

Front matter

title: "Отчёт по лабораторной работе №4" subtitle: "Предмет: Математическое моделирование" author: "Носов А.А., НФИбд-01-20"

Цель работы

Изучить работу гармонического осциллятора и решить задания лабораторной работы.

Задание лабораторной работы

1. Изучить теоретическую справку;
2. Запрограммировать решение на Julia;
3. Запрограммировать решение на OpenModelica;
4. Сравнить результаты работы программ;

Вариант №68 [@lab-task:mathmod]

Постройте фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев:

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы
 $\ddot{x} + 5.5x = 0$;
2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы
 $\ddot{x} + 0.5\dot{x} + 5x = 0$
3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы
 $\ddot{x} + 5\dot{x} + 0.5x = 0.5\cos(5t)$

Теоретическое введение

Общая информация о модели

Движение груза на пружинке, маятника, заряда в электрическом контуре, а также эволюция во времени многих систем в физике, химии, биологии и других науках при определенных предположениях можно описать одним и тем же дифференциальным уравнением, которое в теории колебаний выступает в качестве основной модели. Эта модель называется линейным гармоническим осциллятором.

Уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора имеет следующий вид:

$$\text{\label{eq1}} \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

где x – переменная, описывающая состояние системы (смещение грузика, заряд конденсатора и т.д.), γ – параметр, характеризующий потери энергии (трение в механической системе, сопротивление в контуре), ω_0^2 – собственная частота колебаний, t – время. (Обозначения $\ddot{x} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$, $\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial t}$)

Уравнение $(\text{\eqref{eq1}})$ есть линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка и оно является примером линейной динамической системы.

При отсутствии потерь в системе ($\gamma=0$) вместо уравнения $(\text{\eqref{eq1}})$ получаем уравнение консервативного осциллятора, энергия колебания которого сохраняется во времени.

$$\text{\label{eq2}} \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Для однозначной разрешимости уравнения второго порядка $(\text{\eqref{eq2}})$ необходимо задать два начальных условия вида

$$\text{\label{eq3}} \begin{cases} x(t) = x_0 \\ \dot{x}(t) = y_0 \end{cases}$$

Уравнение второго порядка $(\text{\eqref{eq2}})$ можно представить в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\omega_0^2 x$$

\$

Начальные условия $(\text{\eqref{eq3}})$ для системы (4) примут вид:

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Выполнение лабораторной работы

Решение с помощью программ

Julia

Программный код решения на Julia

Код программы:

```
using DifferentialEquations
using PyPlot;

# Определяем уравнение гармонического осциллятора без затуханий и без внешней силы
function harm_oscillator_without_damping(du, u, p, t)
    du[1] = u[2]
    du[2] = -5.5 * u[1]
end

# Определяем начальные условия
u0 = [0.5, 0.0]
tspan = (0.0, 55.0)

prob = ODEProblem(harm_oscillator_without_damping, u0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax=0.05)
```

```
x=[tu[1] for tu in sol.u]
y=[tu[2] for tu in sol.u]

clf()
plot(x, y)
title("Определяем уравнение гармонического осциллятора без затуханий и без внешней
силы")
savefig("C:\\Users\\HyperPC\\Documents\\GitHub\\study_2022-
2023_mathmod\\labs\\lab04\\image\\g1.png")
clf()
plot(sol.t, x,color="red")
plot(sol.t, y,color="black")
title("Определяем уравнение гармонического осциллятора без затуханий и без внешней
силы")
savefig("C:\\Users\\HyperPC\\Documents\\GitHub\\study_2022-
2023_mathmod\\labs\\lab04\\image\\g1_1.png")
clf()

# Определяем уравнение гармонического осциллятора с затуханием и без внешней силы
function harm_oscillator_with_damping(du, u, p, t)
    du[1] = u[2]
    du[2] = -0.5 * u[2] - 5 * u[1]
end

# Определяем начальные условия для второго случая
u0 = [0.5, -0.5]
tspan = (0.0, 55.0)

# Решаем уравнение гармонического осциллятора с затуханием и без внешней силы
prob = ODEProblem(harm_oscillator_with_damping, u0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax=0.05)

x=[tu[1] for tu in sol.u]
y=[tu[2] for tu in sol.u]

clf()
plot(x, y)
title("Определяем уравнение гармонического осциллятора с затуханием и без внешней
силы")
savefig("C:\\Users\\HyperPC\\Documents\\GitHub\\study_2022-
2023_mathmod\\labs\\lab04\\image\\g2.png")
clf()
plot(sol.t, x,color="red")
plot(sol.t, y,color="black")
title("Определяем уравнение гармонического осциллятора с затуханий и без внешней
силы")
savefig("C:\\Users\\HyperPC\\Documents\\GitHub\\study_2022-
2023_mathmod\\labs\\lab04\\image\\g2_1.png")
clf()

# Определяем уравнение гармонического осциллятора с затуханием и под воздействием
```

```
внешней силы
function harm_oscillator_with_external_force(du, u, p, t)
    du[1] = u[2]
    du[2] = -5 * u[2] - 0.5 * u[1] + 0.5 * cos(5 * t)
end

# Определяем начальные условия для третьего случая
u0 = [-0.5, 0.5]
tspan = (0.0, 55.0)

# Решаем уравнение гармонического осциллятора с затуханием и под воздействием
внешней силы
prob = ODEProblem(harm_oscillator_with_external_force, u0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax=0.05)

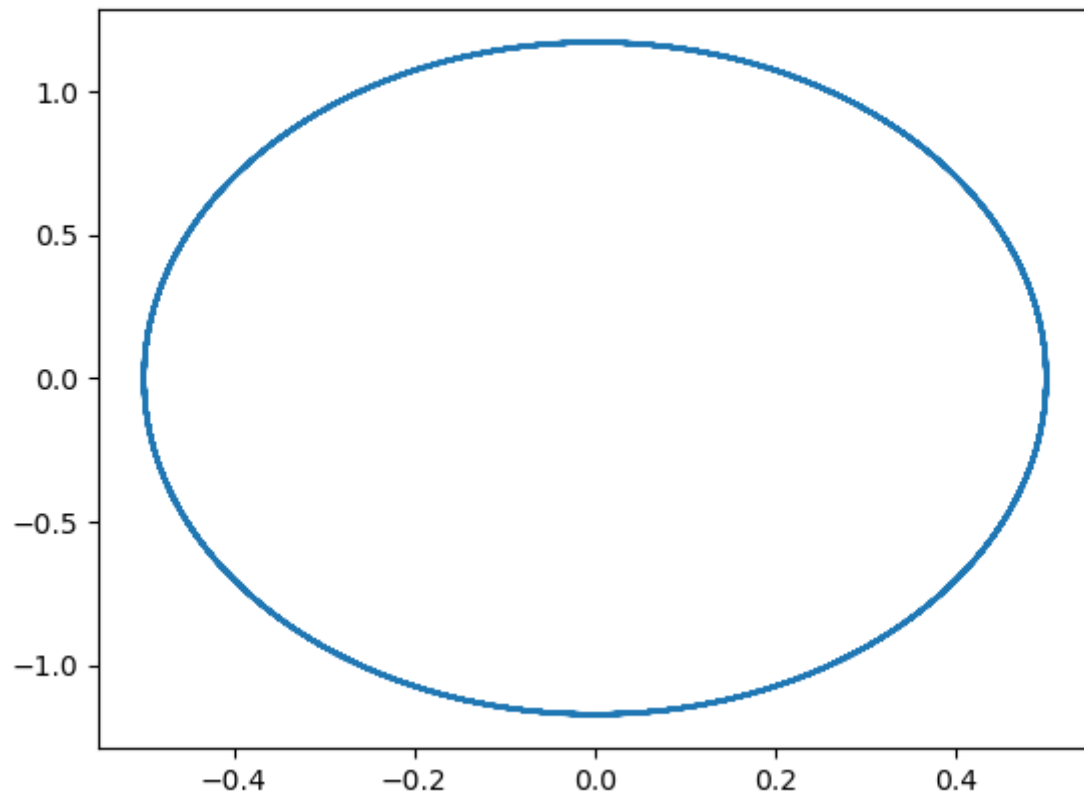
x =[tu[1] for tu in sol.u]
y =[tu[2] for tu in sol.u]

clf()
plot(x, y)
title("Определяем уравнение гармонического осциллятора с затуханием и под
воздействием внешней силы")
savefig("C:\\Users\\HyperPC\\Documents\\GitHub\\study_2022-
2023_mathmod\\labs\\lab04\\image\\g3.png")
clf()
plot(sol.t, x,color="red")
plot(sol.t, y,color="black")
title("Определяем уравнение гармонического осциллятора с затуханием и под
воздействием внешней силы")
savefig("C:\\Users\\HyperPC\\Documents\\GitHub\\study_2022-
2023_mathmod\\labs\\lab04\\image\\g3_1.png")
clf()
```

Результат:

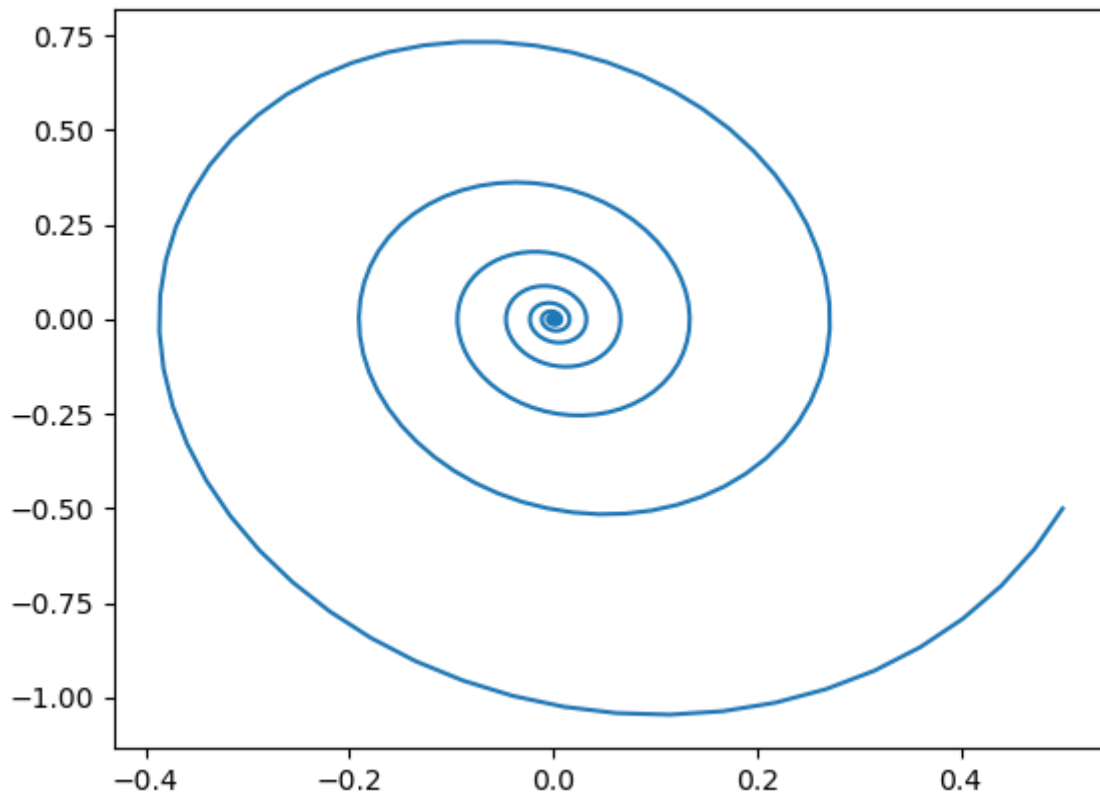
1

ляем уравнение гармонического осциллятора без затуханий и без внеш



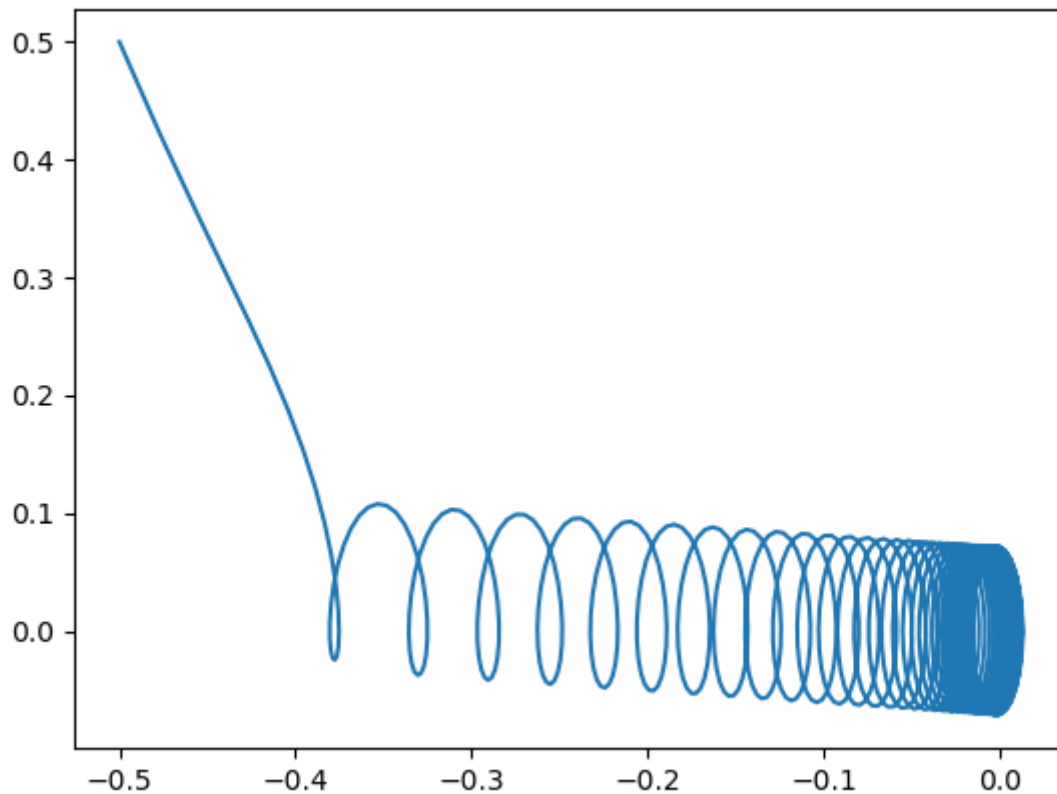
скриншот 1.1

решаем уравнение гармонического осциллятора с затуханием и без внеш



скриншот 2.1

Уравнение гармонического осциллятора с затуханием и под воздействием



скриншот 3.1

OpenModelica

Уравнение гармонического осциллятора без затуханий и без внешней силы

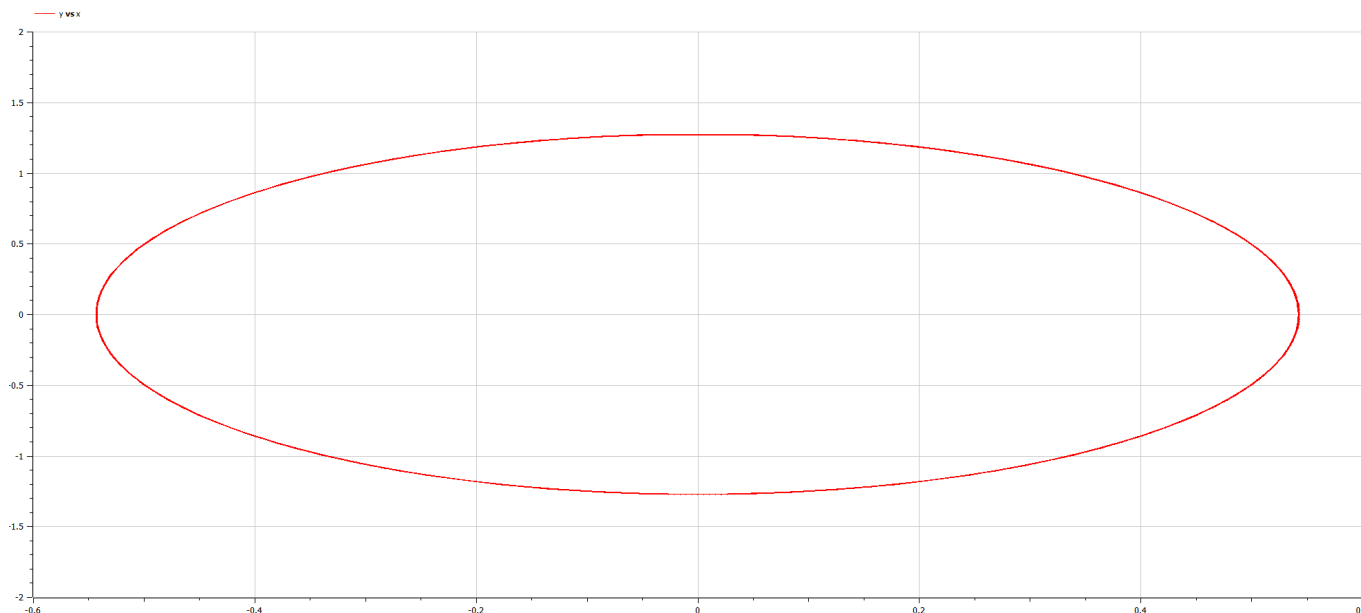
Код программы:

```
model dassdfff
  parameter Real w(start=5.5);
  Real x(start = -0.5);
  Real y(start = 0.5);

  equation
    der(x)=y;
    der(y)=-w*x;

    annotation(experiment(StartTime = 0, StopTime = 56, Tolerance = 1e-6, Interval =
0.05));
end dassdfff;
```

Результат:



скриншот 1.1

Уравнение гармонического осциллятора с затуханий и без внешней силы

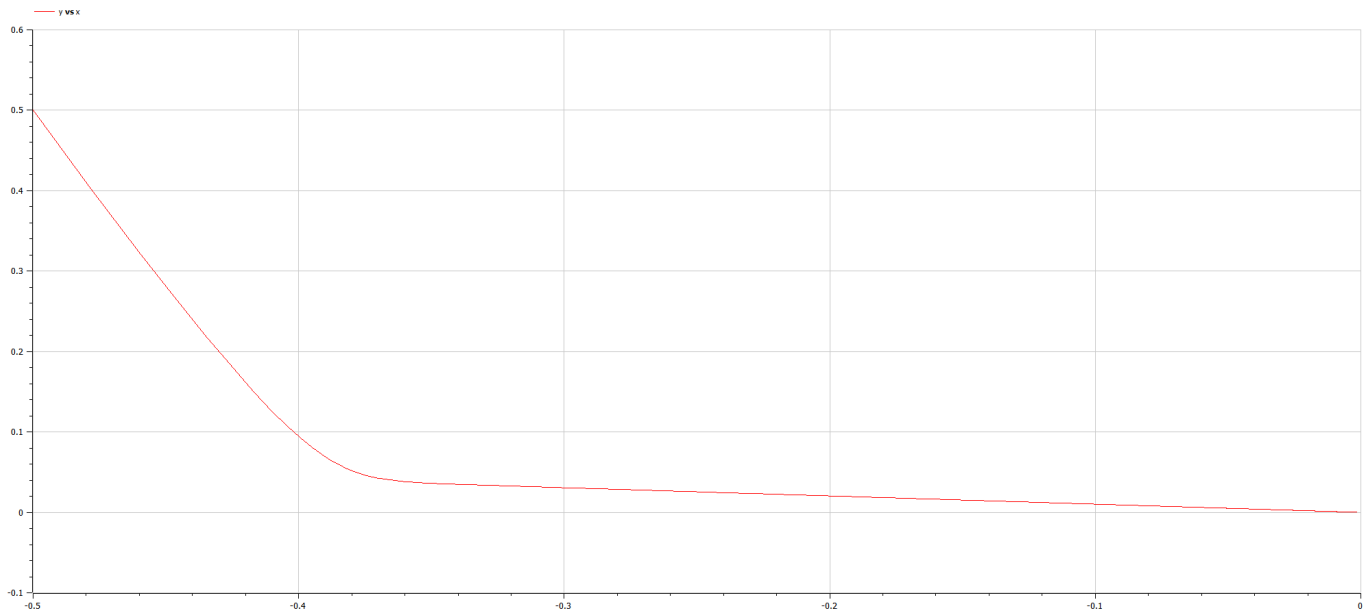
Код программы:

```
model dassdfff
  parameter Real g(start=5);
  parameter Real w(start=0.5);
  Real x(start = -0.5);
  Real y(start = 0.5);

  equation
    der(x)=y;
    der(y)=-g*y-w*x;

    annotation(experiment(StartTime = 0, StopTime = 56, Tolerance = 1e-6, Interval =
0.05));
end dassdfff;
```

Результат:



скриншот 2.1

Уравнение гармонического осциллятора с затуханий и с внешней силы

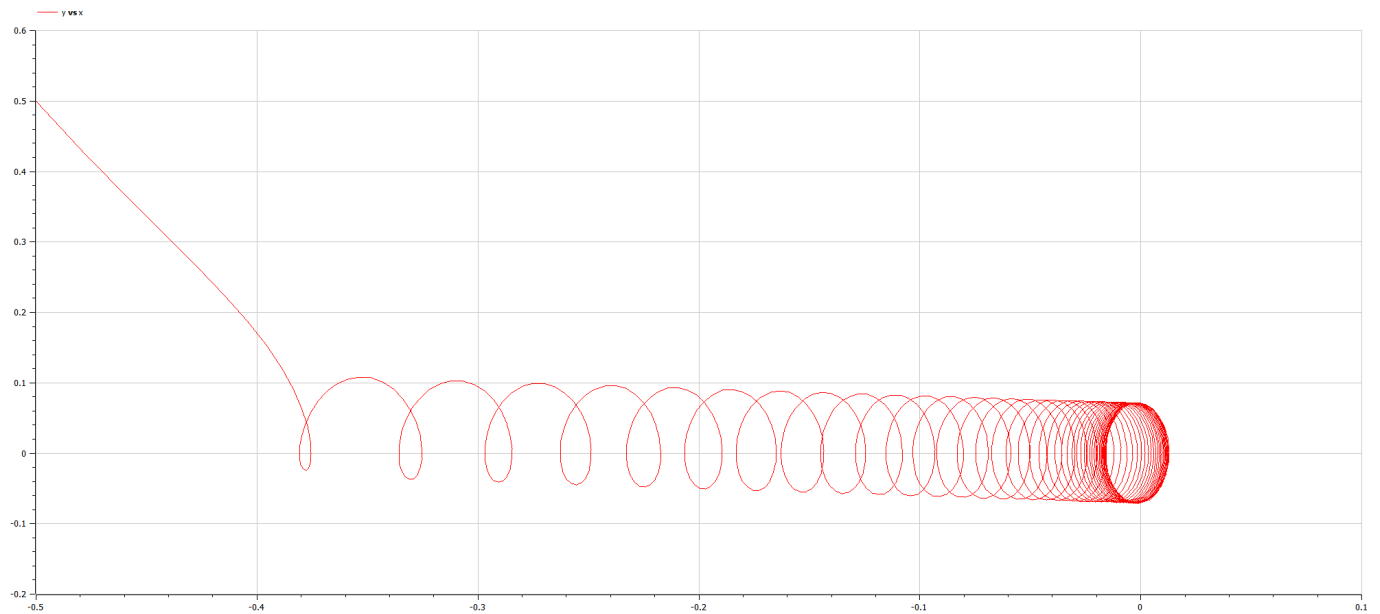
Код программы:

```
model dassdfff
  parameter Real g(start=5);
  parameter Real w(start=0.5);
  Real x(start = -0.5);
  Real y(start = 0.5);

  equation
    der(x)=y;
    der(y)=-g*y-w*x+0.5*cos(5*time);

    annotation(experiment(StartTime = 0, StopTime = 56, Tolerance = 1e-6, Interval =
0.05));
end dassdfff;
```

Результат:



скриншот 3.1

Сравнение результатов

Результаты работы программы на Julia и на OpenModelica идентичны до различий между графическими модулями.