Санкт-Петербургский политехнический университет
Высшая школа прикладной математики
и вычислительной физики, ФизМех

Направление подготовки
«Прикладная математика и информатика»

Отчет по лабораторной работе №3
«Численное интегрирование обобщенными квадратурными формулами Ньютона-Котеса»

Выполнил студент гр. 5030102/00003 Петрошенко А.В.

Преподаватель: Курц В.В.

Санкт-Петербург
2021

Формулировка задачи и ее формализация

Задача нахождения значения определенного интеграла на некотором промежутке очень часто встречается во всех технических областях науки. Существует множество способов интегрирования различных функций. Зачем же нужно тогда численное интегрирование?

1. Некоторые функции не поддаются интегрированию ни одним из известных способов
2. Численный метод быстрее, если функция достаточно сложная для ручного интегрирования

Постановка задачи:
Представим определённый интеграл на промежутке $[a, b]$ функции $F(x)$ в виде

$$\int_a^b F(x)dx = \int_a^b p(x)f(x)dx \tag{1}$$

Формулы вида

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) \tag{2}$$

называются квадратурными формулами.
A_k и $x_k \in [a, b]$ - коэффициенты и узлы квадратурной формулы.

Число m называется алгебраическим порядком точности квадратурной формулы (2), если

1. квадратурная формула точна для всех полиномов степени m и ниже
2. существует хотя бы один полином степени $m + 1$, для которого она не точна.

Условия на весовую функцию $p(x)$

1. $p(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$
2. $c_k = \int_a^b p(x)x^k dx < \infty$

Если алгебраический порядок точночти равен m, то

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + ...A_n = c_0 \\ A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_nx_n = c_1 \\ ... = ... \\ A_1x_1^m + A_2x_2^m + ... + A_nx_n^m = c_m \end{cases} \tag{3}$$

Из данной системы уравнений мы можем выделить 3 вида квадратурных формул:

1. Узлы и коэффициенты не фиксируются, тогда гарантированный алгебраический порядок точности равен $2n - 1$
   Квадратурные формулы Гаусса
2. Все узлы x_i заданы и различны, тогда гарантированный алгебраический порядок точности равен $n - 1$
   Квадратурные формулы интерполяционного типа
3. Зафиксировано r параметров, $0 < r < n$, тогда гарантированный алгебраический порядок точности равен $2n - 1 - r$
   Квадратурные формулы смешанного типа

В данной работе будет реализована квадратурная формула интерполяционного типа.

Таким образом, нужно найти все коэффициенты A_k, подставить их в формулу (2), и найти значение интеграла.

Алгоритм метода и условия его применимости

Мы рассматриваем квадратурные формулы Ньютона-Котеса, для которых выполнены условия:

1. $p(x) \equiv 1$
2. $x_k = a + h(k-1), h = \frac{b-a}{n-1}$

Так как нам задана табличная функция, то мы можем построить интерполяционный полином Лагранжа:

$$L_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Phi_k(x_k) \tag{4}$$

Отсюда видно, что

$$A_k = \int_a^b \Phi_k(x)dx, \Phi_k(x) = \prod_{j=1, j\neq k}^{n} \frac{x-x_j}{x_k-x_j} \tag{5}$$

$x = a + th, t \in [0, n-1] \Rightarrow$
$x - x_j = h(t-j+1), x_k - x_j = h(k-j)$
$A_k = h\int\limits_0^{n-1} \prod\limits_{j=1, j\neq k}^{n} \frac{t-j+1}{k-j}dt$
$\overline{\omega}(t) = \prod\limits_{j=0}^{n-1}(t-j)$
Тогда мы получаем, что

$$A_k = h\int_0^{n-1} \frac{\overline{\omega}(t)}{t-k+1}\frac{dt}{(k-1)(k-2)...(1)(-1)(-(n-k))} = h\frac{(-1)^{n-k}}{(k-1)!(n-k)!}\int_0^{n-1}\frac{\overline{\omega}(t)}{t-k+1} = hH_n^{(k)} \tag{6}$$

$H_n^{(k)}$ - коэффициенты Ньютона-Котеса

Формула 3/8, $n = 4$
$h = \frac{b-a}{3}, x_1 = a, x_2 = a+h, x_3 = a+2h, x_4 = a+3h$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8}(f(a) + 3f(a+h) + 3f(a+2h) + f(a+3h)) = S_4(f) \tag{7}$$

То есть $H_4^{(1)} = H_4^{(4)} = \frac{3}{8}, H_4^{(2)} = H_4^{(3)} = \frac{9}{8}$
Остаточный член

$$R_4(f) = -\frac{3h^5}{80}f^{(IV)}(\eta) \tag{8}$$

Обобщенная формула:
Разобъем отрезок $[a, b]$ на $3N$ интервалов длиной $h = \frac{b-a}{3N}$

$$S_{4,N}(f) = \frac{3h}{8}(f(a) + f(b) + 3\sum_{k=1}^{N}(f(x_{3k-2}) + f(x_{3k-1})) + 2\sum_{k=1}^{N-1} f(x_{3k})) \tag{9}$$

Остаточный член

$$R_{4,N}(f) = \sum_{k=1}^{N} -\frac{3h^5}{80} f^{(IV)}(\eta_k) = -\frac{3h^5}{80} N \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f^{(IV)}(\eta_k)}_{f^{(IV)}(\eta)} = -\frac{h^4}{80}(b-a) f^{(IV)}(\eta) \qquad (10)$$

Условия применимости:

1. Как уже было сказано ранее узлы сетки должны быть различны, что выполняется за счет реализации равномерной сетки.

Предварительный анализ задачи

В данной работе будет рассматриваться функция $f(x) = 0.5^x + 1 - (x-2)^2$. Она бесконечно дифференцируема, следовательно имеет четвертую производную на $[a, b]$.

Тестовый пример для задач малой размерности

$$f(x) = 0.5^x + 1 - (x-2)^2, a = -6, b = 6$$

$$\int f(x)dx = F(x) = \frac{0.5^x}{ln(0.5)} + x - \frac{(x-2)^3}{3} + C$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -87.69$$

1 разбиение:

$$h = \frac{b-a}{3} = 4$$

x_i	-6	-2	2	6

$$S_{4,1}(f) = \frac{3*4}{8}(1 - 11 + 1.25 - 15) = -64.85$$

Фактическая погрешность $\epsilon = 22.84$

2 разбиения:

$$h = \frac{b-a}{6} = 2$$

x_i	-6	-4	-2	0	2	4	6

$$S_{4,2}(f) = \frac{3*4}{8}((1 - 19 - 11 - 2) + (-2 + 1.25 - 2.93 - 15)) = -84.78$$

Правило Рунге:

$$\frac{|S_{4,2}(f) - S_{4,1}(f)|}{2^m - 1} = \frac{84.78 - 64.85}{15} = 1.33$$

Фактическая погрешность $\epsilon = 2.91 > 1.33$

4 разбиения:

$$h = \frac{b-a}{12} = 1$$

x_i	-6	-5	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6

$S_{4,4}(f) = \frac{3*4}{8}((1-16-19-16)+(-16-11-6-2)+(-2+0.5+1.25+0.125)+(0.125-2.93-7.97-15)) = -87.45$

Правило Рунге:

$$\frac{|S_{4,4}(f) - S_{4,2}(f)|}{2^m - 1} = \frac{87.45 - 84.78}{15} = 0.178$$

Фактическая погрешность $\epsilon = 0.24 > 0.178$

Из результатов видно, что погрешность с каждым разбиением уменьшилась на порядок

Контрольные тесты

1. Зададим равномерную сетку и посчитаем интеграл с различной точностью, меняя ее от 0.1 до 10^{-14}.

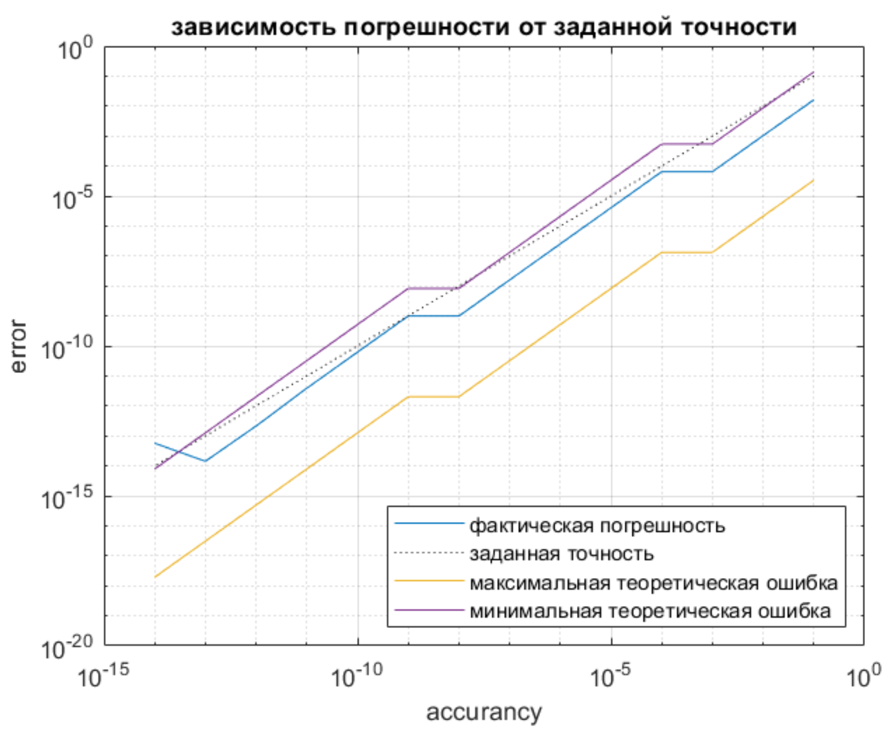
Модульная структура программы

`double f(double x)` - сама функция.

`double Integrate(double h, double a, int n)`
`pair<double, int> Newton_Cotes(double a, double b, double eps)`
- Реализация формулы 3/8.

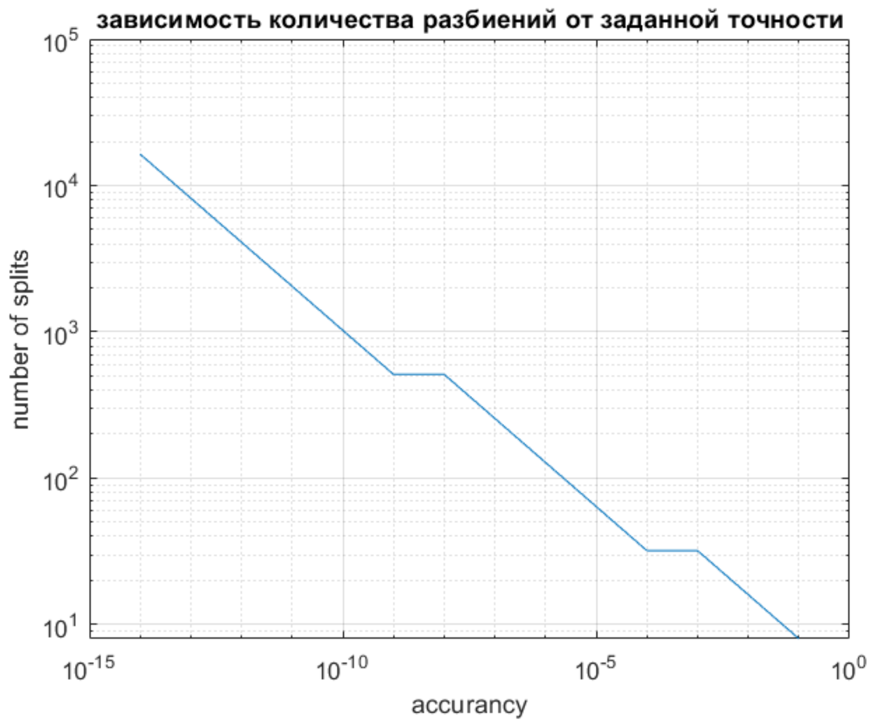
Численный анализ

▷ Погрешность:



Из графика видно, что все заданные точности достигаются, за исключением последней точки, что связано с ограниченной точностью типа данных double в языке C++.

▷ Количество разбиений:



По графику видно, что зависимость линейная и количество разбиений почти каждый раз растет в 2 раза.

Общие выводы

В данной лабораторной работе мы научились численно вычислять опредленный интеграл на заданном промежутке с помощью формулы Ньютона-Котеса для 4х точек(3/8). Реализация метода очень простая, что видно из модульной структуры. Метод довольно эффективный, но он проигрывает формуле Симпсона, где алгебраический порядок точности такой же, но вычислений меньше.