estudia(maria) \wedge \neg television(maria))$$

$$(es.sabia(maria) \leftrightarrow estudia(maria)) \wedge \neg television(maria)$$

Así pues, no podemos más que dar algunos consejos para hacer esta formalización:

1. La formalización depende de cómo se defina la sintaxis: del conjunto de *símbolos de función* $\mathcal{F}$, del conjunto de *símbolos de predicado* $\mathcal{P}$.

   Por ejemplo, *"todos los sabios buscan la felicidad"* puede formalizarse como:

   - $\forall x \ \ (es.sabio(x) \rightarrow busca.felicidad(x))$
     donde $\mathcal{F} = \emptyset$ y $\mathcal{P} = \{es.sabio^1, busca.felicidad^1\}$
   - $\forall x \ \ (es.sabio(x) \rightarrow busca(x, felicidad))$
     donde $\mathcal{F} = \{felicidad^0\}$ y $\mathcal{P} = \{es.sabio^1, busca^2\}$

2. Una operación puede representarse por un predicado de aridad $n + 1$ o por un símbolo de función de aridad n; por ejemplo, en lugar del símbolo de función $suma(x, y)$ se puede considerar el predicado $es.suma.de(x, y, z)$. El uso de símbolos de función en lugar de predicados simplifica, en general, la complejidad de la fórmula.

   Podemos formalizar *"todos los maestros instruyen a sus discípulos"* como:

   $$\forall x \ \ \forall y \ \ (es.maestro.de(x, y) \rightarrow instruye(x, y))$$

   Otra posibilidad es:

   $\forall x \ instruye(maestro(x), x))$, donde $maestro(x)$ denota una función que devuelve el maestro de x.

   Sin embargo hay una diferencia importante entre estas dos maneras dos formalizar. Cuando usamos un símbolo de función asumimos que cada operación tiene un único resultado (esto está implícito en la semántica), mientras que si lo formalizamos con un símbolo de predicado esto no es así (para que las dos formalizaciones resultasen equivalentes habría que añadir una fórmula que expresase esta propiedad). Por ejemplo, cuando hemos usado el símbolo de función $maestro(x)$ hemos supuesto que cada alumno tiene un solo maestro.

3. Como ya hemos visto en ejemplos anteriores, los nombres comunes o propios son símbolos de función constantes; por ejemplo *"Juan no es sabio"* lo podemos formalizar como

   $$\neg es.sabio(juan)$$

   La frase *"Juan no es sabio ni trabajador"* puede formalizarse como

   $$\neg es.sabio(juan) \land \neg es.trabajador(juan)$$

4. El *"o"* del lenguaje natural es ambiguo pues a veces deberá ser formalizado con la conectiva $\lor$ (*o inclusivo*) y otras deberá usarse el *o exclusivo* definido por $p \ \ xor \ \ q = (p \land \neg q) \lor (\neg p \land q)$. Por ejemplo, cuando se dice *"O haces bien tu trabajo o te despido"* se está refiriendo al xor.

   También el *si condicional* del lenguaje natural puede ser ambiguo. Por ejemplo, cuando los padres dicen *"si te comes las espinacas, saldrás a jugar"* a menudo quieren decir también que *"si no las comes, no saldrás"*. En realidad, los padres se están refiriendo a una doble implicación.

5. Mediante la fórmula

   $$\exists x \ \ (es.autodidacta(x) \wedge es.sabio(x))$$

   representamos las frases

   "algún autodidacta es sabio"

   "no todos los autodidactas son ignorantes"

   (donde *ignorante* quiere decir *no sabio*).

6. Mediante la fórmula

   $$\exists x \ \ (es.autodidacta(x) \wedge \neg es.sabio(x))$$

   representamos las frases

   "no todos los autodidactas son sabios"

   "hay autodidactas ignorantes"

7. Mediante la fórmula

   $$\forall x \ \ (es.sabio(x) \rightarrow \neg es.egoista(x))$$

   representamos las frases

   "todos los sabios carecen de egoísmo"

   "ningún sabio es egoísta"

8. Mediante la fórmula

   $$\forall x \ \ (es.sabio(x) \rightarrow es.curioso(x))$$

   representamos las frases

   "todos los sabios son curiosos"

   "nadie es sabio a menos que sea curioso"

   "no hay ningún sabio que no sea curioso"

   "sólo los curiosos son sabios"

   "ser curioso es necesario para ser sabio"

   "ser sabio es suficiente para ser curioso"

5. Ejemplos de formalización del lenguaje natural

1. Queremos formalizar las siguientes frases:

   (a) *"Todo profesor está feliz si todos sus estudiantes aman la lógica"*

   (b) *"Todo profesor está feliz si no tiene estudiantes"*

   Si el conjunto de símbolos de predicado es $\mathcal{P} = \{fe^1, al^1, est^2\}$, con el significado:

   $fe(x)$: x está feliz

   $al(x)$: x ama la lógica

$est(x,y)$: x es estudiante de y

la frase (a) se puede formalizar de la forma:

$$\forall x(\ \forall y(\ est(y,x) \to al(y)\ ) \to fe(x)\ ) \qquad (F)$$

y la frase (b) se puede formalizar de la forma:

$$\forall x(\ \forall y \neg est(y,x) \to fe(x)\ ) \qquad (G)$$

2. Queremos formalizar el siguiente texto (extraído de Pelletier F.J. (1986), Seventy-Five Problems for Testing Automatic Theorem Provers):

   Alguien que vive en la mansión Dreadbury asesinó a tía Ágata. Ágata, el mayordomo y Carlos son las únicas personas que viven en la mansión Dreadbury. Todo asesino odia siempre a sus víctimas y nunca es más rico que sus víctimas. Carlos sólo puede odiar a las personas que odia tía Ágata. Ágata odia a todo el mundo excepto al mayordomo. El mayordomo odia a todos los que no son más ricos que tía Ágata. El mayordomo odia a todos los que tía Ágata odia. Nadie odia a todo el mundo. Ágata no es el mayordomo. Luego, Ágata se suicidó.

   El conjunto de símbolos de función es $\mathcal{F} = \{agata^0, mayordomo^0, carlos^0\}$.

   El conjunto de símbolos de predicado es $\mathcal{P} = \{vive^1, as^2, o^2, mr^2, =^2\}$ con el siguiente significado:

   $vive(x)$: x vive en la mansión Dreadbury

   $as(x,y)$: x es el asesino de y

   $o(x,y)$: x odia a y

   $mr(x,y)$: x es más rico que y

   El enunciado se formaliza como $F \models G$ donde $F = \bigwedge_{i=1}^{13} F_i$ y las fórmulas F_i, G se definen de la forma siguiente:

   - *Alguien que vive en la mansión Dreadbury asesinó a tía Ágata.*

     $$\exists x\ (vive(x) \wedge as(x, agata)) \qquad (F_1)$$

   - *Ágata, el mayordomo y Carlos son las únicas personas que viven en la mansión Dreadbury.*

     $$vive(agata) \qquad (F_2)$$

     $$vive(mayordomo) \qquad (F_3)$$

     $$vive(carlos) \qquad (F_4)$$

     $$\forall x\ (vive(x) \to x = agata \vee x = mayordomo \vee x = carlos) \qquad (F_5)$$

   - *Todo asesino odia siempre a sus víctimas y nunca es más rico que sus víctimas.*

     $$\forall x\ \ (\forall y\ \ (as(x,y) \to o(x,y))) \qquad (F_6)$$

     $$\forall x\ \ (\forall y\ \ (as(x,y) \to \neg\ mr(x,y))) \qquad (F_7)$$

- *Carlos sólo puede odiar a las personas que odia tía Ágata.*
  $$\forall x \ \ (o(carlos, x) \to o(agata, x)) \qquad (F_8)$$
- *Tía Ágata odia a todo el mundo excepto al mayordomo.*
  $$\forall x \ \ (x \neq mayordomo \leftrightarrow o(agata, x)) \qquad (F_9)$$
- *El mayordomo odia a todos los que no son más ricos que tía Ágata.*
  $$\forall x \ \ (\neg mr(x, agata) \to o(mayordomo, x)) \qquad (F_{10})$$
- *El mayordomo odia a todos los que tía Ágata odia.*
  $$\forall x \ \ (o(agata, x) \to o(mayordomo, x)) \qquad (F_{11})$$
- *Nadie odia a todo el mundo.*
  $$\forall x \ \ (\exists y \ \ (\neg o(x, y))) \qquad (F_{12})$$
- *Tía Ágata no es el mayordomo.*
  $$agata \neq mayordomo \qquad (F_{13})$$
- *Ágata se suicidó.*
  $$as(agata, agata) \qquad (G)$$

6. Ejercicios de la definición de LPO

1. (dificultad 1) Sea $\mathcal{F}$ el conjunto $\{c^0, f^1, g^2\}$. Evalúa los términos $f(f(g(c, f(c))))$ y $f(g(f(f(x)), g(c, f(c))))$ en las tres interpretaciones y asignaciones siguientes:

   a) La interpretación I se define por: $D_I = \mathbb{N}$, $c_I = 1$, $f_I(n) = n + 1$ y $g_I(n, m) = n + m$. La asignación α cumple $\alpha(x) = 7$.

   b) $D_I = P(\mathbb{N})$, c_I es el conjunto de los números pares, $f_I(A) = \mathbb{N} - A$ (el complementario de A) y $g_I(A, B) = A \cap B$. Además, $\alpha(x) = \emptyset$.

   c) El dominio D_I son las cadenas binarias, $c_I = 1$, $f_I(c) = c0$ y g_I es la concatenación. La asignación α cumple $\alpha(x) = 1111$.

2. (dificultad 2) Este ejercicio es una continuación del anterior. Definimos los términos s_n y t_n recursivamente de la manera siguiente $s_0 := c$, $t_0 := c$, $s_{n+1} := f(s_n)$ y $t_{n+1} := f(g(t_n, t_n))$. Determina por inducción su evaluación en función de n en las tres interpretaciones anteriores (en la tercera interpretación evalúa sólo los 4 primeros términos t_n).

3. (dificultad 2) Sea el conjunto de símbolos de función $\mathcal{F} = \{+^2, s^1, z^0\}$. Consideremos también una interpretación I tal que D_I es $\mathbb{N}$ (los naturales), y los símbolos de función $+, s, z$ se interpretan como la suma en los naturales, el sucesor de un número natural y el número natural cero, respectivamente.

   a) Da dos términos distintos y sin variables tales que su evaluación en I sea 2.

   b) Demuestra que para todo número natural n existe un término t sin variables tal que la evaluación de t en I es n.

c) Demuestra que dado un número natural n existen infinitos términos sin variables tales que su evaluación en I es n.

4. (dificultad 1) Dados los símbolos de función $\mathcal{F} = \{\ cero^0,\ suc^1,\ resta^2\}$ y los símbolos de predicado $\mathcal{P} = \{escero^1, espositivo^1, esmenor^2\}$ define interpretaciones I_1 a I_6 donde:

   - $D_{I_1} = \mathbb{Z}$, conjunto de los números enteros
   - $D_{I_2} = \{a, b\}$
   - $D_{I_3} = \{a\}$
   - $D_{I_4} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, el conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$
   - $D_{I_5} = \mathbb{N}^*$, el conjunto de todas las cadenas de naturales
   - $D_{I_6} = \mathbb{Z}$ *modulo* 3, el conjunto de las clases de equivalencia de los enteros módulo 3 (x e y están relacionados si x *mod* $3 = y$ *mod* 3, donde *mod* es el resto de la división entera).

   Para cada una de las interpretaciones anteriores, indica cuáles satisfacen las fórmulas

   - $\forall x\ escero(resta(x, x))$
   - $\forall x\ (espositivo(x) \to esmenor(cero, suc(x)))$
   - $\forall x\ (espositivo(x) \to esmenor(x, suc(x)))$
   - $\exists x \forall y\ (espositivo(y) \to esmenor(x, y))$

5. (dificultad 1) Sea F la fórmula $\exists x \exists y \exists z\ \ (p(x, y) \wedge p(z, y) \wedge p(x, z) \wedge \neg p(z, x))$. Cuáles de las siguientes interpretaciones son modelos de F?

   a) $D_I = \mathbb{N}$ y $p_I(m, n) = 1$ si y sólo si $m \leq n$.

   b) $D_I = \mathbb{N}$ y $p_I(m, n) = 1$ si y sólo si $n = m + 1$.

   c) $D_I = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (esto denota *partes de* $\mathbb{N}$, es decir, el conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$), y $p_I(A, B) = 1$ si y sólo si $A \subseteq B$.

6. (dificultad 2) Expresa con tres fórmulas las propiedades de reflexividad, simetría y transitividad de un predicado binario p y demuestra que ninguna de las tres fórmulas es consecuencia lógica de (la conjunción de) las otras dos.

7. (dificultad 3) Sea $\mathcal{F}$ el conjunto $\{f^2, c^0\}$ y sea $\mathcal{P}$ el conjunto $\{p^2\}$. Consideremos una interpretación I tal que $D_I = \mathbb{N}$ y $p_I(n, m) = 1$ si y sólo si $n \leq m$. Encuentra tres interpretaciones distintas para f y c que satisfagan la fórmula

   $$\forall x\ (\ p(f(x, c), x)\ \wedge\ p(x, f(x, c)\ )$$

   y que sólo dos de ellas satisfagan la fórmula

   $$\forall x \forall y\ (\ p(f(x, y), f(y, x)) \wedge p(f(y, x), f(x, y))\ )$$

8. (dificultad 2) Sea F la fórmula $\forall x \exists y\ p(x, y) \wedge \forall x \exists y\ \neg p(x, y)$. Demuestra que F es satisfactible.

   Si I es una interpretación, decimos que *el número de elementos de* I es $|D_I|$, el número de elementos de D_I. Asimismo, decimos que I es un *modelo finito* cuando D_I es finito, y hablamos de *la cardinalidad de* I para referirnos a la cardinalidad de D_I.

   ¿Cual es el mínimo número de elementos que debe tener un modelo de F?

9. (dificultad 3) Considera los conjuntos de símbolos y pares de interpretaciones I_1 e I_2 siguientes. Para cada caso, da una fórmula F que es cierta en una de ellas y falsa en la otra, y razona informalmente por qué es así.

   a) $\mathcal{P} = \{r^2\}$, I_1 tiene como dominio los naturales y el predicado se interpreta como el orden (es decir $r_I(n, m) = 1$ si y sólo si $n \leq m$); I_2 tiene como dominio los enteros y el predicado también se interpreta también como el orden;

   b) $\mathcal{P} = \{r^2\}$, I_1 tiene como dominio los enteros y el predicado se interpreta como el orden; I_2 tiene como dominio los racionales y el predicado se interpreta también como el orden.

   c) $\mathcal{P} = \{r^2\}$. El dominio tanto de I_1 como de I_2 son los números enteros, para I_1 el predicado r se interpreta como 'tener el mismo resto módulo 2' y para I_2 el predicado r se interpreta como 'tener el mismo resto módulo 3'.

10. (dificultad 2) Supón que en $\mathcal{P}$ sólo hay símbolos de predicado de aridad cero. Entonces, la sintaxis de las fórmulas, ¿en qué se diferencia de la de la lógica proposicional? ¿Y la semántica?

11. (dificultad 2) Sea F una fórmula con una única variable libre x. $\exists x\, F$ es consecuencia lógica de $\forall x\, F$? Demuéstralo aplicando la definición.

12. (dificultad 3) Sea F una fórmula y sean α y β dos asignaciones tales que $\alpha(x) = \beta(x)$ para toda variable libre x de F (en este caso se dice que α y β *coinciden* en las variables libres de F).

    Demuestra que $eval_I^\alpha(F) = eval_I^\beta(F)$. En particular, si F es cerrada el valor de $eval_I^\alpha(F)$ no depende de α y podemos escribir simplemente $eval_I(F)$.
    Ayuda: demuestra primero que $eval_I^\alpha(t) = eval_I^\beta(t)$ para todo término t tal que α y β coinciden en las variables de t.

13. (dificultad 2) Vamos a extender la noción de equivalencia a fórmulas cualesquiera (no necesariamente cerradas). Diremos que dos fórmulas F y G *son equivalentes* (y lo denotaremos por $F \equiv G$) si $eval_I^\alpha(F) = eval_I^\alpha(G)$ para toda interpretación I y toda asignación α. Observa que esta nueva definición extiende la dada para fórmulas cerradas.

    a) Demuestra que la equivalencia de fórmulas en Lógica de primer orden es una relación de equivalencia (es decir, es reflexiva, simétrica y transitiva).

b) Demuestra que si $F \equiv F'$ y $G \equiv G'$ entonces se cumplen:

- $F \wedge G \equiv F' \wedge G'$
- $F \vee G \equiv F' \vee G'$
- $\neg F \equiv \neg F'$
- $\forall x F \equiv \forall x F'$
- $\exists x F \equiv \exists x F'$

14. (dificultad 4) Enuncia y demuestra el lema de sustitución para la lógica de primer orden.
Ayuda: ver el lema del mismo nombre en los ejercicios de lógica proposicional.

15. (dificultad 2) Las equivalencias de fórmulas que aparecen en los ejercicios de lógica proposicional (como por ejemplo, las leyes de De Morgan) son también ciertas para la lógica de primer orden. Demuestra alguna de ellas.

16. (dificultad 2) Demuestra alguna de las siguientes equivalencias:

$$\begin{array}{lcl}
\neg\forall x F & \equiv & \exists x \neg F \\
\neg\exists x F & \equiv & \forall x \neg F \\
\forall x \forall y F & \equiv & \forall y \forall x F \\
\exists x \exists y F & \equiv & \exists y \exists x F \\
\forall x F \wedge \forall x G & \equiv & \forall x (F \wedge G) \\
\exists x F \vee \exists x G & \equiv & \exists x (F \vee G) \\
\forall x F \to \exists x G & \equiv & \exists x (F \to G) \\
\forall x F \vee G & \equiv & \forall x (F \vee G), \text{ si } x \text{ no es libre en } G \\
\forall x F \wedge G & \equiv & \forall x (F \wedge G), \text{ si } x \text{ no es libre en } G \\
\exists x F \vee G & \equiv & \exists x (F \vee G), \text{ si } x \text{ no es libre en } G \\
\exists x F \wedge G & \equiv & \exists x (F \wedge G), \text{ si } x \text{ no es libre en } G
\end{array}$$

17. (dificultad 2) Demuestra que las equivalencias siguientes **no** son ciertas en general (es decir, para cualquier par de fórmulas F, G):

$\forall x F \vee \forall x G \equiv \forall x (F \vee G)$

$\exists x F \wedge \exists x G \equiv \exists x (F \wedge G)$

En ambos casos, hay alguna de la dos fórmulas que sea consecuencia lógica de la otra? (no hace falta que demuestres esto último, ya lo haremos cuando tengamos un cálculo deductivo).

18. (dificultad 2) Demuestra que las fórmulas $\forall x \exists y\ F$ y $\exists y \forall x\ F$ no son equivalentes en general. ¿Hay alguna de la dos fórmulas que sea consecuencia lógica de la otra? (no hace falta que demuestres esto último, ya lo haremos cuando tengamos un cálculo deductivo).

19. (dificultad 2) Las fórmulas $\exists x (F \to G)$ y $\exists x F \to \exists x G$, ¿son equivalentes? Responde a las mismas preguntas para las fórmulas $\forall x (F \to G)$ y $\forall x F \to \forall x G$.

20. (dificultad 3) Demuestra que la fórmula:

$$\exists x\,(p(x) \wedge q(x)) \;\wedge\; \exists x\,(p(x) \wedge \neg q(x)) \;\wedge\; \exists x\,(\neg p(x) \wedge q(x)) \;\wedge\; \exists x(\,\neg p(x) \wedge \neg q(x))$$

es satisfactible y que todo modelo tiene por lo menos 2^2 elementos. Da un modelo con exactamente 2^2 elementos. Escribe una fórmula con una propiedad análoga para 2^3 elementos. Generalízalo a 2^n.

21. (dificultad 3) Da una fórmula F_3 tal que todo modelo de F_3 tenga al menos 3 elementos. Generalízalo a n cualquiera.
Ayuda: define la propiedad reflexiva de un símbolo de predicado binario p, y además expresa que hay pares de elementos e_i y e_j en el dominio tales que $p_I(e_i, e_j) = 0$.

22. (dificultad 5) Escribe una fórmula F tal que si $I \models F$ entonces D_I tiene infinitos elementos. Ayuda: piensa en la relación 'ser estrictamente menor que' y expresa (entre otras cosas) que 'no hay máximo' tal como ocurre en los naturales.

23. (dificultad 5) Demuestra que si una fórmula tiene modelos con n elementos, también tiene modelos con m elementos para cualquier $m \geq n$ e incluso modelos infinitos. Ayuda. Si I es una interpretación, tomar un elemento cualquiera a del dominio y añadir 'clones' de este elemento de la manera siguiente. Si A es un conjunto (el conjunto de los 'clones' de a) añadimos todos los elementos de A al dominio y extendemos la interpretación de un símbolo de predicado n-ario así: $(a_1, \ldots, a_n)$ evalúa el predicado a cierto si y sólo si evalúa el predicado a cierto en I al reemplazar cada uno de los clones por a. De manera análoga se define la interpretación de un símbolo de función. Llamemos I' a esta nueva interpretación. Si $\alpha\colon \mathcal{X} \to D_{I'}$ es una asignación para I', consideramos la asignación $\alpha'\colon \mathcal{X} \to D_I$ consistente en reemplazar cada 'clon' por a. Ahora demostrad por inducción los hechos siguientes:

    a) para cada término t, si $eval_{I'}^{\alpha}(t)$ es un elemento de D_I entonces $eval_{I'}^{\alpha}(t) = eval_I^{\alpha'}(t)$; si $eval_{I'}^{\alpha}(t)$ es un elemento de A entonces $eval_I^{\alpha'}(t) = a$.

    b) para cada fórmula F no necesariamente cerrada se cumple que:

$$eval_{I'}^{\alpha}(F) = eval_I^{\alpha'}(F).$$

    Observad que I e I' satisfacen exactamente las mismas fórmulas cerradas.

6.1. Ejercicios de la definición de LPOI

24. (dificultad 2) Escribe una fórmula F que exprese que para todo modelo I de F:

    a) hay como máximo 1 elemento en el dominio de I

    b) hay como máximo 2 elementos en el dominio de I

    c) hay como máximo n elementos en el dominio de I, para una n dada

    d) hay exactamente n elementos en el dominio de I, para una n dada

¿Se podría hacer esto sin utilizar la igualdad? (ver el último ejercicio del apartado previo).

25. (dificultad 1) En este ejercicio $\mathcal{F}$ consta de un único símbolo de función 1-aria f. Utilizando la igualdad, expresa con una fórmula F que f_I es inyectiva (es decir $I \models F$ si y sólo si f_I es inyectiva). Expresa que f_I es exhaustiva y también que f_I es biyectiva.

26. (dificultad 2)

    a) Sea p un símbolo de predicado unario. Escribe una fórmula F que exprese que hay un único elemento que cumple p. Esto quiere decir: que exprese que para todo modelo I de F hay un único elemento a en D_I con $p_I(a) = 1$.

    b) Escribe otra F expresando que hay exactamente 2.

    c) Generalízalo a un número natural n cualquiera.

    d) Generalízalo más, considerando en vez de p una fórmula G con una única variable libre x: expresa que hay n elementos x tales que se cumple G.

27. (dificultad 2) Un *monoide* es un modelo de la siguiente fórmula:

$$\forall x \forall y \forall z \ \ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \quad \wedge \quad \forall x \ \ x \cdot e = x \quad \wedge \quad \forall x \ \ e \cdot x = x$$

    donde $\cdot$ es un símbolo de función binaria y e es un símbolo de constante. Observa que hemos usado notación infija (como hacemos con el símbolo = para la igualdad). Con la notación habitual (y con f en vez de $\cdot$) la fórmula $\forall x \forall y \forall z \ \ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ se escribiría $\forall x \forall y \forall z \ \ f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z))$.

    Demuestra que las siguientes interpretaciones son monoides:

    a) El dominio es el conjunto de los números racionales, $\cdot$ se interpreta como la suma y e se interpreta como 0.

    b) El dominio es el conjunto de los números naturales, $\cdot$ se interpreta como el producto y y e se interpreta como 1.

    c) El dominio es $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (el conjunto de los subconjuntos de $\mathbb{N}$), $\cdot$ se interpreta como la intersección y e se interpreta como $\mathbb{N}$.

    d) El dominio es el conjunto de las cadenas binaria ('strings' de ceros y unos), $\cdot$ se interpreta como la concatenación y e se interpreta como la cadena vacía.

    e) El dominio es $\{0, 1, \cdots, n-1\}$, $\cdot$ se interpreta como la suma módulo n (es decir $i \cdot_I i = i + j$ mod n) y e se interpreta como 0.

    f) El dominio es el conjunto $\{\alpha, \beta\}$, $\cdot$ se interpreta mediante $\alpha \cdot_I \alpha = \alpha, \alpha \cdot_I \beta = \beta, \beta \cdot_I \alpha = \beta, \beta \cdot_I \beta = \alpha$, y e se interpreta como α.

28. (dificultad 2) Este ejercicio es una continuación del anterior. Un *grupo* es un monoide que además satisface la fórmula:

$$\forall x \exists y \ \ (\ x \cdot y = e \quad \wedge \quad y \cdot x = e \ )$$

¿Cuales de las interpretaciones anteriores eran grupos?

Un monoide se llama conmutativo o *Abeliano* cuando satisface la fórmula:

$$\forall x \forall y \;\; x \cdot y = y \cdot x$$

Cuales de las interpretaciones anteriores eran monoides Abelianos?

29. En este ejercicio $\mathcal{F}$ consta de dos símbolos de función 1-aria f, g.

    a) Utilizando la igualdad, expresa los hechos siguientes:
    1) (dificultad 1) Las funciones f_I y g_I son iguales.
    2) (dificultad 2) La función f_I es constante.
    3) (dificultad 2) La imagen de f_I está contenida en la imagen de g_I.
    4) (dificultad 2) La imagen de f_I y la de g_I son iguales.
    5) (dificultad 2) La imagen de f_I y la de g_I tienen un único elemento en común.
    6) (dificultad 3) La imagen de f_I contiene exactamente la imagen de g_I y 2 elementos más.

    b) Dadas las formulas:
    $F_1 : \quad \forall x \quad f(x) = g(x)$
    $F_2 : \quad \forall x\, \forall y \quad f(x) = g(y)$
    $F_3 : \quad \forall x\, \exists y \quad f(x) = g(y)$
    $F_4 : \quad \exists x\, \forall y \quad f(x) = g(y)$
    $F_5 : \quad \exists x\, \exists y \quad f(x) = g(y)$
    construye un modelo de cada uno de las siguientes fórmulas:
    $F_1 \wedge \neg F_2, \quad F_2, \quad \neg F_1 \wedge F_3, \quad \neg F_1 \wedge F_4, \quad \neg F_3 \wedge \neg F_4 \wedge F_5, \quad \neg F_5.$

30. (dificultad 2) Demuestra, aplicando la definición, que la fórmula $\forall x \quad x = x$ es válida.

31. (dificultad 2) Razona (puedes aplicar la semántica de manera informal sin necesidad de recurrir a la definición de *eval*) por qué la fórmula $\forall x \forall y\; (x = y \rightarrow f(x) = f(y))$ y la fórmula $\forall x \forall y\; (x = y \rightarrow (p(x) \leftrightarrow p(y)))$ son válidas. Demuestra que si en estas fórmulas reemplazamos la igualdad por un símbolo de predicado q de aridad 2 cualquiera dejan de ser fórmulas válidas. Expresa mediante fórmulas propiedades análogas para símbolos de función y predicado n-arios. Son también fórmulas válidas?

32. Para los conjuntos de símbolos y pares de interpretaciones siguientes, escribe una fórmula que es cierta en una de ellas y falsa en la otra.

    a) (dificultad 2) $\mathcal{F} = \{f^2\}$, I_1 tiene como dominio los naturales y f se interpreta como el producto; I_2 tiene como dominio $P(\mathbb{N})$ y f se interpreta como la intersección.

    b) (dificultad 2) $\mathcal{F} = \{f^1\}$, el dominio de I_1 son los naturales y el de I_2 son los números enteros: En ambos casos el símbolo f se interpreta como la función 'siguiente', es decir $f_I(n) = n + 1$.

c) (dificultad 4) $\mathcal{F} = \{f^2, g^2\}$. El dominio de I_1 son los números reales, f y g se interpretan como la suma y el producto respectivamente. I_2 es análogo salvo que ahora el dominio son los números racionales.
Ayuda: fabrica el dos y expresa que raíz de dos existe.

33. (dificultad 3) Tenemos los símbolos de constante $\{c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, los símbolos de predicado p^1, q^1, d^2, y los símbolos de función su^2, pr^2. Sea I la interpretación que tiene por dominio los números naturales, la constante c_n se interpreta como el número natural n, p se interpreta como 'ser número primo', q se interpreta como 'ser un cuadrado', d se interpreta como el predicado de divisibilidad, su y pr se interpretan respectivamente como la suma y el producto de naturales. Expresa con una fórmula las siguientes propiedades:

    a) El número 1 no es primo

    b) 2 es el único natural que es primo y par

    c) Todo número natural es suma de 4 cuadrados

    d) Ningún número primo es un cuadrado

    e) Todo cuadrado par es divisible por 4

    f) Todo número par mayor que 2 es suma de dos primos

    g) Hay números impares que no son primos

    h) Si un número impar es producto de otros dos, éstos también deben ser impares

    i) La suma de dos impares es par

    j) Si un número primo divide al producto de otros dos números, debe dividir alguno de ellos

34. (dificultad 4) Demuestra que si una fórmula no contiene $\neg$ ni ningún símbolo de predicado (salvo la igualdad) es cierta en toda interpretación cuyo dominio tiene un solo elemento.

35. (dificultad 5) Demuestra que la fórmula

$$\forall x \forall y\ (f(x) = f(y) \rightarrow x = y) \quad \wedge \quad \exists x \forall y\ x \neq f(y)$$

    es satisfactible pero que todos sus modelos son infinitos.

36. (dificultad 5) Sea F la fórmula $\forall x\ f(f(x)) = x$.

    a) Demuestra que $\forall x \forall y\ (f(x) = f(y) \rightarrow x = y)$ es consecuencia lógica de F (puedes aplicar la semántica de manera informal, es decir sin necesidad de recurrir a la definición literal de *eval*). Ídem para $\forall x \exists y\ \ x = f(y)$.

    b) Demuestra que $F \wedge \forall x\ f(x) \neq x$ es satisfactible y que todo modelo finito de dicha fórmula tiene un número par de elementos. Para cada $n \geq 1$ construye un modelo de dicha fórmula que tenga exactamente $2n$ elementos. Podría ocurrir lo mismo con una fórmula sin igualdad?

7. Ejercicios de formalización del lenguaje natural

37. (dificultad 2) Formaliza en lógica proposicional y estudia la validez lógica de la siguiente argumentación, esto es, si la conclusión es consecuencia lógica de la conjunción de las premisas:

    "Si Dios no existe y todo está permitido, entonces vamos inexorablemente hacia el caos. Dios no existe. No vamos hacia el caos. Luego, no todo está permitido"

    (Extraído de Hortalá, Leach, Rodríguez "Matemática discreta y lógica matemática, Ed. Complutense 2001)

38. (dificultad 2) Si tenemos los símbolos de predicado binario ami, con, pa (*ami* para 'amigos', *con* para 'conocidos', y *pa* para 'ser padre de') y los símbolos de constante m, e, r (m para Manuel, e para Enrique y r para Ramón) , formaliza la frases siguientes:

    a) Manuel es hijo de Enrique

    b) Manuel tiene amigos

    c) Ramón conoce a todos los amigos de sus hijos

    d) Enrique y Ramón tienen los mismos amigos

    e) Los amigos comunes de Ramón y Enrique son conocidos de Manuel

    f) Todos conocen a sus amigos pero no son amigos de todos sus conocidos

    g) Todos conocen a los amigos de sus hijos

    h) Todos los padres conocen a los padres de los amigos de sus hijos

    i) Hay padres que no conocen a todos los conocidos de sus hijos

    j) Si dos personas tienen los mismos amigos entonces también tienen los mismos conocidos

    k) Hay personas que tienen los mismos conocidos pero no los mismos amigos