Санкт-Петербургский политехнический университет
Высшая школа прикладной математики
и вычислительной физики, ФизМех

Направление подготовки
«Прикладная математика и информатика»

Отчет по лабораторной работе №2
«Решение СЛАУ прямыми методами»

Выполнил студент гр. 5030102/00003 Петрошенко А.В.

Преподаватель: Курц В.В.

Санкт-Петербург
2021

Формулировка задачи и ее формализация

Большинство расчетных математических задач сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений(далее СЛАУ). Существует 2 класса методов решения таких СЛАУ:

1. Прямые методы - методы, которые находят «точные» значения неизвестных за конечное число операций.
2. Итерационные методы - методы, которые строят последовательность векторов, сходящихся к решению.

В этой работе мы будем использовать прямой метод.

Постановка задачи:
Пусть дана система из n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i = 1, \dots, n$$

где x_j - неизвестные, a_{ij} - коэффициенты системы и b_i - компоненты вектора правой части.
В матричной форме:

$$Ax = b$$

где $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ - матрица коэффициентов, $b = (b_i) \in \mathbb{R}^n$ - вектор правой части и $x = (x_j) \in \mathbb{R}^n$ - вектор неизвестных.
Требуется найти x, решив СЛАУ методом Холецкого и исследовать вычислительную ошибку для матриц с разными числами обусловленности.

Алгоритм метода и условия его применимости

Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ - симметричная и положительно определенная матрица. Тогда $\exists!\ S:\ A = SS^T$, где S - нижняя треугольная матрица.

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & 0 & \dots & 0 \\ s_{21} & s_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix}$$

Подставляя в матричную форму СЛАУ, получаем:

$$Ax = b \Leftrightarrow S(S^Tx) = b \Leftrightarrow \begin{cases} Sy = b \\ S^Tx = y \end{cases}$$

Алгоритм метода Холецкого:

$$A = SS^T \Leftrightarrow a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} s_{ik}s^T_{kj} = \sum_{k=1}^{n} s_{ik}s_{jk}$$

Шаг 1. $a_{11} = s_{11}^2 + \underbrace{s_{12}^2 + \dots}_{=0} \Rightarrow s_{11} = \sqrt{a_{11}}$

$j > 1$: $a_{1j} = s_{11}s_{j1} + \underbrace{s_{12}s_{j2} + \dots}_{=0} \Rightarrow s_{j1} = \frac{a_{1j}}{s_{11}}$

<…>

Шаг m. $a_{mm} = \sum\limits_{k=1}^{m-1} s_{mk}^2 + s_{mm}^2 + \underbrace{\sum_{k=m+1}^{n} s_{mk}^2}_{=0} \Rightarrow s_{mm} = \sqrt{a_{mm} - \sum\limits_{k=1}^{m-1} s_{mk}^2}$

$j > m$: $a_{mj} = \sum\limits_{k=1}^{m-1} s_{mk}s_{jk} + s_{mm}s_{jm} + \underbrace{\sum_{k=m+1}^{n} s_{mk}sjk}_{=0} \Rightarrow s_{jm} = \frac{a_{mj} - \sum\limits_{k=1}^{m-1} s_{mk}s_{jk}}{s_{mm}}$

Условия применимости:
Квадратная матрица A должна быть симметричной и положительно определенной.

Предварительный анализ задачи

Построение матрицы:
Любую симметричную матрицу можно разложить в виде $A = QDQ^T$, где матрица Q - это ортогональная матрица, а D - диагональная матрица, на диагонали которой стоят только положительные числа. Т.к. они являются собственными числами матрицы A, то из данного разложения следует, что она будет и положительно определенной.

Тестовый пример для задач малой размерности

Рассмотрим следующую СЛАУ: $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -5 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 6 \end{cases}$

Матрица $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, правая часть $b = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Применим разложение Холецкого $A = SS^T$:
$s_{11} = \sqrt{a_{11}} = 2$, $s_{21} = \frac{a_{12}}{s_{11}} = 1$, $s_{31} = \frac{a_{13}}{s_{11}} = 1.5$
$s_{12} = 0$, $s_{22} = \sqrt{a_{22} - s_{21}^2} = 1$, $s_{32} = \frac{a_{23} - s_{21}s_{31}}{s_{22}} = 1.5$
$s_{13} = 0$, $s_{23} = 0$, $s_{33} = \sqrt{a_{33} - s_{31}^2 - s_{32}^2} = \sqrt{0.5} = 0.7071$

Получаем матрицу $S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1.5 & 1.5 & 0.7071 \end{pmatrix}$, транспонированная матрица $S^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1.5 \\ 0 & 1 & 1.5 \\ 0 & 0 & 0.7071 \end{pmatrix}$

Теперь решаем систему уравнений: $\begin{cases} Sy = b \\ S^T x = y \end{cases}$

Решаем первое уравнение:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1.5 & 1.5 & 0.7071 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = -7 \\ y_3 = 19.09 \end{cases}$$

Зная y решаем второе уравнение:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1.5 \\ 0 & 1 & 1.5 \\ 0 & 0 & 0.7071 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 19.09 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 27 \\ x_2 = -47.5 \\ x_1 = 4.5 \end{cases}$$

Таким образом, мы получили ответ $x = \begin{pmatrix} 4.5 \\ -47.5 \\ 27 \end{pmatrix}$.

Действительно, подставив полученный ответ в исходное уравнение, мы получим верное равенство, значит, мы нашли точное решение данной СЛАУ.

Контрольные тесты

1. Создадим 10 матриц размером 10×10 с различными числами обусловленности (от 10 до 10^{10}) и для каждой найдем решение методом Холецкого.
2. Создадим 2 матрицы 10×10: хорошо обусловленную(с числом обусловленности 10) и плохо обусловленную(с числом обусловленности 10^{10}), для каждой из них внесем в правую часть возмущения разных порядков(от 10^{-1} до 10^{-10}) и решим полученные СЛАУ методом Холецкого.
3. Создадим матрицы разных рангов(от 15 до 200) и посчитаем время выполнения метода Холецкого для каждой из них

Модульная структура программы

```
typedef struct{
     vector<vector<double>> A;
     int rang;
}matrix_t;
```

- структура данных, имеющая 2 поля: двумерный массив для значений матрицы и целое число для хранения ранга матрицы.

`int GetNum(const char* filename)` - функция для получения одного числа из файла. Использовалась для получения из файла ранга матриц и их количества.

```
matrix_t ImportMatrix(vector<double> str, int rang)
vector<double> ImportRightPart(vector<double> str, int rang)
```

Функции, преобразующие данные, полученные из файла в удобный вид(матрицу или вектор).

```
matrix_t Zero(int rang)
matrix_t Transpose(matrix_t matrix)
```

Вспомогательные функции создания нулевой матрицы заданного размера и транспонирования.

```
matrix_t CholFactorization(matrix_t matrix)
vector<double> FindY(matrix_t matrix, vector<double> b)
vector<double> FindX(matrix_t matrix, vector<double> y)
```

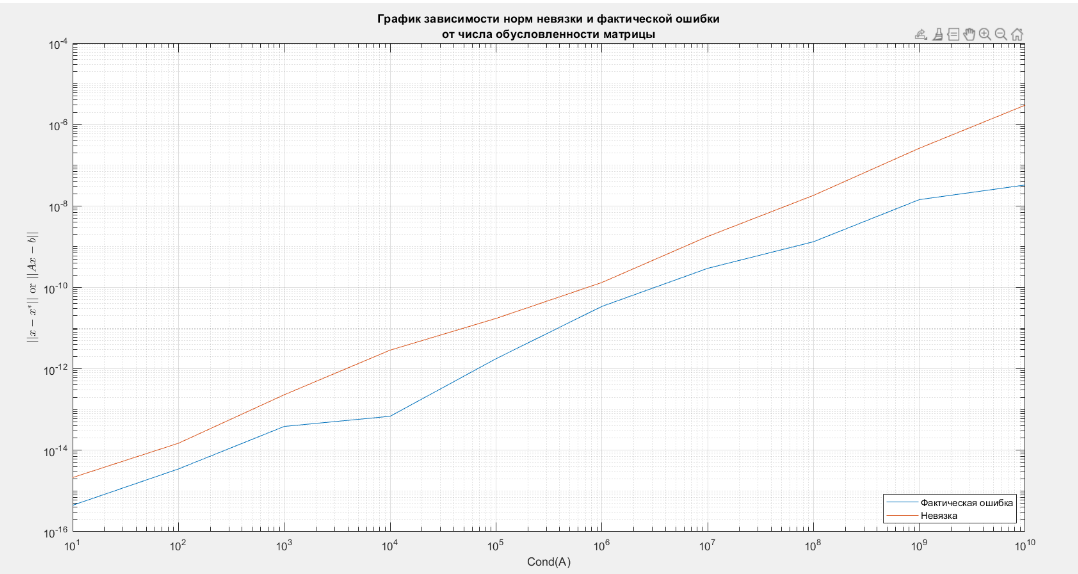
Реализация метода Холецкого: первая функция реализует его разложение, а 2 следующие решают 2 уравнения из системы, описанной выше.

```
void OutputVector(vector<double> vec, const char* filename)
void OutputMatrix(matrix_t matrix, const char* filename)
```

Функции записи нужных для дальнейшего анализа данных в файл.

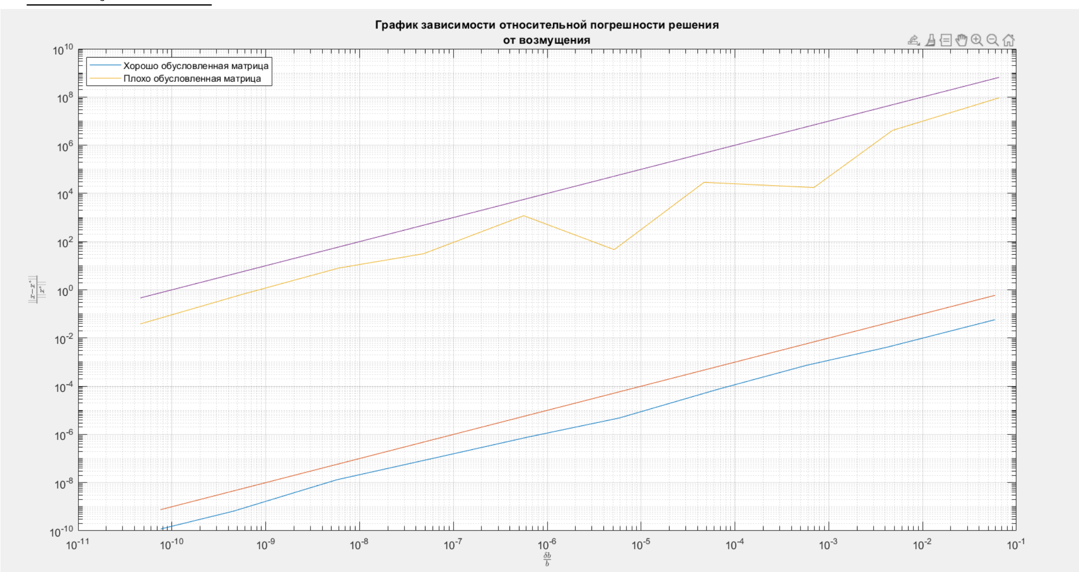
Численный анализ

▷ <u>Точность:</u>



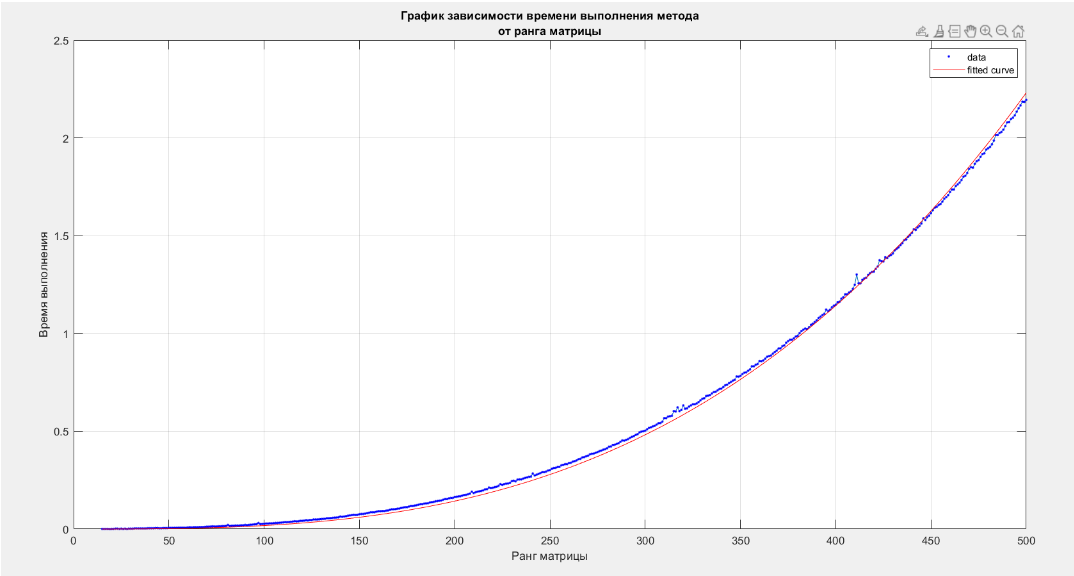
Результаты, полученные методом Холецкого, мы сравнили со специальной функцией "\"в MATLAB. Из графика видно, что при хорошей обусловленности матрицы, погрешность решения выходит порядка 10^{-15}, а при плохой обусловленности, например при cond(A) $= 10^{1}0$, погрешность возрастает до порядка 10^{-7}.

▷ <u>Возмущение:</u>



Из графика видно, что возмущение правой части оказывает большее влияние на плохо обусловленную матрицу, что и ожидалось. Так же выполняется неравенство $\frac{\delta x}{x} \leq cond(A)\frac{\delta b}{b}$

▷ Время выполнения:



Из графика поолучаем зависимость $\sim n^3$, что и ожидаемо, т.к. Вычислительная сложность метода порядка $\frac{n^3}{3}$.

Общие выводы:

В данной лабораторной работе мы научились находить решения СЛАУ методом Холецкого, рассмотрели зависимость погрешности решения от числа обусловленности матрицы и от возмущения правой части системы уравнений. В обоих случаях, чем больше число обусловленности матрицы, тем труднее найти более точное решение. Так же определили время выполнения метода Холецкого.