Front matter

title: "Отчёт по лабораторной работе №5" subtitle: "Предмет: Математическое моделирование" author: "Носов А.А., НФИбд-01-20"

Цель работы

Изучить жёсткую модель Хищник-жертва и решить задания лабораторной работы.

Задачи:

- Изучить теоретическую справку;
- На основании теоретической справки найти стационарное решение для задачи;
- Запрограммировать решение на Julia;
- Запрограммировать решение на OpenModelica;
- Сравнить результаты работы программ;

Задание лабораторной работы

Вариант №68 [@lab-task:mathmod]

Для модели "хищник-жертва"

\begin{equation} \label{eq1} \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.64x(t)+0.056x(t)y(t) \ \frac{dy}{dt} = 0.46y(t)-0.054x(t)y(t) \end{cases} \end{equation}

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 8, y_0 = 27$. Найдите стационарное состояние системы.

Теоретическое введение

Общая информация о модели [@lab-example:mathmod]

Простейшая модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - модель Лотки-Вольтерры. Данная двувидовая модель основывается на следующих предположениях:

1. Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории)
2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает
3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными
4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается
5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников

\begin{equation} \label{eq2} \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = ax(t)-bx(t)y(t) \ \frac{dy}{dt} = -cy(t)+dx(t)y(t) \end{array} \end{equation}

В этой модели x – число жертв, y - число хищников. Коэффициент a описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, c - естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников (xy). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены $-bxy$ и dxy в правой части уравнения).

Математический анализ этой (жёсткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние, всякое же другое начальное состояние приводит к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени такая система вернётся в изначальное состояние.

Стационарное состояние системы \eqref{eq2} (положение равновесия, не зависящее от времени решения) будет находиться в точке $x_0=\frac{c}{d}, y_0=\frac{a}{b}$. Если начальные значения задать в стационарном состоянии $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки. Амплитуда колебаний и их период определяется начальными значениями численностей $x(0), y(0)$. Колебания совершаются в противофазе.

При малом изменении модели

\begin{equation} \label{eq3} \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = ax(t)-bx(t)y(t) + \epsilon f(x,y) \ \frac{dy}{dt} = -cy(t)+dx(t)y(t) + \epsilon g(x,y), \epsilon << 1 \end{array} \end{equation}

(прибавление к правым частям малые члены, учитывающие, например, конкуренцию жертв за пищу и хищников за жертв), вывод о периодичности (возвращении системы в исходное состояние В), справедливый для жесткой системы Лотки-Вольтерры, теряет силу. Таким образом, мы получаем так называемую мягкую модель «хищник-жертва».

Выполнение лабораторной работы

Решение с помощью программ

Julia

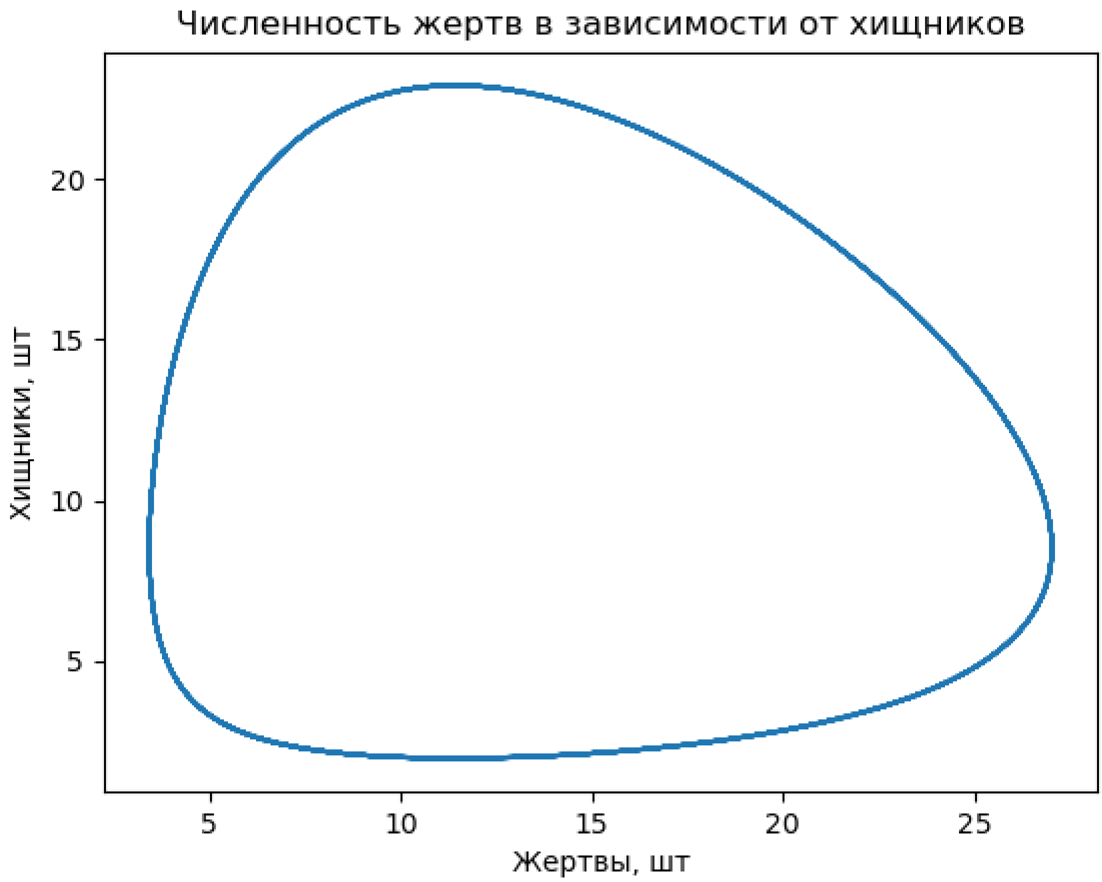
Программный код решения на Julia

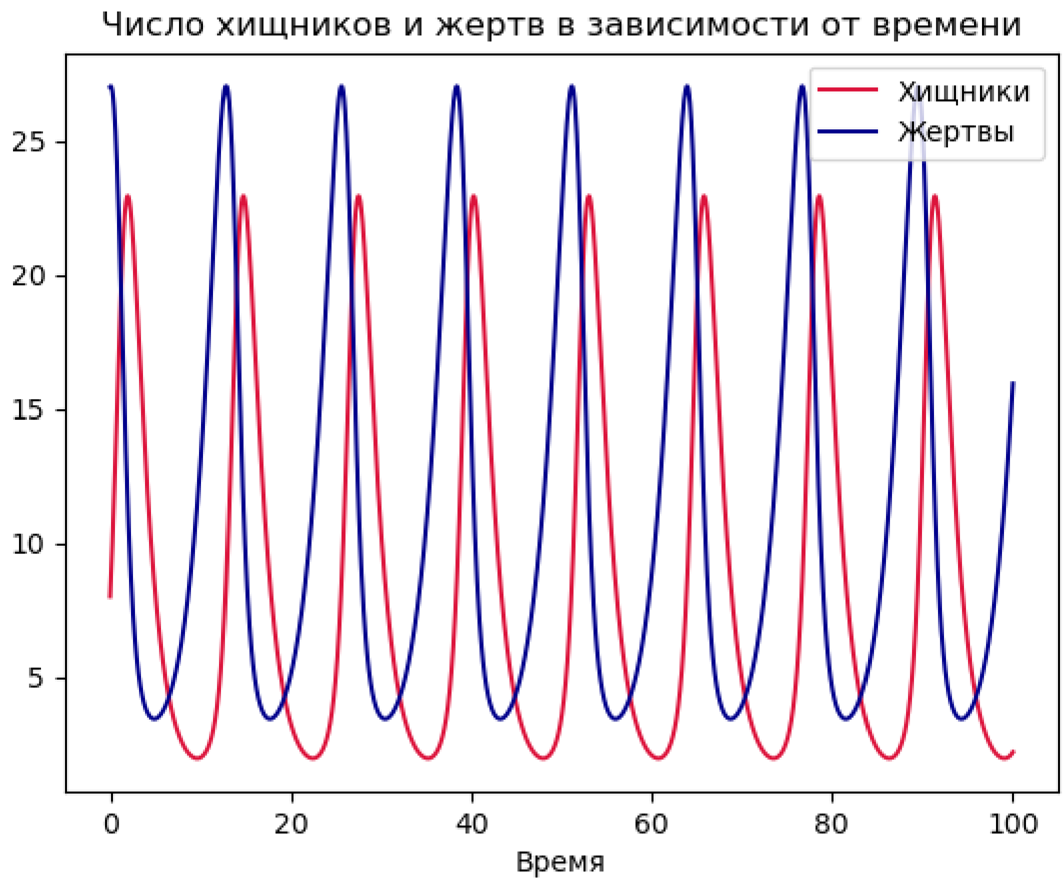
```
using PyPlot;
using DifferentialEquations;
function HiZge!(du, u, p, t)
    du[1] = (-0.64)*u[1] + 0.056*u[1]*u[2]
    du[2] = 0.46*u[2] - 0.054*u[1]*u[2]
end
const u0 = Float64[8.0, 27.0]
const uostac = Float64[0.46/0.054, 0.64/0.056]
const p = []
const tspan = [0.0, 100.0]
```

```
prob1 = ODEProblem(HiZge!,u0,tspan, p)
prob2 = ODEProblem(HiZge!,uostac,tspan, p)
sol1 = solve(prob1, dtmax=0.05)
sol2 = solve(prob2, dtmax=0.05)

R1 = [tu[1] for tu in sol1.u]
R2 = [tu[2] for tu in sol1.u]


clf()
plot(R2, R1)
xlabel("Жертвы, шт")
ylabel("Хищники, шт")
title("Численность жертв в зависимости от хищников")
savefig("C:\\Users\\HyperPC\\Documents\\GitHub\\study_2022-
2023_mathmod\\labs\\lab05\\report\\image\\g1.png")
clf()

plot(sol1.t, R1, label="Хищники", color="crimson")
plot(sol1.t, R2, label="Жертвы", color="darkblue")
xlabel("Время")
title("Число хищников и жертв в зависимости от времени")
legend(loc=1)
savefig("C:\\Users\\HyperPC\\Documents\\GitHub\\study_2022-
2023_mathmod\\labs\\lab05\\report\\image\\g2.png")
clf()

R1 = [tu[1] for tu in sol2.u]
R2 = [tu[2] for tu in sol2.u]

clf()
plot(R2, R1, "ro")
xlabel("Жертвы, шт")
ylabel("Хищники, шт")
title("Численность жертв в зависимости от хищников")
savefig("C:\\Users\\HyperPC\\Documents\\GitHub\\study_2022-
2023_mathmod\\labs\\lab05\\report\\image\\g3.png")
clf()

plot(sol2.t, R1, label="Хищники", color="crimson")
plot(sol2.t, R2, label="Жертвы", color="darkblue")
xlabel("Время")
title("Число хищников и жертв в зависимости от времени")
legend()
savefig("C:\\Users\\HyperPC\\Documents\\GitHub\\study_2022-
2023_mathmod\\labs\\lab05\\report\\image\\g4.png")
clf()
```

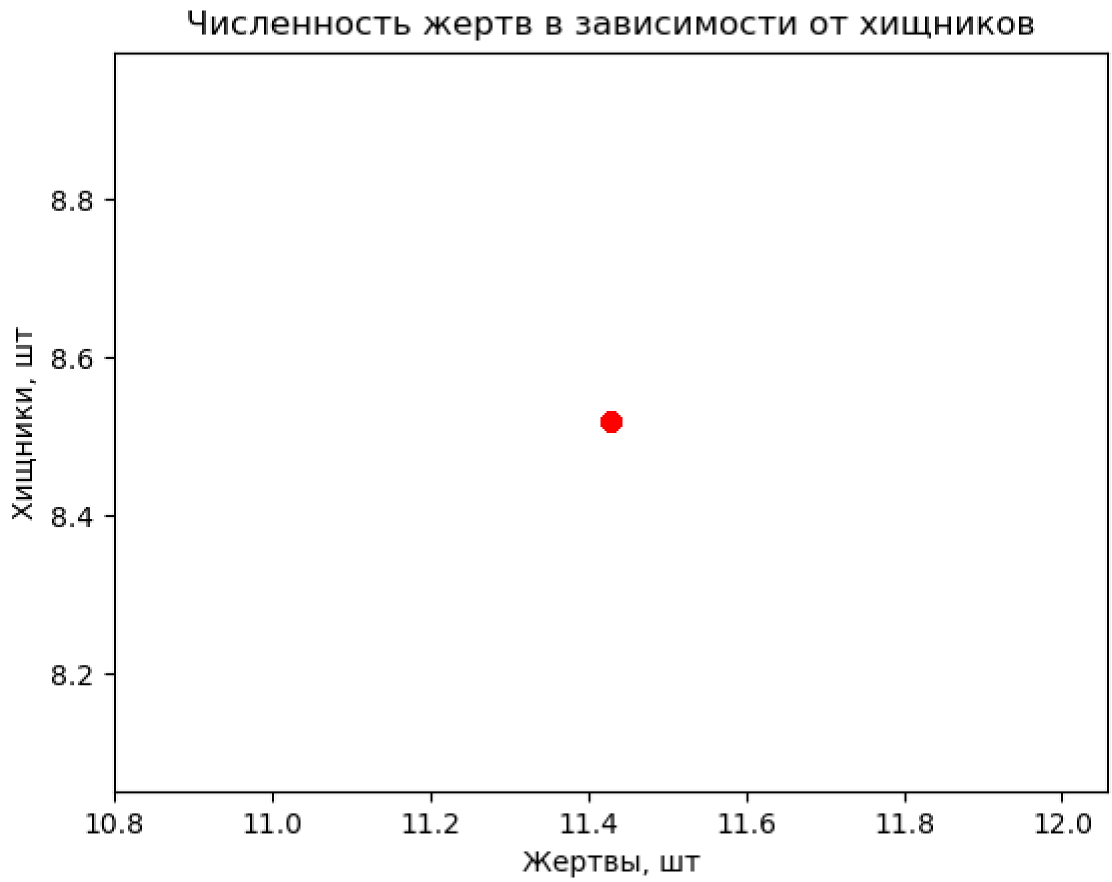
Результаты работы кода на Julia

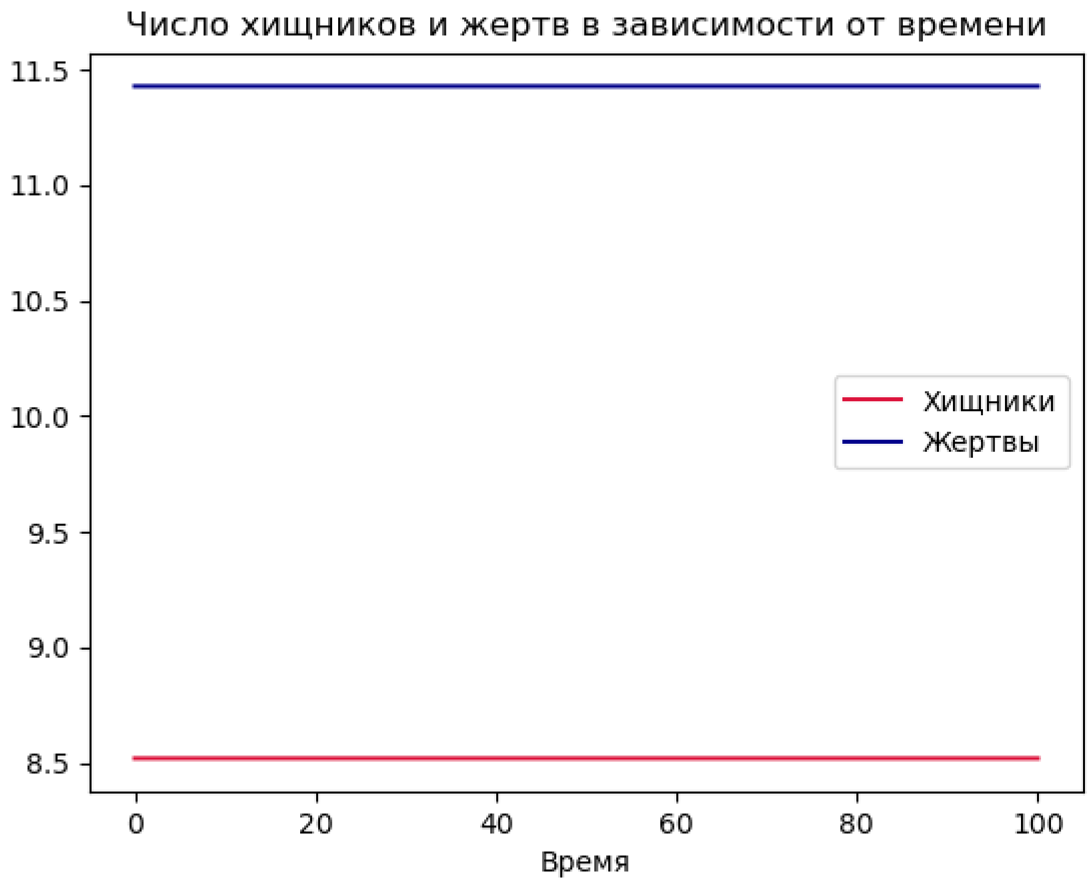
Решение для нестационарного состояния, заданного заданием лабораторной работы





Решение для стационарного состояния, заданного заданием лабораторной работы





В стационарном состоянии решение вида $y(x)=some function$ будет представлять собой точку.

OPenModelica

Программный код решения на OPenModelica

Решение для нестационарного состояния

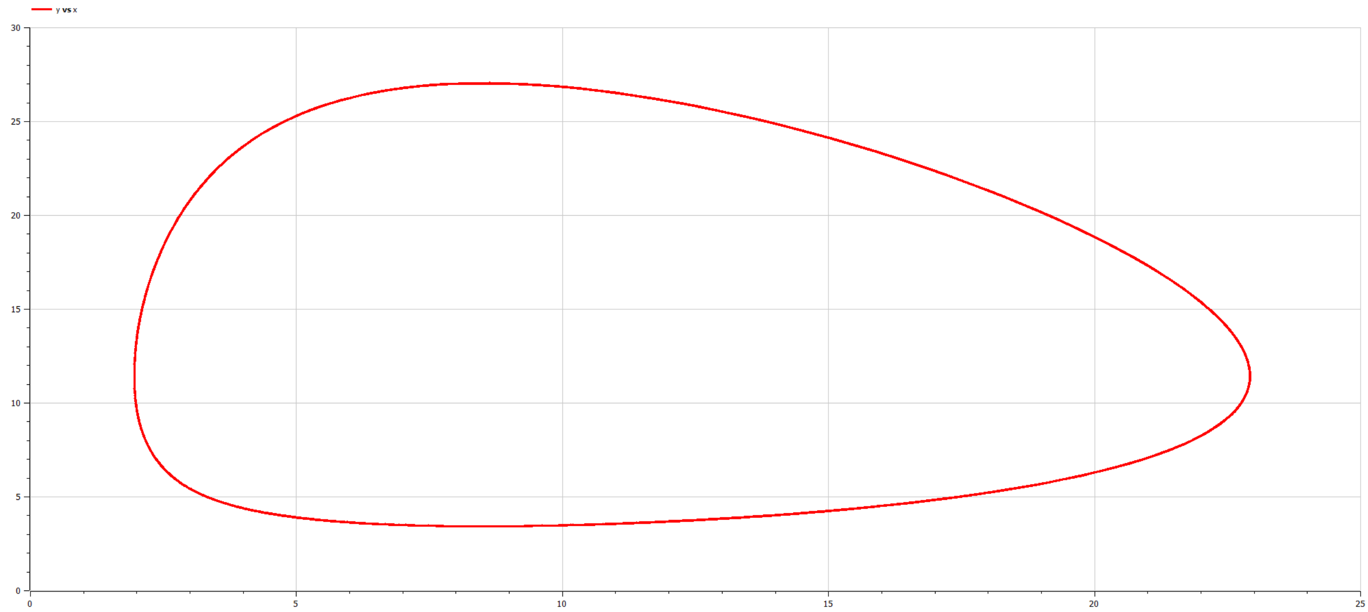
```
model dddd
  Real x(start=8);
  Real y(start=27);
  parameter Real a( start=-0.64);
  parameter Real b( start=0.056);
  parameter Real c( start=0.46);
  parameter Real h( start=-0.054);

  equation
    der(x)= a*x + b*x*y;
    der(y)= c*y + h*x*y;

  annotation(experiment(StartTime=0, StopTime=100, Tolerance=1e-6,
Interval=0.05));
end dddd;
```

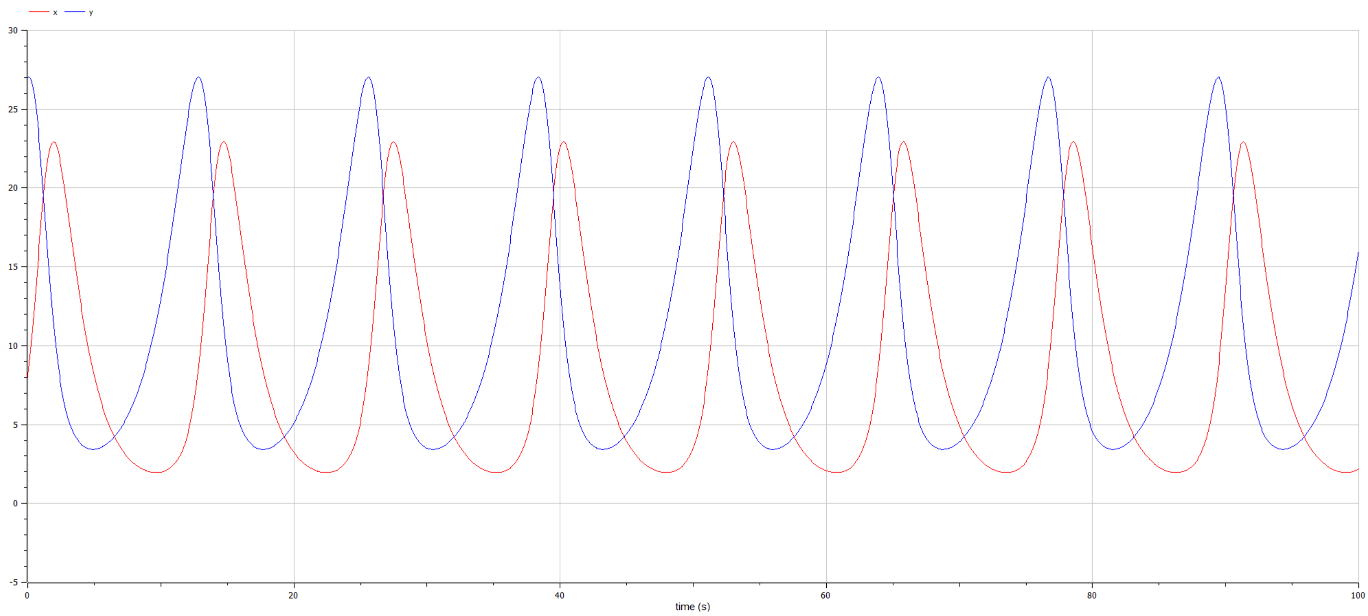
Решение для стационарного состояния

```
model dddd
  Real x(start=0.46/0.054);
  Real y(start=0.64/0.056);
  parameter Real a( start=-0.64);
  parameter Real b( start=0.056);
  parameter Real c( start=0.46);
  parameter Real h( start=-0.054);

  equation
    der(x)= a*x + b*x*y;
    der(y)= c*y + h*x*y;

  annotation(experiment(StartTime=0, StopTime=100, Tolerance=1e-6,
Interval=0.05));
end dddd;
```

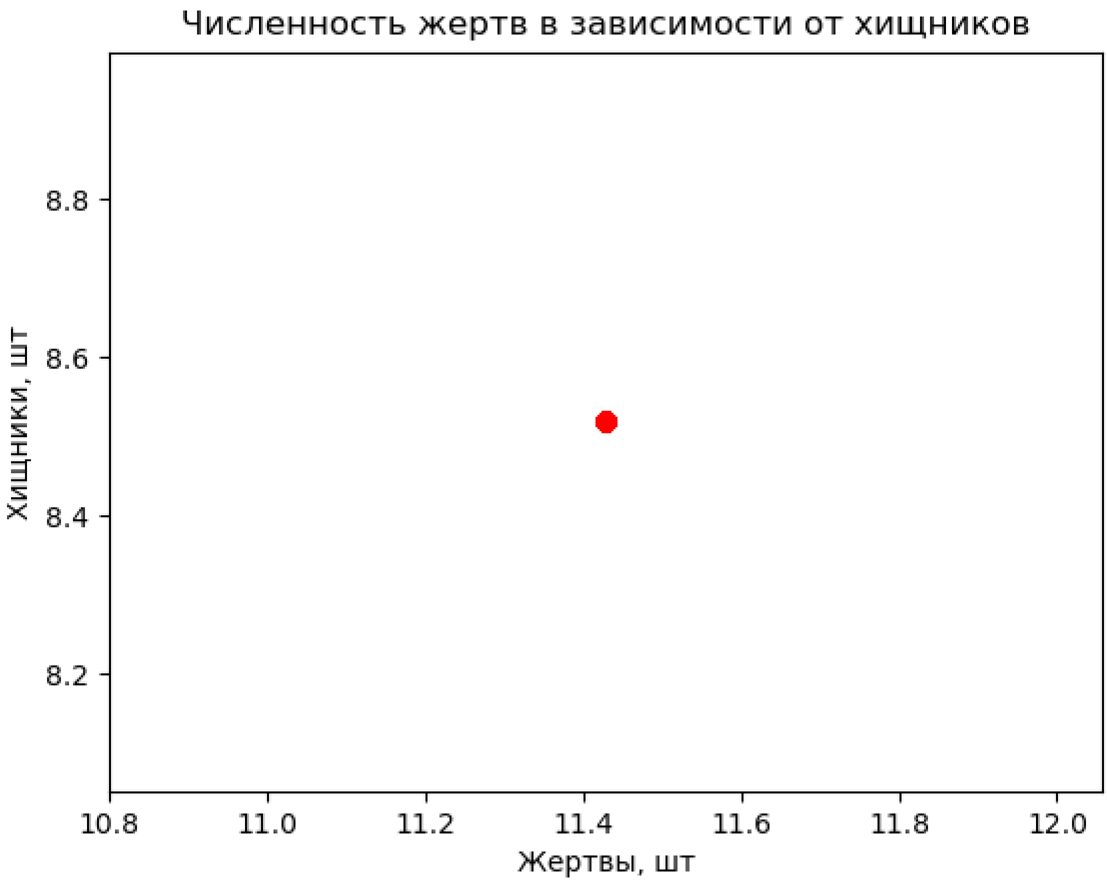
Результаты работы кода на OpenModelica

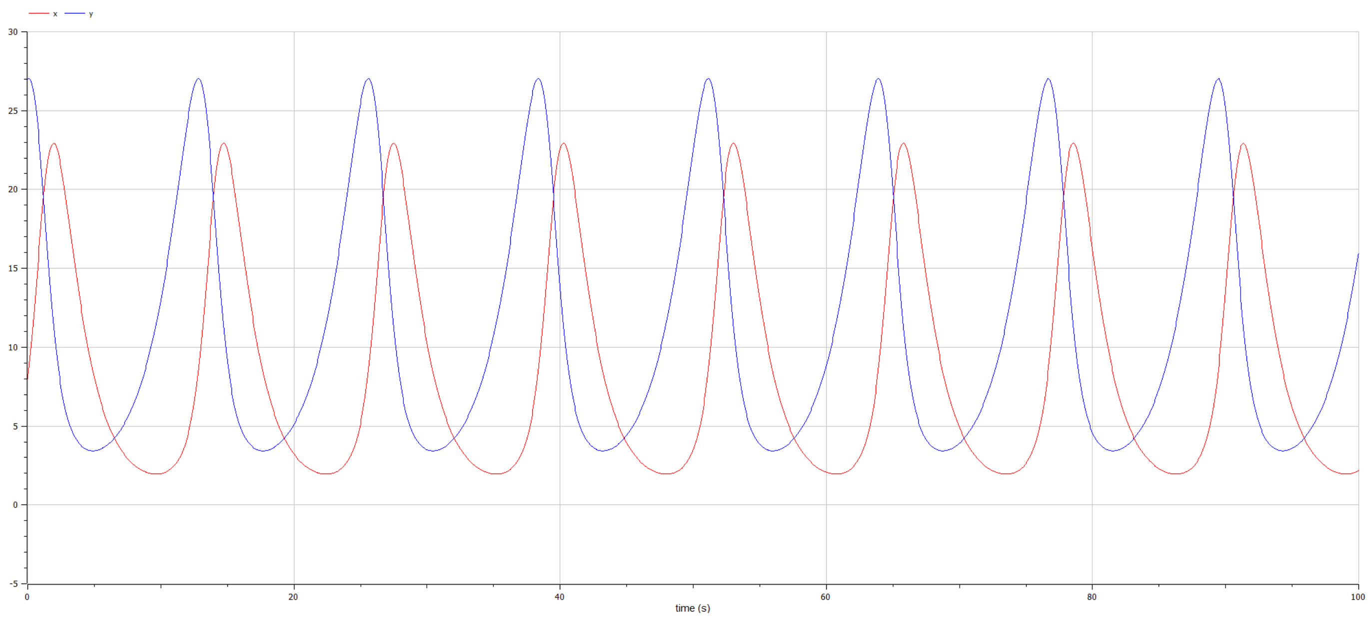
Решение для нестационарного состояния, заданного заданием лабораторной работы





Решение для стационарного состояния, заданного заданием лабораторной работы





В стационарном состоянии решение вида $y(x)=some function$ будет представлять собой точку. Почему-то в OpenModelica точка сама по себе не желает отображаться.

Выводы

Была изучена жёсткая модель Хищник-жертва. Были запрограммированы решения для задачи лабораторной работы на Julia и OpenModelica. Было найдено стационарное состояние системы и были построены графики численности жертв и хищников для условий задачи и для стационарного состояния.