

Математический анализ

Харитонцев-Беглов Сергей

26 марта 2022 г.

Содержание

1. Интегральное исчисление функции одной переменной	1
1.1 Первообразная и неопределенный интеграл	1
1.2 Определенный интеграл	3
1.3 Свойства интеграла	5
1.4 Приложения формулы интегрирования по частям	8
Отступление. Равномерная непрерывность	11
Продолжение главы 1	13
1.5 Интегральные суммы	13
1.6 Несобственные интегралы	16
2. Анализ в метрических пространствах	23
2.1 Метрические и нормированные пространства	23
2.2 Компактность	31
2.3 Непрерывные отображения	35
2.4 Длина кривой	38
2.5 Линейные операторы	41
3. Ряды	44
3.1 Ряды в нормированных пространствах	44
3.2 Знакопостоянные ряды	45

1. Интегральное исчисление функции одной переменной

1.1. Первообразная и неопределенный интеграл

Определение 1.1. $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. Функция $F: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ — первообразная функции f , если $F'(x) = f(x) \forall x \in \langle a, b \rangle$

Теорема 1.1. Непрерывная на промежутке функция имеет первообразную.

Доказательство. Позже. □

Замечание. $\text{sign } x = \begin{cases} 1 & \text{если } x > 0 \\ 0 & \text{если } x = 0. \text{ Не имеет первообразной.} \\ -1 & \text{если } x < 0 \end{cases}$

Доказательство. От противного: пусть нашлась $F: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ и $F'(x) = \text{sign}(x)$.

Тогда воспользуемся теоремой Дарбу для F на отрезке $[0; 1]$.

Пусть $k = \frac{1}{2} \in (\text{sign}(0), \text{sign}(1))$. Значит $\exists c \in (0, 1): F'(c) = k = \frac{1}{2}$. Противоречие. □

Теорема 1.2. $f, F: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ и F — первообразная для f . Тогда:

1. $F + C$ — первообразная для f .
2. Если $\Phi: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ — первообразная для f , то $\Phi = F + C$.

Доказательство.

1. $(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x)$
2. $(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow (\Phi - F)' \equiv 0 \Rightarrow \Phi - F$ — константа. □

Определение 1.2. Неопределённый интеграл — множество всех первообразных.

$\int f(x) dx = \{F: F \text{ — первообразная } f\}$. Но мы будем записывать $\int f(x) dx = F(x) + C$

Табличка интегралов.

1. $\int 0 dx = C$.
2. $\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C$, при $p \neq -1$.
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$.
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$, при $a > 0, a \neq 1$.
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$
10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C.$
12. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C.$

Доказательство. Для 3. Если $x > 0$ $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$. Если $x < 0$ $\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C$, то есть $(\ln(-x))' = (\frac{1}{-x})(-x)' = \frac{-1}{x}$.

$$\text{Для 11. } (\ln |x + \sqrt{x^2 \pm 1}|)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm 1}} (x + \sqrt{x^2 \pm 1})' = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm 1}}}{x + \sqrt{x^2}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2 \pm 1} + x}{\sqrt{x^2 \pm 1}}}{x + \sqrt{x^2 \pm 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}$$

$$\text{Для 13. } (\frac{1}{2}(\ln |1+x| - \ln |1-x|))' = \frac{1}{2}(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}) = \frac{1}{1-x^2}$$

□

Замечание. $A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$, $cA := \{ca : a \in A\}$.

$$\int f(x) dx + \int g(x) dx = \{F + C\} + \{G + \tilde{C}\} = \{F + G + C\}.$$

Теорема 1.3 (Арифметические действия с неопределенными интегралами). Пусть $f, g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ имеют первообразные. Тогда:

1. $f + g$ имеет первообразную и $\int (f + g) dx = \int f dx + \int g dx$
2. αf имеет первообразную и $\int \alpha f dx = \alpha \int f dx$

Доказательство. Пусть F и G первообразные для f и g .

1. Тогда $F + G$ — первообразная для $f + g$. Тогда $\int (f + g) = F + G + C = \int f + \int g$.
2. Тогда αF — первообразная для $\alpha f \implies \int \alpha f = \alpha F + C = \alpha(F + \frac{C}{\alpha}) = \alpha \int f$.

□

Следствие Линейность неопределенного интеграла. $f, g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ имеют первообразную $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $|\alpha| + |\beta| \neq 0$. Тогда $\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$.

Доказательство. Прямое следствие из теоремы выше.

□

Теорема 1.4 (Теорема о замене переменной в неопределенном интеграле). $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi : \langle c, d \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$, f имеет первообразную F . φ дифференцируемая. Тогда $\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C$.

Доказательство. Надо проверить, что $F(\varphi(t))$ — первообразная для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

□

Следствие. $\int f(\alpha x + \beta) dx = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x + \beta) + C$

Доказательство. $\int \alpha f(\alpha x + \beta) dx = F(\alpha x + \beta) + C$. И делим обе части на α .

□

Теорема 1.5 (Формула интегрирования по частям). $f, g: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, дифференцируемые, $f'g$ имеет первообразную.

Тогда fg' имеет первообразную и $\int fg' = fg - \int f'g$

Доказательство. H — первообразная для $f'g$. Тогда $H' = f'g$.

Надо доказать, что $fg - H$ — первообразная для fg' .

$$(fg - H)' = f'g + gh' - H' = f'g + fg' - f'g = fg'.$$

□

1.2. Определенный интеграл

Пусть \mathcal{F} — совокупность (множество) ограниченных плоских фигур.

Определение 1.3. Площадь: $\sigma: \mathcal{F} \rightarrow [0; +\infty)$, причём

1. $\sigma([a; b] \times [c; d]) = (b - a)(d - c)$
2. (Аддитивность). $\forall E_1, E_2 \in \mathcal{F}: E_1 \cap E_2 = \emptyset \Rightarrow \sigma(E_1 \cup E_2) = \sigma(E_1) + \sigma(E_2)$

Свойство Монотонность площади. $\forall E, \tilde{E}: E \subset \tilde{E} \Rightarrow \sigma(E) \leq \sigma(\tilde{E})$.

Доказательство. $E = \tilde{E} \cup (\tilde{E} \setminus E) \Rightarrow \sigma(\tilde{E}) = \sigma(E) + \sigma(\tilde{E} \setminus E)$.

□

Определение 1.4. Псевдоплощадь: $\sigma: \mathcal{F} \rightarrow [0; +\infty]$, причём

1. $\sigma([a; b] \times [c; d]) = (b - a)(d - c)$,
2. $\forall E, \tilde{E} \in \mathcal{F}: E \subset \tilde{E} \Rightarrow \sigma(E) \leq \sigma(\tilde{E})$,
3. Разобьем E вертикальной или горизонтальной прямой, в том числе теми прямыми, которые правее или левее E . Тогда $E = E_- \cup E_+$, $E_- \cap E_+ = \emptyset$ и $\sigma(E) = \sigma(E_-) + \sigma(E_+)$.

Свойства. 1. Подмножество вертикального или горизонтального отрезка имеет нулевую площадь.

2. В определении E_- и E_+ не важно куда относить точки из l .

Доказательство. Заметим, что $\sigma(E_- \cup (E \cap l)) = \sigma(E_- \setminus l) + \underbrace{\sigma(E \cap l)}_{=0} \Rightarrow$ вообще не имеет разницы куда относить точки из l .

□

Пример.

1. $\sigma_1(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^n |P_k| : P_k \text{ — прямоугольник, } \bigcup_{k=1}^n P_k \supset E \right\}.$
2. $\sigma_2(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^n |P_k| : P_k \text{ — прямоугольник, } \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \supset E \right\}.$

Упражнение.

1. Доказать, что $\forall E \quad \sigma_1(E) \geq \sigma_2(E)$.
2. $E = ([0, 1] \cap \mathbb{Q}) \times ([0, 1] \cap \mathbb{Q})$. Доказать, что $\sigma_1(E) = 1, \sigma_2(E) = 0$.

Теорема 1.6.

1. σ_1 — квазиплощадь.
2. Если E' — сдвиг E , то $\sigma_1(E) = \sigma_1(E')$.

Доказательство.

2. E' — сдвиг E на вектор v . Пусть P_k — покрытие $E \iff P'_k$ — покрытие E' . Знаем, что площади прямоугольников не меняются при сдвиге, а значит: $\sigma_1(E) = \inf\{\sum_{k=1}^n |P_k|\} = \inf\{\sum |P'_k|\} = \sigma_1(E')$.

1. \Rightarrow монотонность. Пусть есть $E \subset \tilde{E}$. Тогда возьмем покрытие P_k для \tilde{E} . $E \subset \tilde{E} \subset \bigcup_{k=1}^n P_k$.

А теперь заметим, что $\sigma_1 = \inf$, и любое покрытие для \tilde{E} является покрытием и для E , т.е. все суммы из $\sigma_1(\tilde{E})$ есть в $\sigma_1(E)$, а значит $\sigma_1(E) \leq \sigma_1(\tilde{E})$ как инфимум по более широкому множеству.

- 1'. Докажем теперь аддитивность.

« \leq ». $\sigma_1(E) = \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+)$. Пусть P_k — покрытие E_- , Q_j — покрытие E_+ . $\bigcup_{k=1}^n P_k \cup \bigcup_{j=1}^m Q_j \supset E_- \cup E_+ = E$. А значит $\sigma_1(E) \leq \inf\left\{\sum_{k=1}^n |P_k| + \sum_{j=1}^m |Q_j|\right\} = \inf\{\sum |P_k|\} + \inf\{\sum |Q_j|\} = \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+)$. Заметим, что переход с разделением инфимумов возможен, так как P и Q выбираются независимо.

« \geq ». Пусть P_k — покрытие E . Тогда можно пересечь прямой (покрытие и само E) и разбить P_k на P_k^- и P_k^+ , а тогда: $|P_k| = |P_k^-| + |P_k^+|$, $\sum |P_k| = \sum |P_k^-| + \sum |P_k^+|$. $\sum |P_k^-| \geq \sigma_1(E_-)$, $\sum |P_k^+| \geq \sigma_1(E_+) \Rightarrow \sum |P_k| \geq \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+)$ для любого покрытия P_k , а значит и $\sigma_1(E) \geq \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+)$

Таким образом $\sigma_1(E) = \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+)$

- 1''. Проверим, что сама площадь прямоугольника не сломалась: $\sigma_1([a, b] \times [c, d]) = (b-a)(d-c)$. Заметим, что $\sigma_1(P) \leq |P|$, т.к. прямоугольник можно покрыть им самим.

Тогда посмотрим на P_k . Проведем прямые содержащие все стороны прямоугольников из покрытия (и P). Заметим, что такими прямыми каждый прямоугольник разбивается на подпрямоугольники, сумма площадей которых равна площади исходного прямоугольника. Тогда заметим, что и площадь P это сумма «кусочков из нарезки» P , и некоторые части разбиения встречаются в P_k несколько раз. А значит выкинув все лишнее мы как раз получим $|P|$, а значит $\sigma_1(P) \geq |P|$. Таким образом $\sigma_1(P) = |P|$

□

Определение 1.5. Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда $f_+, f_- : [a, b] \rightarrow [0; +\infty)$. Причем $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$, $f_- = \max\{-f(x), 0\}$. f_+ — положительная составляющая, а f_- — отрицательная составляющая.

Свойства. 1. $f = f_+ - f_-$.

$$2. |f| = f_+ + f_-$$

$$3. f_+ = \frac{f+|f|}{2}, f_- = \frac{|f|-f}{2}.$$

4. Если $f \in C([a, b])$, то $f_{\pm} \in C([a, b])$.

Определение 1.6. Пусть $f: [a, b] \rightarrow [0; +\infty)$.

Тогда подграфик $P_f([a; b]) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\}$.

Определение 1.7. $\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx = \sigma(P_{f_+}([a; b])) - \sigma(P_{f_-}([a; b]))$.

Свойства. 1. $\int_a^a f = 0$.

$$2. \int_a^b f = c(b - a)$$

Доказательство. По графику очевидно :) □

$$3. f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f = \sigma(P_f).$$

$$4. \int_a^b (-f) = - \int_a^b f.$$

Доказательство. $(-f)_+ = \max\{-f, 0\} = f_-$. $(-f)_- = \max\{f, 0\} = f_+$. Откуда все и следует. □

$$5. f \geq 0 \wedge \int_a^b f = 0 \wedge a < b \Rightarrow f = 0.$$

Доказательство. От противного. $\exists c \in [a, b] : f(c) > 0$. Тогда, возьмем $\varepsilon := \frac{f(c)}{2}, \delta$ из определения непрерывности в точке c . Если $x \in (c - \delta, c + \delta)$, то $f(x) \in (f(c) - \varepsilon, f(c) + \varepsilon) = (\frac{f(c)}{2}, \frac{3f(c)}{2}) \Rightarrow f(x) \geq \frac{f(c)}{2}$ при $x \in (c - \delta; c + \delta) \Rightarrow P_f \supset [c - \frac{\delta}{2}; c + \frac{\delta}{2}] \times [0; \frac{f(c)}{2}] \Rightarrow \int_a^b f = \sigma(P_f) \geq \delta \cdot \frac{f(c)}{2} > 0$ □

1.3. Свойства интеграла

Теорема 1.7 (Аддитивность интеграла). Пусть $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, c \in [a, b]$.

$$\text{Тогда } \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Доказательство. $\int_a^b f = \sigma(P_{f_+}([a, b])) - \sigma(P_{f_-}([a, b]))$. Разделим наш $[a, b]$ вертикальной прямой $x = c$. Тогда можно воспользоваться свойством 3 из определения квазиплощади. □

Теорема 1.8 (Монотонность интеграла). Пусть $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ и $\forall x \in [a, b] : f(x) \leq g(x)$.

$$\text{Тогда } \int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Доказательство. $f_+ = \max\{f, 0\} \leq \max\{g, 0\} = g_+ \Rightarrow P_{f_+} \subset P_{g_+} \Rightarrow \sigma(P_{f_+}) \leq \sigma(P_{g_+})$.
 $f_- = \max\{-f, 0\} \geq \max\{-g, 0\} = g_- \Rightarrow P_{f_-} \supset P_{g_-} \Rightarrow \sigma(P_{f_-}) \geq \sigma(P_{g_-})$. □

Следствие. 1. $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$

2. $(b-a) \min_{x \in [a,b]} f(x) \leq \int_a^b f \leq (b-a) \max_{x \in [a,b]} f(x)$.

Доказательство. 1. $-|f| \leq f \leq |f| \Rightarrow \int_a^b -|f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f| \Rightarrow \left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$

2. $m := \min f(x), M := \max f(x). m \leq f(x) \leq M \Rightarrow \int_a^b m \leq \int_a^b f \leq \int_a^b M$.

□

Теорема 1.9 (Интегральная теорема о среднем). Пусть $f \in C([a, b])$.

Тогда $\exists c \in (a, b): \int_a^b f = (b-a)f(c)$.

Доказательство. $m := \min f = f(p), M := \max f = f(q)$ (по теореме Вейерштрасса). Тогда $f(p) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq f(q) \xrightarrow{\text{т. Б-К}} \exists c: f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$. □

Определение 1.8. $I_f := \frac{1}{b-a} \int_a^b f$ — среднее значения f на отрезке $[a, b]$.

Определение 1.9. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Интеграл с переменным верхним пределом $\Phi(x) := \int_a^x f$, где $x \in [a, b]$.

Определение 1.10. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Интеграл с переменным нижним пределом $\Psi(x) := \int_x^b f$, где $x \in [a, b]$.

Замечание. $\Phi(x) + \Psi(x) = \int_a^b f$.

Теорема 1.10 (Теорема Барроу). Пусть $f \in C[a, b]$. Тогда $\Phi'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$. То есть Φ — первообразная функции f .

Доказательство. Надо доказать, что $\lim_{y \rightarrow x} \frac{\Phi(y) - \Phi(x)}{y - x} = f(x)$. Проверим для предела справа.

Тогда $\Phi(y) - \Phi(x) = \int_a^y f - \int_a^x f = \int_x^y f$.

Тогда $\frac{\Phi(y) - \Phi(x)}{y - x} = \frac{1}{y - x} \int_x^y f = f(c)$ для некоторого $c \in (x, y)$.

Проверяем определение по Гейне. Берем $y_n > x$ и $y_n \rightarrow x$. Тогда $\frac{\Phi(y_n) - \Phi(x)}{y_n - x} = f(c_n)$, где $c_n \in (x, y_n), x < c_n < y_n \rightarrow x \Rightarrow c_n \rightarrow x \Rightarrow f(c_n) \rightarrow f(x)$. □

Следствие. $\Psi'(x) = -f(x) \quad \forall x \in [a, b]$.

Доказательство. $\Psi(x) = \int_a^b f - \Phi(x) = C - \Phi(x) \Rightarrow \Psi' = (C - \Phi(x))' = -\Phi'(x) = -f(x)$. □

Теорема 1.11. Непрерывная на промежутке функция имеет первообразную.

Доказательство. $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\text{Рассмотрим } F(x) := \begin{cases} \int_c^x f & \text{при } x \geq c \\ -\int_x^c f & \text{при } x \leq c \end{cases}.$$

Если $x > c$, то $F'(x) = f(x)$. □

Теорема 1.12 (Формула Ньютона-Лейбница). $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ и F — её первообразная. Тогда $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

Доказательство. $\Phi(x) = \int_a^x f$ — первообразная и $F(x) = \Phi(x) + C$.

$$\text{Тогда } F(b) - F(a) = (\Phi(b) + C) - (\Phi(a) + C) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b f \quad \square$$

Определение 1.11. $F|_a^b := F(b) - F(a)$

Теорема 1.13 (Линейность интеграла). $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$.

Доказательство. F, G — первообразные для f, g .

Тогда $\alpha F + \beta G$ — первообразная для $\alpha f + \beta g$. Тогда воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b \alpha f + \beta g = \alpha F + \beta G \Big|_a^b = \alpha F(b) + \beta G(b) - \alpha F(a) - \beta G(a).$$

□

Теорема 1.14 (Формула интегрирования по частям). Пусть $f, g \in C^1[a, b]$.

$$\text{Тогда } \int_a^b f g' = f g \Big|_a^b - \int_a^b f' g.$$

Доказательство. Докажем при помощи формулы Ньютона-Лейбница. Пусть H — первообразная $f'g$. Тогда $fg - H$ — первообразная для fg' .

Проверим данный факт: $(fg - H)' = f'g + fg' - f'g = fg'$. А значит нам можно воспользоваться формулой Ньютона-Лейбница.

$$\int_a^b f g' = (fg - H) \Big|_a^b = fg \Big|_a^b - H \Big|_a^b = fg \Big|_a^b - \int_a^b f' g. \quad \square$$

Замечание Соглашение. Если $a > b$, то $\int_a^b f := -\int_b^a f$.

Мотивация: Если F — первообразная, то $\int_a^b f = F \Big|_a^b$.

Теорема 1.15 (Формула замены переменной). Пусть $f \in C[a, b]$, $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$, $\varphi \in C^1[c, d]$, $p, q \in [c, d]$.

$$\text{Тогда } \int_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)dx.$$

Доказательство. Пусть F — первообразная f . Тогда $\int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)dx = F|_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} = F_0\varphi|_p^q$, где $F_0\varphi$ — первообразная для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

Проверим данные факты: $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

Тогда интеграл равен $\int_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ □

Пример.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2t}{1 + \sin^4 t} dt. \quad (1)$$

Произведем замену $\varphi(t) = \sin^2 t$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $\varphi'(t) = 2 \sin t \cos t = \sin 2t$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 1$:

$$(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi'(t)}{1 + (\varphi(t))^2} = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(\frac{\pi}{2})} f(x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \arctg x|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

1.4. Приложения формулы интегрирования по частям

Пример. $W_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt = (1)$

Где $x = \frac{\pi}{2} - t =: \varphi(t)$, $\varphi'(t) = -1$, $\sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos t$.

Тогда $(1) = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \varphi(t) \cdot \varphi'(t) dt = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n x dx$

Частные случаи $W_0 = \frac{\pi}{2}$, $W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

Общее решение: $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \cdot (\cos x)' dx =$. Воспользовались тем, что $\sin x = -(\cos x)'$, $f'(x) = (n-1) \sin^{n-2} x \cdot \cos x$.

Тогда получаем:

$$\begin{aligned} &= - \left(\underbrace{\sin^{n-1} x \cdot \cos x}_{=0} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \sin^{n-2} x \underbrace{\cos^2 x}_{=1-\sin^2 x} dx \right) = \\ &= (n-1) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \right) = (n-1)(W_{n-2} - W_n). \end{aligned}$$

Посчитаем для четных: $W_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot W_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} W_{2n-4} = \dots = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2}$, где $k!!$ — произведение натуральных чисел той же четности, что и k и $\leq k$.

Для нечетных: $W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} W_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} W_{2n-3} = \dots = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} W_1 = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$

Теорема 1.16 (Формула Валлиса).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Доказательство. $\sin^n x \geq \sin^{n+1} x$ на $[0, \frac{\pi}{2}]$. Тогда $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x dx = W_{n+1}$.

Заметим, что $W_{2n+2} \leq W_{2n+1} \leq W_{2n} \iff \frac{\pi}{2} \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \leq \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leq \frac{\pi}{2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$. Поделим на $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$:

$$\frac{\pi}{2} \frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{((2n)!!)^2}{(2n+1)((2n-1)!!)^2} \leq \frac{\pi}{2} \implies \lim \left(\frac{(2n)!!}{\sqrt{(2n+1)(2n-1)!!}} \right)^2 = \frac{\pi}{2}.$$

□

Следствие.

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Доказательство. Заметим, что $(2n)! = (2n)!! \cdot (2n-1)!!$, а $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n) = 2^n \cdot n!$. Тогда подставим в Спкку:

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{\frac{(2n)!!}{2^n} \frac{(2n)!!}{2^n}} = 4^n \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

При этом из Валлиса, заметим, что $\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2n+1} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2n} = \sqrt{\pi n}$. А значит все сойдется. □

Теорема 1.17 (Формула Тейлора (с остатком в интегральной форме)). Пусть $f \in C^{n+1}[a, b]$, $x, x_0 \in [a, b]$. Тогда:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

Доказательство. Индукция по n :

- База. $n = 0$, $f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt = f(x_0) + f' \big|_{x_0}^x$
- Переход. $n \rightarrow n + 1$.
- Доказательство. $f(x) = T_n(x) + \underbrace{\frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n}_{g'} \underbrace{f^{(n+1)}(t)}_f dt$. Проинтегрируем интеграл по ча-

стям. $g(t) = \frac{1}{n+1} - (x - t)^{n+1}$.

$$\begin{aligned} \text{Подставим: } \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt &= -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \cdot f^{(n+1)}(t) \Big|_{t=x_0}^{t=x} + \int_{x_0}^x \frac{1}{n+1} (x - t)^{n+1} \cdot f^{(n+2)}(t) dt = \\ &= \underbrace{\frac{1}{n+1} (x - x_0)^{n+1} f^{(n+1)}(x_0)}_{\text{новый член Тейлора!}} + \int_{x_0}^x \frac{1}{n+1} (x - t)^{n+1} \cdot f^{(n+2)}(t) dt \end{aligned}$$

□

Пример.

$$H_j := \frac{1}{j!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^j \cos x dx. \quad (2)$$

Свойство 1. $0 < H_j \leq \frac{1}{j!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2j} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2j}}{j!}.$

Свойство 2. $\forall c > 0: c^j \cdot H_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0. 0 < c^j H_j \leq \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2j} \cdot c^j}{j!} = \frac{\left(\frac{\pi^2}{4} c\right)^j}{j!} \rightarrow 0.$

Свойство 3. $H_0 = 1, H_1 = 2$ (упражнение).

Свойство 4. $H_j = (4j - 2)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}$, при $j \geq 2$.

Доказательство.

$$j!H_j = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^j (\sin x)' dx \quad (3)$$

Заметим, что $\left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^j \Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = j \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} \cdot (-2x)$. Тогда:

$$\begin{aligned} (3) &= \underbrace{\left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^j \sin x \Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}}}_{=0} + 2j \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-1} x \underbrace{\sin x}_{=(-\cos x)'} dx = \\ &= 2j \left(\underbrace{\left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-1} \cdot x \cdot (-\cos x) \Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-2} x^2 \cos x dx \right) \\ &= 2j \left((j-1)!H_{j-1} - 2(j-1) \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \cdot (j-2)!H_{j-2} + 2(j-1)(j-1)!H_{j-1} \right). \end{aligned}$$

Откуда с легкостью получаем $j!H_j = 2j!H_{j-1} - \pi^2 j!H_{j-2} + 4(j-1)j!H_{j-1} \iff H_j = (4j-2)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}$.

Свойство 5. Существует многочлен P_n с целыми коэффициентами степени $\leq n$, такой что $H_j = P_j(\pi^2)$.

Доказательство. $P_0 \equiv 1, P_1 \equiv 2, P_n(x) = (4n-2)P_{n-1}(x) - xP_{n-2}(x).$ □

□

Теорема 1.18 (Ламберта, доказательство: Эрмит). Числа π и π^2 иррациональные.

Доказательство. От противного. Пусть π^2 — рационально. Тогда пусть $\pi^2 = \frac{m}{n}$. Тогда $H_j = P_j\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{\text{целое число}}{n^j} > 0$.

$n^j H_j = \text{целое число} > 0 \Rightarrow n^j H_j \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0$, но $n^j H_j \geq 1$. □

Отступление. Равномерная непрерывность

Определение 1.12. $f: E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ равномерно непрерывна на E , если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in E: |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Определение 1.13. f непрерывна во всех точках из E :
 $\forall x \in E \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in E: |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Пример. $\sin x$ и $\cos x$ равномерно непрерывны на \mathbb{R} .

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y| \Rightarrow \delta = \varepsilon \text{ подходит. } |\cos x - \cos y| \leq |x - y|.$$

Пример. $f(x) = x^2$ не является равномерно непрерывной на \mathbb{R} . Рассмотрим $\varepsilon = 1$, никакое $\delta > 0$ не подходит. x и $x + \frac{\delta}{2}$. $f(x + \frac{\delta}{2}) - f(x) = (x + \frac{\delta}{2})^2 - x^2 = \dots = \delta x + \frac{\delta^2}{4} > \delta x$. При $x = \frac{1}{\delta}$ противоречие.

Теорема 1.19 (Теорема Кантора). Пусть $f \in C[a, b]$, тогда f равномерно непрерывна на $[a, b]$.

Доказательство. Берем $\varepsilon > 0$ и предположим, что $\delta = \frac{1}{n}$ не подходит, то есть $\exists x_n, y_n \in [a, b]: |x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ и по теореме Больцано-Вейерштрасса у последовательности x_n есть сходящаяся последовательность $x_{n_k} \rightarrow c$, то есть $\lim x_{n_k} = c \in [a, b]$.

$$\underbrace{x_{n_k} - \frac{1}{n_k}}_{\rightarrow c} < y_{n_k} < \underbrace{x_{n_k} + \frac{1}{n_k}}_{\rightarrow c} \Rightarrow \lim y_{n_k} = c. \text{ Но } f \text{ непрерывна в точке } c \Rightarrow f(x_{n_k}) = f(c) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(y_{n_k}) \Rightarrow \lim (f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})) = 0, \text{ но } |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon. \quad \square$$

Замечание. Для интервала или полуинтервала неверно. $f(x) = \frac{1}{x}$ на $(0; 1]$. Докажем, что нет равномерной непрерывности на $(0; 1]$.

Пусть $\varepsilon = 1$ и $\delta > 0$. Пусть $0 < x < \delta$, $y = \frac{x}{2}$, $|x - y| = \frac{x}{2} < \delta$. Тогда $f(y) - f(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} > 1$.

Определение 1.14. Пусть $f: E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Тогда $\omega_f(\delta) := \sup\{|f(x) - f(y)| \mid \forall x, y \in E, |x - y| \leq \delta\}$ — модуль непрерывности f .

Свойства. 1. $\omega_f(0) = 0$,

$$2. |f(x) - f(y)| \leq \omega_f(|x - y|).$$

$$3. \omega_f \uparrow.$$

$$4. \text{ Если } f \text{ — липшицева функция с константой } L, \text{ то } \omega_f(\delta) \leq L\delta.$$

В частности, если $|f'(x)| \leq L \quad \forall x \in \langle a, b \rangle$.

$$5. f \text{ равномерно непрерывна на } E \iff \omega_f \text{ непрерывна в нуле} \iff \lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega_f(\delta) = 0.$$

Доказательство. • $1 \rightarrow 2$. $\forall \varepsilon > 0 \exists \gamma > 0 \forall x, y \in E: |x - y| < \gamma \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Возьмем $\delta < \gamma$. Тогда $|x - y| \leq \delta \Rightarrow |x - y| < \gamma \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \Rightarrow \sup \leq \varepsilon$. Тогда с одной стороны $\omega_f \geq 0$, а с другой ограничена ε . Следовательно предел ω_f равен 0.

• $2 \rightarrow 1$. Из $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega_f(\delta) = 0$. Возьмем $\delta > 0$ для $\omega_f(\delta) < \varepsilon: |f(x) - f(y)| \leq \omega_f(\delta) < \varepsilon \quad \forall x, y \in E: |x - y| \leq \delta$.

□

6. $f \in C[a, b] \iff \omega_f$ непрерывен в нуле $\iff \lim \omega_f(\delta) = 0$.

Доказательство. Для функции на отрезке равномерная непрерывность \iff непрерывность. \square

Продолжение главы 1

1.5. Интегральные суммы

Определение 1.15. Пусть есть $[a, b]$. Тогда дробление (разбиение, пунктир) отрезка: набор точек: $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$.

Определение 1.16. Ранг дробления: $\max_{k=1,2,\dots,n} (x_k - x_{k-1}) =: |\tau|$, $\tau = (x_0, x_1, \dots, x_n)$

Определение 1.17. Оснащение дробления — набор точек $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, такой что $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

Определение 1.18. Интегральная сумма (сумма Римана) $S(f, \tau, \xi) := \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$,

По факту просто сумма прямоугольников под графиком рисунок принял ислам очень жаль.

Теорема 1.20 (Теорема об интегральных суммах). Пусть $f \in C[a, b]$,

тогда $\left| \int_a^b f - S(f, \tau, \xi) \right| \leq (b-a)\omega_f(|\tau|)$.

Доказательство.

$$\Delta := \int_a^b f - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dt - \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(\xi_k)dt = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(t) - f(\xi_k))dt.$$

$$|\Delta| \leq \sum \left| \int \dots \right| \leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t) - f(\xi_k)|dt \leq \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})\omega_f(|\tau|) = (b-a)\omega_f(|\tau|).$$

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t) - f(\xi_k)|dt \leq \int_{x_{k-1}}^{x_k} \omega_f(|\tau|)dt = (x_k - x_{k-1})\omega_f(|\tau|).$$

□

Следствие. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall$ дробления ранга $\leq \delta \forall$ оснащения $\left| \int_a^b f - S(f, \tau, \xi) \right| < \varepsilon$

Следствие. Если τ_n последовательность дроблений, ранг которых $\rightarrow 0$, то $S(f, \tau_n, \xi_n) \rightarrow \int_a^b f$.

Пример. $S_p(n) := 1^p + 2^p + \dots + n^p$. Посчитаем $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_p(n)}{n^{p+1}}$.

Возьмем $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(t) = t^p$ $\frac{S_p(n)}{n^{p+1}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^p = S(f, \tau, \xi)$, где $x_k = \xi_k = \frac{k}{n}$.

Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_p(n)}{n^{p+1}} = \int_0^1 t^p dt = \frac{t^{p+1}}{p+1} \Big|_{t=0}^1 = \frac{1}{p+1}$

Определение 1.19. Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, тогда f интегрируема по Риману, если $\exists I \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall$ дробление ранги $< \delta \forall$ его оснащение $|S(f, \tau, \xi) - I| < \varepsilon$.

I — интеграл по Риману $\int_a^b f$.

Лемма. $f \in C^2[\alpha, \beta]$. Тогда

$$\int_a^b f(t)dt - \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}(\beta - \alpha) = -\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f''(t)(t - \alpha)(\beta - t)dt.$$

Доказательство. Пусть $\gamma := \frac{\alpha + \beta}{2}$. Тогда:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)(t - \gamma)'dt = f(t)(t - \gamma) \Big|_{t=\alpha}^{t=\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(t)(t - \gamma)dt.$$

Заметим, что $f(t)(t - \gamma) \Big|_{t=\alpha}^{t=\beta} = f(\beta)(\beta - \gamma) - f(\alpha)(\alpha - \gamma) = \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}(\beta - \alpha)$. Продолжим:

$$\begin{aligned} \text{левая часть} &= - \int_{\alpha}^{\beta} f'(t)(t - \gamma)dt = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f'(t)((t - \alpha)(\beta - t))'dt = \\ &= \frac{1}{2} f'(t)(t - \alpha)(\beta - t) \Big|_{t=\alpha}^{t=\beta} - \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f''(t)(t - \alpha)(\beta - t)dt. \end{aligned}$$

Переход к $((t - \alpha)(\beta - t))'$:

$$((t - \alpha)(\beta - t))' = (-t^2 - (\alpha + \beta)t - \alpha\beta)' = -2t + (\alpha + \beta) = -2(t - \gamma).$$

□

Замечание. Бля-бля-бля.

Теорема 1.21 (Оценка погрешности в формуле трапеций). Пусть $f \in C^2[a, b]$.

Тогда :

$$\left| \int_a^b f(t)dt - \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1}) \right| \leq \frac{|\tau|^2}{8} \int_a^b |f''|$$

Доказательство. $\Delta := \int_a^b f - \sum \dots = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} - \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1})$

$$|\Delta| \leq \sum_{k=1}^n \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f dt - \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1}) \right| = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(t)(t - x_{k-1})(x_k - t)dt \right|. \quad (4)$$

Тогда вспомним, что $(t - x_{k-1})(x_k - t) \leq \left(\frac{x_k - x_{k-1}}{2}\right)^2 \leq \frac{|\tau|^2}{4} \implies (4) \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f''(t)| \cdot \frac{|\tau|^2}{4} dt =$

$$\frac{|\tau|^2}{8} \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f''| = \frac{|\tau|^2}{8} \cdot \int_a^b |f''|$$

□

Замечание. Пусть разбиение на n равных отрезков $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n} = |\tau|$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} (x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} = \frac{b-a}{n} \left(f \frac{x_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + \frac{f(x_n)}{2} \right).$$

Замечание. Возьмем разбиение на равные отрезки и $\xi_k = x_k$:

$$S(f, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) (x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k).$$

Теорема 1.22 (формула Эйлера-Маклорена). Пусть $f \in C^2[m, n]$, тогда

$$\sum_{k=m}^n f(k) = \frac{f(m) + f(n)}{2} + \int_m^n f(t) dt + \frac{1}{2} \int_m^n f''(t) \{t\} (1 - \{t\}) dt.$$

Доказательство. Подставим $\alpha = k$ и $\beta = k+1$ в лемму:

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} f(t) dt &= \frac{f(k) + f(k+1)}{2} - \frac{1}{2} \int_k^{k+1} f''(t) (t-k)(k+1-t) dt = \\ &= \frac{f(k) + f(k+1)}{2} - \frac{1}{2} \int_k^{k+1} f''(t) \{t\} (1 - \{t\}) dt. \end{aligned}$$

Дальше суммируем по k от m до $n-1$:

$$\int_m^n f(t) dt = \sum_{k=m}^{n-1} \frac{f(k) + f(k+1)}{2} - \frac{1}{2} \int_m^n f''(t) \{t\} (1 - \{t\}) dt.$$

Заметим, что $\sum_{k=m}^{n-1} \frac{f(k)+f(k+1)}{2} = \frac{f(m)+f(n)}{2} + \sum_{k=m+1}^{n-1} f(k)$. И тогда:

$$\sum_{k=m}^n f(k) = \frac{f(m) + f(n)}{2} + \int_m^n f(t) dt + \frac{1}{2} \int_m^n f''(t) \{t\} (1 - \{t\}) dt.$$

□

Пример. $S_p(n) = 1^p + 2^p + \dots + n^p$, $f(t) = t^p$, $m = 1$, $f''(t) = p(p-1)t^{p-2}$.

$$S_p(n) = \frac{1+n^p}{2} + \int_1^n t^p dt + \frac{1}{2} \int_1^n p(p-1)t^{p-2} \{t\} (1 - \{t\}) dt.$$

$$\text{При } p \in (-1, 1) \int_1^n t^p dt = \frac{t^{p+1}}{p+1} \Big|_1^n = \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1} = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \mathcal{O}(1).$$

$$\int_1^n t^{p-2} \underbrace{\{t\}(1 - \{t\})}_{\leq \frac{1}{4}} dt \leq \frac{1}{4} \int_1^n t^{p-2} dt = \frac{1}{4} \cdot \frac{t^{p-1}}{p-1} \Big|_1^n = \frac{1}{4} \cdot \frac{n^{p-1} - 1}{p-1} = \mathcal{O}(1)..$$

$$\text{То есть } S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \mathcal{O}(1).$$

$$\text{При } p > 1 \quad S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \mathcal{O}(n^{p-1}).$$

Пример. $H_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$. $m = 1$, $f(t) = \frac{1}{t}$, $f''(t) = \frac{2}{t^3}$.

$$H_n = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} + \int_1^n \frac{dt}{t} + \frac{1}{2} \int_1^n \frac{2}{t^3} \{t\} (1 - \{t\}) dt$$

Откуда получаем $(a_n := \int_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^3} dt)$:

$$H_n = \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + a_n.$$

Заметим, что $a_{n+1} = a_n + \int_n^{n+1} \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^3} dt > a_n$. То есть $a_n \uparrow$. Причем $a_b \leq \int_1^n \frac{dt}{t^3} = -\frac{1}{2t^2} \Big|_1^n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} < \frac{1}{2}$.

А значит a_n имеет предел, а значит $a_n = a + o(1)$.

Вывод: $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$, где $\gamma \approx 0.5772156649$ — постоянная Эйлера.

Замечание. $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$.

Пример Формула Стирлинга. $m = 1, f(t) = \ln t, f''(t) = -\frac{1}{t^2}$.

$$\ln n! = \sum_{k=1}^n \ln k = \underbrace{\frac{\ln 1 + \ln n}{2}}_{=\frac{1}{2} \ln n} + \underbrace{\int_1^n \ln t dt}_{=t \ln t - t \Big|_1^n = n \ln n - n + 1} - \underbrace{\frac{1}{2} \int_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^2} dt}_{:=b_n}.$$

Посмотрим на b_n :

$$b_n \leq \frac{1}{2} \int_1^n \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{t}\right) \Big|_1^n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2} \implies b_n = b + o(1)..$$

А значит $\ln n! = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + (1 - b) + o(1)$. $n! = n^n e^{-n} \sqrt{n} e^{1-b} e^{o(1)} \sim n^n e^{-n} \sqrt{n} C$.

Вспомним (из следствия формулы Валлиса): $\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$. А еще знаем, что $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{2n} C}{(n^n e^{-n} \sqrt{n} C)^2} = \frac{4^n \sqrt{2}}{\sqrt{n} C}$.

Тогда получаем, что $\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \sim \frac{4^n \sqrt{2}}{\sqrt{n} C} \implies C \sim \frac{4^n \sqrt{2}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{\pi n}}{4^n} = \sqrt{2\pi}$.

Итоговый результат:

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

$$\ln n! = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln(2\pi n) + o(1).$$

Замечание. $\ln n! = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln(2\pi n) + \mathcal{O}(\frac{1}{n})$.

1.6. Несобственные интегралы

Определение 1.20. Пусть $-\infty < a < b \leq +\infty$ и $f \in C[a, b)$.

Тогда определим $\int_a^{\rightarrow b} f := \lim_{B \rightarrow b-} \int_a^B f$.

Если $-\infty \leq a < b < +\infty, f \in C(a, b]$, тогда $\int_{\rightarrow a}^b f := \lim_{A \rightarrow a+} \int_A^b f$.

Замечание. Если $b < +\infty$ и $f \in C[a, b]$, то определение не дает ничего нового:

$$\int_a^b f = \lim_{B \rightarrow b} \int_a^B f$$

$$\left| \int_a^b f - \int_a^B f \right| \leq M(b - B) \rightarrow 0.$$

Пример. 1. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_1^y \frac{dx}{x^p} = \lim_{\substack{y \rightarrow +\infty \\ \text{при } p \neq 1}} -\frac{1}{(p-1)x^{p-1}} \Big|_{x=1}^{x=y} = \frac{1}{p-1} - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{(p-1)y^{p-1}} = \frac{1}{p-1}$ при $p > 1$,
при $p < 1$ получаем $+\infty$, а при $p = 1$ $\lim_{y \rightarrow +\infty} \ln x \Big|_1^y = \lim_{y \rightarrow +\infty} \ln y = +\infty$

2. $\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{y \rightarrow 0+} \int_y^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{y \rightarrow 0+} -\frac{1}{(p-1)x^{p-1}} \Big|_{x=y}^{x=1} = -\frac{1}{p-1} + \lim_{y \rightarrow 0+} \frac{y^{1-p}}{p-1} = \frac{1}{1-p}$ при $p < 1$, при $p > 1$ получаем $+\infty$, а вот при $p = 1$ $\lim_{y \rightarrow 0+} \ln x \Big|_y^1 = \lim_{y \rightarrow 0+} -\ln y = +\infty$.

То есть, при $p < 1$ $\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}$,

при $p \geq 1$ $\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = +\infty$.

Замечание. Если $f \in C[a, b)$ и F его первообразная, то $\int_a^b f = \lim_{B \rightarrow b-} F(B) - F(a)$.

Если $f \in C[a, b)$ и F его первообразная, то $\int_a^b f = F(b) - \lim_{A \rightarrow a+} F(A)$.

Доказательство. Очевидно по формуле Ньютона-Лейбница. □

Определение 1.21. $F \Big|_a^b := \lim_{B \rightarrow b-} F(B) - F(a)$.

Определение 1.22. $\int_a^{\rightarrow b} f$ сходится, если $\lim_{B \rightarrow b-} \int_a^B f$ существует и конечен.

Теорема 1.23 (Критерий Коши). Пусть $-\infty < a < b \leq +\infty$, $f \in C[a, b)$.

Тогда $\int_a^b f$ сходится $\iff \forall \varepsilon \exists c \in (a, b) : \forall A, B \in (c, b) \left| \int_A^B f \right| < \varepsilon$.

Замечание. 1. Если $b = +\infty$ это означает, что $\forall \varepsilon \exists c > a \forall A, B > c : \left| \int_A^B f \right| < \varepsilon$.

2. Если $b < +\infty$ это означает, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall A, B \in (b - \delta, b) : \left| \int_A^B f \right| < \varepsilon$.

Доказательство. Для $b < +\infty$.

• " \Rightarrow " $\int_a^b f$ сходится $\implies \exists$ конечный $\lim_{B \rightarrow b-} \int_a^B f =: g(B)$.

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \begin{matrix} \forall B \in (b - \delta, b) & |g(B) - I| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall A \in (b - \delta, b) & |g(A) - I| < \frac{\varepsilon}{2} \end{matrix} \implies |g(B) - g(A)| \leq |g(B) - I| + |I - g(A)| < \varepsilon$

• " \Leftarrow " $\int_a^B f =: g(B)$.

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall A, B \in (b - \delta, b) : |g(B) - g(A)| < \varepsilon$ это условие из критерия Коши для $\lim_{B \rightarrow b-} g(B)$.

□

Замечание. Если существует $A_n, B_n \in [a, b) : \lim A_n = \lim B_n = b : \int_{A_n}^{B_n} f \not\rightarrow 0$, то $\int_a^b f$ расходится.

Доказательство. Возьмем A_{n_k} и B_{n_k} : $|\int_{A_{n_k}}^{B_{n_k}} f| \rightarrow C > 0 \implies |\int_{A_{n_k}}^{B_{n_k}} f| > \frac{C}{2}$ при больших k . Но это противоречит критерию Коши. \square

Свойства несобственных интегралов. 1. Аддитивность. Пусть $f \in C[a, b)$, $c \in (a, b)$.

Если $\int_a^b f$ сходится, то $\int_a^b f$ сходится и $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

2. Если $\int_a^b f$ сходится, то $\lim_{c \rightarrow b-} \int_a^c f = 0$

3. Линейность $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $\int_a^b f$ и $\int_a^b g$ сходится. Тогда $\int_a^b (\alpha f + \beta g)$ сходится и $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$.

4. Монотонность. Пусть $\int_a^b f$ и $\int_a^b g$ существует в $\overline{\mathbb{R}}$ и $f \leq g$ на $[a, b)$. Тогда $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

5. Интегрирование по частям. $f, g \in C^1[a, b) \implies \int_a^b f g' = f g \Big|_a^b - \int_a^b f' g$.

6. Замена переменных. $\varphi: [\alpha, \beta) \rightarrow [a, b)$, $\varphi \in C^1[\alpha, \beta)$ и $\exists \lim_{\gamma \rightarrow \beta-} \varphi(\gamma) =: \varphi(\beta-)$ и $f \in C[a, b)$.

Тогда $\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f(x)dx$. «Если существует один из \int , то существует второй и они равны»

Доказательство. 1. $\int_a^b f = \lim_{B \rightarrow b-} F(B) - F(a) \implies \lim_{B \rightarrow b-} F(B)$ существует и конечный

$\implies \int_c^b f = \lim_{B \rightarrow b-} F(B) - F(c)$ — сходится.

$\int_a^b f = \lim_{B \rightarrow b-} F(B) - F(a) = \lim_{B \rightarrow b-} F(B) - F(c) + F(c) - F(a) = \int_c^b f + \int_a^c f$.

2. $\int_c^b f = \int_a^b f - \int_a^c f \rightarrow \int_a^b f - \int_a^b f = 0$

3. $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \lim_{B \rightarrow b-} \int_a^B (\alpha f + \beta g) = \lim_{B \rightarrow b-} (\alpha \int_a^B f + \beta \int_a^B g) = \alpha \lim_{B \rightarrow b-} \int_a^B f + \beta \lim_{B \rightarrow b-} \int_a^B g = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$.

4. $\int_a^B f \leq \int_a^B g$ (монотонность интеграла), а дальше предельный переход.

5. $a < B < b$. $\int_a^B f g' = f g \Big|_a^B - \int_a^B f' g$ и переход к пределу.

6. $F(y) := \int_{\varphi(\alpha)}^y f(x)dx$, $\Phi(\gamma) := \int_{\alpha}^{\gamma} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$. Знаем, что $F(\varphi(\gamma)) = \Phi(\gamma)$ при $\alpha < \gamma < \beta$.

Пусть существует правый \int , то есть $\exists \lim_{y \rightarrow \varphi\beta-} F(y)$. Возьмем $\gamma_n \nearrow \beta \implies \varphi(\gamma_n) \rightarrow \varphi(\beta-) \implies$

$$\Phi(\gamma_n) = F(\varphi(\gamma_n)) \rightarrow \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f(x)dx. \text{ При этом } \Phi(\gamma_n) \rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Пусть существует левый \int , то есть $\exists \lim_{\gamma \rightarrow \beta-} \Phi(\gamma)$. Докажем, что \exists правый \int . При $\varphi(\beta-) < b$ нечего доказывать.

Пусть $\varphi(\beta-) = b$. Тогда возьмем $b_n \nearrow b$. Можно считать, что $b_n \in [\varphi(\alpha), b)$. Тогда $\exists \gamma_n \in [\alpha, \beta) : \varphi(\gamma_n) = b_n$. Докажем, что $\gamma_n \rightarrow \beta$. Пусть это не так. Тогда найдется $\gamma_{n_k} \rightarrow \tilde{\beta} < \beta \implies \varphi(\gamma_{n_k}) \rightarrow \varphi(\tilde{\beta}) < b$ по непрерывности в $\tilde{\beta}$. Противоречие.

$$\text{Итак, } \gamma_n \rightarrow \beta, F(b_n) = F(\varphi(\gamma_n)) = \Phi(\gamma_n) \rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

□

Замечание ко второму свойству. 1. Если $\int_a^b f$ сходится, а $\int_a^b g$ расходится, то $\int_a^b (f+g)$ расходится. Доказательство от противного, пусть интеграл сходится, то $g = (f+g) - f \implies \int_a^b g$ сходится.

2. Если $\int_a^b f$ и $\int_a^b g$ расходятся, то $\int_a^b (f+g)$ может сходиться. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ и $\int_1^{+\infty} -\frac{dx}{x}$ расходятся.

Замечание к шестому свойству. $\int_a^b f(x)dx$. Сделаем замену $x = b - \frac{1}{t} = \varphi(t)$, $\varphi'(t) = \frac{1}{t^2}$, $\varphi(\alpha) = a$, $\alpha = \frac{1}{b-a}$.

$$\text{Тогда } \int_a^b f(x)dx = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f(b - \frac{1}{t}) \frac{1}{t^2} dt.$$

Определение 1.23. Пусть f непрерывен на (a, b) за исключением точек $c_1 < c_2 < \dots < c_n$.

$\int_a^b f$ сходится, если сходятся интегралы по все маленьким отрезкам (содержащих только одну выколотую точку).

Несобственные интегралы от неотрицательных функций

Теорема 1.24. Пусть $f \in C[a, b)$ и $f \geq 0$.

$$\text{Тогда } \int_a^b f \text{ сходится} \iff F(y) := \int_a^y f \text{ ограничена сверху.}$$

Доказательство. $f \geq 0 \implies F$ монотонно возрастает. $\int_a^b f$ сходится $\iff \exists$ конечный $\lim_{y \rightarrow b-} F(y) \iff F$ ограничена сверху. □

Замечание. $f \in C[a; b)$, $f \geq 0$. $\int_a^b f$ расходящийся означает, что $\int_a^b f = +\infty$.

Следствие Признак сравнения. $f, h \in C[a, b)$, $f, g \geq 0$ и $f \leq g$.

1. Если $\int_a^b g$ сходится, то $\int_a^b f$ сходится.
2. Если $\int_a^b f$ расходится, то $\int_a^b g$ расходится.

Доказательство. $F(y) := \int_a^y f$ и $G(y) := \int_a^y g$.

1. Пусть $\int_a^b g$ сходящийся $\implies G(y)$ ограничена, но $F(y) \leq G(y) \implies F(y)$ ограничена $\implies \int_a^b f$ сходящаяся.
2. От противного.

□

Замечание. 1. Неравенство $f \leq g$ нужно лишь для аргументов близких к b .

2. Неравенство $f \leq g$ можно заменить на $f = \mathcal{O}(g)$.

$$f = \mathcal{O}(g) \implies f \leq cg. \int_a^b g \text{ сходящийся} \implies \int_a^b cg \text{ сходящийся} \implies \int_a^b f - \text{сходящийся.}$$

3. Если $f = \mathcal{O}(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}})$ для $\varepsilon > 0$, то $\int_a^{+\infty} f$ — сходящийся.

$$g(x) = \frac{1}{x^{1+\varepsilon}} \text{ и можно считать, что } a \geq 1 \int_a^{+\infty} g(x)dx - \text{сходящийся.}$$

Следствие. $f, g \in C[a, b)$, $f, g \geq 0$ и $f(x) \sim g(x), x \rightarrow b-$. Тогда $\int_a^b f$ и $\int_a^b g$ ведут себя одинаково (либо оба сходятся, либо оба расходятся).

Доказательство. $f \sim g \implies f = \varphi \cdot g$, где $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow b-} 1 \implies$ в окрестности b $\frac{1}{2} \leq \varphi \leq 2 \implies f \leq 2g \wedge g \leq 2f$ в окрестности $b \implies$ из сходимости интеграла g следует сходимость $f \wedge$ наоборот. □

Определение 1.24. $f \in C[a, b)$. $\int_a^b f$ абсолютно сходится, если $\int_a^b |f|$ сходится.

Теорема 1.25. $\int_a^b f$ сходится абсолютно $\iff \int_a^b f$ сходится.

Доказательство. $f = f_+ - f_-$, $|f| = f_+ + f_-$. $|f| \geq f_{\pm} \geq 0$. Если $\int_a^b f$ сходится абсолютно $\implies \int_a^b$ сходится $\int_a^b f_{\pm}$ сходится $\implies \int_a^b f = \int_a^b f_+ - \int_a^b f_-$ сходящийся. □

Теорема 1.26 (Признак Дирихле). $f, g \in C[a, +\infty)$. Если

1. f имеет ограниченную на $[a, +\infty]$ первообразную, то есть $\left| \int_a^y f(x)dx \right| \leq K \quad \forall y$.

2. g монотонна.

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$

, то $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.

Доказательство. Только для случая $g \in C^1[a; +\infty)$.

Надо доказать, что \exists конечный $\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_a^y f(x)g(x)dx$, $F(y) := \int_a^y f(x)dx$.

$$\int_a^y f(x)g(x)dx = \int_a^y F'(x)g(x)dx = F(x)g(x) \Big|_a^y - \int_a^y F(x)g'(x)dx = F(y)g(y) - \int_a^y F(x)g'(x)dx$$

$\lim_{y \rightarrow +\infty} F(y)g(y) = 0$ — произведение бесконечно малой и ограниченной функции.

$\int_a^y F(x)g'(x)dx$ имеет конечный \lim , то есть $\int_a^{+\infty} F(x)g'(x)dx$ сходится.

Докажем, что он абсолютно сходится. $\int_a^{+\infty} |F(x)||g'(x)|dx$, $|F(x)||g'(x)| \leq K|g'(x)| = Kg'(x)$.
 $\int_a^{+\infty} g'(x)dx = g \Big|_a^{+\infty} = \lim_{y \rightarrow +\infty} g(y) - g(a) = -g(a) \implies$ сходящийся. \square

Теорема 1.27 (Признак Абеля). $f, g \in C[a, +\infty]$, Если

1. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится,

2. g монотонна,

3. g ограничена

Тогда $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.

Доказательство. 2) + 3) $\implies \exists l \in \mathbb{R} := \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

Пусть $\tilde{g}(x) := g(x) - l \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{g}(x) = 0$ и \tilde{g} монотонна.

Пусть $F(x) := \int_a^x f(t)dt$. 1) \iff существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

Тогда f и \tilde{g} удовлетворяют условиям признака Дирихле $\implies \int_a^{+\infty} f(x)\tilde{g}(x)dx$ — сходится.

Тогда:

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)(\tilde{g}(x) + l)dx = \int_a^{+\infty} f(x)\tilde{g}(x)dx + l \int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Где $\int_a^{+\infty} f(x)\tilde{g}(x)dx$ сходится по доказанному, а $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ — по условию. \square

Утверждение 1.28. f — периодическая функция с периодом T . Тогда $\int_a^{a+T} f = \int_b^{b+T} f$

Доказательство. Картинка:

Добавить картинку. Альтернатива: посмотреть доски Храброва/пнуть меня.

$$\int_a^{a+kT} f = \int_{b-(k-1)T}^{a+T} f. \quad \int_{a+kT}^{b+T} f = \int_{a+T}^{b-(k-1)T} f$$

□

Следствие. $f, g \in C[a; +\infty)$, f — периодическая с периодом T , g монотонная и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится.

$$\text{Тогда } \int_a^{+\infty} fg \text{ сходится} \iff \int_a^{a+T} f = 0.$$

Доказательство. \Leftarrow . $F(x) = \int_a^x f$ — периодична с периодом T : $F(x+T) = \int_a^{x+T} f = \int_a^x f + \int_x^{x+T} f = F(x)$. F — непрерывна и периодична \implies ограничена $\implies \int_a^{+\infty} fg$ сходится по признаку Дирихле.

\Rightarrow . Пусть $\int_a^{a+T} f =: K \neq 0$. $\tilde{f}(x) =: f(x) - \frac{K}{T}$ — периодична с периодом T . Тогда $\int_a^{a+T} \tilde{f} = \int_a^{a+T} (f - \frac{K}{T}) = K - T \cdot \frac{K}{T} = 0 \implies \int_a^{+\infty} \tilde{f}g$ сходится.

Тогда $\int_a^{+\infty} fg = \int_a^{+\infty} (\tilde{f} + \frac{K}{T})g = \int_a^{+\infty} \tilde{f}g + \frac{K}{T} \int_a^{+\infty} g \implies \int_a^{+\infty} fg$ расходится как сумма сходящегося и расходящегося. □

Пример. Рассмотрим $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$.

1. $p > 1$ интеграл сходится абсолютно: $|\sin x| \leq 1 \implies \left| \frac{\sin x}{x^p} \right| \leq \frac{1}{x^p}$, а значит $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходящийся.

2. $0 < p \leq 1$ интеграл сходящийся, но не абсолютно. $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ — расходится, $\frac{1}{x^p} \searrow 0$. $g(x) := \frac{1}{x^p}$, $f(x) = \sin x$. $\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0 \implies \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ сходящийся.

Если взять $f(x) = |\sin x|$, то интеграл по периоду равен 4. Значит исходный интеграл расходится.

3. $p \leq 0$ интеграл расходится.

$$a_n := \frac{\pi}{6} + 2\pi n, b_n := \frac{5\pi}{6} + 2\pi n. \text{ Тогда } \int_{a_n}^{b_n} \frac{\sin x}{x^p} dx \geq \frac{1}{2} \int_{a_n}^{b_n} \frac{dx}{x^p} \geq \frac{1}{2} \int_{a_n}^{b_n} 1 = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

2. Анализ в метрических пространствах

2.1. Метрические и нормированные пространства

Определение 2.1. Метрика (расстояние) $\rho: X \times X \rightarrow [0; +\infty)$, если выполняются следующие условия:

1. $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$,
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
3. (неравенство треугольника) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Определение 2.2. Метрическое пространство — пара (X, ρ) .

Пример. Дискретная метрика (метрика Лентяя) $\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$

Пример. На \mathbb{R} : $\rho(x, y) = |x - y|$.

Пример. На \mathbb{R}^d : $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^d (x_k - y_k)^2}$. Неравенство треугольника здесь — неравенство Минковского.

Пример. $C[a, b]$. $\rho(f, g) = \int_a^b |f - g|$.

Неравенство треугольника:

$$\rho(f, h) = \int_a^b |f - h| \leq \int_a^b (|f - g| + |g - h|) = \rho(f, g) + \rho(g, h).$$

Пример. Манхэттенская метрика: \mathbb{R}^2 $\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$.

Пример. Французская железнодорожная метрика. \mathbb{R}^2 . Есть точка P (Париж), тогда $\rho(A, B) = AB$, если A, B, P на одной прямой, иначе $\rho(A, B) = |AP| + |PB|$.

Определение 2.3. (X, ρ) — метрическое пространство. $B_r(x) := \{y \in X \mid \rho(x, y) < r\}$ — открытый шар радиуса r с центром в точке x .

Определение 2.4. (X, ρ) — метрическое пространство. $\overline{B}_r(x) := \{y \in X \mid \rho(x, y) \leq r\}$ — закрытый шар радиуса r с центром в точке x .

Свойства. 1. $B_{r_1}(a) \cap B_{r_2}(a) = B_{\min\{r_1, r_2\}}(a)$.

2. $x \neq y \implies \exists r > 0: B_r(x) \cap B_r(y) = \emptyset \wedge \overline{B}_r(x) \cap \overline{B}_r(y) = \emptyset$.

Доказательство. 1. $x \in B_{r_1}(a) \cap B_{r_2}(a) \iff \begin{cases} \rho(x, a) < r_1 \\ \rho(x, a) < r_2 \end{cases} \iff \rho(x, a) < \min\{r_1, r_2\} \implies x \in B_{\min\{r_1, r_2\}}(a)$.

2. $r := \frac{1}{3}\rho(x, y) > 0$. Пусть $\overline{B}_r(x) \cap \overline{B}_r(y) \neq \emptyset$.

Тогда $\exists z \in \overline{B}_r(x) \cap \overline{B}_r(y) \implies \rho(x, z) \leq r \wedge \rho(y, z) \leq r \implies \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \leq 2r = \frac{2}{3}\rho(x, y)$.

□

Определение 2.5. $A \subset X$. A — открытое множество, если $\forall a \in A \exists B_r(a) \subset A$ ($r > 0$).

Теорема 2.1 (О свойствах открытых множеств). 1. \emptyset, X — открытые.

2. Объединение любого числа открытых множеств — открытое.

3. Пересечение конечного числа открытых множеств — открытое.

4. $B_r(a)$ — открытое.

Доказательство. 2. A_α — открытые, $\alpha \in I$. $B := \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. Берем $b \in B \implies b \in A_\beta$ для некоторого β . Но A_β — открытое $\implies \exists r > 0 \quad B_r(b) \subset A_\beta \subset B$.

3. A_1, A_2, \dots, A_n — открытые. $B := \bigcap_{k=1}^n A_k$. Берем $b \in B \implies b \in A_k \forall k = 1, 2, \dots, n$. Но A_k — открытое $\exists r_k > 0 \quad B_{r_k} \subset A_k \forall k \implies B_r(b) \subset \bigcap_{k=1}^n A_k = B$.

$r := \min\{r_1, \dots, r_n\} > 0 \implies B_r(b) \subset B_{r_k}(b) \subset A_k \quad \forall k \implies B_r(b) \subset \bigcap_{k=1}^n A_k = B$.

4. Картинка: $(\rho(a, x) < R, r := R = \rho(a, x) > 0)$. Докажем, что $B_r(x) \subset B_R(a)$. Возьмем $y \in B_r(x)$, то есть $\rho(x, y) < r \implies \rho(y, a) \leq \rho(y, x) + \rho(x, a) < r + \rho(x, a) = R \implies y \in B_R(a)$.

□

Замечание. Существенна конечность. $\mathbb{R}. \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, 1) = [0, 1)$.

Определение 2.6. $A \subset X, a \in A$. a — внутренняя точка множества A , если $\exists r > 0: B_r(a) \subset A$.

Замечание. A — открытое \iff все его точки внутренние.

Определение 2.7. Внутренность множества $\text{Int } A := \{a \in A \mid a \text{ — внутренняя точка}\}$.

Пример. $A = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Тогда $\text{Int } A = (0, 1)$.

Свойства внутренности. 1. $\text{Int } A \subset A$.

2. $\text{Int } A$ — \bigcup всех открытых множеств, которые содержатся в A .

3. $\text{Int } A$ — открытое множество.

4. A — открытое $\iff A = \text{Int } A$.

5. Если $A \subset B$, то $\text{Int } A \subset \text{Int } B$.

6. $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int } A \cap \text{Int } B$

7. $\text{Int}(\text{Int } A) = \text{Int } A$.

Доказательство. $B := \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha, A_\alpha \subset A$ открытые.

$B \subset \text{Int } A$. Берем $b \in B \Rightarrow \exists \beta \in I: B \in A_\beta$ — открытое $\Rightarrow \exists r > 0: B_r(b) \subset A_\beta \subset A \Rightarrow b$ — внутренняя точка $A \Rightarrow b \in \text{Int } A$.

$\text{Int } A \subset B$. Берем $b \in \text{Int } A \Rightarrow \exists r > 0 B_r(b) \subset A$, но $B_r(b)$ — открытое множество \Rightarrow оно участвует в объединении $\bigcup_{\alpha} A_\alpha \Rightarrow B_r(b) \subset B \Rightarrow b \in B$.

Докажем пункт 4. \Rightarrow : пункт 3. \Leftarrow всего его точки внутренние $\Rightarrow A = \text{Int } A$. Пункт 6. \subset : $A \cap B \subset A, \subset B \Rightarrow \text{Int}(A \cap B) \subset \text{Int } A \cap \text{Int}(A \cap B) \subset \text{Int } B$.

\supset . Пусть $x \in \text{Int } A \cap \text{Int } B \Rightarrow \begin{cases} \exists r_1 > 0 & B_{r_1}(x) \subset A \\ \exists r_2 > 0 & B_{r_2}(x) \subset B \end{cases} \Rightarrow \text{если } r = \min\{r_1, r_2\} \Rightarrow B_r(x) \subset A \cap B \Rightarrow B_r(x) \subset A \cap B \Rightarrow x \in \text{Int}(A \cap B)$.

Пункт 7. $B := \text{Int } A$ — открытое $\Rightarrow B = \text{Int } B$. □

Определение 2.8. $A \subset X$. A — замкнутое, если $X \setminus A$ — открытое.

Теорема 2.2 (о свойствах замкнутых множеств). 1. \emptyset, X — замкнуты.

2. Пересечение любого числа замкнутых множеств — замкнуто.

3. Объединение конечного числа замкнутых множеств — замкнуто.

4. $\overline{B}_R(a)$ — замкнуто.

Доказательство. 2. A_α — замкнуты $\Rightarrow X \setminus A_\alpha$ — открытые $\Rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha$ — открыто $\Rightarrow X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ — замкнутое.

4. $X \in \overline{B}_R(a)$ — открытое. Берем $x \notin \overline{B}_R(a)$. Возьмем $r := \rho(a, x) - R > 0$. Покажем, что $B_r(x) \subset X \setminus \overline{B}_R(a)$.

От противного. Пусть $B_r(x) \cap \overline{B}_R(a) \neq \emptyset$. Берем $y \in B_r(x) \cap \overline{B}_R(a) \Rightarrow \rho(x, y) < r \wedge \rho(a, y) \leq R \Rightarrow \rho(a, x) \leq \rho(a, y) + \rho(y, x) < R + r = \rho(a, x)$. Противоречие. □

Замечание. В 3 важна конечность. $\mathbb{R}. \bigcup_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{n}, 1] = (0, 1]$ — не является замкнутой.

Определение 2.9. Замыкание множества $\text{Cl } A$ — пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A .

Теорема 2.3. $X \setminus \text{Cl } A = \text{Int}(X \setminus A)$ и $X \setminus \text{Int } A = \text{Cl}(X \setminus A)$.

Доказательство. $\text{Int}(X \setminus A) = \bigcup B_\alpha$. B_α — открытые, $B_\alpha \subset X \setminus A \iff X \setminus B_\alpha$ — замкнутое. $X \setminus B_\alpha \supset A$.

$\bigcap (X \setminus B_\alpha) = \text{Cl } A \Rightarrow X \setminus \bigcap (X \setminus B_\alpha) = X \setminus \text{Cl } A \iff \bigcup (B_\alpha) = \text{Int}(X \setminus A)$. □

Следствие. $\text{Int } A = X \setminus \text{Cl}(X \setminus A)$ и $\text{Cl } A = X \setminus \text{Int}(X \setminus A)$.

Свойства. 1. $\text{Cl } A \supset A$.

2. $\text{Cl } A$ — замкнутое множество.

3. A — замкнуто $\iff A = \text{Cl } A$.

Доказательство. \Leftarrow — пункт 2. $\Rightarrow A$ — замкнутое \Rightarrow оно участвует в пересечении из определения $\Rightarrow \text{Cl } A \subset A \Rightarrow \text{Cl } A = A$. \square

$$4. A \subset B \Rightarrow \text{Cl } A \subset \text{Cl } B.$$

Доказательство. $X \setminus A \supset X \setminus B \Rightarrow \text{Int}(X \setminus A) \supset \text{Int}(X \setminus B) \Rightarrow X \setminus \text{Int}(X \setminus A) \subset X \setminus \text{Int}(X \setminus B)$ \square

$$5. \text{Cl}(A \cup B) = \text{Cl } A \cup \text{Cl } B.$$

$$6. \text{Cl}(\text{Cl } A) = \text{Cl } A.$$

Доказательство. $B := \text{Cl } A$ — замкнуто $\Rightarrow \text{Cl } B = B$. \square

Упражнение. $\text{Cl } \text{Int } \text{Cl } \text{Int} \dots A$. Какое наибольшее количество различных множеств может получиться.

Теорема 2.4. $x \in \text{Cl } A \iff \forall r > 0 \quad B_r(x) \cap A \neq \emptyset$.

Доказательство. $x \notin \text{Cl } A \iff \exists r > 0 \quad B_r(x) \cap A = \emptyset$. Что означает, что $x \notin A$? Это значит, что $x \in X \setminus \text{Cl } A = \text{Int}(X \setminus A) \iff x \in \text{Int}(X \setminus A) \iff x$ — внутренняя точка $X \setminus A \iff \exists r > 0: B_r(x) \cap A = \emptyset \iff \exists r > 0: B_r(x) \subset X \setminus A$. \square

Следствие. U — открытое, $U \cap A = \emptyset \Rightarrow U \cap \text{Cl } A = \emptyset$.

Доказательство. Возьмем $x \in U \Rightarrow \exists r > 0: B_r(x) \subset U \Rightarrow B_r(x) \cap A = \emptyset \Rightarrow x \notin \text{Cl } A \Rightarrow U \cap \text{Cl } A = \emptyset$. \square

Определение 2.10. Окрестностью точки x будем называть шар $B_r(x)$ для некоторого $r > 0$. Обозначать будем U_x

Определение 2.11. Проколотой окрестностью точки x — $B_r(x) \setminus \{x\}$. \dot{U}_x .

Определение 2.12. x — предельная точка множества A , если $\forall \dot{U}_x: \dot{U}_x \cap A \neq \emptyset$.

Обозначим через A' — множество предельных точек для A .

Свойства.

$$1. \text{Cl } A = A \cup A'.$$

Доказательство. $x \in \text{Cl } A \iff \forall U_x \cap A \neq \emptyset \iff \begin{cases} x \in A \\ \forall \dot{U}_x: \dot{U}_x \cap A \neq \emptyset \end{cases} \iff x \in A'$ \square

$$2. A \subset B \Rightarrow A' \subset B'. \text{ Очевидно.}$$

$$3. A \text{ — замкнуто} \iff A \supset A'.$$

Доказательство. A — замкнуто $\iff \text{Cl } A \iff A = A \cup A' \iff A \supset A'$. \square

$$4. (A \cup B)' = A' \cup B'.$$

Доказательство. Докажем " \subset ". Возьмем $x \in (A \cup B)'$: $x \notin A' \Rightarrow \exists \dot{U}_x: \dot{U}_x \cap A = \emptyset$, но $\dot{U}_x \cap (A \cup B) \neq \emptyset \Rightarrow \dot{U}_x \cap B \neq \emptyset \Rightarrow x \in B'$.

Докажем " \supset ". $A \cup B \supset A \Rightarrow (A \cup B)' \supset A'$. Проверим тот же фокус для B , получим $(A \cup B)' \supset A' \cup B'$. \square

Теорема 2.5. $x \in A' \iff \forall r > 0 \ B_r(x)$ содержит бесконечное количество точек из A .

Доказательство. Докажем " \Leftarrow ". $B_r(x) \cap A$ содержит бесконечное количество точек $\implies \dot{B}_r(x) \cap A$ содержит бесконечное число точек $\implies \dot{B}_r(x) \cap A \neq \emptyset \implies x \in A'$.

" \Rightarrow ". Возьмем радиус r . Тогда $\dot{B}_r(x) \cap A \neq \emptyset \implies \exists x_1 \in A: 0 < \rho(x, x_1) < r$. Возьмем $r = \rho(x, x_1)$. $\dot{B}_r(x) \cap A \neq \emptyset \implies \exists x_2 \in A: 0 < \rho(x, x_2) < \rho(x, x_1)$. Тогда можно взять $r = \rho(x, x_2)$, и так далее.

В итоге получили, что $r > \rho(x, x_1) > \rho(x, x_2) > \rho(x, x_3) > \dots > 0 \implies$ все x_n различны. \square

Следствие. Конечное множество не имеет предельных точек.

Доказательство. Предположим конечная точка существует $\iff \exists r > 0: B_r(x) \cap A$ содержит бесконечное количество точек. Но это невозможно, так как в A конечное число точек. \square

Определение 2.13. (X, ρ) — метрическое пространство $Y \subset X$.

Тогда $(Y, \rho|_{Y \times Y})$ — подпространство метрического пространства (X, ρ) .

Пример. $(\mathbb{R}, |x - y|)$. $Y = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

$$B_1(1) = (0, 1], B_2(0) = [0, 1]. B_r^Y(a) = Y \cap B_r^X(a).$$

Теорема 2.6 (об открытых и замкнутых множества в пространстве и подпространстве). (X, ρ) — метрическое пространство, (Y, ρ) — его подпространство, $A \subset Y$. Тогда

1. A — открыто в $Y \iff \exists G$ — открытое в $X: A = G \cap Y$.
2. A — замкнуто в $Y \iff \exists F$ — замкнутое в $X: A = F \cap Y$.

Доказательство.

1. " \Rightarrow ". A — открыто в $Y \implies \forall x \in A \exists r_x > 0: B_{r_x}^Y(x) \subset A \implies A = \bigcup_{x \in A} B_{r_x}^Y(x)$.

То есть наше множество будет объединением большего числа шариков (возможно бесконечного). Найдем теперь G : $G := \bigcup_{x \in A} B_{r_x}^X(x)$ — открыто. Посмотрим теперь на $G \cap Y =$

$$\bigcup_{x \in A} (B_{r_x}^X(x) \cap Y) = \bigcup_{x \in A} B_{r_x}^Y(x) = A.$$

В обратную сторону. Пусть $A = G \cap Y$, где G открыто в X . Возьмем $x \in G \cap Y$. G — открыто в $X \implies \forall x \in G \cap Y \exists r > 0: B_r^X(x) \subset G \implies B_r^X(x) \cap Y \subset G \cap Y = A \implies B_r^Y(x) \subset A \implies x$ — внутренняя точка $A \implies A$ — открыто в Y .

2. A — замкнуто в $Y \iff Y \setminus A$ — открыто в $Y \iff \exists G$ — открытое в X , такое что $Y \setminus A = Y \cap G \iff A = Y \setminus (Y \cap G) = Y \cap (X \setminus G) \iff \exists G$ — открытое в X , такое что $A = Y \cap (X \setminus G) \iff \exists F$ — замкнуто в X , такое что $A = Y \cap F$.

\square

Пример. $(\mathbb{R}, |x - y|)$. $Y = [0, 3)$. $[0, 1)$ — открыто в $[0, 3)$: $[0, 1) = [0, 3) \cap (-1, 1)$. $[2, 3)$ — замкнуто в $[0, 3)$: $[2, 3) = [0, 3) \cap [2, 3]$.

Определение 2.14. X — векторное пространство над \mathbb{R} .

$\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ — норма, если

1. $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in X$ и $\|x\| = 0 \iff x = \vec{0}$.

$$2. \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \forall x \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

3. (неравенство треугольник)

Пример. 1. $|x| \in \mathbb{R}$,

$$2. \|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_d| \text{ в } \mathbb{R}^d.$$

$$3. \|x\|_\infty = \max_{k=1,2,\dots,d} |x_k|. \quad \|x+y\|_\infty = \max\{|x_k| + |y_k|\} \leq \max\{|x_k|\} + \max\{|y_k|\} = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

$$4. \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

$$5. \|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^d |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ в } \mathbb{R}^d \text{ при } p \geq 1. \text{ Неравенство треугольника — неравенство Минковского.}$$

$$6. C[a, b]. \quad \|f\| = \max_{t \in [a, b]} |f(t)|.$$

Определение 2.15. X векторное пространство над \mathbb{R} . $\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ скалярное произведение, если

$$1. \langle x, x \rangle \geq 0 \text{ и } \langle x, x \rangle = 0 \iff x = \vec{0}.$$

$$2. \langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

$$3. \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle.$$

$$4. \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Пример. 1. \mathbb{R}^d . $\langle x, y \rangle = \sum x_i y_i$.

$$2. \text{ Возьмем } w_1, \dots, w_d > 0. \text{ Тогда } \langle x, y \rangle = \sum w_i x_i y_i.$$

$$3. C[a, b]. \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Свойства. 1. Неравенство Коши-Буняковского. $\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$.

Доказательство. $f(t) := \langle x + ty, x + ty \rangle \geq 0$. $f(t) = \langle x, x \rangle + 2t\langle x, y \rangle + t^2\langle y, y \rangle = t^2\langle y, y \rangle + 2t\langle x, y \rangle + \langle x, x \rangle$ — квадратный трехчлен (если $\langle y, y \rangle = 0 \implies y = 0 \implies$ везде нули). Тогда $0 \geq D = (\langle x, y \rangle)^2 - 4\langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle = 4(\langle x, y \rangle^2 - \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle)$. Потому что иначе есть значения меньше нуля. \square

$$2. \|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \text{ — норма.}$$

$$\text{Доказательство. } \|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

Неравенство треугольника: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Возведем в квадрат, получим $\langle x+y, x+y \rangle \leq \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2\sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle}$, но теперь вспомним, что $\langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2\langle x, y \rangle$. А, сократив общие слагаемые, получим доказанное неравенство Коши-Буняковского. \square

$$3. \rho(x, y) = \|x - y\| \text{ — метрика.}$$

$$\text{Доказательство. } \rho(x, y) \geq 0. \quad \rho(x, y) = 0 \iff \|x - y\| = 0 \iff x - y = \vec{0} \iff x = y.$$

$$\rho(y, x) = \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = |-1| \|x - y\| = \rho(x, y).$$

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z): \|(x - y) + (y - z)\| = \|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|. \quad \square$$

$$4. \|x - y\| \geq |\|x\| - \|y\||.$$

Доказательство. Надо доказать, что $-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$.

$$\|(y - x) + x\| = \|y\| \leq \|x\| + \|x - y\| = \|x\| + \|y - x\|.$$

□

5. Упражнение. Если норма порождается скалярным произведением $\iff \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$. Тожество параллелограмма.

Определение 2.16. (X, ρ) — метрическое пространство. $x_1, x_2, \dots \in X, a \in X$.

$\lim x_n = a$, если

1. Вне любого открытого шара с центром в точке a содержится лишь конечное число членов последовательности.
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \quad \rho(x_n, a) < \varepsilon \iff x_n \in B_\varepsilon(a)$.

Определение 2.17. $A \subset X$.

Тогда A — ограничено, если оно содержится в некотором шаре.

Свойства. 1. $a = \lim x \iff \rho(x_n, a) \rightarrow 0$.

Доказательство. $\forall \varepsilon > 0 \exists n > N \quad |\rho(x_n, a)| < \varepsilon$ — предел равен 0.

□

2. Предел единственный.

Доказательство. Пусть $\exists a = \lim x_n = b$. Тогда мы, что $B_r(a) \cap B_r(b) = \emptyset \implies \exists N_1, N_2, \forall n \geq \max\{N_1, N_2\} x_n \in B_r(a) \wedge x_n \in B_r(b)$.

□

3. Если $a = \lim x_n, a = \lim y_n$. То для перемешанной последовательности x_n и y_n предел такой же.
4. $a = \lim x_n \implies$ для последовательности, в которой x_n взяты с конечной кратностью, то a будет пределом.
5. Если $a = \lim x_n$, то $\lim x_{n_k} = a$.
6. Последовательность имеет предел \implies она ограничена

Доказательство. $\varepsilon = 1 \exists N \forall n \geq N \rho(x_n, a) < 1$. Тогда $R = \max\{\rho(x_1, a), \dots, \rho(x_{N-1}, a)\} + 1 \implies x_n \in B_R(a)$.

□

7. Если $a = \lim x_n$, то последовательность, полученная из $\{x_n\}$ перестановкой членов имеет тот же предел.
8. a — предельная точка $A \iff \exists a \neq \{x_n\} \in A: \lim x_n = a$.

Более того, x_n можно выбирать так, что $\rho(x_n, a)$ строго убывает.

Доказательство. " \Rightarrow " Пусть $\lim x_n = a$. Возьмем $B_r(a) \implies \exists N \forall n \geq N x_n \in B_r(a) \implies x_n B_r(a) \implies \dot{B}_r(a) \cap A \neq \emptyset \implies a$ — предельная точка.

" \Leftarrow " Берем $r_1 = 1$. $\dot{B}_{r_1}(a) \cap A \neq \emptyset$. Берем оттуда точку, называем $x_1 \neq a$. $r_2 = \frac{\rho(x_1, a)}{2}$. $\dot{B}_{r_2}(a) \cap A \neq \emptyset$. Берем оттуда точку $x_2 \neq a$. $r_3 = \frac{\rho(x_2, a)}{2}$. И так далее.

Получили: $x_n \neq a$ и $\rho(x_n, a) < \frac{\rho(x_{n-1}, a)}{2} < \rho(x_{n-1}, a)$. $\rho(x_n, a) < \frac{1}{2^n} \rightarrow 0 \implies x_n = a$.

□

Теорема 2.7 (об арифметических действиях с пределами). X — нормированное пространство, $x_n, y_n \in X$, $\lambda_n \in \mathbb{R}$. $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$, $\lim \lambda_n = \mu$. Тогда:

1. $\lim(x_n + y_n) = a + b$.
2. $\lim(x_n - y_n) = a - b$.
3. $\lim \lambda_n x_n = \mu a$.
4. $\lim \|x_n\| = \|a\|$.
5. Если в X есть скалярное произведение, то $\lim \langle x_n, t_n \rangle = \langle a, b \rangle$.

Доказательство. 1. $\rho(x_n + y_n, a + b) = \|(x_n + y_n - (a + b))\| = \|(x_n - a) + (y_n - b)\| \leq \|x_n - a\| + \|y_n - b\| = \rho(x_n, a) + \rho(y_n, b) \rightarrow 0$.

2. Аналогично.

3. $\rho(\lambda_n x_n, \mu a) = \|\lambda_n x_n - \mu a\| = \|\lambda_n x_n - \lambda_n a + \lambda_n a - \mu a\| \leq \|\lambda_n x_n - \lambda_n a\| + \|\lambda_n a - \mu a\| = |\lambda_n| \|x_n - a\| + |\lambda_n - \mu| \|a\| \rightarrow 0$, так как $|\lambda_n|$ — ограниченная, $\|x_n - a\| = \rho(x_n, a) \rightarrow 0$, $|\lambda_n - \mu| \rightarrow 0$, $\|a\|$ — константа.

4. $\| \|x_n\| - \|a\| \| \leq \|x_n - a\| = \rho(x_n, a) \rightarrow 0 \implies \lim \|x_n\| = \|a\|$

5. $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) = \frac{1}{4}(\langle x + y, x + y \rangle - \langle x - y, x - y \rangle)$. Тогда получаем $4\langle x_n, y_n \rangle = \|x_n + y_n\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 \rightarrow \|a + b\|^2 - \|a - b\|^2 = 4\langle a, b \rangle$.

□

Определение 2.18. \mathbb{R}^d — пространство с нормой $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2}$.

Определение 2.19. Покоординатная сходимость в \mathbb{R}^d :

$$x_n \in \mathbb{R}^d. x_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(d)}) \xrightarrow{\text{покоординатно}} a = (a^{(1)}, a^{(2)}, \dots).$$

Теорема 2.8. в \mathbb{R}^d сходимость по метрике и покоординатная сходимость совпадает.

Доказательство. Метрика \implies покоординатная. $\rho(x_n, a) \rightarrow 0 \implies 0 \leq (x_n^{(1)} - a^{(1)})^2 + \dots + (x_n^{(d)} - a^{(d)})^2 = \rho(x_n, a)^2 \rightarrow 0 \implies \lim (x_n^{(k)} - a^{(k)})^2 = 0 \implies \lim x_n^{(k)} = a^{(k)} \implies$ покоординатная сходимость.

Покоординатная \implies метрика. Пусть $|x_n^{(k)} - a^{(k)}| \rightarrow 0 \quad \forall k \implies (x_n^{(k)} - a^{(k)})^2 \rightarrow 0 \implies \sum_{k=1}^d (x_n^{(k)} - a^{(k)})^2 \rightarrow 0$. А так как $(\dots)^2 = \rho(x_n, a)^2 \implies \rho(x_n, a) \rightarrow 0$. □

Определение 2.20. $x_n \in X$ — фундаментальная последовательность, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n \geq N: \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Свойства. 1. Сходящаяся последовательность фундаментальна.

2. Фундаментальная последовательность ограничена.

3. Если у последовательности есть сходящаяся подпоследовательность, то последовательность имеет предел.

Доказательство. Упражнение! Утверждается, что так же, как и в пределах. □

Определение 2.21. (x, ρ) — метрическое пространство — полное, если любая фундаментальная последовательность имеет предел.

Пример. \mathbb{R} ; $\rho(x, y) = |x - y|$ — полное.

Упражнение. (X, ρ) — полное метрическое пространство $X \supset Y$ замкнуто. Доказать, что (Y, ρ) — полное.

Упражнение. $(0, 1)$ не полное. $x_n = \frac{1}{n}$ — фундаментальная, но $\lim \frac{1}{n} = 0 \notin (0, 1)$.

Теорема 2.9. \mathbb{R}^d — полное.

Доказательство. Пусть x_n — фундаментальная, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n \geq N: \rho(x_n, x_m) = \sqrt{(x_n^{(1)} - x_m^{(1)})^2 + \dots + (x_n^{(d)} - x_m^{(d)})^2} < \varepsilon.$$

Но мы знаем, что $\rho(x_n, x_m) \geq |x_n^{(k)} - x_m^{(k)}|$. Тогда заметим, что $x_n^{(k)}$ — фундаментальная $\implies \exists a^{(k)} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{(k)}$. Значит и x_n сходится к a по координатам $\implies \rho(x_n, a) \rightarrow 0 \implies x_n$ сходится к a по метрике. \square

2.2. Компактность

Определение 2.22. $A, U_\alpha, \alpha \in I$.

Множества U_α — покрытие множества A , если $A \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$.

Определение 2.23. Открытое покрытие — покрытие открытыми множествами.

Определение 2.24. (X, ρ) — метрическое пространство, $K \subset X$.

K — компакт, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

Определение 2.25. То есть для любого покрытия можно выбрать $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in I: K \subset \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$

Теорема 2.10 (Теорема о свойствах компактных множеств). 1. $K \subset Y \subset X$. Тогда K — компакт в $(X, \rho) \iff K$ — компакт в (Y, ρ) .

2. K — компакт $\implies K$ замкнуто и ограничено.

3. Замкнутое подмножество компакта — компакта.

Доказательство. 1. \Leftarrow . Пусть G_α покрытие K множествами в X . Тогда $U_\alpha = G_\alpha \cap Y$ — открытыми в Y и $K \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha \cap Y = (\bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha) \cap Y$.

U_α — открытое покрытие в $(Y, \rho) \implies$ можно выделить конечное подпокрытие $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, такое что $K \subset \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i} \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$ — конечное подпокрытие $G_\alpha \implies K$ компакт в (X, ρ) .

\Rightarrow . Воспользуемся тем же наблюдением: $U_\alpha = G_\alpha \cap Y$. Следовательно можно выбрать $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ в X и они же подойдут и в Y .

2. Ограниченность. Возьмем $a \in X$. Тогда $K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(a) = X$ — открытое покрытие K .

Выделим конечное подпокрытие $K \subset \bigcup_{n=1}^N B_n(a) \implies K \subset B_N(a) \implies K$ — ограничено.

Замкнутость. Надо доказать, что $X \setminus K$ — открытое. Возьмем $a \in X \setminus K$ и докажем, что a лежит в $X \setminus K$ вместе с некоторым шариком.

Пусть $U_x = B_{(\frac{x,a}{2})}(x)$. Причем он не пересекается с $B_x = B_{\frac{\rho(x,a)}{2}}(a)$. Возьмем тогда $K \subset \bigcup_{x \in K} U_x$ — открытое покрытие. Выделим конечное подпокрытие $K \subset \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$, $r = \min\{\frac{\rho(x_i,a)}{2}\}$.

Тогда $B_r(a) = \bigcap_{i=1}^n B_{x_i}$. $B_r(a) \cap \bigcup_{i=1}^n U_{x_i} = \emptyset \implies B_r(a) \cap K = \emptyset \implies B_r(a) \subset X \setminus K \implies a$ — внутренняя $X \cap K$.

3. Пусть \tilde{K} — компакт, K — замкнуто и $K \subset \tilde{K}$.

Рассмотрим открытое покрытие $K \cup U_\alpha$. Тогда \tilde{K} покрыто $(X \setminus K) \cup \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ — открытое

покрытие \tilde{K} . Выделим конечное покрытие $X \cap K, U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}$. $K \subset X \setminus K \cup \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i} \implies$

$K \subset \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$ — открытое множество, а значит K — компакт.

□

Теорема 2.11. K_α — семейство компактов, такое что пересечение любого конечного числа из них непусто. Тогда $\bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha \neq \emptyset$.

Следствие. $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \dots$ непустые компакты. Тогда $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$.

Доказательство. От противного. Пусть $\bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha = \emptyset$. Зафиксируем компакт $K_0 \implies K_0 \cap \bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha = \emptyset \implies K_0 \subset X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} X \setminus K_\alpha$ — открытое покрытие K_0 . Выделим конечное подпокрытие $K_0 \subset \bigcup_{i=1}^n X \setminus K_{\alpha_i} = X \setminus \bigcap_{i=1}^n K_{\alpha_i} \implies K_0 \cap \bigcap_{i=1}^n K_{\alpha_i} = \emptyset$.??!

□

Определение 2.26. K — секвенциально компактное множество, если из любой последовательности точек из K можно выделить подпоследовательность, которая сходится к какой-то точке из K .

Пример. $[a, b] \in \mathbb{R}$ секвенциально компактно.

$x_n \in [a; b] \xrightarrow{\text{Т. Б-В}} \exists$ подпоследовательность x_{n_k} , имеющая предел $\implies \lim x_{n_k} \in [a, b]$, так как неравенства сохраняются.

Теорема 2.12. Бесконечное подмножество компакта имеет предельную точку.

Доказательство. K — компакт. $A \subset K$. Пусть $A' = \emptyset$. Тогда A — замкнуто $\implies A$ — компакт и ни одна из его точек не является предельной $a \in A$ не предельная $\implies \exists r_a > 0 \ B_{r_a}(a) \cap A = \emptyset \implies B_{r_a}(a) \cap A = \{a\}$. Рассмотрим открытое покрытие $A \subset \bigcup_{a \in A} B_{r_a}(a)$, но из этого покрытия нельзя убрать ни одного множества \implies нет конечного подпокрытия \implies противоречие. □

Следствие. Компактность \implies секвенциальная компактность.

Доказательство. $x_1, x_2, \dots \in K$. $D = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ — множество значений последовательности.

1. $|D| < +\infty \implies$ есть элемент, повторяющийся бесконечно много раз, оставим только его — это нужная подпоследовательность.

2. $|D| = +\infty \implies$ у D есть предельная точка.

Пусть a — предельная точка $D \implies$ найдутся различные $y_1, y_2, \dots \in D$, такие что $\lim y_n = a$.

Но y_i — это какой-то x_{n_i} $\lim x_{n_i} = a$. Осталось переставить x_{n_i} так, что получится последовательность. Ну, а так как K — замкнуто, то $a \in K$.

□

Лемма (Лемма Лебега). K — секвенциальный компакт, $K \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ — открытое покрытие.

Тогда $\exists r > 0: \forall x \in K \quad B_r(x)$ целиком покрывается каким-то U_α .

Доказательство. От противного. Тогда $r = \frac{1}{n}$ не подходит $\implies \exists x_n \in K: B_{\frac{1}{n}}(x_n)$ не содержится целиком ни в каком U_α .

Выберем подпоследовательность x_{n_k} , такую что $\lim x_{n_k} = a \in K$.

Тогда $a \in U_\beta$ для некоторого $\beta \in I \implies \exists B_\varepsilon(a) \subset U_\beta$. Возьмем $N_1: \forall k \geq N_1 \quad \rho(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$. А еще можно взять $N_2: \forall k \geq N_2 \quad \frac{1}{n_k} < \frac{\varepsilon}{2}$. А значит $B_{\frac{1}{n_k}} \subset B_\varepsilon(a) \subset U_\beta$ при $k \geq \max\{N_1, N_2\}$??!

Докажем $B_{\frac{1}{n_k}} \subset B_\varepsilon(a)$: Если $x \in B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k})$ $\rho(x_{n_k}, x) < \frac{1}{n_k} < \frac{\varepsilon}{2} \wedge \rho(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2} \implies \rho(x, a) \leq \rho(x_{n_k}, x) + \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon$ □

Теорема 2.13. Компактность = секвенциальная компактность.

Доказательство. \Rightarrow Пусть $K \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ — открытое покрытие. Возьмем $r > 0$ из леммы Лебега. Рассмотрим открытое покрытие $K \subset \bigcup_{x \in K} B_r(x)$.

Достаточно из него выделить конечное подпокрытие. Возьмем $x_1 \in K$. Если $B_r(x_1) \supset K$, то выбрали конечное покрытие. Иначе берем $x_2 \in K \setminus B_r(x_1)$. Если объединение шариков $\supset K$, то выбрали конечное подпокрытие. Иначе продолжаем процесс: $x_n \in K \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} B_r(x_i)$. Если процесс оборвался, то выделили конечное подпокрытие.

Если он не оборвался, то мы построили последовательность x_1, x_2, \dots . Причем $x_n, x_k \geq r \forall n > k \implies \rho(x_i, x_j) \geq r \forall i \neq j$. Из такой последовательности не выбрать сходящуюся подпоследовательность, так как любая подпоследовательность не фундаментальная. □

Определение 2.27. $A \subset X$. (X, ρ) — метрическое пространство.

$E \subset A$, ε -сеть множества A , если $\forall a \in A \exists x \in E: \rho(x, a) < \varepsilon$.

Конечная ε -сеть — E — конечное множество.

То есть $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset A$ — ε -сеть, если $\forall a \in A \exists k \quad \rho(a, x_k) < \varepsilon$.

Определение 2.28. A — вполне ограничено, если $\forall \varepsilon > 0 \exists$ конечная ε -сеть A .

Свойства. 1. Вполне ограниченность \implies ограниченность.

Доказательство. $\varepsilon = 1$ и конечная 1-сеть x_1, x_2, \dots, x_n . $A \subset \bigcup_{k=1}^n B_r(x_k) \subseteq B_{r+1}(x_1)$, где $r = \max_{i \neq j} \rho(x_i, x_j)$. □

2. В \mathbb{R}^d ограниченность \implies вполне ограниченность.

Доказательство. $A \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченное. $A \subset B_R(O) \subset [-R, R]^d$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и возьмем $n \in \mathbb{N}$. $\rho(x_i, a) \leq 2n$ диагональ $= \sqrt{d} \frac{2R}{n} < \varepsilon$ при $n > \frac{\sqrt{d}2R}{\varepsilon}$
получается ε -сеть. \square

Теорема 2.14 (Хаусдорфа). 1. Компактное множество вполне ограничено.

2. Если (X, ρ) — полное метрическое пространство, то замкнуто вполне ограниченное подмножество X — компактно.

Доказательство. 1. Берем $\varepsilon > 0$ $K \subset \bigcup_{x \in K} B_\varepsilon(x)$ — открытое покрытие. Выделим конечное подпокрытие $\Rightarrow K \subset \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i) \Rightarrow x_1, \dots, x_n$ — ε -сеть.

2. Проверим секвенциальную компактность. Берем $x_1, x_2, \dots \in K$. Возьмем 1-сеть $K \subset \bigcup_{i=1}^{n_1} B_1(y_{1i})$. В каком-то шарике бесконечное число членов последовательности. Выкинем все, кроме них $x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots$. Возьмем $\frac{1}{2}$ -сеть $K \subset \bigcup_{i=1}^{n_2} B_{\frac{1}{2}}(y_{2i})$. В каком-то шарике бесконечное число членов последовательности...

На j -ом шаге $K \subset B_{\frac{1}{j}}(y_{ji})$. Пусть на каждом шаге выбирали шарик $B_{\frac{1}{j}}(z_j)$.

В итоге получили:

$$\begin{array}{ccccccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & \dots & B_1(z_1) \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & \dots & B_{\frac{1}{2}}(z_2) \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & \dots & B_{\frac{1}{3}}(z_3) \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & \dots & B_{\frac{1}{4}}(z_4) \end{array}$$

Воспользуемся диагональным методом Кантора. Пусть $a_n := x_{nn}$. Заметим, что a_n, a_{n+1}, a_{n+2} — последовательность $x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, \dots \Rightarrow$ все лежат в $B_{\frac{1}{n}}(z_n) \Rightarrow \rho(a_i, a_j) \leq \rho(a_i, z_n) + \rho(a_j, z_n) < \frac{2}{n}$, при $i, j \geq n \Rightarrow a_i$ — фундаментальная \Rightarrow у нее есть предел $\Rightarrow a = \lim a_n \in K$, так как K — замкнуто. Следовательно, K — секвенциально компактно. \square

Следствие Характеристика компактов в \mathbb{R}^d . K — компакт $\iff K$ — замкнуто и ограничено.

Доказательство. \Rightarrow верна всегда и доказано выше.

А вот \Leftarrow верна не всегда. Поэтому докажем эту штуку для \mathbb{R}^d . Мы знаем, что \mathbb{R}^d — полное. А еще мы знаем, что в \mathbb{R}^d ограниченность \Rightarrow вполне ограниченность, а значит понятно, что K — компакт. \square

Упражнение. (K, ρ) — метрическое пространство, K — компакт. Доказать, что (K, ρ) — полное.

Следствие теорема Больцано-Вейерштрасса в \mathbb{R}^d . Из любой ограниченной последовательности в \mathbb{R}^d можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. $\{x_n\} \Rightarrow \exists R \ x_n \in B_R(a) \subset \overline{B}_R(a)$ — замкнуто и ограничено \Rightarrow компактно \Rightarrow секвенциально компактно $\Rightarrow x_n$ — последовательность точек секвенциального компакта \Rightarrow у нее есть сходящаяся последовательность. \square

2.3. Непрерывные отображения

Определение 2.29. (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) — метрические пространства, $E \subset X$. $f: E \rightarrow Y$, a — предельная точка E , $b \in Y$.

$b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ означает, что

По Коши: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x: \rho_X(x, a) < \delta \wedge a \neq x \in E \implies \rho_Y(f(x), b) < \varepsilon$.

В терминах окрестностей: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: f(\dot{B}_\delta(a) \cap E) \subset B_\varepsilon(b)$

По Гейне: \forall последовательности $a \neq x_n \in E: \lim x_n = a \implies \lim f(x_n) = b$

Теорема 2.15. Все определения равносильны.

Доказательство. Упражнение (смотри доказательство для последовательностей). \square

Теорема 2.16 (Критерий Коши). $f: E \subset X \rightarrow Y$, Y — полное, a — предельная точка E . Тогда

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in \dot{B}_\delta(a) \cap E \implies \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Доказательство. \Rightarrow . Упражнение: взять доказательство и заменить модуль на ρ .

\Leftarrow . Проверим определение по Гейне. Надо доказать, что $a \neq x_n \in E \wedge \lim x_n = a \implies \lim f(x_n)$ существует.

$f(x_n)$ — последовательность в Y — полное. Поэтому достаточно проверить, что $f(x_n)$ — фундаментальная последовательность. Возьмем $\varepsilon > 0$, по нему $\delta > 0$ из условия. По $\delta > 0$ берем N , такое что $\forall n \geq N: \rho_X(x_n, a) < \delta \implies x_n \in \dot{B}_\delta(a) \cap E$ при $n \geq N \implies \forall m, n \geq N: \rho(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$ фундаментальная $\implies f(x_n)$ имеет предел. \square

Теорема 2.17 (об арифметических действиях с пределами). $f, g: E \subset X \rightarrow Y$, Y — нормированное пространство, a — предельная точка E .

Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c \wedge \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда

1. $\lim_{x \rightarrow a} \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha b + \beta c$.
2. Если $\lambda: E \rightarrow \mathbb{R}$, такое что $\lim_{x \rightarrow a} \lambda(x) = \mu \in \mathbb{R}$, то $\lim_{x \rightarrow a} \lambda(x) f(x) = \mu b$.
3. $\lim_{x \rightarrow a} \|f(x)\| = \|b\|$
4. Если Y — пространство со скалярным произведением, то $\lim_{x \rightarrow a} \langle f(x), g(x) \rangle = \langle b, c \rangle$.
5. Если $Y = \mathbb{R}$ и $c \neq 0$, то $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$.

Доказательство. Проверка по Гейне. Берем $x_n \rightarrow a$, тогда $f(x_n) \rightarrow b, g(x_n) \rightarrow c$ и теорема про пределы последовательности. \square

Определение 2.30. (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) — метрические пространства, $E \subset X$, $a \in E$.

$f: E \rightarrow Y$, f непрерывна в точке a , если

1. a не предельная точка или a — предельная и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
2. По Коши. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E: \rho_X(x, a) < \delta \implies \rho_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$.
3. С окрестностями. $\forall B_\varepsilon(f(a)) \exists B_\delta(a): f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a))$.

4. По Гейне: $\forall x_n \in E: \lim x_n = a \implies \lim f(x_n) = f(a)$.

Доказательство. Упражнение! □

Теорема 2.18 (о непрерывности композиции). $(X, \rho_X), (Y, \rho_Y), (Z, \rho_Z) — D \subset X, E \subset Y, a \in D, f: D \rightarrow E, g: E \rightarrow Z$. Если f непрерывна в точке a , а g непрерывна в точке $f(a)$, то $g \circ f$ непрерывна в точке a .

Доказательство.

$$\left. \begin{aligned} &\forall B_\varepsilon(g(f(a))) \exists B_\delta(f(a)): g(B_\delta(f(a)) \cap E) \subset B_\varepsilon(g(f(a))) \\ &\forall B_\delta(f(a)) \exists B_\gamma(a): f(B_\gamma(a) \cap D) \subset B_\delta(f(a)) \cap E \end{aligned} \right\} \\ \implies g(f(B_\gamma(a) \cap D)) \subset g(B_\delta(f(a)) \cap E) \subset B_\varepsilon(g(f(a))) \implies g \circ f \text{ непрерывна в точке } a$$

□

Теорема 2.19 (Характеристика непрерывности в терминах открытых множеств). $f: X \rightarrow Y$. Тогда

f непрерывна во всех точках $\iff \forall U$ — открытого в $Y: f^{-1}(U) := \{x \in X \mid f(x) \in U\}$ — открыто в X .

Доказательство. \implies . Берем $a \in f^{-1}(U) \implies f(a) \in U$ — открыто $\implies \exists \varepsilon > 0 \quad B_\varepsilon(f(a)) \subset U$.

f непрерывно в точке $a \implies \exists \delta > 0: f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a)) \subset U \implies B_\delta(a) \subset f^{-1}(U) \implies a$ — внутренняя точка $f^{-1}(U) \implies f^{-1}(U)$ — открыто.

\Leftarrow . $U := B_\varepsilon(f(a))$ — открыто $\implies f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$ — открыто и $a \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(a))) \implies \exists \delta > 0 \quad B_\delta(a) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(a))) \implies f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a)) \implies f$ непрерывна в точке a . □

Теорема 2.20 (Непрерывный образ компакта — компакт). $(X, \rho_X), (Y, \rho_Y)$ — метрические пространства, $K \subset X$, K — компакт.

$f: K \rightarrow Y$ непрерывна во всех точка. Тогда $f(K)$ — компакт.

Доказательство. Рассмотрим открытое покрытие $f(K) \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ — открытые $\implies K \subset f^{-1}(\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(U_\alpha)$ по непрерывности f $f^{-1}(U_\alpha)$ — открыто \implies это открытое покрытие K , но K — компакт \implies выбираем конечное подпокрытие $K \subset \bigcup_{j=1}^n f^{-1}(U_{\alpha_j}) = f^{-1}(\bigcup_{j=1}^n U_{\alpha_j}) \implies f(K) \subset \bigcup_{j=1}^n U_{\alpha_j}$. Нашли конечное подпокрытие $\implies f(K)$ — компакт. □

Определение 2.31. $f: E \subset X \rightarrow Y$ — ограниченное отображение, если $f(E)$ — ограниченное множество.

Следствие. Непрерывный образ компакта замкнут и ограничен.

Доказательство. Знаем, что непрерывный образ компакта — компакт. А следовательно, образ замкнут и ограничен □

Следствие. Если K — компакт и f непрерывна на K , то f — ограниченное отображение.

Следствие Теорема Вейерштрасса. $f: K \rightarrow \mathbb{R}$, K — компакт, f непрерывна на K .

Тогда $\exists a, b \in K: f(a) \leq f(x) \leq f(b) \quad \forall x \in K$.

Доказательство. $f(K)$ — ограниченное множество в $\mathbb{R} \implies B := \sup_{x \in K} f(x) \in \mathbb{R} \implies \exists x_n \in K : \lim f(x_n) = B$. При этом $x_n \in K$ — секвенциальный компакт \implies существует сходящаяся подпоследовательность x_{n_k} .

Тогда $\lim x_{n_k} =: b \in K \implies \lim f(x_{n_k}) = f(b) \implies f(b) = \sup_{x \in K} f(x) = B \implies f(x) \leq f(b) \quad \forall x \in K$. \square

Теорема 2.21. $f : X \rightarrow Y$ непрерывна во всех точках, биекция и X — компакт. Тогда f^{-1} непрерывна во всех точках.

Доказательство. Проверяем непрерывность f^{-1} в терминах открытых множеств. Надо для f^{-1} проверить, что прообраз открытого — открыт, то есть для f проверить, что образ открытого открыт.

U — открыто в $X \implies X \setminus U$ — замкнуто $\subset X$ — компакт $\implies X \setminus U$ — компакт $\implies f(X \setminus U) = Y \setminus f(U)$ — компакт $\implies Y \setminus f(U)$ — замкнуто $\implies f(U)$ — открыто. \square

Определение 2.32. $f : E \subset X \rightarrow Y$ равномерно непрерывна, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in E : \rho_X(x, y) < \delta \implies \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Теорема 2.22 (Теорема Кантора). $f : K \rightarrow Y$ непрерывна, K — компакт. Тогда f равномерно непрерывна.

Доказательство. Берем $x \in K$, f непрерывна в точке $x \implies \exists r_x > 0 : f(B_{r_x}(x)) \subset B_{\varepsilon}(f(x))$.

Тогда $K \subset \bigcup_{x \in K} B_{r_x}(x)$ — открытое покрытие K . Возьмем $\delta > 0$ из леммы Лебега, то есть $\forall x \in K B_{\delta}(x)$ целиком попал в какой-то элемент покрытия.

Проверим, что это $\delta > 0$ подходит в определение равномерной непрерывности.

$x, y \in K \rho_X(x, y) < \delta \implies y \in B_{\delta}(x) \implies \exists a \in K : B_{\delta}(x) \subset B_{r_x}(a) \implies x, y \in B_{r_x}(a) \implies f(x), f(y) \in B_{\varepsilon}(f(a)) \implies \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ \square

Определение 2.33. X — векторное пространство и $\|\cdot\|$ и $|||\cdot|||$ — норм в X . Нормы эквивалентны, если $\exists C_1, C_2 > 0$

$$C_1 \|x\| \leq |||x||| \leq C_2 \|x\| \quad \forall x \in X.$$

Замечание. 1. Это отношение эквивалентности. (упражнение)

2. Пределы последовательности для эквивалентных норм совпадают. Док-во: Пусть $\lim x_n = a$ по норме $\|\cdot\|$, т.е. $\lim \|x_n - a\| = 0$. А $0 \leq |||x_n - a||| \leq C_2 \|x_n - a\| \rightarrow 0$, значит $\lim x_n = a$ и по норме $|||\cdot|||$.

3. Непрерывность отображений для эквивалентных норм совпадают (записываем по Гейне, а для последовательностей мы всё знаем).

Теорема 2.23. В \mathbb{R}^d все нормы эквивалентны.

Доказательство. $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2}$. Достаточно доказать, что остальные норма эквивалентны.

Пусть $p(x)$ — другая норма в \mathbb{R}^d . e_k — вектор с нулями и единицей на k -ой позиции.

$$\begin{aligned} x = (x_1, x_2, \dots, x_d) &= \sum_{k=1}^d x_k e_k. \quad p(x - y) = p\left(\sum_{k=1}^d (x_k - y_k) e_k\right) \leq \sum_{k=1}^d p((x_k - y_k) e_k) = \sum_{k=1}^d |x_k - y_k| p(e_k) \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^d (x_k - y_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^d p(e_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=1}^d p(e_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} \|x - y\| \implies \end{aligned}$$

$$p(x) \leq \left(\sum_{k=1}^d p(e_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|x\|.$$

$S := \{x \in \mathbb{R}^d : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2 = 1\}$ — компакт $\implies \exists a \in S : 0 < p(a) \leq p(x) \quad \forall x \in S$.

$$p(x) = p\left(\frac{x}{\|x\|} \cdot \|x\|\right) = \|x\| p\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \geq \|x\| p(a).$$

Тогда $p(a)\|x\| \leq p(x) \leq M\|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$. □

2.4. Длина кривой

Определение 2.34. (X, ρ) — метрическое пространство. $(\mathbb{R}^d$ — ключевой случай).

$\gamma : [a, b] \rightarrow X$ непрерывное — путь.

$\gamma(a)$ — начало пути, $\gamma(b)$ — конец пути. $\gamma([a, b])$ носитель пути.

Замкнутый путь $\gamma(a) = \gamma(b)$. Простой (самонепересекающийся) путь: $\gamma(u) \neq \gamma(v) \quad \forall u, v \in [a, b]$. Возможно, за исключением равенства $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Определение 2.35. Эквивалентные пути: $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow X$, $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow X$. Если $\exists u : [a, b] \rightarrow [c, d]$, u — непрерывна, u — строго монотонно возрастает, $u(a) = c$, $u(b) = d$, такой, что $\gamma_1 = \gamma_2 \circ u$.

Определение 2.36. Класс эквивалентных путей — кривая.

Конкретный представитель класса — параметризация кривой.

Определение 2.37. $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$. r -гладкий путь, если $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_d \end{pmatrix}$, $\gamma_j : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — r -гладкие

функции, то есть $\gamma_j \in C^r[a, b]$.

Кривая гладкая, если у нее есть гладкая параметризация. Если r опущено, то $r = 1$.

Определение 2.38. Длина пути $l(\gamma) = \sup \sum_{k=1}^n \rho(\gamma(t_k), \gamma(t_{k-1}))$, где t_k — дробление отрезка.

Замечание. Длины эквивалентных путей равны.

Свойства. 1. $l(\gamma) \geq \rho(\gamma(a), \gamma(b))$. Можно просто взять дробление состоящее из двух точек.

2. $l(\gamma) \geq$ длина вписанной в нее ломаной.

Теорема 2.24. Пусть есть $\gamma : [a, b] \rightarrow X$. $c \in [a, b]$.

$$l(\gamma) = l(\gamma|_{[a, c]}) + l(\gamma|_{[c, b]}).$$

Обозначим куски за γ_1, γ_2 .

Доказательство. Нам нужно доказать какое-то равенство, поэтому докажем два неравенства!

- \geq . Давайте вписывать ломанные. Впишем какую-то ломанную в γ_1 и еще какую-то в γ_2 . Пусть получились дробления $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = u_0 < \dots < u_m = b$ — получилось дробление $[a, b]$.

Тогда посчитаем сумму: $\sum_{k=1}^n \rho(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)) + \sum_{k=1}^m \rho(\gamma(u_{k-1}), \gamma(u_k)) \leq l(\gamma)$. Заменим первое слагаемое на \sup : $\sup \dots + \sum_{k=1}^m \rho(\gamma(u_{k-1}), \gamma(u_k)) \leq l(\gamma)$. А этот \sup — длина γ_1 . Встает вопрос по-

чему можно переходить. Мы знаем, что все числа меньше, то и супремум меньше, поэтому переход корректный. Далее заменяем правый \sup . В итоге получаем $l(\gamma_1) + l(\gamma_2) \leq l(\gamma)$.

- Возьмем дробление γ t_i . Посмотрим на сумму $S = \sum_{j=1}^n \rho(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j))$.

Возьмем дробление t_i и добавим в него точку c . Получаем:

$$S \leq \sum_{j=1}^k \rho(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j)) + \rho(\gamma(t_k), \gamma(c)) + \rho(\gamma(c), \gamma(t_{k+1})) + \sum_{j=k+2}^n \rho(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j))$$

А теперь увидим, что первые два слагаемых $\leq l(\gamma_1)$, а вторые два $\leq l(\gamma_2)$.

□

Теорема 2.25. $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ — гладкий путь. $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_d \end{pmatrix}$. Тогда:

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

Лемма. $\Delta \subset [a, b]$ — отрезок, $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$. $m_\Delta^{(i)} := \min_{t \in \Delta} |\delta'_i(t)|$, $M_\Delta^{(i)} := \max_{t \in \Delta} |\delta'_i(t)|$, $m_\Delta := \sqrt{\sum_{i=1}^d (m_\Delta^{(i)})^2}$, $M_\Delta := \sqrt{\sum_{i=1}^d (M_\Delta^{(i)})^2}$.
Тогда $m_\Delta l(\Delta) \leq l(\gamma|_\Delta) \leq M_\Delta l(\Delta)$.

Доказательство. Впишем в $\gamma|_\Delta$ ломаную. Пусть a_k — длина k -го звена.

По теореме Лагранжа: $\gamma_i(t_k) - \gamma_i(t_{k-1}) = \underbrace{\gamma'_i(\xi_{ik})(t_k - t_{k-1})}_{\leq m_\Delta^{(i)}(t_k - t_{k-1})} \leq M_\Delta^{(i)}(t_k - t_{k-1})$

Тогда $m_\Delta(t_k - t_{k-1}) \leq a_k \leq M_\Delta(t_k - t_{k-1})$. Просуммируя все такие неравенства получим исходное. □

Доказательство теоремы.

$$\begin{aligned} m_k(x_k - x_{k-1}) &\leq l(\gamma|_{[x_{k-1}, x_k]}) \leq M_k(x_k - x_{k-1}) \\ \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1}) &\leq l(\gamma) \leq \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1}) \\ m_k(x_k - x_{k-1}) &\leq \int \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \dots + \gamma_d'(t)^2} dt \leq M_k(x_k - x_{k-1}) \end{aligned}$$

Докажем, что \square (штука с M_k) минус \bigcirc стремится к нулю. По факту хотим доказать, что $\sum_{k=1}^n (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned}
M_k - m_k &= \sqrt{\sum_{i=1}^d (M_{[x_{k-1}, x_k]}^{(i)})^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^d (m_{[x_{k-1}, x_k]}^{(i)})^2} \leq (\text{Минковский}) \sqrt{\sum_{i=1}^d (M_{[x_{k-1}, x_k]}^{(i)} - m_{[x_{k-1}, x_k]}^{(i)})^2} \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^d (M_{[x_{k-1}, x_k]}^{(i)} - m_{[x_{k-1}, x_k]}^{(i)}) = \sum_{i=1}^d (\gamma_i(\xi_k) - \gamma_i(\eta_k)) \leq \sum_{l=1}^d \omega_k(|\tau|) \\
0 &\leq \sum_{k=1}^n (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{i=1}^d \omega_k(|\tau|) \cdot \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})
\end{aligned}$$

□

Следствие. 1. $\|\gamma'\| \leq C \implies l(\gamma) \leq C(b-a)$

2. Длина графика функции $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$.

3. Длина в полярных координатах. $r: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда $l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2} d\varphi$.

Доказательство. 2. $\gamma(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$, $\gamma'_1(x) = 1$, $\gamma'_2(x) = f'(x)$, а дальше применить функцию.

3. $\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} r(\varphi) \cos \varphi \\ r(\varphi) \sin \varphi \end{pmatrix}$

□

Определение 2.39. A — связное множество, если \forall покрытие $A \subset U \cup V$, $U \cap V = \emptyset \implies$ либо $A \subset U$, либо $A \subset V$, где U, V — открытые.

Пример. 1. $[a, b]$ — связное множество в \mathbb{R} .

2. \mathbb{Q} — несвязное множество в \mathbb{R} . Пример $\mathbb{Q} \subset (-\infty; \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$.

Теорема 2.26. Непрерывный образ связного множества — связное множество.

Доказательство. A — связное, $f: A \subset X \rightarrow Y$ непрерывное. $f(a) \subset U \cup V$ — открытые в Y и $U \cap V = \emptyset$. $A \subset f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$. $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$. A — связное $\implies A \subset f^{-1}(U)$ или $A \subset f^{-1}(V) \implies f(A) \subset U$ или $f(a) \subset V \implies f(A)$ — связно. □

Следствие Теорема Больцано-Коши. Пусть A — связное, $a, b \in A$. $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывная.

Тогда f принимает все промежуточные значения, лежащие между $f(a)$ и $f(b)$.

Доказательство. От противного. Пусть $f(a) < C < f(b)$ и C — не значение. Тогда $f(A) \subset (-\infty, C) \cup (C, +\infty)$. Заметим, что данные множества открытые и не пересекаются. Тогда получили противоречие со связностью $f(A)$. □

Теорема 2.27. $\langle a, b \rangle$ — связное подмножество \mathbb{R} , $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$.

Доказательство. От противного. Пусть $\langle a, b \rangle \subset U \cap V$, $U \cap V = \emptyset$.

Пусть $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R} = f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \langle a, b \rangle \cap U \neq \emptyset \\ 1 & x \in \langle a, b \rangle \cap V \neq \emptyset \end{cases}$ — непрерывная функция. Её прообраз:

$\emptyset, \langle a, b \rangle, \langle a, b \rangle \cap U, \langle a, b \rangle \cap V$ — открытые в $\langle a, b \rangle$ множества, но значения $\frac{1}{2}$ не принимаются. □

Определение 2.40. A — линейно связно, если $\forall u, v \in A \exists \gamma: [a, b] \rightarrow A: \gamma(a) = u, \gamma(b) = v$.

Теорема 2.28. Линейно связное множество связно.

Доказательство. A — линейно связно, пусть оно не связно $\implies A \subset U \cup V$ $U \cap V = \emptyset$. $A \cap U \neq \emptyset$ и $A \cap V \neq \emptyset$.

Возьмем $u \in A \cap U, v \in A \cap V$ и соединим их путем γ . $\gamma[a, b]$ — связное (как образ отрезка), $\gamma[a, b] \subset A \subset U \cup V \implies \gamma[a, b] \subset U$ или $\gamma[a, b] \subset V$. Противоречие. \square

Определение 2.41. Область — открытое, линейно связное множество.

Замечание. Если A открыто, то A — связно $\iff A$ — линейно связное.

2.5. Линейные операторы

Определение 2.42. X, Y — векторные пространства,

$A: X \rightarrow Y$ — линейный оператор, если $\forall x, y \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$.

Свойства. 1. $A0_X = 0_Y$. Доказательство: $\alpha = 0, \beta = 0$.

2. $A(\sum_{k=1}^n x_k) = \sum_{k=1}^n \lambda_k A(x_k)$. Доказательство: индукция.

Определение 2.43. A, B — линейный оператор: $X \rightarrow Y$.

$$(A + B)(x) := A(x) + B(x).$$

$$(\lambda A)(x) = \lambda A(x).$$

То есть получили векторное пространство линейных операторов.

Определение 2.44. $A: X \rightarrow Y, B: Y \rightarrow Z$ — линейные операторы $B \circ A: X \rightarrow Z$. $(B \circ A)(x) := B(A(x))$.

Замечание. Это линейный оператор.

Определение 2.45. Обратный оператор: $A: X \rightarrow Y, B: Y \rightarrow X$ обратный к A , если $A \circ B = Id_Y$ и $B \circ A = Id_X$.

Свойства. 1. Если обратный оператор \exists , то он единственный.

$$2. (\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}.$$

3. $A: X \rightarrow X$ — обратимые операторы образуют группу по операции композиции.

Доказательство. 1. $B \circ A = Id_X \implies A$ — инъекция. Если $A(x) = A(y) \implies x = B(A(x)) = B(A(y)) = y$.

$$A \circ B = Id_Y \implies A$$
 — суръекция. $A(B(y)) = y$.

Пусть B, C — обратные к A . $B(A(x)) = B \circ A(x) = x = C \circ A(x) = C(A(x))$.

$$2. ((\frac{1}{\lambda} A^{-1}) \circ (\lambda A))(x) = \frac{1}{\lambda} A^{-1}(\lambda A(x)) = x.$$

\square

Пример. $X = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}^m$. Можно рассматривать линейные операторы как матрицы бла-бла-бла.

Определение 2.46. $A: R^n \rightarrow R^m$. Возьмем базисный вектор e_k — везде, кроме k -ой позиции нули.

$$\text{Пусть } x = \sum_{i=1}^n x_i. \text{ Тогда } Ax = A\left(\sum_{k=1}^n x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^n x_k A_{x_k}.$$

То есть получили набор столбцов. Из которого можно получить матрицу.

Определение 2.47. X и Y — нормированные пространства. $A: X \rightarrow Y$ — линейный оператор.

$$\|A\| := \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y.$$

Оператор ограниченный, если его норма конечна.

Замечание. Ограниченный оператор \neq ограниченное отображение.

Линейное отображение + ограниченность $\implies = 0$.

Доказательство. Пусть $Ax \neq 0$, тогда $A(\lambda x) = \lambda Ax$, а это уже не ограничено. \square

Свойства. 1. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

$$2. \|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|.$$

$$3. \|A\| = 0 \iff A \equiv 0.$$

Доказательство. 1. $\|(A + B)x\|_Y = \|Ax + Bx\|_Y \leq \|Ax\|_Y + \|Bx\|_Y \iff \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|(A + B)x\|_Y = \|A + B\| \leq \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y + \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Bx\|_Y.$

$$2. \|\lambda Ax\| = |\lambda| \cdot \|Ax\|. \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|\lambda Ax\| = |\lambda| \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\| = |\lambda| \|A\|.$$

$$3. \implies \|A\| = 0 \implies \|Ax\| = 0 \implies Ax = 0 \implies Ax = A\left(\frac{x}{\|x\|} \cdot \|x\|\right) = \|x\| A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = 0.$$

\square

Теорема 2.29. $A: X \rightarrow Y$ — линейный оператор. Тогда

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \inf\{c > 0 \mid \|Ax\|_Y \leq c\|x\|_X\}.$$

Доказательство. Обозначим за N_i i -ый элемент этой цепочки.

$$N_1 \geq N_2 \text{ и } N_1 \leq N_3, \text{ так как } N_2, N_3 \subset N_1.$$

$$N_3 \geq N_4. \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \frac{1}{\|x\|} \|Ax\|_Y = \|A \frac{x}{\|x\|}\|_Y \leq N_3.$$

$$N_4 = N_5. N_5 = \inf\{c > 0 \mid \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} < c\}$$

Теперь докажем, что $N_1 \leq N_2$. Пусть $\|x\| \leq 1 \implies \|(1 - \varepsilon)x\| \leq 1 \implies \|A((1 - \varepsilon)x)\| \leq N_2$. Воспользуемся линейностью A : вытащим $(1 - \varepsilon)$ за скобку. После этого устремим ε к 0. Тогда $\|Ax\| \leq N_2 \implies N_1 = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \leq N_2$.

Теперь докажем, что $N_1 \leq N_4$. $\|x\| \leq 1$. Тогда $y := \frac{x}{\|x\|}$, $\|y\| = 1 \implies \|A_y\| \leq N_4 \implies \|Ax\| \leq \frac{1}{\|x\|} \|A(\frac{x}{\|x\|})\| \leq N_4 \implies N_1 = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \leq N_4$. \square

Теорема 2.30. $A: X \rightarrow Y$ — линейный оператор. Следующие условия равносильны:

1. A — ограниченный оператор.

2. A — непрерывна в нуле.

3. A — непрерывна во всех точках.

4. A — равномерно непрерывна.

Доказательство. $4 \implies 3 \implies 2$ — очевидно.

$1 \implies 4$ $\|Ax - Ay\|_Y = \|A(x - y)\|_Y \leq \|A\| \cdot \|x - y\|_X$. Если $\|x - y\|_X < \frac{\varepsilon}{\|A\|}$, то $\|Ax - Ay\| < \varepsilon$.

$2 \implies 1$. Возьмем $\varepsilon = 1$ и $\delta > 0$ из определения непрерывности. $\forall x \in X: \|x\| < \delta \implies \|Ax\| < 1$.

Пусть $\|y\| < 1$. Тогда $\|\delta y\| < \delta \implies \|A(\delta y)\| < 1 \implies \|Ay\| < \frac{1}{\delta} \implies \sum_{\|y\| < 1} \|Ay\| \leq \frac{1}{\delta}$. \square

Следствие. 1. $\|Ax\|_Y \leq \|A\| \|x\|_X \quad \forall x \in X$.

2. $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

Доказательство. 2. $\|A(Bx)\| \leq \|A\| \cdot \|Bx\| \leq \|A\| \|B\| \|x\|$.

$\|AB\| = \inf\{c > 0 \mid \|A(Bx)\| \leq c \|x\|\} \implies \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

1. а где \square

Теорема 2.31. $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Тогда $\|A\|^2 \leq \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m a_{jk}^2$. В частности, все такие операторы ограничены.

Доказательство. $\|Ax\|^2 = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^n a_{jk} x_k \right)^2 \leq (\text{Коши-Буняковский}) \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{jk}^2 \underbrace{\sum_{k=1}^n x_k^2}_{=\|x\|^2}$. Следова-

тельно, $\|Ax\| \leq \|x\| \sqrt{\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n a_{jk}^2}$ / \square

Замечание. В бесконечномерном случае бывают неограниченные операторы.

3. Ряды

3.1. Ряды в нормированных пространствах

Определение 3.1. X — пространство с нормой, $x_n \in X$.

$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ — ряд. Частичная сумма ряда $S_n := \sum_{k=1}^n x_k$.

Если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty}$, то он называется суммой ряда.

Ряд сходится, если у него есть сумма (и для \mathbb{R} эта сумма конечна), иначе она бесконечна.

Теорема 3.1 (Необходимое условие сходимости). Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_k$ — сходится, то $\lim x_n = 0$.

Доказательство. $S_n := \sum_{k=1}^n x_k \rightarrow S \implies \underbrace{S_n - S_{n-1}}_{x_n} \rightarrow S - S = 0$. □

Свойства. 1. Линейность. $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} y_n$.

2. Расстановка скобок. В ряду произвольным образом можно ставить скобки, то расстановка скобок дает тот же результат.

Набросок доказательства: мы просто смотрим на предел подпоследовательности.

3. В \mathbb{C} и \mathbb{R}^n сходимость равносильна покоординатной сходимости.

Теорема 3.2 (Критерий Коши). X — полное нормированное пространство.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n \geq N: \left\| \sum_{k=m}^n x_k \right\| < \varepsilon$.

Доказательство. $S_n := \sum_{k=1}^n x_k$. Последовательность S_n сходится $\iff S_n$ — фундаментальная $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N: \|S_n - S_m\| < \varepsilon \iff \left\| \sum_{k=m+1}^n x_k \right\| < \varepsilon$. □

Определение 3.2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится абсолютно, если $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ сходится.

Замечание. В частности, в \mathbb{R} абсолютная сходимость — сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$.

Теорема 3.3. X — полное нормированное пространство.

Если $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ абсолютно сходится, то он абсолютно сходится.

Доказательство. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ — сходится. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n \geq N: \sum_{k=m+1}^n \|x_k\| < \varepsilon$. Воспользуемся свойством о том, что сумма норм не меньше, чем норма суммы. А значит получили $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n \geq N: \left\| \sum_{k=m+1}^n x_k \right\| < \varepsilon$, что является критерием Коши для исходной последовательности. □

- Теорема 3.4.** 1. X — нормированное пространство. Если $\lim x_n = 0$ и в каждой скобке $\leq M$ слагаемых то из сходимости ряда после расстановки скобок следует сходимость исходного
2. \mathbb{R} . Если в каждой скобке все члены одного знака, то из сходимости ряда после расстановки скобок следует сходимость исходного.

Доказательство. $S_n := \sum_{k=1}^n x_k$ и $S_{n_k} \rightarrow S$.

1. Возьмем n : $n_k \leq n < n_{k+1}$. $S_n = S_{n_k} + x_{n_k+1} + x_{n_k+2} + \dots + x_n$. $\|S_n - S\| \leq \|S_{n_k} - S\| + \|x_{n_k+1}\| + \dots + \|x_n\|$. Мы знаем, что $S_{n_k} \rightarrow S \implies \exists K \forall k \geq K: \|S_{n_k} - S\| < \varepsilon$.
 $\lim x_j = 0 \implies \exists N \forall j \geq N: \|x_j\| < \varepsilon$. Следовательно исходная сумма не более $(M+1)S$.
2. $n_k \leq n < n_{k+1}$. Пусть в этом блоке неотрицательные слагаемые. $S_n = S_{n_k} + x_{n_k+1} + x_{n_k+2} + \dots + x_n \geq S_{n_k}$. А еще знаем, что $S_n = S_{n_{k+1}} - x_{n_{k+1}} - x_{n_{k+1}-1} - \dots - x_{n+1} \leq S_{n_{k+1}}$. Откуда получаем, что $S_{n_k} \leq S_n \leq S_{n_{k+1}}$.

□

3.2. Знакопостоянные ряды

Теорема 3.5. Пусть $a_n \geq 0$.

Тогда сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ равносильная ограниченности последовательности $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$.

Доказательство. $S_1 \leq S_2 \leq \dots$. Монотонная возрастающая последовательность имеет предел \iff она ограничена. □

Теорема 3.6 (Признак сравнения). Пусть $0 \leq a_n \leq b_n$. Тогда

1. Если $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — сходится.
2. Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — расходится.

Доказательство. 1. $A_n := \sum_{k=1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^n b_k = B_n$.

$\sum b_n$ — сходится $\implies B_n$ — ограничена $\implies A_n$ ограничена $\implies \sum a_n$ сходится.

2. Отрицание 1.

□

Следствие. 1. Пусть $a_n, b_n \geq 0$. Если $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ — сходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — сходится.

2. Пусть $a_n, b_n \geq 0$, Если $a_n \sim b_n$, то ряды ведут себя одинаково.

Доказательство. 1. $a_n = \mathcal{O}(b_n) \implies 0 \leq a_n \leq Cb_n$. $\sum_{n=1}^{\infty} Cb_n = C \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ — сходится $\implies \sum a_n$ — сходится.

2. $a_n = b_n c_n$, где $\lim c_n = 1 \implies \frac{1}{2} \leq c_n \leq 2$ при $n \geq N$. Тогда $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ и $b_n = \mathcal{O}(a_n)$.

□

Теорема 3.7 (Признак Коши). Пусть $a_n \geq 0$.

1. Если $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$, то ряд сходится.
2. $\sqrt[n]{a_n} > 1$, то ряд расходится.
3. Пусть $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} = q^*$. Если $q^* > 1$, то ряд расходится, если $q^* < 1$, то ряд сходится.

Замечание. Если $q^* = 1$, то ряд может сходиться, а может расходиться. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ — сходится, $\sqrt[n]{\frac{1}{n(n+1)}} \rightarrow 1$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ — расходится. $\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 1$.

Доказательство. 1. $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \implies a_n \leq q^n$. По признаку сравнения с геометрической прогрессией $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ — сходится.

2. $\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \implies a_n \not\rightarrow 0 \implies$ расходится.

3. Если $q^* > 1$. Найдется $n_k : \sqrt[n_k]{a_{n_k}} \rightarrow q^* > 1$ (по определению верхнего предела) \implies начиная с некоторого номера $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} > 1 \implies a_{n_k} > 1 \implies a_n \not\rightarrow 0$ и ряд расходится.

Если $q^* < 1$, $q^* = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \implies$ для больших n $\sup_{k \geq n} \sqrt[k]{a_k} < q < 1$. Но при этом $\sqrt[n]{a_n} \leq \sup_{k \geq n} \sqrt[k]{a_k}$, а значит $\sqrt[n]{a_n} < q$ при больших $n \implies$ ряд сходится.

□

Теорема 3.8 (Признак Даламбера). Пусть $a_n > 0$. Тогда

1. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq d < 1$, то ряд сходится.
2. Если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, то ряд расходится.
3. Пусть $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = d^*$. Если $d^* < 1$, то ряд сходится. Если $d^* > 1$, то ряд расходится.

Замечание. С единицей все еще ничего непонятно. Смотри предыдущие примеры.

Доказательство. 1. $\frac{a_n}{a_1} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \dots \cdot \frac{a_2}{a_1} \leq d^{n-1}$. $a_n \leq d^{n-1} \cdot a_1$ и ряд мажорируется геометрической прогрессией $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot d^{n-1}$. Она сходится $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — сходится.

2. $a_{n+1} \geq a_n \implies a_n \geq a_1 > 0$ и $a_n \not\rightarrow 0 \implies$ ряд расходится.

3. Если $d^* > 1$. Тогда $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ при $n \geq N \implies a_n \geq a_N > 0 \quad \forall n \geq N \implies a_n \not\rightarrow 0$ и ряд расходится.

Если $d^* < 1$. Так как $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = d^* \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} < d$ при $n \geq N \implies$ ряд сходится по признаку 1.

□

Пример. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Даламбер. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{x^n}{n!} = \frac{x}{n+1} \rightarrow 0 < 1$. Ряд сходится.

Коши. $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x}{\sqrt[n]{n!}} \sim \frac{x}{\sqrt[n]{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}} = \frac{x}{n e^{-1} \sqrt[n]{2\pi n}} \sim \frac{x e}{n} \rightarrow 0$.

Теорема 3.9. Пусть $a_n > 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d^*$. Тогда $\lim \sqrt[n]{a_n} = d^*$.

Доказательство. $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = d^* \implies \lim \frac{\ln a_{n+1} - \ln a_n}{(n+1) - n} = \ln d^* \xrightarrow{\text{т. Штольца}} \lim \frac{\ln a_n}{n} = \ln d^* \implies \sqrt[n]{a_n} = d^*.$ \square

Теорема 3.10. Пусть f неотрицательная монотонная: $[1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда:

$$\left| \sum_{k=a}^b f(k) - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \max\{f(a), f(b)\}.$$

Доказательство. Картинка : (

$$\sum_{k=a}^{b-1} f(k) \geq \int_a^b f(x) dx \geq \sum_{k=a+1}^b f(k).$$

TODO. \square

Теорема 3.11 (интегральный признак сходимости ряда). Пусть $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ неотрицательная, монотонно убывающая.

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ и $\int_1^{\infty} f(x) dx$ ведут себя одинаково.

Доказательство. По предыдущей теореме $S_n := \sum_{k=1}^n f(k) \geq \int_1^n f(x) dx \geq \sum_{k=2}^n f(k) = S_n - f(1)$.

Если ряд сходится, то S_n — ограничена $\implies \int_1^n f(x) dx \implies F(x) = \lim_1^x f$ — ограничена.

Если \int сходится $\implies \int_1^n f$ — ограничена $\implies S_n$ — ограничена \implies ряд расходится. \square

Пример. 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p > 0$ (иначе члены ряда $\not\rightarrow 0$ и ряд расходится).

$f(x) = \frac{1}{x^p}$. Монотонно убывает. $\sum \frac{1}{n^p}$ и $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ ведут себя одинаково: сходятся при $p > 1$.

2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \cdot f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ монотонно убывает. Поэтому $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$ и $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ ведут себя одинаково.

Там можно посчитать интеграл.

Следствие. 1. Если $a_n > 0$ и $a_n = \mathcal{O}(\frac{1}{n^p})$ при $p > 1$.

2. Если $a_n > 0$ и $a_n \sim \frac{c}{n^p}$, то при $p > 1$ ряд $\sum a_n$ — сходится, а иначе расходится.