Санкт-Петербургский политехнический университет
Высшая школа прикладной математики
и вычислительной физики, ФизМех

Направление подготовки
«Прикладная математика и информатика»

Отчет по лабораторной работе №1
«Полиномиальная интерполяция»

Выполнил студент гр. 5030102/00003 Петрошенко А.В.

Преподаватель: Курц В.В.

Санкт-Петербург
2021

Формулировка задачи и ее формализация

Зачем решать задачу интерполирования?

1. табличная функция получена в результате эксперимента $\Rightarrow$ необходимо вычислить значения функции (значения производных функции) в других (промежуточных) точках
2. компактное представление данных
3. упрощение вычисления "сложных" функций: заменяем более "простой"

В данной лабораторной будет реализована аппроксимация полиномом Лагранжа.

Постановка задачи:
Даны $(x_i, y_i), i = 0, ..., n$
$x^h = \{x_i\}_{i=0}^n$ - сетка, $y^h := \{y_i\}_{i=0}^n$ - сеточная функция

1. $x_i < x_{i+1}$ - упорядоченная сетка
2. $x_i = x_0 + ih$ - равномерная сетка

Пусть табличная функция задана парой элементов (x^h, y^h). Требуется построить функцию $\phi(x)$, которая удовлетворяет критерию близости

$$\phi(x) \approx (x^h, y^h)$$

и $\phi(x) \in C^{(k)}([a, b])$, где $[a, b]$ - отрезок, содержащий все x_i

В данной работе будет реализована равномерная сетка и использован критерий интерполирования:

$$\phi(x_i) = y_i, i = 0, ..., n$$

Алгоритм метода и условия его применимости

Интерполяционный полином в форме Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{k=0, k\neq i}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

В случае равномерной сетки полином выглядит так:

$$x = x_0 + th, t \in [0, n]$$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{k=0, k\neq i}^{n} \frac{t - k}{i - k}$$

Условия применимости:
В знаменателе мы видим $x_i - x_k$, что означает, что $x_i \neq x_k$. Так как мы реализуем равномерную сетку, то это условие изначально выполнено.

Предварительный анализ задачи

У нас задана табличная функция $(x_i, y_i), i = 0, ..., n$ потребуем выполнения условия интерполяции $\phi(x_i) = y_i$, что можно записать в виде СЛАУ. Откуда следует, что интерполяционный полином в форме Лагранжа существует и единственен, если степень полинома на единицу меньше количества узлов, и x_i попарно различны.
Видим, что эти два условия будут выполнены при таком построении полинома, а также при соблюдении условий его применимости.

Тестовый пример для задач малой размерности

Построим интерполяционный полином в форме Лагранжа для таблично заданной функции

$$f(x) = 0.5^x + 1 - (x-2)^2$$

<u>Равномерная сетка:</u>

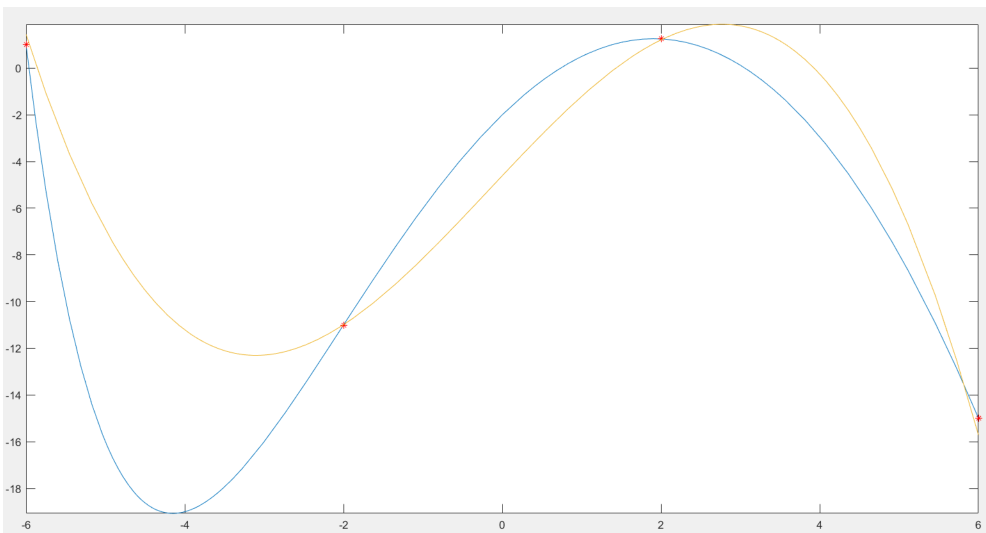
x_i	-6	-2	2	6
y_i	1	-11	1.25	-15

Получаем

$$L_3(x) = -\frac{(x+2)(x-2)(x-6)}{384} - 11\frac{(x+6)(x-2)(x-6)}{128} - 1.25\frac{(x+6)(x+2)(x-6)}{128} -$$

$$-15\frac{(x+6)(x+2)(x-2)}{384} = -0.14x^3 - 0.07x^2 + 3.61x - 4.61$$

Ошибка в неузловой точке: $|f(0) - L_3(0)| = |-2 + 4.61| = 2.61$



<u>Чебышевская сетка:</u>

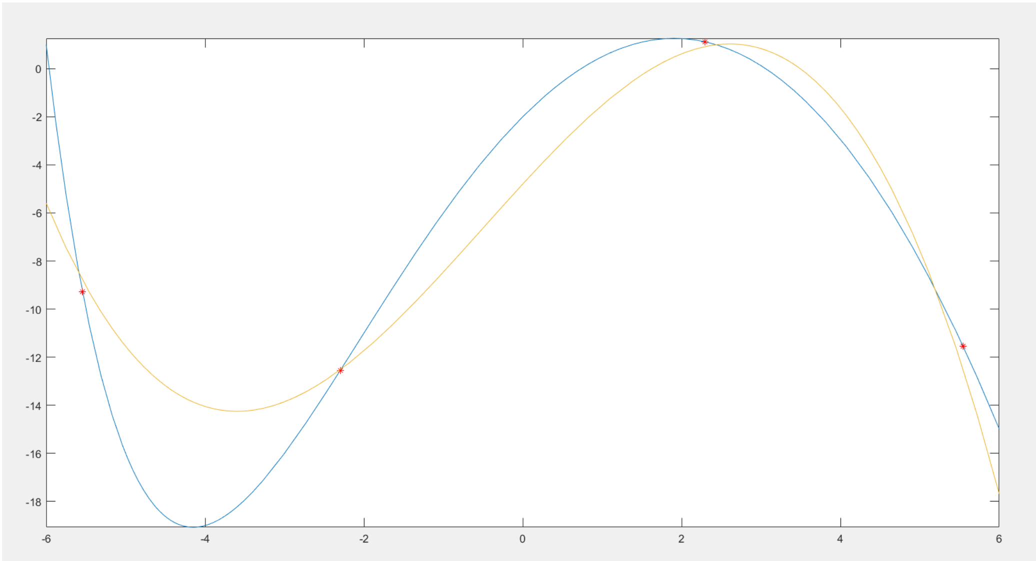
x_i	-5.5433	-2.2961	2.2961	5.5433
y_i	-9.2681	-12.5452	1.1159	-11.5334

$$L_3(x) = 9.2681\frac{(x+2.2961)(x-2.2961)(x-5.5433)}{282.2216} - 12.5452\frac{(x+5.5433)(x-2.2961)(x-5.5433)}{116.9} -$$

$$-1.1159\frac{(x+5.5433)(x+2.2961)(x-5.5433)}{116.9} - 11.5334\frac{(x+5.5433)(x+2.2961)(x-2.2961)}{282.2216} =$$

$$= -0.128x^3 - 0.19x^2 + 3.6x - 4.8$$

Ошибка в неузловой точке: $|f(0) - L_3(0)| = |-2 + 4.8| = 2.8$



Мы получили $L_3(x) \approx f(x)$ для равномерной и чебышевской сетки. Интерполяция довольно не точная, но это было ожидаемо, так было задано всего 4 узла. Важно отметить, кто критерий интерполирования $\phi(x_i) = y_j$ выполняется.

Контрольные тесты

1. Зададим равномерную сетку и построим полином в форме Лагранжа по общей формуле для гладкой функции $f(x) = 0.5^x + 1 - (x-2)^2$ и для функции, имеющей разрыв производной $g(x) = |f(x)|$, изменяя количество узлов(от 4 до 31).

2. Зададим равномерную сетку и построим полином в форме Лагранжа для гладкой функции $f(x) = 0.5^x + 1 - (x-2)^2$ по формуле для равномерной сетки, изменяя количество узлов(от 4 до 31)

Модульная структура программы

```
int GetNum(ifstream *F)
vector<double> ImportData(ifstream* F, int n)
```
- Функции для импортирования данных

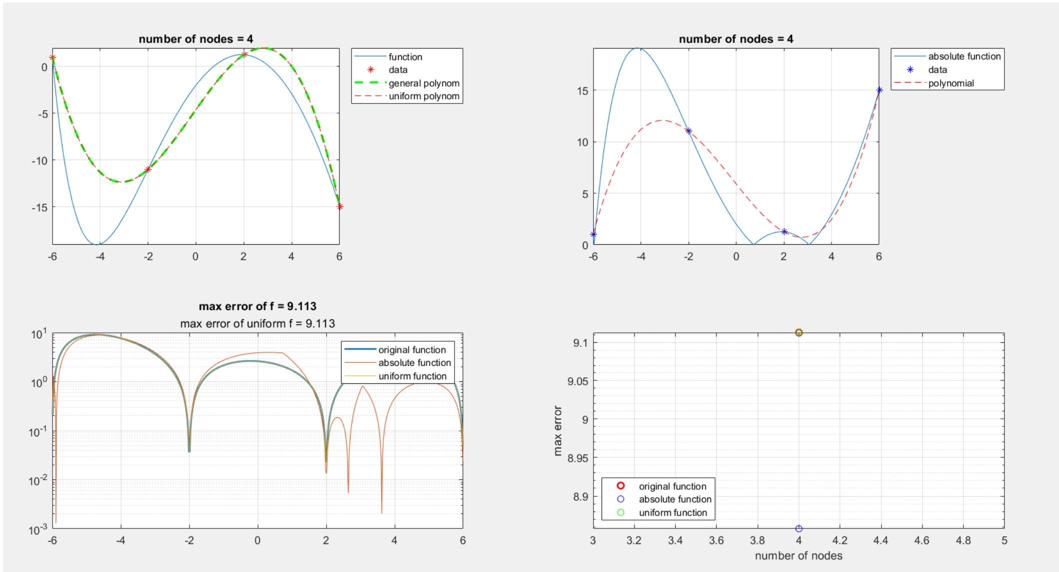
```
double Lagrange(double x, vector<double> x_i, vector<double> y_i)
vector<double> Values(vector<double> xx, vector<double> x_i, vector<double> y_i)
```
- Реализация высчитывания значений полинома в форме Лагранжа по общей формуле

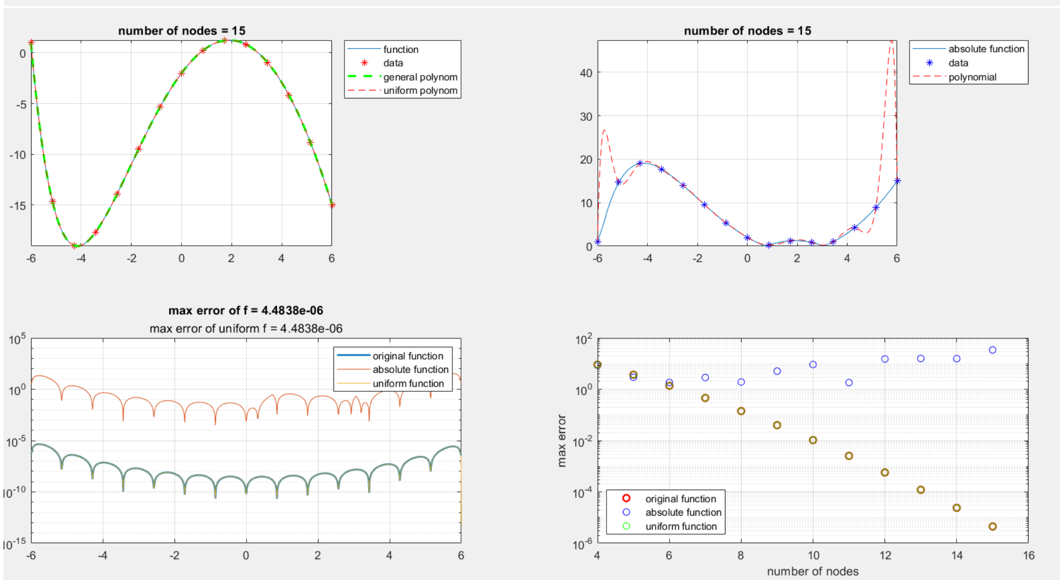
```
double LagrangeUniformGrid(double x, vector<double> x_i, vector<double> y_i)
vector<double> ValuesUniformGrid(vector<double> xx, vector<double> x_i,
vector<double> y_i)
```
- Реализация высчитывания значений полинома в форме Лагранжа по формуле для равномерной сетки

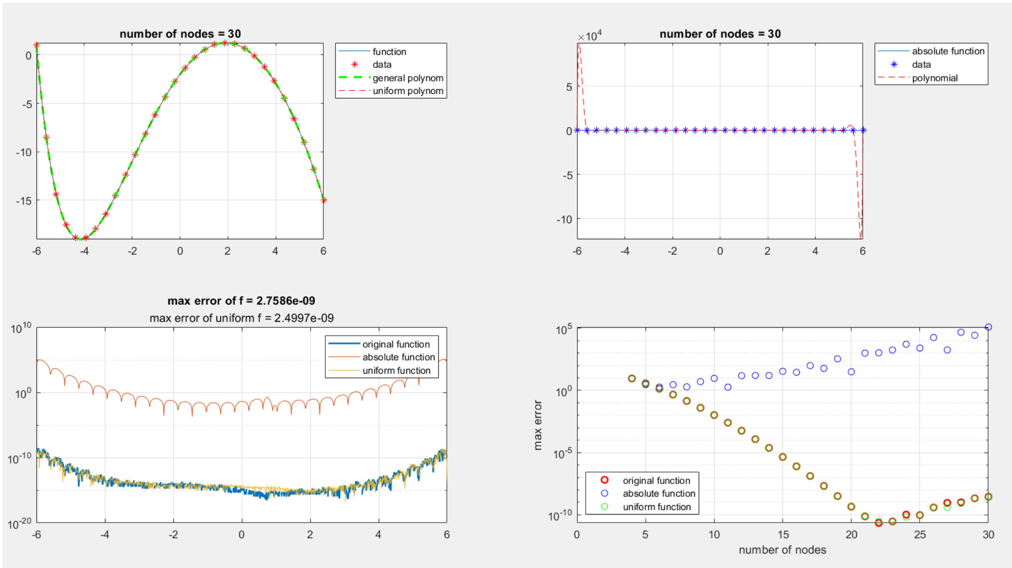
```
void OutputVector(vector<double> vec, ofstream* F)
```
- Функция для экспортирования данных

Численный анализ

▷ <u>Общая картина:</u>







Из графиков видно, что разницы между построением полинома по общей формуле и по формуле для равномерной сетки нет.

▷ Приближение:
При увеличении числа узлов графики полинома все больше и больше совпадают с графиком исходной функции. Но для негладкой функции видно, что график на концах отрезка совершенно не совпадает с графиком функции.

▷ Ошибка:
При фиксированном количестве узлов ошибка в центре отрезка меньше, чем на концах. Для негладкой функции ошибка, в целом, больше ошибки для гладкой функции. Если рассматривать изменение числа узлов, то на правом нижнем графике последнего рисунка видно, что начиная с некоторого количества максимальная ошибка начинает расти.

Общие выводы

В данной лабораторной работе мы научились аппроксимировать сложную функцию полиномом в форме Лагранжа. Реализация данного метода очень простая, но имеет явный недостаток - большие вычислительные затраты, например, нужно каждый раз пересчитывать все слагаемые, при изменении числа узлов, что влияет на время работы метода.