Санкт-Петербургский политехнический университет
Высшая школа прикладной математики
и вычислительной физики, ФизМех

Направление подготовки
«Прикладная математика и информатика»

Отчет по лабораторной работе №2
«Приближение табличных функций сплайнами»

Выполнил студент гр. 5030102/00003 Петрошенко А.В.

Преподаватель: Курц В.В.

Санкт-Петербург
2021

Формулировка задачи и ее формализация

Зачем решать задачу интерполирования?

1. табличная функция получена в результате эксперимента $\Rightarrow$ необходимо вычислить значения функции (значения производных функции) в других (промежуточных) точках

2. компактное представление данных

3. упрощение вычисления "сложных" функций: заменяем более "простой"

Постановка задачи:

Пусть $x_0, ..., x_n$ будут точками промежутка $[a, b]$, $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$
Тогда функция $S_k^\nu(x)$ на отрезке $[a, b]$ будет сплайном степени k если:

$$S_k^\nu|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_k, i = 0, 1, ...n-1$$

$$S_k^\nu \in C^{k-\nu}([a, b])$$

$$S_k^\nu(x_i) = f(x_i), i = 0, ..., n$$

$x_1, ..., x_{n-1}$ - внутренние точки, ν - дефект сплайна.

В данной лабораторной будет реализован кубический сплайн дефекта 1 с условием известности вторых производных в граничных точках.

Алгоритм метода и условия его применимости

Пусть S_k^ν - интерполяционный сплайн.
$k = 3, \nu = 1 \Rightarrow S_3^1|_{[x_{i-1}, x_i]} \in \mathbb{P}_3$ и $S_3^1 \in C^2([a, b])$
$g(x) := S_3^1(x), g_i(x) := S_3^1(x)|_{[x_{i-1}, x_i]}$
$g(x) \in C^2([a, b]) \Rightarrow$ для всех внутренних точек $x_i, i = 1, ..., n-1$:

$$\begin{cases} g_i(x_i) = g_{i+1}(x_i) \\ g_i'(x_i) = g_{i+1}'(x_i) \\ g_i''(x_i) = g_{i+1}''(x_i) \end{cases}$$

$g(x)$ - интерполяционный сплайн $\Rightarrow g_1(x_0) = y_0$ и $g_i(x_i) = y_i, i = 1, ..., n$
Таким образом, у нас $4n$ неизвестных и $4n - 2$ уравнения, поэтому добавим еще 2 условия:

$$\begin{cases} g''(a) = f''(a) \\ g''(b) = f''(b) \end{cases}$$

Теперь мы можем найти все неизвестные $g_i(x)$:
$M_i := g(x_i), i = 0, ...n$ и $g''(x)$ - линейная функция $\Rightarrow$

$$g_i''(x) = M_{i-1}\frac{x_i - x}{h} + M_i\frac{x - x_{i-1}}{h}, x \in [x_{i-1}, x_i],$$

где $h = x_i - x_{i-1}$. (Равномерная сетка)
Дважды интегрируем и получаем:

$$g_i(x) = M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h} + C_i(x - x_{i-1}) + \tilde{C}_i.$$

Из выше описанных уравнений составляем СЛАУ для M_i и решаем ее методом прогонки. Далее находим C_i и $\tilde{C}_i$ и получаем сплайн.

Условия применимости:

Исходя из 2 дополнительных условий, функция $f(x)$ должна иметь вторую производную хотя бы в граничных точках.

Предварительный анализ задачи

Так как матрица СЛАУ для нахождения M_i трехдиагональная, то для устойчивости метода прогонки, достаточно, чтобы выполнялось условие диагонального преобладания, и, как мы видим, оно выполняется $\frac{2h}{3} > \frac{h}{6} + \frac{h}{6}$.
В данной работе будет апроксимирована функция $f(x) = 0.5^x + 1 - (x-2)^2$. Она бесконечно дифференцируема, следовательно имеет вторую производную в граничных точках промежутка апроксимирования $[a, b]$.

Тестовый пример для задач малой размерности

Построим кубический сплайн дефекта 1 для таблично заданной функции

$$f(x) = 0.5^x + 1 - (x-2)^2$$

Равномерная сетка:

x_i	-6	0	6
y_i	1	-2	-15

$$f''(x) = ln^2(0.5) * 0.5^x - 2, f''(-6) = 28.75, f''(6) = -2$$

$$M_0 = f''(-6) = 28.75,\ \ M_1 = -7.10,\ \ M_2 = f''(6) = -2$$

$$C_1 = 35.35,\ C_2 = -7.27,\ \tilde{C}_1 = -171.5,\ \tilde{C}_2 = 40.6$$

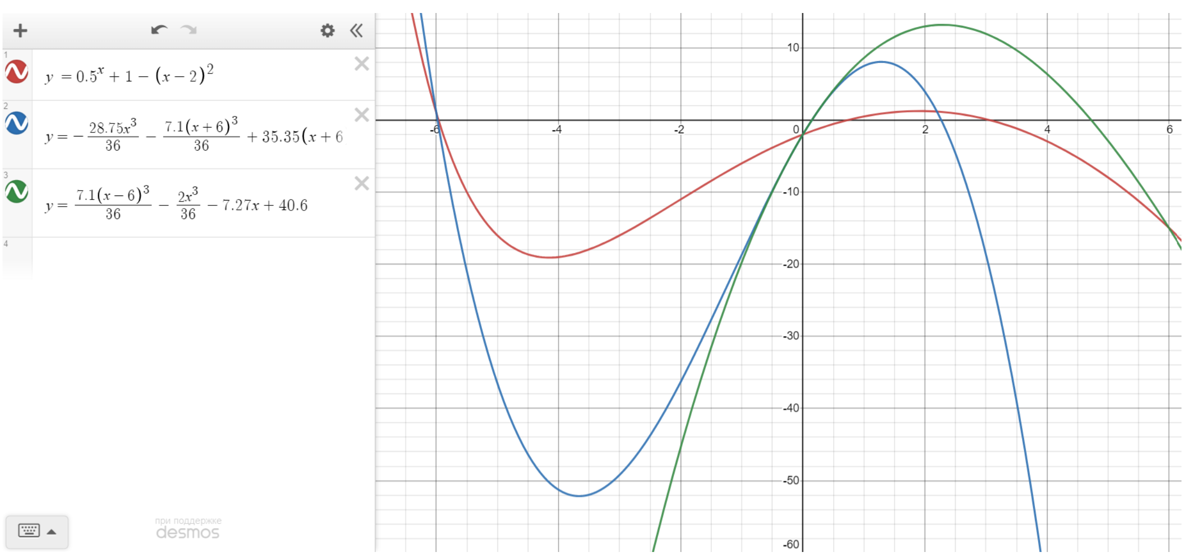
$$g_1(x) = -28.75\frac{x^3}{36} - 7.1\frac{(x+6)^3}{36} + 35.35(x+6) - 171.5$$

$$g_2(x) = 7.1\frac{(x-6)^3}{36} - 2\frac{x^3}{36} - 7.27x + 40.6$$

Ошибки в неузловой точке:

$$|g_1(-1) - f(-1)| = |-18.604 + 6| = -12.604$$

$$|g_2(4) - f(4)| = |6.387 + 2.938| = 9.325$$



Контрольные тесты

1. Зададим равномерную сетку и построим кубический сплайн дефекта 1 по общей формуле для функции $f(x) = 0.5^x + 1 - (x-2)^2$, изменяя количество узлов(от 4 до 61).
2. Зададим равномерную сетку, построим кубический сплайн дефекта 1 для функции $f(x) = 0.5^x + 1 - (x-2)^2$ для 31 точки и внесем ошибку в значения вторых производных в граничных точках. Будем менять относительную погрешность вносимых ошибок от $(10^{-5}$ до $10^5)$.

Модульная структура программы

```
int GetNum(ifstream *F)
double fGetNum(ifstream* F)
vector<double> ImportData(ifstream* F, int n)
```
- Функции для импортирования данных

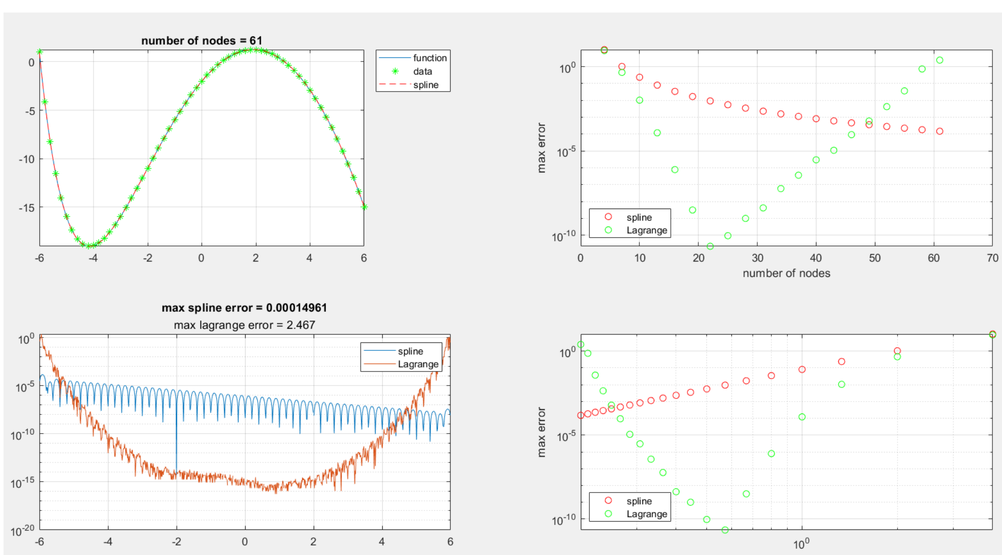
```
matrix_t MatrixInit(int size)
```
- Функция инициализации матрицы

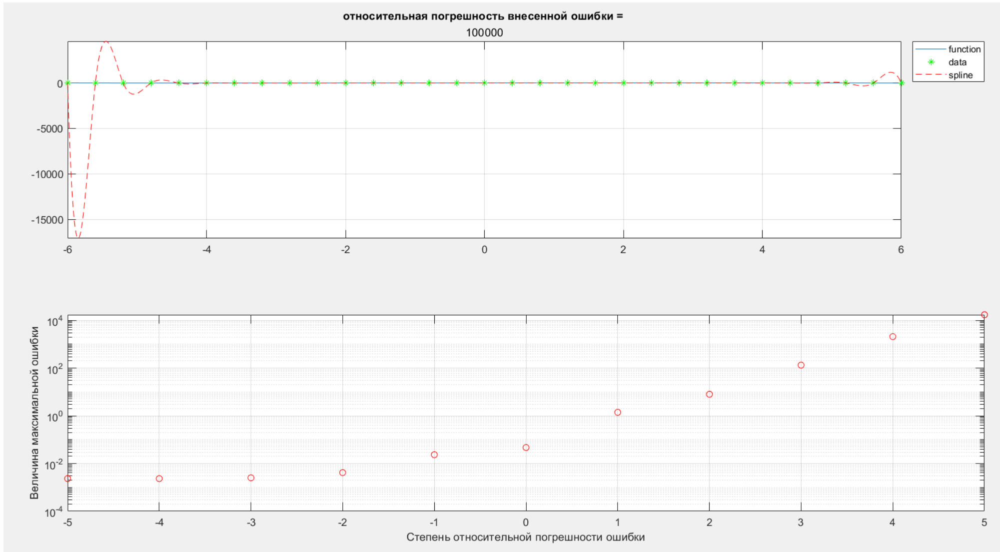
```
vector<double> ThomasAlgorythm(double h, vector<double> y_i, double a_der,
double b_der)
pair<vector<double>, vector<double>> FindConstants(double h, vector<double> y_i,
vector<double> M_i)
double g_i(double xx, double left_M, double right_M, double left_x, double right_x,
double C, double C_tilda)
```
- Вспомогательные функции для нахождения M_i методом прогонки, констант C_i и $\tilde{C}_i$ и функции $g_i(x)$

```
vector<double> CubicSpline(vector<double> xx, vector<double> x_i, vector<double> y_i,
vector<double> M_i, pair<vector<double>, vector<double>> C)
```
- Реализация кубического сплайна дефекта 1

```
void OutputVector(vector<double> vec, ofstream* F)
```
- Функция для экспортирования данных

Численный анализ





▷ Приближение:

При увеличении числа узлов кубический сплайн дефекта 1 все больше и больше становится похож на график функции.

▷ Ошибка:

Из графика видно, что при малом количестве узлов максимальная ошибка полинома Лагранжа меньше, чем ошибка сплайна, но начиная примерно с 58 узлов она становится больше. Из пооведения графиков ясно, что с этого числа узлов ошибка сплайна всегда будет меньше, поскольку она убывает, а ошибка полинома увеличивается.

▷ Внесенные погрешнности:

На графике мы видим, что внесение ошибки, относительная величина которой меньше порядка -2, практически не влияет на результат, но затем ошибка начинает увеличиваться.

Общие выводы

В данной лабораторной работе мы научились апроксимировать сложную функцию кубическими сплайнами. Реализация данного метода довольно легкая, а вычислительная сложность получается порядка $O(n)$, но с большой константой, поэтому такой метод лучше использовать на большем количестве точек.