Санкт-Петербургский политехнический университет имени Петра Великого

Физико-механический институт

Высшая школа прикладной математики и физики

Курсовая работа
тема "Метод Кравчика - касание параболы и окружности"
дисциплина "Интервальный анализ"

Выполнил:

Студент: Петрошенко Артём
Группа: 5030102/00201

Принял:

к. ф.-м. н., доцент
Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2023 г.

Содержание

1 Постановка задачи

Рассмотрим систему уравнений $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1 - x_e)^2 + (x_2 - y_e)^2 - 1 = 0, \ x_e = 1.22, \ y_e = 0 \\ x_1 - x_2^2 = 0 \end{pmatrix}$$

Необходимо найти корни данной системы точеченых нелинейных уравнений, используя интервальный метод Кравчика.

2 Теория

2.1 Внешнее множество решений

Внешним множеством решений называется объединенное множество решений, образованное решениями всех точечных систем $F(a, x) = b$

$$\Xi_{\text{uni}}(\mathbf{F}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists a \in \mathbf{a})(\exists b \in \mathbf{b})(F(a, x) = b)\} \tag{1}$$

2.2 Метод Кравчика

Метод Кравчика предназначен для уточнения двухсторонних границ решений систем уравнений, в общем случае нелинейных, заданных на некотором брусе $\mathbf{X} \subset \mathbb{IR}$, вида

$$F(x) = 0, \quad \text{где } F(x) = \{F_1(x), ..., F_n(x)\}^T, \ x = (x_1, ...x_n) \tag{2}$$

Также данный метод может быть использован для того, чтобы понять, что решений нет.
Отображение $\mathcal{K} : \mathbb{ID} \times \mathbb{R} \to \mathbb{IR}^n$, задаваемое выражением

$$\mathcal{K}(\mathbf{X}, \overline{x}) := \overline{x} - \Lambda * F(\overline{x}) - (I - \Lambda * \mathbf{L} * (\mathbf{X} - \overline{x}) \tag{3}$$

называеся оператором Кравчика на $\mathbb{ID}$ относительно точки $\overline{x}$.
Итерационная схема данного метода выглядит следующим образом

$$\mathbf{X}^{k+1} \leftarrow \mathbf{X}^k \cap \mathcal{K}(\mathbf{X}^k, \overline{x}^k), \quad k = 0, 1, 2..., \ x^k \in \mathbf{X}^k \tag{4}$$

Сходимость данного метода гарантирована при выполнении условия

$$\rho(I - \Lambda * \mathbf{L}) < 1 - \text{спектральный радиус меньше единицы} \tag{5}$$

Частным случаем данного метода является линейный метод Кравчика, итерационная схема которого выглядит следующим образом:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \big(\Lambda * \mathbf{b} + (I - \Lambda * \mathbf{A}) * \mathbf{x}^k\big) \cap \mathbf{x}^k \tag{6}$$

$\mathbf{A}$ в данном случае является интервальной матрицей коэффициентов соответсвующей ИСЛАУ, а $\mathbf{b}$ - вектором свободных членов.
В случае линейности системы и выполнения условия $\eta = ||I - \Lambda * \mathbf{A}||_\infty \leq 1$ в качестве начального приближения можно взять брус

$$\mathbf{x}^0 = ([-\theta, \theta], ..., [-\theta, \theta])^T, \quad \text{где } \theta = \frac{||\Lambda \mathbf{b}||_\infty}{1 - \eta} \tag{7}$$

3 Результаты

3.1 Для первого начально приближения $X^{(0)}$

$$X^{(0)} = \begin{cases} [0.8, 1.7] \\ [0.35, 1.05] \end{cases}$$

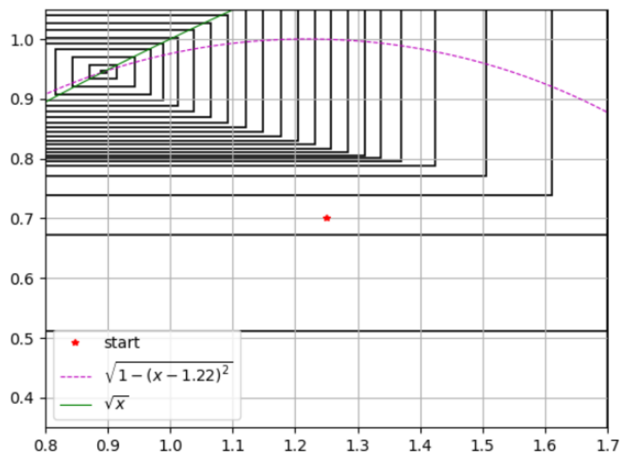

Рис. 1: Метод Кравчика - пересечение параболы и окружности

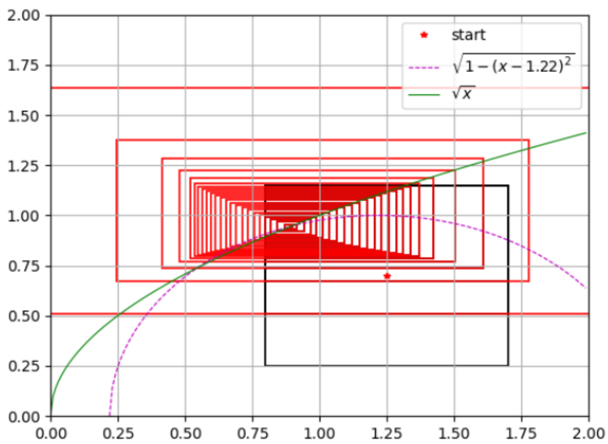

Рис. 2: Оператор Кравчика
Количество итераций: 37

3.2 Для второго начально приближения $X^{(1)}$

$$X^{(1)} = \begin{cases} [0.88, 1.28] \\ [0.75, 1.25] \end{cases}$$

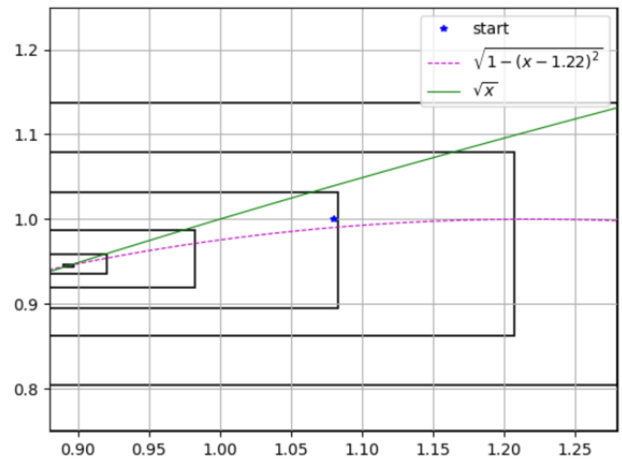

Рис. 3: Метод Кравчика - пересечения параболы и окружности

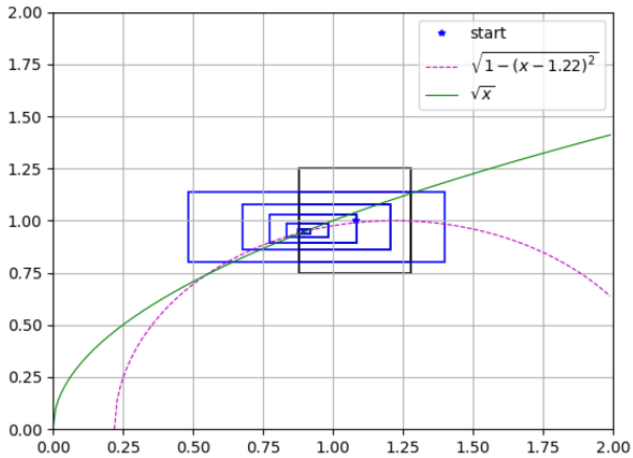

Рис. 4: Оператор Кравчика
Количество итераций: 9

3.3 Изменение угла пересечения параболы и окружности

Меняем угол пересечения между параболой и окружностьюза счёт изменения по x координаты центра окружности.

Начальное приближение:

$$X^{(2)} = \begin{cases} [0.8, 1.4] \\ [0.7, 1.3] \end{cases}$$

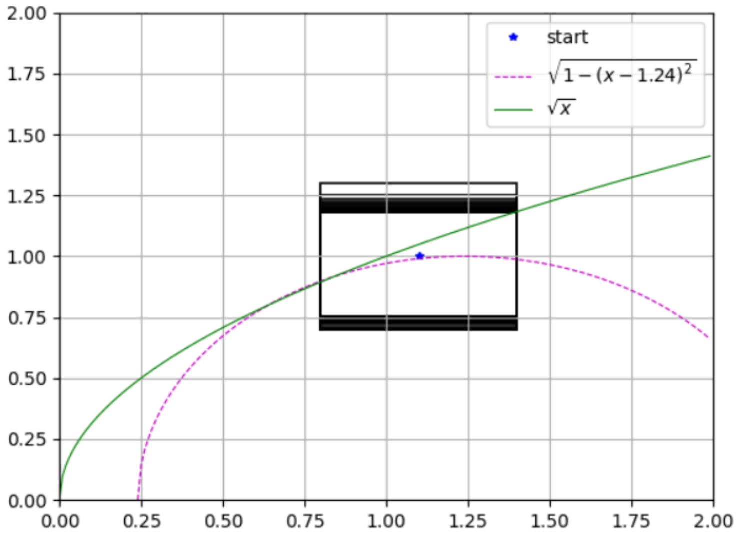

Рис. 5: Оператор Кравчика

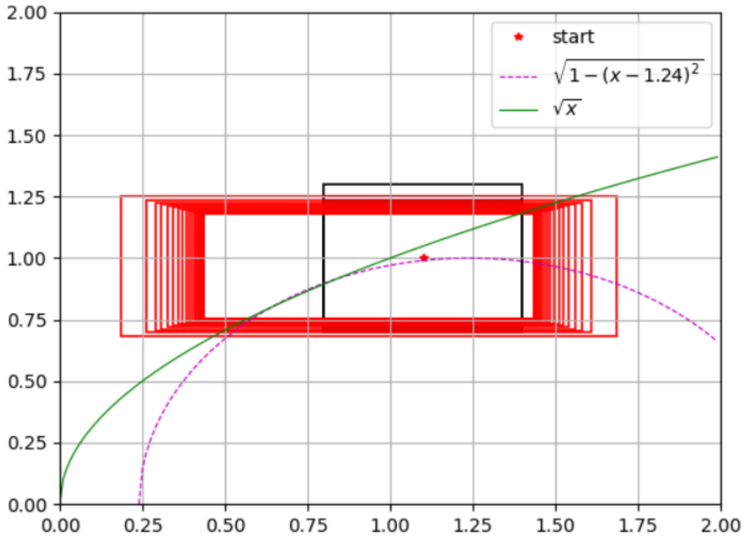

Рис. 6: Оператор Кравчика

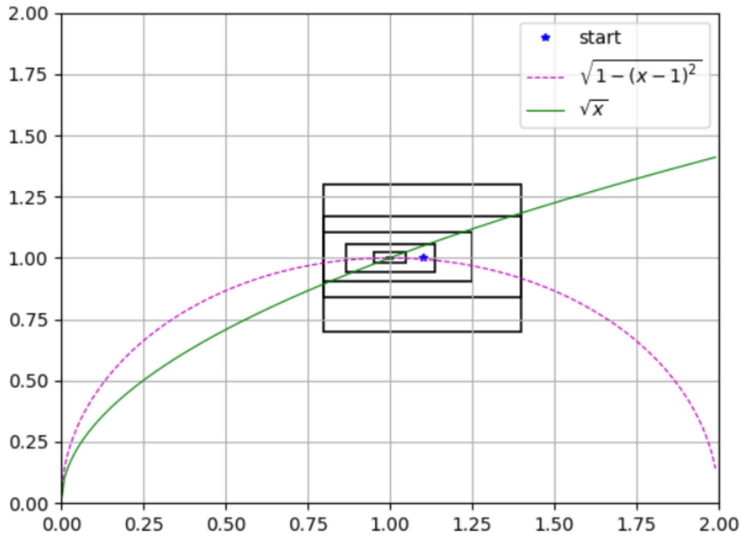

Рис. 7: Метод Кравчика

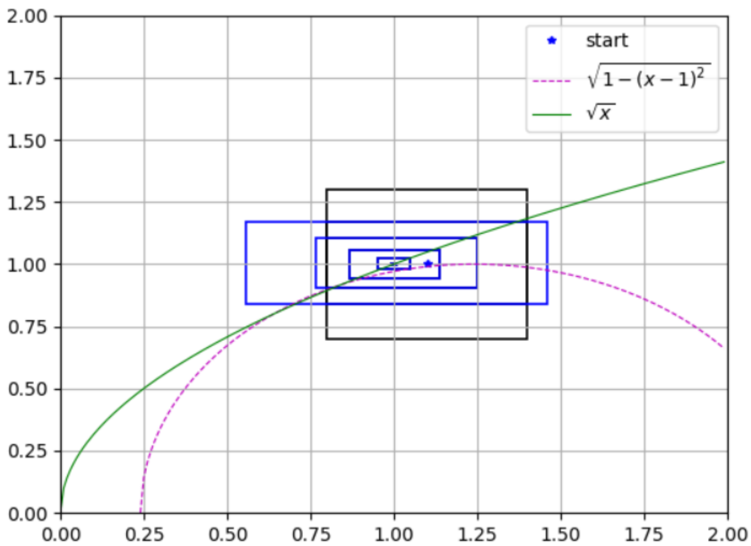

Рис. 8: Оператор Кравчика

4 Вывод

1. Полученные результаты показывает неэффективность интервального метода Кравчика для решения системы нелинейных уравнений, когда графики пересекаются под малым углом. И сходится ли метод к решению системы зависит от начального приближения.

2. Точное решение системы $x = 0.89325, y = 0.94515$ совпадает с полученным результатом с начальным приближение $\mathbf{X}^{(0)}$ и $\mathbf{X}^{(1)}$. Таким образом, метод успешно находит корни системы нелинейных уравнений.

3. Скорость сходримости метода также определяется выбранным начальным приближением.

4. Чем меньше угол пересечения между окружностью и параболой, тем хуже работает метод Кравчика.

Список литературы

[1] Histogram. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Histogram

[2] Вероятностные разделы математики. Учебник для бакалавров технических направлений.//Под ред. Максимова Ю.Д. — Спб.: «Иван Федоров», 2001. — 592 с., илл.

[3] Box plot. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Box_plot

[4] Анатольев, Станислав (2009) «Непараметрическая регрессия», Квантиль, №7, стр. 37-52.