Санкт-Петербургский политехнический университет
Высшая школа прикладной математики
и вычислительной физики, ФизМех

Направление подготовки
«Прикладная математика и информатика»

Отчет по лабораторной работе №4
«Численное интегрирование обобщенными квадратурными формулами наивысшего порядка точности и смешанного типа»

Выполнил студент гр. 5030102/00003 Петрошенко А.В.

Преподаватель: Курц В.В.

Санкт-Петербург
2021

Формулировка задачи и ее формализация

Задача нахождения значения определенного интеграла на некотором промежутке очень часто встречается во всех технических областях науки. Существует множество способов интегрирования различных функций. Зачем же нужно тогда численное интегрирование?

1. Некоторые функции не поддаются интегрированию ни одним из известных способов
2. Численный метод быстрее, если функция достаточно сложная для ручного интегрирования

Постановка задачи:
Представим определённый интеграл на промежутке $[a, b]$ функции $F(x)$ в виде

$$\int_a^b F(x)dx = \int_a^b p(x)f(x)dx \tag{1}$$

Формулы вида

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) \tag{2}$$

называются квадратурными формулами.
A_k и $x_k \in [a, b]$ - коэффициенты и узлы квадратурной формулы.

Число m называется алгебраическим порядком точности квадратурной формулы (2), если

1. квадратурная формула точна для всех полиномов степени m и ниже
2. существует хотя бы один полином степени $m + 1$, для которого она не точна.

Условия на весовую функцию $p(x)$

1. $p(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$
2. $c_k = \int\limits_a^b p(x)x^k dx < \infty$

Если алгебраический порядок точночти равен m, то

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + ...A_n = c_0 \\ A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_nx_n = c_1 \\ ... = ... \\ A_1x_1^m + A_2x_2^m + ... + A_nx_n^m = c_m \end{cases} \tag{3}$$

Из данной системы уравнений мы можем выделить 3 вида квадратурных формул:

1. Узлы и коэффициенты не фиксируются, тогда гарантированный алгебраический порядок точности равен $2n - 1$
   Квадратурные формулы Гаусса
2. Все узлы x_i заданы и различны, тогда гарантированный алгебраический порядок точности равен $n - 1$
   Квадратурные формулы интерполяционного типа
3. Зафиксировано r параметров, $0 < r < n$, тогда гарантированный алгебраический порядок точности равен $2n - 1 - r$
   Квадратурные формулы смешанного типа

В данной работе будет реализована квадратурная формула смешанного типа.
Таким образом, нужно найти все неизвестные A_k и x_k, подставить их в формулу (2), и найти значение интеграла.

Алгоритм метода и условия его применимости

Мы рассматриваем квадратурную формулу Чебышева, для которой выполнены условия:

1. $p(x) \equiv 1$
2. $A_1 = A_2 = ... = A_n = A$

Отсюда ожидаемый алгебраический порядок точности - n, так как мы зафиксировали $n-1$ коэффициент.

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) = A\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = S_n(f) \tag{4}$$

Система (3) примет вид

$$\begin{cases} A + A + ...A = c_0 \\ Ax_1 + Ax_2 + ... + Ax_n = c_1 \\ ... = ... \\ Ax_1^n + Ax_2^n + ... + Ax_n^n = c_n \end{cases} \tag{5}$$

Из первого уравнения получаем

$$nA = c_0 \Rightarrow A = \frac{c_0}{n} \tag{6}$$

$s_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k = \frac{c_k}{A}, k = 1, ..., n$
Корневой полином будем искать в виде

$$\omega(x) = x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n \tag{7}$$

$$\omega(x_i) = 0 \ \forall i = 1, ..., n \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \omega(x_i) = s_n + a_1s_{n-1} + ... + a_{n-1}s_1 + na_n = 0$$

$$a_n = -\frac{1}{n}(s_n + a_1s_{n-1} + ... + a_{n-1}s_1) \tag{8}$$

(8) верно $\forall n = 1, 2, ... \Rightarrow$

$$\begin{cases} a_1 = -s_1 \\ a_2 = -\frac{1}{2}(s_2 + a_1s_1) \\ a_3 = -\frac{1}{3}(s_3 + a_1s_2 + a_2s_1) \\ ... = ... \end{cases} \tag{9}$$

В данной лабораторной работе будет реализована формула для 3х узлов, поэтому найдем эти узлы на стандартном промежутке интегрирования $[-1, 1]$, а далее будем все промежутки будем приводить к стандартному.
$A = \frac{c_0}{n} = \frac{2}{3}$
$s_1 = \frac{c_1}{A} = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} xdx = 0$ $\qquad a_1 = 0$
$s_2 = \frac{c_2}{A} = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x^2dx = 1$ $\qquad a_2 = -\frac{1}{2}(1 + 0 * 0) = -\frac{1}{2}$
$s_3 = \frac{c_3}{A} = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x^3dx = 0$ $\qquad a_3 = -\frac{1}{3}(0 + 0 * 1 + -\frac{1}{2} * 0)$

$$\omega(x) = x^3 - \frac{1}{2}x = x(x^2 - \frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, x_2 = 0, x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{2}{3}(f(-\frac{1}{\sqrt{2}}) + f(0) + f(\frac{1}{\sqrt{2}})) \tag{10}$$

Алгоритм метода:

1. Приводим выбранный промежуток интегрирования к стандартному заменой $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t, t \in [-1, 1]$
   Таким образом $\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^1 f(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t)dt$
2. Подставляем значения t, полученные выше и вычисляем интеграл.

Остаточный член
$$R_4(f) = \frac{h^5}{11520} f^{(IV)}(\eta) \tag{11}$$

Обобщенная формула:
Разобъем отрезок $[a, b]$ на $3N$ интервалов длиной $h = \frac{b-a}{3N}$, $a_1 = a$, $b_N = b$
$$S_{3,N}(f) = \frac{2}{3}(\sum_{k=1}^{N}(f(x_{3k-2}) + f(x_{3k-1}) + f(x_{3k}))) \tag{12}$$

Где $x_{3k-2} = \frac{a_k+b_k}{2} - \frac{b_k-a_k}{2\sqrt{2}}$, $x_{3k-1} = \frac{a_k+b_k}{2}$, $x_{3k} = \frac{a_k+b_k}{2} - \frac{b_k-a_k}{2\sqrt{2}}$
Остаточный член
$$R_{3,N}(f) = \sum_{k=1}^{N} \frac{h^5}{11520} f^{(IV)}(\eta_k) = \frac{h^5}{11520} N \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f^{(IV)}(\eta_k)}_{f^{(IV)}(\eta)} = \frac{h^4}{3840}(b-a)f^{(IV)}(\eta) \tag{13}$$

Условия применимости:

1. $n = 1, ..., 7, 9$, так как иначе появляются комплексные корни.
2. Из предыдущего пункта узлы должны быть вещественны и различны.
3. Из остаточного члена понимаем, что функция должна быть четырежды непрерывно дифференцируема на $[a, b]$

Предварительный анализ задачи

Мы рассматриваем формулу Чебышева для 3х точек, значит попадаем под первое условие

Все узлы вещественны и различны по построению

В данной работе будет рассматриваться функция $f(x) = 0.5^x + 1 - (x-2)^2$. Она бесконечно дифференцируема, следовательно имеет четвертую производную на $[a, b]$.

Тестовый пример для задач малой размерности

$$f(x) = 0.5^x + 1 - (x-2)^2, a = -6, b = 6$$
$$\int f(x)dx = F(x) = \frac{0.5^x}{ln(0.5)} + x - \frac{(x-2)^3}{3} + C$$
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -87.69$$

1 разбиение:
$$h = \frac{b-a}{1} = 12$$

x_i	-4.24	0	4.24

$$S_{3,1}(f) = \frac{12}{3}(-19.04 - 2 - 3.98) = -100.07$$

Фактическая погрешность $\epsilon = 12.38$
<u>2 разбиения:</u>

$$h = \frac{b-a}{2} = 6$$

x_i	-5.12	-3	-0.88	0.88	3	5.12

$$S_{3,2}(f) = \frac{6}{3}(-14.09 - 16 - 5.45 + 0.28 + 0.125 - 8.71) = -89.31$$

Правило Рунге:

$$\frac{|S_{3,2}(f) - S_{3,1}(f)|}{2^m - 1} = \frac{100.07 - 89.31}{15} = 0.72$$

Фактическая погрешность $\epsilon = 1.62 > 0.72$
<u>4 разбиения:</u>

$$h = \frac{b-a}{4} = 3$$

x_i	-5.56	-4.5	-3.44	-2.56	-1.5	-0.44	0.44	1.5	2.56	3.44	4.5	5.56

$$S_{3,4}(f) = \frac{3}{3}(-8.97 - 18.62 - 17.74 - 13.9 - 8.42 - 3.6 - 0.7 + 1.1 + 0.86 - 0.98 - 5.2 - 11.66) = -87.82$$

Правило Рунге:

$$\frac{|S_{3,4}(f) - S_{3,2}(f)|}{2^m - 1} = \frac{89.31 - 87.82}{15} = 0.1$$

Фактическая погрешность $\epsilon = 0.13 > 0.1$

Из результатов видно, что погрешность с каждым разбиением уменьшилась на порядок, а для 4х разбиений практически была достигнута точность 0.1

Контрольные тесты

1. Зададим промежуток и посчитаем интеграл с различной точностью, меняя ее от 0.1 до 10^{-13}.

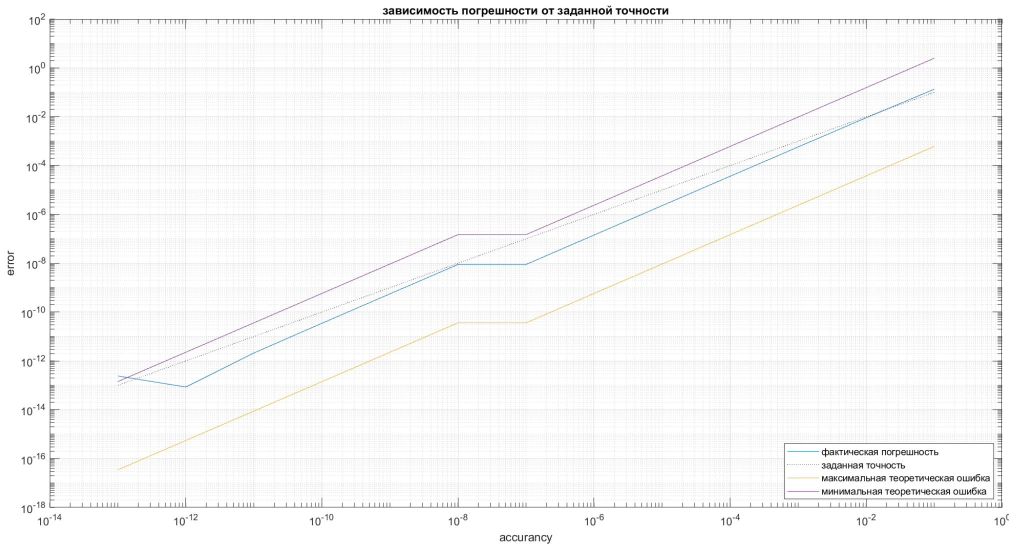
Модульная структура программы

`double f(double x)` - сама функция.

`vector<double> Nodes(double a, double b)`
- функция которая преобразует промежуток к стандартному. `double Integrate(double a, double h, i`
`pair<double, int> Chebyshev(double a, double b, double eps)`
- Реализация формулы Чебышева.

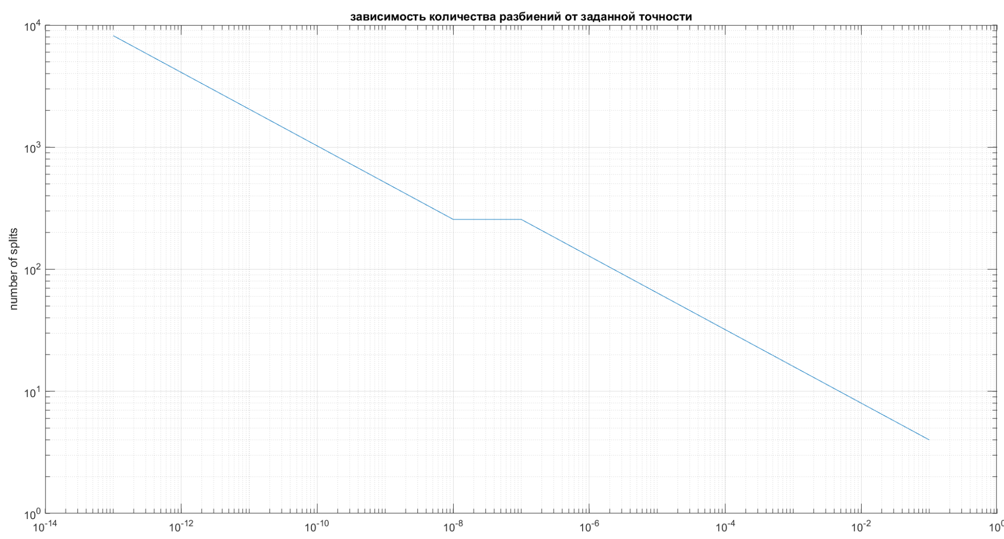
Численный анализ

▷ Погрешность:



Из графика видно, что все заданные точности достигаются, за исключением последней точки, что связано с ограниченной точностью типа данных double в языке C++.

▷ Количество разбиений:



По графику видно, что зависимость линейная и количество разбиений почти каждый раз растет в 2 раза.

Общие выводы

В данной лабораторной работе мы научились численно вычислять опредленный интеграл на заданном промежутке с помощью формулы Чебышева для 3х точек. Реализация метода очень простая, что видно из модульной структуры. Метод довольно эффективный, но он проигрывает формулам Гаусса, где алгебраический порядок точности больше в 2 раза, хотя он реализуется труднее.