Линейная алгебра и геометрия

Харитонцев-Беглов Сергей

14 февраля 2022 г.

Содержание

1. Векторные пространства

Рассмотрим простейшую систему уравнений:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f. \end{cases} \iff x \cdot \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

По сути задача: выразить $\binom{e}{f}$ через $\binom{a}{c}$, $\binom{b}{d}$: так как $x \cdot \binom{a}{c} = \binom{xa}{xc}$, тогда $\binom{xa}{xc} + \binom{yb}{yd} = \binom{xa+yb}{xc+yd}$.

***Определение* 1.1.** $x\binom{a}{c} + y\binom{b}{d}$ — линейная комбинация $\binom{a}{c}$ и $\binom{b}{d}$.

***Определение* 1.2.** $\left\{x\binom{a}{c} + y\binom{b}{d}\right\}$ — линейная оболочка $\binom{a}{c}$ и $\binom{b}{d}$. Она обозначается $\langle\binom{a}{c}, \binom{b}{d}\rangle$.

***Определение* 1.3.** Пусть R — кольцо.
Множество $\left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_1, a_2, \ldots, a_n \in R \right\}$ — называется n-мерным арифметическим (координатным) пространством (пространством столбцов) над R, обозначается R^n.

на котором мы ещё определяем операции сложения и умножения на скаляр:

- $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$
- $r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_1 \\ ra_2 \\ \vdots \\ ra_n \end{pmatrix} \forall r \in R$

***Определение* 1.4.** Аналогично пространству столбцов, можно определить пространство строк. Всё ровно аналогично, но теперь элементы расположены в строку. Обозначается ${}^nK$

***Определение* 1.5.** Пусть K — поле. Векторное пространство над K — тройка $(V, +, \cdot)$, где V — множество, $+\colon V \times V \to V$, $\cdot\colon K \times V \to V$. Причем:

1–4 $(V, +)$ — абелева группа.

1. $a + b = b + a \ \forall a, b \in V$.
2. $(a + b) + c = a + (b + c) \forall a, b, c \in V$
3. $\exists \overline{0}\colon a + \overline{0} = a \forall a \in V$
4. $\forall a \in V \ \exists(-a) \in V\colon a + (-a) = \overline{0}$
5. $(k_1 k_2)v = k_1(k_2 v)$ (ассоциативность умножения на скаляр)
6. $(k_1 + k_2)v = k_1 v + k_2 v$ (дистрибутивность умножения вектора на скаляр относительно сложения скаляров)

7. $k(v_1 + v_2) = kv_1 + kv_2$ (дистрибутивность умножения вектора на скаляр относительно сложения векторов)

8. $1_K \cdot v = v$ (унитарность, единица поля K является единицей и относительно умножения вектора на скаляр)

Здесь и далее (и немного ранее) скалярами называются элементы поля K, а векторами — элементы множества V.

Замечание. V — векторное пространство над K. Тогда:

- $0 \cdot v = \overline{0}\ \forall v \in V$.
- $k \cdot \overline{0} = \overline{0}\ \forall k \in K$.
- $(-1) \cdot v = -v\ \forall v \in V$.

Замечание. Из определений 2–8 следует 1.

***Определение* 1.6.** Пусть R — кольцо.
Тройка $(V, +, \cdot)$ с аксиомами 1-8 называется модулем над R.

Замечание. Абелевы группы(V — абелева, а умножение на скаляр выкинули) $\implies$ модули над $\mathbb{Z}$.

***Определение* 1.7.** V — векторное пространство над K. $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$. Тогда $\sum a_i v_i$ — линейная комбинация $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

***Определение* 1.8.** Пусть M — множесто векторов: $M \subset V$, тогда $\langle M \rangle = \{a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_kv_k \mid a_i \in$ называется линейной оболочкой множества M.

***Определение* 1.9.** Подпространство V — подмножество $U \subset V$, такое что $(U, +_V, \cdot_V)$ — векторное пространство.

Утверждение 1.1. $U \subset V$ — подпространство $\iff$ U — замкнуто, т.е. все операции с элементами U лежат в U.

Пример. ${}^nK$ — арифметическое пространство строк.

Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_m \in K^n$, т.е. векторы в пространстве столбцов. Рассмотрим $x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_mv_m = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ — однородную систему линейных уравнений (x_i — неизвестные). Рассмотрим всё множество решений — строк $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in {}^nK$. Утверждение — оно является подпространством в ${}^nK$. Для этого нужно просто проверить, что сумма двух решений — тоже решение, и решение, умноженное на какой-либо скаляр всё ещё остаётся решением. Доказывается просто расписав почленно $x_iv_i + y_iv_i = (x_i + y_i)v_i$ и получив итоговое равенство 0. Домножение на скаляр очевидно.

Полученное пространство не является всем пространством строк (${}^nK$), но является его подпространством, как мы только что доказали.

Обозначение: U — подпространство V: $U \leqslant V$.

Утверждение 1.2. $V_1, V_2, \leqslant V \implies V_1 \cap V_2 \leqslant V$.

Доказательство. Очевидно! ☐

***Определение* 1.10.** Сумма по Минковскому: $A, B \subset V : A + B := \{a + b \mid a \in A \wedge b \in B\}$.

Утверждение 1.3 (Сумма по Минковскому)**.** $V_1, V_2 \leqslant V \implies V_1 + V_2 \leqslant V$.

Доказательство.

- $x, y \in V_1 + V_2 \iff x = v_1 + v_2, y = v_1' + v_2'$, где $v_1, v_1' \in V_1,\ v_2, v_2' \in V_2$. Тогда $x + y = (v_1 + v_1') + (v_2 + v_2'), (v_1 + v_1') \in V_1, (v_2 + v_2') \in V_2 \implies x + y \in V_1 + V_2$
- $k \cdot x$ — очевидно.

☐

Замечание. $M \subset V$, $\langle M \rangle = \bigcap\limits_{\substack{U \leqslant V \\ U \supset M}} U$, доказывается как аналогичное утверждение из первого семестра.

***Определение* 1.11.** V_1, V_2 — векторные пространства над K. Тогда $f : V_1 \to V_2$ — гомоморфизм (линейное отображение), если

1. $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)\ \forall v_1, v_2 \in V_1$.
2. $f(kv) = kf(v)$.

Если при этом f — биекция, то f — изоморфизм.

***Определение* 1.12.** Координатизация — сопоставление элементам векторного пространства координат пространства, являющимся изоморфным этому пространству, ака построение гомоморфизма:

$$\forall v \in V, v \to \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}, k_i \in K$$

Верно ли, что любое векторное пространство изоморфно какому-то K^n? Да, если правильно понимать, что за n, и вообще, мы это чуть позже докажем.

Пример векторных пространств.

1. K — векторное пространство над K (следует из аксиом поля)
2. Векторы над плоскостью/пространством.
3. $K[x]_n = \{f \in K[x] \mid \deg f \leqslant n\}$. Тогда $K[x]_n \cong K^{n+1}$.
4. M — множество, K — поле. Тогда $V = \{f : M \to K\}$ (множество функций из M в K) — векторное пространство:
   - $(f_1 + f_2)(m) := f_1(m) + f_2(m)\ \forall m \in M$.
   - $(kf)(m) = k \cdot f(m)\ \forall k \in K$.

   По сути, каждая такая функция задаётся значениями в каждой точке M, и тогда получаем f — $\{f(m) \in K | m \in M\}$, что есть, по сути, $K^{|M|}$

4'. $M = K = \mathbb{R}$, $C_0(\mathbb{R})$ — непрерывные функции $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $C_0(\mathbb{R}) \leqslant (a_0, a_1, \ldots)$. Значения во всех рациональных точках. (Любая такая функция задаётся своими значениями во всех рациональных точках, а все рациональные точки можно пронумеровать и составить последовательность, и тогда каждая такая фукнция задаётся последовательностью значений во всех своих рациональных точках)

5. Последовательность фиббоначиевого типа: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Тогда множество таких последовательностей — векторное пространство $\cong \mathbb{R}^2$

6. M — множество. $V = 2^M$, $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $M_1 + M_2 \coloneqq M_1 \triangle M_2,\ 0 \cdot M = \varnothing, 1 \cdot M = M$. Тогда V — векторное пространство над $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $V \cong {}^n(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, а координатизация тут — битовая строка из 0 и 1.

Но в любом ли векторном пространстве есть координатизация? Да, это мы докажем, но чуть позже, смотри дальше.

***Определение* 1.13.** V — векторное пространство над K. $\{v_i\}_{i\in I}$ (множество векторов) называется базисом V, если $\forall v \in V\ \exists! \{a_i\}_{i\in I}$(множество коэффициентов)$, a_i \in K : v = \sum_{i\in I} a_i v_i$, из которых почти все (т.е. все, кроме какого-то конечного числа) $a_i = 0$

Замечание. В терминах этого определения $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ $V \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, то есть $V \cong K^n$.

***Определение* 1.14.** V — векторное пространство над полем K, тогда $\{v_i\}_{i\in I}$ называется линейно независимой системой (ЛНЗ), если выполнено одно из равносильных утверждений:

1. $\nexists i \in I \colon v_i = \sum\limits_{j\neq i} a_j v_j$

2. $\forall \{a_i\} \in K \colon \sum a_i v_i = 0 \implies a_i = 0\ \forall i \in I$.

Доказательство. $2 \implies 1$. Пусть $\exists i \colon v_i = \sum a_j v_j \implies \sum a_j v_j - v_i = 0 \xRightarrow{a_i=-1}$ не выполняется второе (не все коэффициенты равны нулю).

$1 \implies 2$. Пусть $a_i v_i = 0$, причем $\exists a_j \neq 0$. Тогда перенесём $a_j v_j$ в левую часть и разделим на $-a_j$ и получить $v_j = \sum\limits_{i\neq j} b_i v_i$, т.е. выразили, противоречие с первым пунктом. □

Теорема 1.4 (Равносильное определение базиса)**.** $\{v_i\}_{i\in I}, v_i \in V$, V — векторное пространство над K.

1. $\{v_i\}$ — базис.

2. $\{v_i\}$ — линейно независимая система и $\langle \{v_i\} \rangle = V$. $\{v_i\}$ — порождающая система.

3. $\{v_i\}$ — максимальная линейно независимая система, т.е. $\forall v \in V : \{v_i\}_{i\in I} \cup \{v\}$ — линейно зависимая.

4. $\{v_i\}$ — минимальная порождающая система. То есть выкидывание любого вектора делает систему не порождающей.

Доказательство.

- $1 \implies 2$. $\{v_i\}$ — базис $\implies$ $\{v_i\}$ порождающая по определению. Причем если $\sum a_i v_i = 0$, то $a_i = 0$, иначе получили два разложения для нуля (всегда есть разложение со всеми нулевыми коэффициентами), тогда получили, что $\{v_i\}$ — Л.Н.С.
- $2 \implies 1$. $\forall v \in V : v = \sum a_i v_i$, так как $\{v_i\}$ — порождающая. Тогда докажем единственность: пусть существуют $\sum a'_i v_i = v = \sum a_i v_i$. Тогда возьмем разность: $0 = \sum (a_i - a'_i) v_i \iff a_i - a'_i = 0 \iff a_i = a'_i$.
- $3 \implies 2$. Нужно доказать, что $\{v_i\}$ — порождающая система. Рассмотрим произвольный $v \in V$. Знаем, что $v_i \cup v$ — линейно зависимая, значит $\exists a : \sum a_i v_i + av = 0$ и не все a равны нулю. Легко понять, что $a \neq 0$, иначе исходная система линейно зависимая, а тогда можно выразить вектор v — $v = \sum \frac{a_i}{-a} v_i$, умеем выражать любой вектор — значит мы порождающая система.
- $2 \implies 4$. Пусть наша $\{v_i\}$ — ЛНЗ и порождающая, хотим доказать, что тогда она минимальная порождающая. Пусть это не так, тогда если она не минимальная порождающая, то убрав один вектор, мы сможем его получить при помощи других наших векторов $\Rightarrow$ исходная система линейно зависима, противоречие.
- $4 \implies 2$. Пусть $\{v_i\}$ — ЛЗ. Тогда $\exists i : v_i = \sum_{j \neq i} a_j v_j$. Тогда можно выкинуть v_i, система уменьшится и останется порождающей (v_i заменяем на линейную комбинацию остальных), противоречие. Значит, $\{v_i\}$ — ЛНЗ.
- $2 \implies 3$. $\forall v \in V : v = \sum a_i v_i \Rightarrow \{v_i\} \cup \{v\}$ — ЛЗ.

□

***Определение* 1.15.** V — векторное пространство над K.

V называется конечномерным, если $\exists$ конечная порождающая система, т.е. $V = \langle v_1, v_2, \cdots, v_n \rangle$.

Лемма. Из любой конечной порождающей системы $V = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ можно выбрать базис.

Доказательство. Во-первых, если она линейно независима, то все очевидно, вот и базис.

Иначе, пусть $\exists v_i = \sum\limits_{j \neq i} a_j b_j$. Тогда заметим, что система никак не пострадает, если убрать v_i из системы: мы все равно можем его получить при помощи остальных векторов.

Теперь можно продолжить этот процесс до момента, когда эта система станет линейно независимой. Так как система была конечной, то этот процесс когда-либо закончится (например, если выкинем все вектора). □

Замечание. Пример пространства с пустым базисом: у множества $V = \{0\}$ базис равен $\varnothing$.

Следствие. В любом конечном пространстве есть базис.

Замечание. В любом пространстве есть базис.

Пример.

$$K[x] = \langle 1, x, x^2, \ldots \rangle$$
$$K[[x]] = \langle ??? \rangle$$

У $K[[x]]$ есть базис, но на человеческом нельзя задать.

У $\mathbb{R}$ тоже есть базис, но как его задать — вопрос.

***Определение* 1.16.** Размерность пространства $\dim V$ — количество элементов в базисе.

Это хорошо, но непонятно, почему это определение корректное, т.е. почему во всех базисах пространста одинаковое количество элементов.

Теорема 1.5. Все базисы имеют поровну элементов.

Лемма (Лемма о линейной зависимости линейных комбинаций)**.** Пусть $u_1, \dots, u_m \in \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$, $m > n$. Тогда $u_1, \dots, u_m$ линейно зависима.

Доказательство.

Лемма (О замене)**.** $\langle v_1, v_2, \dots v_n \rangle = \langle \sum a_i v_i, v_2, \dots, v_n \rangle$, т.е. можно заменить элемент на линейную комбинацию элементов без изменения линейной оболочки, если $a_1 \neq 0$

Доказательство. $\sum a_i v_i, v_2, \dots, v_n \in \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$, это очевидное доказательство в одну сторону. А для другой стороны заметим, что $v_2, v_3, \cdots, v_n \in \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, а $v_1 = \frac{(\sum a_i v_i) - a_2 v_2 - \dots - a_n v_n}{a_1}$ □

Доказательство ЛЗЛК:

Рассмотрим u_1. Если $u_1 = \overline{0}$, то система сразу линейно зависимая, конец. Иначе можно представить $u_1 = \sum a_i v_i$, и $\exists i : a_i \neq 0$ По лемме произведем замену v_i на сумму. Получили $\langle v_1, \cdots, v_{i-1}, u_1, v_{i+1}, \cdots v_n \rangle = \langle v_1, v_2, \cdots, v_n \rangle$. Давайте продолжать подобную операцию: на k-ом шаге заменяем/выражаем $u_k = \sum_{v_i \text{ — не заменен}} a_i v_i + \sum_{i<k} b_i u_i$ Если все $a_i = 0$, то мы выражаем u_k через остальные u, т.е. получили линейную зависимость. Иначе будем там заменять, и через n шагов получим:

$u_{n+1}, \cdots, u_m \in \langle v_1, v_2, \cdots, v_n \rangle = \langle u_1, u_2, \cdots, u_n, \rangle$, т.е. умеем выражать остальные u через первые n, т.е. система всё же линейно зависимая. □

Из доказанной леммы очевидно следует теорема о равенстве количеств элементов во всех базисах оного пространства, а значит и корректность определения.

Пример. Рассмотрим $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Пусть R — модуль над R.

$\{1\}$ — минимальная порождающая система. При этом, $\{2, 3\}$ — минимальная порождающая система.

Лемма. Пусть V — конечномерное пространство.

1. $\forall$ ЛНЗ систему можно дополнить до базиса.
2. $V_1 \leqslant V_2 \Rightarrow \dim V_1 \leqslant V_2$, причем $\dim V_1 = \dim V_2 \Rightarrow V_1 = V_2$.

Доказательство. Пусть $\dim V_1 = n$, $v_1, \dots, v_k$ — ЛНЗ система. Тогда заметим, что $k \leqslant n$ по лемме о линейной зависимости.

Процесс: $\exists v \notin \langle v_1, \dots, v_k \rangle$. Положим $v_{k+1} = v$. Если v не существует, то $v_1, \dots, v_k$ — базис. Причем, заметим, что $v_1, \dots, v_{k+1}$ — ЛНЗ система.

Продолжаем данный процесс. Заметим, что данный процесс будет длиться не более $n - k$ шагов, так как, если размер станет $n + 1$, то система точно будет ЛЗ.

Докажем второй пункт. Рассмотрим $v_1, \dots, v_k$ — базис V_1. Заметим, что $\{v_i\}$ — ЛНЗ и каждый $v_i \in V_2$. Тогда $\{v_i\}$ можно дополнить до базиса $V_2 \Rightarrow k \leqslant \dim V_2$. □

Замечание Напоминание. Пусть V — векторное пространство, причем $\dim V = n$, $v_1, \dots, v_n$ — базис $V \Rightarrow \exists$ изоморфизм векторных пространств.

$f: K^n \to V$, причем $f(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix}) = \sum(a_i+b_i)v_i = \sum a_iv_i + \sum b_iv_i = f(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}) + f(\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix})$.

Плюс есть домножение на скаляр: $f(k\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}) = kf(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix})$

***Определение* 1.17.** $a \in \mathbb{C}$ называется алгебраическим, $\exists f \in \mathbb{Z}[x]$, такой что $f(a) = 0 \wedge f \not\equiv 0$

Утверждение 1.6. a — алгебраическое $\Rightarrow \langle 1, a, a^2, \ldots \rangle$ — конечномерное.

Доказательство. $\exists P = \sum\limits_{i=0}^{n} k_i x^i$, такое что $k_n = 1, P(a) = 0$. Тогда $a^n = -\sum\limits_{i=0}^{n-1} k_i a^i \in \langle 1, a, \ldots, a^{n-1} \rangle$, $a^{n+1} = -\sum\limits_{i=0}^{n-1} k_i a^{i+1} \in \langle 1, a, \ldots, a^{n-1} \rangle$ (a^n выражается через первые n) и так далее для $\forall N > n$. $a^N \in \langle 1, a, \ldots, a^{n-1} \rangle$ □

Утверждение 1.7. a, b — алгебраические. Тогда $\langle a^i b^k \rangle$ — конечномерное.

Доказательство. a — корень f: $\deg f = m$. b — корень g: $\deg g = n$.

Тогда $a^i \cdot b^k = (\sum\limits_{j=0}^{m-1} k_j a^j)(\sum\limits_{s=0}^{n-1} l_s b^s) = \sum\sum (k_j b_s) a^j b^s \Rightarrow \{a^j b^s\}_{\substack{j=0..m-1 \\ s=0..n-1}}$ — порождает $\langle \{a^i b^k\} \rangle$. □

Теорема 1.8. Алгебраические числа образуют кольцо. По факту хочется доказать: a, b — алгебраические $\Rightarrow a + b, ab$ — алгебраические.

Доказательство. $\mathbb{C}$ — векторное пространство над $\mathbb{Q}$.

Докажем, что $a + b$ — алгебраическое: рассмотрим $1, a + b, (a + b)^2, (a + b)^3, \ldots$. $(a + b)^i = \sum \binom{i}{k} a^k b^{i-k} \in V$, причем $\dim V = N$. Тогда $1, a + b, \ldots, (a + b)^N$ — ЛЗ система. $\implies$ $c_i \in \mathbb{Q}$: $\sum c_i (a + b)^i = 0 \Rightarrow a + b$ — корень $\sum c_i x^i = 0$ (ЛЗ система $\implies \sum c_i x^i \not\equiv 0$). ab — аналогично. □

Пример. SF — последовательности фиб. типа. $SF = \{(a_1, a_2, \ldots) \mid {}_{a_{i+1}=a_i+a_{i-1}}^{a_i \in \mathbb{R}}\}$ — векторное пространство над $\mathbb{R}$. $\dim SF = 2$, причем $(1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots)$ и $(0, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots)$ — Базис SF.

Координаты $(1, 1, 2, 3, \ldots)$ в базисе, заданном сверху: $\binom{1}{1}$.

При этом есть другой, хороший базис: $\begin{matrix} u_1 = (1, \varphi, \varphi^2, \varphi^3, \ldots) \\ u_2 = (1, -\frac{1}{\varphi}, \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^2, \ldots) \end{matrix}$

Например, $u = au_1 + bu_2 \iff \begin{cases} 1 = a \cdot 1 + b \cdot 1 \\ 1 = a + \varphi + b\left(-\frac{1}{\varphi}\right) \end{cases} \rightsquigarrow \binom{a}{b}$ — вектор $\Rightarrow u_n = a\varphi^{n-1} + b\left(-\frac{1}{\varphi}\right)^{n-1}$.

2. Матрицы

***Определение* 2.1.** Пусть R — кольцо, I, J — конечные множества.

Тогда матрица A над R — отображение $I \times J \to R$.

Обычно $I = \{1, \dots, m\}, J = \{1, \dots, n\}, (i, j) \mapsto a_{ij} \in R$.

Тогда матрица $m \times n$: $(a_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$

***Определение* 2.2.** Множество матриц $M_{m,n}(R)$.

При $I = J$ мы называем квадратными $M_n(R)$.

Рассмотрим матрицу $A \in M_{m,n}$. Её можно разбить на n столбцов $(c_1 \mid c_2 \mid \dots \mid c_n), c_i \in K^m$ и m строчек: $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix}, r_i \in {}^nK$.

Также заметим, что $M_{m,n}(K)$ — векторное пространство над K. Ясно, что $M_{m,1}(K) \cong K^m$ и $M_{1,m}(K) \cong {}^nK$.

***Определение* 2.3.** Умножение матриц: $M_{m,n} \times K^n \to K^m$: $(a_{ij}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}) \mapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$, где $y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}x_k$.

Можно определить умножение строки на столбец: $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \rightsquigarrow \sum a_i x_i$. Тогда умножение матрицы на столбец можно записать как $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix} \cdot X \rightsquigarrow \begin{pmatrix} r_1 \cdot X \\ r_2 \cdot X \\ \vdots \\ r_m \cdot X \end{pmatrix}$, где r_i — строчки.

Тогда заметим, что умножение матриц: $A \cdot B = \begin{pmatrix} Ac_1 & Ac_2 & \dots & Ac_l \end{pmatrix}$.

Пример .СЛУ. Системы линейных уравнений можно записывать как матрицу. Дальше я не успел.

Замечание. $A \in M_{m,n}(K)$. Рассмотрим $\mathcal{A}\colon K^n \to K^m$, $X \mapsto A \cdot X$.

Утверждение 2.1. $\mathcal{A}$ — линейное отображение.

Доказательство. $\mathcal{A}(X + Y) = A \cdot X + A \cdot Y \quad \forall x, y$, $\mathcal{A}(kX) = kA \cdot X$, $k \in K$. □

Однородная СЛУ: $AX = 0$. $A = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{pmatrix}$. Эта система имеет только тривиальное решение $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \iff c_1, \dots, c_n$ — ЛНЗ. Тогда заметим, что если $n > m$, то $AX = 0$ имеет нетривиальное решение.

2.1. Структура линейных отображений

Пример. $V = R^2$. Поворот вокруг O — линейное отображение. Симметрия относительно прямой — линейное отображение, если $0 \in l$. Проекция на l — линейное отображение.

Свойства. 1. $\mathcal{A}(0) = 0, x = 0 \Rightarrow \mathcal{A}(0) = 0$.

2. $\mathcal{A}$ — инъекция $\iff \mathcal{A}(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

3. $x_1, x_2, \dots, x_n$ — ЛЗ $\Rightarrow \mathcal{A}(x_i)$ — ЛЗ.

3'. $\mathcal{A}$ — инъекция: $\{x_i\}$ — ЛНЗ $\Rightarrow \{\mathcal{A}(x_i)\}$ — ЛНЗ.

4. $u_1, u_2, \dots, u_n$ — базис U. $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$. Тогда $\exists! \mathcal{A} \colon U \to V$ такое что $\mathcal{A}(u_i) = v_i$.

Доказательство. 1. $\mathcal{A}(0) = \mathcal{A}(0+0) = \mathcal{A}(0) + \mathcal{A}(0)$

2. $\Rightarrow$: $\mathcal{A}$ — инъекция, $\mathcal{A}(x) = 0, \mathcal{A}(0) = 0 \Rightarrow x = 0$.

   $\Leftarrow$: От противного, пусть $x \neq y \in U : \mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(y) \Rightarrow \mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(y) = \mathcal{A}(x-y) = 0 \Rightarrow x - y = 0$. Противоречие.

3. $\sum a_i x_I = 0 \implies \sum a_i \mathcal{A}(x_i) = \sum \mathcal{A}(a_i x_i) = \mathcal{A}(\sum a_i x_i) = \mathcal{A}(0) = 0$.

3'. Пусть $0 = \sum a_i \mathcal{A}(x_i) = \mathcal{A}(\sum a_i x_i) \implies \sum a_i x_i = 0 \Rightarrow a_i = 0$.

4. Определим A: пусть $u \in U$. $\exists! \{a_i\} : \ u = \sum a_i u_i$. Положим, $\mathcal{A}(u) = \sum a_i v_i$. $\mathcal{A}$ — линейно (очевидно/упражнение).

   Единственность: пусть $\mathcal{A}_2(u_i) = v_i$, тогда по линейности $\mathcal{A}_2(\sum a_i u_i) = \sum a_i \mathcal{A}_2(u_i) = \sum a_i v_i = \mathcal{A}(\sum a_i u_i)$.

□

***Определение* 2.4.** $\mathcal{A} \colon U \to V$ — линейное отображение.

Тогда $\ker \mathcal{A} = \{u \in U \mid \mathcal{A}(u) = 0\}$ — ядро $\mathcal{A}$. $\operatorname{Im} A = \{v \in V \mid \exists u : \mathcal{A}(u) = v\}$.

Свойства. 1. $\ker \mathcal{A} \leqslant U$, $\operatorname{Im} \mathcal{A} \leqslant U$.

2. $\operatorname{Im} \mathcal{A} = V \iff \mathcal{A}$ — сюръекция.

3. $\ker \mathcal{A} = \{0\} \iff \mathcal{A}$ — инъекция.

Доказательство. 1. Нам нужно собственно проверить замкнутость $\ker \mathcal{A}$. Пусть $x, y \in \ker \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}(x+y) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y) = 0$ по определению ядра. Осталось проверить замкнутость домножения на скаляр. Ну действительно, пусть $x \in \ker \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}(kx) = k \cdot \mathcal{A}(x) = 0$.

   $\operatorname{Im} \mathcal{A} \leqslant U$ аналогично. Пусть $X, Y \in \operatorname{Im} \mathcal{A} \Rightarrow \exists x, y \in U : \begin{cases} \mathcal{A}(x) = X \\ \mathcal{A}(y) = Y \end{cases} \Rightarrow \mathcal{A}(x+y) = X + Y$.

   Замкнутость по домножению на скаляр: пусть $x \in \operatorname{Im} \mathcal{A} \Rightarrow \exists x \in U : \mathcal{A}(x) = X \Rightarrow \mathcal{A}(kx) = kX$.

2. Это абсолютно тривиально – просто перефразирования одного и того же: если достигаются все значения, то у каждого значения хотя бы один достигающий его аргумент и наоборот.

3. $\Leftarrow$: Очевидно, так как тогда только $\mathcal{A}(0) = 0$.
$\Rightarrow$: Предположим от противного: $x \neq y \in U : \mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(y) \Rightarrow \mathcal{A}(x-y) = 0 \Rightarrow 0 \neq x-y \in \ker \mathcal{A}$. Противоречие.

□

Теорема 2.2 (О ядре и образе)**.** $\mathcal{A}$ — линейное отображение.

1. $\exists$ базис $u_1, u_2, \ldots, u_k, u_{k+1}, u_n$. Причем $u_1, \ldots, u_k$ — базис $\ker \mathcal{A}$, а $\mathcal{A}(u_{k+1}), \ldots, \mathcal{A}(u_n)$ — базис $\operatorname{Im} \mathcal{A}$.

2. $\dim(\ker \mathcal{A}) + \dim(\operatorname{Im} \mathcal{A}) = \dim U$.

Доказательство. Рассмотрим базис $u_1, u_2, \ldots, u_k$ — базис $\ker \mathcal{A}$. По лемме эту систему можно дополнить до базиса U. Рассмотрим $u_{k+1}, \ldots, u_n$ из нового базиса.

Хотим доказать, что $\mathcal{A}(u_{k+1}), \ldots, \mathcal{A}(u_n)$ — базис $\operatorname{Im} \mathcal{A}$. Докажем по определению, доказав линейную независимость и порождение всех векторов в пространстве.

- ЛНЗ-ть: Пусть $\sum a_{k+i}\mathcal{A}(u_{k+i}) = 0 \Rightarrow \mathcal{A}(\sum a_{k+i}u_{k+i}) = 0 \Rightarrow \sum a_{k+i}u_{k+i} \in \ker A \Rightarrow \exists a_1, a_2, ..., a_k :$ $\sum a_{k+i}u_{k+i} = \sum\limits_{i=1}^{k}(-a_i)u_i \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} a_i u_i = 0$. Противоречие, так как $u_1, u_2, ..., u_n$ – базис в U.

- Порождение: Возьмём какой-нибудь $u \in U$. Докажем, что $\mathcal{A}(u)$ выражается через базис. Разложим u через базис: $u = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i u_i \Rightarrow \mathcal{A}(u) = \mathcal{A}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i u_i\right) = \mathcal{A}\left(\sum\limits_{i=1}^{k} a_i u_i\right) + \sum\limits_{i=k+1}^{n} a_i\mathcal{A}(u_i)$. Но $\mathcal{A}\left(\sum\limits_{i=1}^{k} a_i u_i\right) = 0$, так как оно лежит в ядре. Значит действительно $\mathcal{A}(u) = \sum\limits_{i=k+1}^{n} a_i\mathcal{A}(u_i)$.

□

***Определение* 2.5.** Пусть U, V — векторные пространства над полем K.

Тогда $U \oplus V \coloneqq U \times V$ как множества. То есть $(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2)$, $k(u, v) \coloneqq (ku, kv)$.

Замечание. Пусть $\begin{matrix} u_1, \ldots, u_n & \text{— Базис } U \\ v_1, \ldots, v_m & \text{— Базис } V \end{matrix}$, $\widetilde{v_i} = (0, v_i), \widetilde{u_i} = (0, u_i)$,

Тогда $\{\widetilde{u_i}\} \cup \{\widetilde{v_i}\}$ — Базис $U \oplus V$.

Доказательство. $\forall (u, v) \in U \oplus V : \exists!(a_i)\exists!(b_i)\ (u, v) = (\sum a_i u_i, \sum b_i v_i)$.
$(u, 0) = (\sum a_i u_i)$, $(0, v) = (\sum b_i v_i)$. □

Замечание. $i_u \colon U \to U \oplus V$, $u \mapsto (u, 0)$, i_v — аналогично. Инъективный гомоморфизм векторных пространств.

$P_u \colon U \oplus V \to U, (u, v) \mapsto u$ — проекция. $\operatorname{Im} P_u = U, \ker P_u = \operatorname{Im} i_v$.

Диаграмма прямой суммы: $U \underset{i_u}{\overset{P_u}{\longleftrightarrow}} U \oplus V \underset{i_v}{\overset{P_v}{\longleftrightarrow}} V$. $P_u i_u = \mathrm{id}_u$, $P_v i_v = \mathrm{id}_v$, $P_v i_u = 0_v$, $P_u i_v = 0_u$, $i_u P_u + i_v P_v =???$

Теорема 2.3 (Формулаа Грассмана)**.** Пусть $U, V \leqslant W$, U, V — конечномерные.

$\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$

Доказательство. Построим линейное $f\colon U\oplus V \to W, (u,v) \mapsto u+v$. f — линейное (очев/упражнение).

Заметим, что $\operatorname{Im} f = U + V$, $\ker f = \{(u,-u) \mid \begin{matrix} u \in U \\ -u \in V \end{matrix}\} = \{(u,-u) \mid u \in U \cap V\}$.

Очевидно, что $\ker f \cong U \cap V \implies \dim(\ker f) = \dim(U \cap V)$. А по теореме о размерности ядра и образа: $\dim V + \dim U = \dim(U \oplus V) = \dim(U+V) + \dim(U \cap V)$ $\square$

Пример. K^n, $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0 \right\}$ — гиперплоскость $\dim U = n-1$.

СЛУ — m уравнений, m гиперплоскостей — $u_1, u_2, \ldots, u_m$. Ответ — $\bigcap\limits_{i=1}^{n} u_i$.

$\dim u_1 = n-1$. $\dim(u_1 \cap u_2) = \dim u_1 + \dim u_2 - \dim(u_1+u_2) \geqslant n-1+n-1-n \geqslant n-2$. Можно продолжить процесс.

Следствие. Множество решений однородной СЛУ (n неизвестных, m уравнений) — пространство размерности $\geqslant n-m$.

Замечание. Аналогия $(+,\cap)$ с $(\cup,\cap)$ — неполная: $(V_1+V_2)\cap V_3 \neq (V_1 \cap V_3) + (V_2 \cap V_3)$, пример: три прямые на плоскости.

Пусть $A \in M_{m,n}(K), A = (a_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$, $\mathcal{A}\colon \begin{matrix} K^n \to K^m \\ x \to A \cdot x \end{matrix}$ — линейное отображение.

$K^n - \langle e_1, \ldots, e_n\rangle, K^m = \langle \widetilde{e_1}, \ldots \widetilde{e_m}\rangle$, где e_i — вектор нулей с 1 на i строчке. Тогда $Ae_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$.

Тогда можно сказать, что $A = \left(\mathcal{A}(e_1) \mid \mathcal{A}(e_2) \mid \ldots \mid \mathcal{A}(e_n) \right)$

Следствие. $A, B \in M_{m,n}(K)$. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — линейные отображения, $\mathcal{A} = \mathcal{B} \implies A = B$.

Утверждение 2.4. $A \in M_{m,n}(K)$, $\mathcal{A}$ — соответствующее отображение.

$\ker \mathcal{A}$ — множество решений однородной СЛУ с матрицей A
$\operatorname{Im} \mathcal{A}$ — линейная оболочка столбцов A.

Доказательство. $A = \left(C_1 \,\middle|\, C_2 \,\middle|\, \ldots C_n \right) = \left(\mathcal{A}(e_1) \,\middle|\, \mathcal{A}(e_2) \,\middle|\, \ldots \mathcal{A}(e_n) \right)$

$\langle C_1, C_2, \ldots, C_n\rangle = \langle \{Ae_i\}\rangle = \operatorname{Im} \mathcal{A}$. $\sum a_i \mathcal{A}(e_i) = \mathcal{A}(\sum a_i e_i) = \mathcal{A}(V)$. V — вектор $\in K^n$. $\square$

***Определение* 2.6.** $A = \left(C_1 \,\middle|\, C_2 \,\middle|\, \ldots C_n \right)$.

$\dim\langle C_1, \ldots, C_n\rangle$ — называется рангом матрицы.

Обозначение $\operatorname{rank} A, \operatorname{rk} A, \operatorname{rg} A$.

При $n = m$ $n - \operatorname{rk} A$ называется дефектом матрицы. Дефект $\dim \ker A$.

Теорема 2.5 (Принцип Дирихле для векторных пространств)**.** $\mathcal{A}\colon V \to V$ — линейное отображение. V — конечномерное.

Тогда $\mathcal{A}$ — инъекция $\iff$ $\mathcal{A}$ — сюръекция.

Доказательство. $\dim V = n$, $\mathcal{A}$ — инъекция $\iff$ $\ker\mathcal{A} = 0$ $\iff$ $\dim\ker A = 0$ $\iff$ $\dim\operatorname{Im} A = n - 0 = n \iff \operatorname{Im} A = V \iff \mathcal{A}$ — сюръекция. □

***Определение* 2.7.** Неоднородная система: $AX = B$, $A \in M_{m,n}(K), B \in K^m$.

Теорема 2.6. Решение неоднородной и соответствующей ей однородной системы связаны:

Доказательство. Пусть X_0 — решение $AX = B$, тогда $AX = B \wedge AX_0 = B \iff A(X - X_0) = 0 \iff x - x_0 \in \ker\mathcal{A}$ — решения соответствующей однородной A.

$x = x_0 + v, v \in \ker\mathcal{A}$. Множество решений $x_0 + \ker\mathcal{A} = x_0 + \ker A = x_0 + \mathcal{A}^{-1}\{0\}$.

$\mathcal{A}^{-1}(\{AX_0\}) = X_0 + \mathcal{A}^{-1}\{0\}$. □

Теорема 2.7 (Альтернатива Фредгольма)**.** $\forall n = m$. СЛУ: n уравнений, n неизвестных, $AX = B$. Пусть A — фиксировано, B — нефиксировано.

Тогда верно одно из двух:

1. однородное СЛУ имеет только тривиальное решение и неоднородное СЛУ имеет единственное решение.
2. $AX = 0$ имеет бесконечно много решений, тогда 0 или бесконечное множество решений.

Теорема 2.8. $A \in M_{n,m}(K), B \in M_{l,n}(K)$. Причем $K^m \underset{\mathcal{B}}{\to} BK^n \underset{\mathcal{A}}{\to} K^l$.

Рассмотрим $C = A \cdot B$, $\mathcal{C}\colon K^m \to K^l$. $C \coloneqq A \cdot B$, тогда $\mathcal{C}$ — отображения домножения C.

Доказательство. Докажем, что $C_1(X) = (A \cdot B) \cdot X$, $C(X) = A \cdot (B \cdot X)$. Достаточно проверить для какого-то базиса K^m.

e_i — все нули, но на i-ой строчке единица, без волны в K^m, с — в K^n. Тогда $Be_i = \begin{pmatrix} B_{1i} \\ B_{2i} \\ \vdots \\ B_{ni} \end{pmatrix} = \sum_i b_{ki}\widetilde{e_k}$.

Тогда $A(Be_i) = A(\sum b_{ki}\widetilde{e_i}) = \sum b_{ki}(A\widetilde{e_k}) = \sum b_{ki} \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{lk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_k a_{1k}b_{ki} \\ \sum a_{2k}b_{ki} \\ \vdots \\ \sum a_{lk}b_{ki} \end{pmatrix}$, где i — фиксированный столбец. □

Следствие. Умножение матриц ассоциативно:

$A \in M_{k,l}(K), B \in M_{l,m}(K), C \in M_{m,n}(K)$.

Тогда $(AB)C = A(BC)$.

***Определение* 2.8.** При $m = n$,

$M_n(K)$ — кольцо квадратных матриц. Ассоциативное, но не коммутативное кольцо.

Пример. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.2. Матрица линейного отображения

U, V — векторные пространства над K. $\mathcal{A}\colon U \to V$ — линейное. $u_1, \ldots, u_n$ — базис U, $v_1, \ldots, v_n$ — базис V.

$\mathcal{A}(u_i) \in V \Rightarrow \mathcal{A}(u_i)$ — линейная комбинация $\{v_i\}$.

Тогда (a_{ij}) — матрица линейного отображения $\mathcal{A}$ в базисах $\{u_i\}, \{v_i\}$. $A = [\mathcal{A}]_{\{u_i\},\{v_i\}}$. Столбцы A — столбцы координат $\mathcal{A}(u_i)$ в базисе $\{v_i\}$.

Утверждение 2.9. $u \in U$, u — столбец координат в базисе $\{u_i\}$.

Тогда $A \cdot u$ — столбец координат $\mathcal{A}(u)$ в базисе $\{v_i\}$.

Доказательство. Для u_i это так по определению, а для остальных векторов по дистрибутивности/линейности. □

Замечание. $\{u_i\}$ задает изоморфизм $u \underset{f_u}{\longrightarrow} K^n$, $v \underset{f_v}{\overset{K}{\longrightarrow}}{}^m$.

$$\begin{array}{ccc} U & \underset{\mathcal{A}}{\longrightarrow} & V \\ f_u \downarrow & & \downarrow f_v. \\ K^n & \underset{\cdot A}{\longrightarrow} & K^m \end{array}$$

2.3. Матрица перехода и формулы пересчета

V — векторное пространство. id_v — линейное. $\mathrm{id}_v : V \to V$, $\{v_i\}$ — базис. $[\mathrm{id}]_{\{v_i\},\{u_i\}} = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} = E_n$. Причем E_n — единица в кольце матриц.

Пусть теперь $\{u_i\}, \{v_i\}$ — базисы V. Тогда $[\mathrm{id}]_{\{v_i\},\{u_i\}} = C = (c_{ij})$. $u_i = \sum_j c_{ji} v_{ji}$. $\big(u_1, \ldots, u_n\big) = \big(v_1, \ldots, v_j\big) \cdot C$.

$x \in V$, $x = \sum a_i u_i$, $x = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (x)_{u_i}$.

$\chi \coloneqq \begin{pmatrix} u_1 & \ldots & u_n \end{pmatrix} \cdot X = ???$

C — матрица перехода.

Замечание.

- $C_{\{u_i\},\{v_i\}} = E$
- $\{u_i\}, \{v_i\}, \{w_i\}$ — базисы. Тогда $C_{\{u_i\}\{w_i\}} = C_{\{u_i\}\{v_i\}} \cdot C_{\{v_i\}\{w_i\}}$.
- $C_1 = C_{\{u_i\},\{v_i\}}, C_2 = C_{\{v_i\},\{u_i\}}$.
  $C_1 \cdot C_2 = C_2 \cdot C_1 = E$. C_1, C_2 — взаимообратные.

Пусть $\mathcal{A}\colon U \to V$, U, V — векторное пространства над K.

Пусть e_i, f_i — базисы U и V, тогда существует матрица $A = [\mathcal{A}]_{\{e_i\},\{f_i\}}$

Причем важный момент, что если бы было два отображения: $U \xrightarrow{\mathcal{A}} V \xrightarrow{\mathcal{B}} W$, причем $\{e_i\}, \{f_i\}, \{g_i\}$ — базисы U, V, W соответственно. Тогда $[\mathcal{B}\mathcal{A}]_{\{e_i\},\{g_i\}} = [\mathcal{B}]_{\{f_i\}\{g_i\}} \cdot [\mathcal{A}]_{\{e_i\},\{f_i\}}$.

Тогда пусть V — векторное пространство, тогда $[\mathrm{id}_V]_{\{e_i\},\{f_i\}} = C$ — матрица перехода от e_i к f_i,

$x \in V$ X — координаты относительно $\{e_i\} \implies C \cdot X$ — координаты x относительно $\{f_i\}$.

$[\mathrm{id}]_{\{e_i\},\{e_i\}} = E = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. $EA = A, AE = A$.

$[\mathrm{id}]_{\{f_i\},\{e_i\}} = C^{-1}$, $CC^{-1} = C^{-1}C = E$. Матрица перехода — обратимы.

***Определение* 2.9.** V — векторное пространство над K.

$\mathcal{A}\colon V \to V$ называется линейным оператором.

Множество операторов на V — кольцо относительно $(+,\circ)$. $(\mathcal{A}+\mathcal{B})(V) \coloneqq \mathcal{A}(V)+\mathcal{B}(V) \quad \forall v \in V$.

$C \circ (\mathcal{A}+\mathcal{B}) = C \circ \mathcal{A} + C \circ \mathcal{B}$ — из линейности C.

***Определение* 2.10.** $\mathrm{End}(V)$ — эндоморфизм, $\dim V = b \implies \mathrm{End}\ V \cong M_n(K)$.

Так как $[\mathcal{A}+\mathcal{B}]_{\{e_i\}} = [\mathcal{A}]_{\{e_i\}} + [\mathcal{B}]_{\{e_i\}}$.

$[\mathcal{A}\circ\mathcal{B}]_{\{e_i\}} = [\mathcal{A}]_{\{e_i\}} \circ [\mathcal{B}]_{\{e_i\}}$. Говоря об операторах, будем писать $[\mathcal{A}]_{\{e_i\}}$.

$(M_n(K))^*$ — группа обратимых матриц, обозначение $GL_n(k), GL(b,k)$.

Пример. $GL_1(K) = K^* = K \setminus \{0\}$.

$$\begin{array}{lll} \mathcal{A}\colon & U & \to & V \text{ — линейно} \\ & \{e_i\} & & \{f_i\} \\ & \{e'_i\} & & \{f'_i\} \end{array}$$

Пусть $A = [\mathcal{A}]_{\{e_i\},\{f_i]\}}$. Чему тогда равно $[\mathcal{A}]_{\{e'_i\},\{f'_i\}} =$?

$U(\{e'\}) \xrightarrow{\mathrm{id}} U(\{e_i\}) \xrightarrow{\mathcal{A}} V(\{f_i\}) \xrightarrow{\mathrm{id}} V(\{f'_i\})$.

Тогда $[\mathcal{A}]_{\{e'_i\},\{f'_i\}} = [\mathrm{id}_v \circ \mathcal{A} \circ \mathrm{id}_u]_{\{e'_i\},\{f'_i\}} = [\mathrm{id}_v]_{\{f_i\},\{f'_i\}} \cdot [\mathcal{A}]_{\{e_i\},\{f_i\}} \cdot [\mathrm{id}_v]_{\{e'_i\},\{e_i\}} = CA \cdot D^{-1}$m где C — матрица перехода от f_i к f'_i, D — матрица перехода от e_i к e'_i.

Тогда:

$$A_{new} = CAC^{-1}.$$

A, B — квадратные обратимые матрицы, тогда $B = BAA^{-1}$.

Теорема 2.10 (Канонический вид линейного отображения)**.** $\mathcal{A} : V \to U$ — линейное, V — векторное пространство над K.

Тогда $\exists$ базис $\{e_i\}$ в V, базис $\{f_i\}$ в U, $r \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, такие что $[\mathcal{A}]_{\{e_i\},\{f_i\}} = \left|\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right|$, где E_r — едининичная матрица размера r.

Доказательство. Выберем базис из теоремы о ядре и образа. $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots v_n$ — базис V, причем $v_1, \dots, v_k$ — базис $\ker \mathcal{A} \leqslant V$, $\mathcal{A}(v_{k+1}), \dots \mathcal{A}(v_n)$ — Базис $\mathrm{Im}\,\mathcal{A} \leqslant U$.

На самом деле рассмотрим базис $v_{k+1}, \dots v_n, v_1, v_2, \dots, v_k$. Теперь $\forall i = 1..n-k$ положим $\mathcal{A}(v_k + i) = u_i$. $u_1, u_2, \dots, u_{n-k}$ — базис $\mathrm{Im}\,\mathcal{A} \leqslant U$ — ЛНЗ.

$u_1, u_2, \dots u_{n-k}, \dots, u_,$ — базис U (дополнили до базиса).

Тогда для $\mathcal{A}(v_{k+i}) = u_i = 0u_1 + 0u_2 + \ldots + 1 \cdot u_i + 0 \ldots + 0 \cdot u_m \quad \forall i = 1..(n-k)$.

$(v_l) = 0 \quad \forall l = 1..k$.

Значит столбцы $[\mathcal{A}]_{\{v_{k+1},\dots,v_n,v_1,\dots,v_k\}\{u_i\}} = \left|\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right|$ □

Замечание. $A \in M_{m,n}(K)$, $\operatorname{rk} A = r$, $\exists$ обратимые матрицы C, D: $\left|\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right|$, $\operatorname{rk}(A) = \operatorname{rk}(A') = r \implies A' = \widetilde{C} A \widetilde{D}$

***Определение* 2.11.** $A \in M_{m,n}(K)$, транспонированная матрица $A^T \in M_{n,m}(K)(A^T)_{i,j} = (A)_{j,i}$ $\substack{\forall i=1..n \\ \forall j=1..m}$

Свойства. 1. $(A^T)^T = A$.

2. $(A+B)^T = A^T + B^T$
3. $(AB)^T = B^T \cdot A^T$
4. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

Доказательство. $1, 2$ — очевидно.

3. $((AB)^T)_{i,j} = (AB)_{ji} = \sum\limits_{k=1}^{l} a_{jk} b_{ki}$.

   $(B^T \cdot A^T)_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{l} (B^T)_{ik} (A^T)_{kj} = \sum\limits_{k=1}^{l} b_{ki} \cdot a_{jk}$ — тоже самое.

4. следует из 3 и $E^R = E$.

$\square$

***Определение* 2.12.** $A \in M_{m,n}(K)$. Строчный ранг A — это $\dim\langle r_1, r_2, \ldots, r_m\rangle$, где $A = \begin{pmatrix} 1 \\ \hline r_2 \\ \hline \vdots \\ \hline r_m \end{pmatrix}$.

Обозначение $\operatorname{rk}_r(A)$.

Теорема 2.11 (Свойства ранга)**.** 1. $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}_A A, \operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A^T, A \in M_{n,n}(K)$.

2. $\operatorname{rk}(AB) \leqslant \min(\operatorname{rk} A, \operatorname{rk} B)$.
3. $\operatorname{rk}(A+B) \leqslant \operatorname{rk}(A) + \operatorname{rk}(B)$

2') A — обратима $\implies \operatorname{rk} AB = \operatorname{rk} B, \operatorname{rk} BA = B$.

4. $A \in M_n(K)$ A — обратима $\iff \operatorname{rk} A = n$.

Доказательство. 4) A — обратима $\iff$ соответственно $\mathcal{A}$ — инъективно и сюръективно $\iff$ $\mathcal{A}$ — сюръекция $\iff \operatorname{Im} \mathcal{A} = K^n \iff \operatorname{rk} \mathcal{A} = n, \dim(\operatorname{Im} \mathcal{A}) = n$.

1. $\operatorname{rk} A = r \implies \exists C, D$ — обратимые, такие, что $CAD = \left|\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right|$. Тогда $(CAD)^T = D^T A^T C^T = \left|\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right| \implies \operatorname{rk} A^T = r$.

   То есть $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A^T = \operatorname{rk} A$, то есть строчки $A \leftrightarrow$ столбцы A^T.

2. $\operatorname{rk} AB = \dim(\operatorname{Im}(AB)) = \dim\{AB \cdot x \mid x \in K^n\} \leqslant \dim\{AY \mid Y \in K^m\}$.
   $\operatorname{rk} AB = \dim(\operatorname{Im} AB) = \dim(\operatorname{Im} A \mid_{\operatorname{Im} B}) \leqslant \dim(\operatorname{Im} B)$

2') A – обратимый $\exists A^{-1}$. $\operatorname{rk}(AB) \leqslant \operatorname{rk} B$ по 2.
$\operatorname{rk} B = rk(A^{-1}(AB)) \leqslant \operatorname{rk} AB$ по 2. $\implies$ $\operatorname{rk} AB = \operatorname{rk} B$.

3. $\operatorname{rk}(A+B) = \dim\{(A+B)X \mid X \in U\} = \dim\{AX + BX \mid x \in U\} \leqslant \dim\{Ax + By \mid x, y \in y\} = \dim(\operatorname{Im} A + \operatorname{Im} B) \overset{\text{Грасс.}}{\leqslant} \dim \operatorname{Im} A + \dim \operatorname{Im} B = \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B$.

□

***Определение* 2.13.** $\mathcal{A}\colon K^n \to K^n$ — линейные оператор.

$\mathcal{A}$ называется элементарным, если $\mathcal{A}$ — обратим и $\exists i_0, j_0 : (\mathcal{A}(x))_i = x_i, i \neq i_0$. А $(\mathcal{A}(x))_{i_0} = x_{i_0} + kx_{j_0}$,

Соответствующая матрица — матрица элементарного преобразования.

Разберем случаи:

1. $i_0 \neq j_0 \quad \forall k \in K$ формула задает обратное преобразование.

$$t_{i_0,j_0}(k) \text{ — трансвекция: } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ v_{i_0} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ v_{i_0} + x_{j_0} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Матрица трансвекции — единичка, на позиции $(a)_{i_0 j_0}$ стоит 1.

2. $i_0 = j_0$. $(Ax)_{i=0} = (k+1)x_{i_0} = k \cdot x_{i_0}$ — обратимо, если $e \neq 0$ (в общем случае $e \notin K^*$). $m_{i_0}(l)$ — дилатация, $m_{i_0}^{-}1(l) = m_{i_0}(\frac{1}{k})$.

Матрица — единичная, но на $(a)_{i_0 j_0} = l$.

Утверждение 2.12.
1. $T_{ij}(a) \cdot A$ получится из A прибавлением к i-ой строке j-ой строки, умноженной на a.
2. $M_i(a) \cdot A$ тоже самое, но умножением i-ой строки на a.
3. $A \cdot M_i(a)$ тоже самое, но со столбцом.
4. $A \cdot T_{ij}(a)$, прибавлением к j-му столбцу i-го столбца, умноженного на a.

Доказательство. $1, 2$ следует из того что $T_{ij}(a) \left(\begin{array}{c|c|c|c} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} T_{ij}(a)c_1 & T_{ij}(a)c_2 & \dots & T_{ij}c_n \end{array} \right)$ и тоже для m_i.

А для столбцов $1, 2$ — это определения элементарного преобразования $3, 4$. Ну там можно транспонировать. □

Замечание. E — элементарная матрица $\implies$ $\operatorname{rk}(EA) = \operatorname{rk}(A) = \operatorname{rk}(AE)$, по свойству $2'$ ранга, так как E — обратима $\iff$ элементарные преобразования матрицы не меняют их ранга.

Следствие. Алгоритмическое определение ранга: приведем A элементарными преобразованиями к виду трапеции (результат Гаусса). Тогда количество ненулевых строчек — ранг матрицы.

Замечание. Элементарное преобразование 3-го типа. $S_{ij}\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ Матрица E, где вместо единицы на s_{ii} стоят единицы на s_{ij} и s_{ji}.

$s_{ij} = m_j(-1)t_{ij}(1)t_{ji}(-1)t_{ij}(1)$.

Теорема 2.13. A — матрица:

1. $\exists e_1, \ldots, e_k$ — элементарные, такие что $e_1 \cdot \ldots \cdot e_k \cdot A$ — имеет трапециевидный вид.
2. $A \in GL_n(K) \implies \exists e_1, \ldots, e_k$ — элементарные, такие, что $e_1 \cdot \ldots \cdot e_k \cdot A = E$.

2') $A \in GL_n(K), \exists e_1, \ldots, e_k \quad A = e_1 \cdot \ldots \cdot e_k$.

3. $\exists e_1, \ldots, e_k$ — элементарные $\exists f_1, \ldots, f_l$ — элементарные, такие что $e_1 \ldots e_k \cdot A \cdot f_1 \ldots f_l = \left|\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right|$.

Доказательство. $2 \to 2'$: $A \in GL_n(K) \exists A^{-1} \in GL(n, K)$ по пункту 2 $\exists e_1, \ldots, e_k\colon e_1 \cdot c_2 \ldots \cdot e_k A^{-1} = E$.

$2 \implies 3$: Знаем, что $\exists$ обратимые C, D: $CAD = \left|\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right|$. По пункту 2 C, D представимы элементарными преобразованиями.

1. $A \in M_{m,n}(K)$. Индукция по n.

База: $n = 1$. Упражнение или смотри дальше.
Переход: $n \to n+1$. $A = (a_i j)_{\substack{i=1..m \\ j=1..n+1}}$

1 случай. $a_{11} \neq 0$, применим $t_{21}(-\frac{a_{21}}{a_{11}}), t_{31}(-\frac{a_{31}}{a_{11}}), \ldots, t_{m_1}(-\frac{a_{m_1}}{a_{11}})$. После домножения получим: первую строчку, в последующих в первом столбце ноль, а дальше получилась матрица с размерностью метшей на 1.

По индукционному переходу $\exists e_1, \ldots, e_k$ — элементарные, $e_1 \ldots e_k A =$ матрица трапеционного вида. e_i можно дополнить до нашей матрицы: $\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & e_i \end{array}$.

Второй случай: $a_{11} = 0$, но $\exists k\colon a_{k_1} \neq 0$. Поменяем две строчки местами.

Третий случай: весь первый столбец — нули. Забьем на него и делаем шаг индукции как в п.1.

Теперь докажем второй пункт. Понятно, что $e_1, e_2, \ldots, e_k$ — обратимы. Тогда A — обратимы $\iff e_1 e_2 e_3 \ldots e_k A =$ треугольная матрица.

Утверждение 2.14. Треугольная матрица обратима $\implies$ все $a_i \neq 0$.

Доказательство. Пусть не так. Рассмотрим такой минимальный i, что $a_i = 0$. Посмотрим на столбцы. Тогда $c_1, c_2, \ldots, c_i \in \langle e_1, \ldots, e_{i-1} \rangle \implies c_1, c_2, \ldots, c_i$ — ЛЗ. $c_1, \ldots, c_n$ — ЛЗ, $\operatorname{rank} < n \implies$ А — необратима. Где e_i — столбец с 1 на i-той позиции. □

Итого, пусть у нас есть треугольная матрица. Применим $t_{1,n}(-\frac{a_{1n}}{a_{nn}})t_{2n}(-\frac{a_{2n}}{a_{nn}})\dots t_{n-1,n}(-\frac{a_{n-1,n}}{a_{n,n}})$. Теперь у нас в последнем столбце везде нули, кроме последней строчки. После этого мы получаем диагональ с какими-то элементами. □

Утверждение 2.15 (Алгоритм поиска обратной матрицы)**.** Для того, чтобы найти обратную матрицу нужно взять матрицу $\left(\begin{array}{c|c} A & E \end{array}\right)$ и привести левую матрицу к единичной. Тогда справа будет обратная.

***Определение* 2.14.** $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ называется верхнетреугольной, если $a_{ij} = 0 \quad \forall i > j$.

$A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ называется нижнетреугольной, если $a_{ij} = 0 \quad \forall j > i$.

Утверждение 2.16.

1. $LT_n(K), UT_n(K)$ (множество нижне/верхнетреугольных) — подкольца в $M_n(K)$.
2. $LT_n \cap UT_n$ — кольцо диагональных матриц $\cong \underbrace{K \times K \times \dots \times K}_{n\ text}$

Доказательство.

2. Сложение — очев. Умножение — очев (записать руками и удостовериться).
1. Очев/упражнение (очев).

□

Замечание. $A \in UT_n(K) \iff \forall i \in 1:n \quad \mathcal{A}(e_i) \in \langle e_1, \dots, e_i\rangle$. $\langle e_1\rangle \leqslant \langle e_1, e_2\rangle \leqslant \dots \leqslant \langle e_1, \dots, e_n\rangle$.

***Определение* 2.15.** A — нильподентна, елси $\exists k\colon A^k = 0$.

Утверждение 2.17. $A \in UT_n(K)$. A — нильп. $\iff a_{ii} = 0$.

Доказательство. $\begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}\end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a_{11}^n & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}^n\end{pmatrix}$

Тогда $\implies$ очев.

В обратную сторону: $\mathcal{A}(e_i) \in \langle a_1, \dots, e_i\rangle, a_{ii} = 0$. Откуда получаем $Ae_i = b_1e_1 + b_2e_2 + \dots + b_{i-1}e_{i-1}$.

Значит $\mathcal{A}(e_i) \in \langle e_1, \dots, e_{i-1}\rangle \quad \forall i$. Тогда $\mathcal{A}^2(e_i) \in \langle e_1, \dots, e_{i-2}\rangle$. Это значит, что $\mathcal{A}^i(e_i) = 0$. □

Замечание. $A^k = 0 \iff \exists$ замена базиса такая, что $A \in M_n(K)$ перейдет в верхнетреугольный вид.

В методе Гаусса у нас есть набор преобразований $e_1e_2\dots e_kA$. Вспомним, что e_i либо перестановка строк, либо $t_{ij}(a)$, где $i > j$.

Пусть перестановок нет. Тогда $e_k = t_{i_kj_k}(a) \in LT_n(K) \implies e_1\dots e_k \in LT_n(K)$, где $i_k > j_k$.

Тогда $LA = U$, $L \in LT_n, U \in UT_n$, то есть $A = L^{-1}U$, $L^{-1} \in LT_n$, $U \in UT_n$. Получили LU разложение.

В общем случае сделаем все перестановки в начале. То есть пусть мы свели задачу к $PA = LU \implies A = P^{-1}LU$.

Теорема 2.18. Следующие условия равносильны ($A \in M_n(K)$):

1. $\exists A^{-1}(A \in GL(K) = M_n(K)^*)$.

2. $A = e_1 \dots e_k$, e_i — элементарные матрицы.
3. $\operatorname{rk} A = n$.
4. $\mathcal{A}\colon X \mapsto A \cdot X$ — инъективный линейный оператор: $K^n \to K^n$.
5. Тоже самое, но сюръективна.
6. Если рассмотреть матрицу как систему, то для любого вектора правой части есть единственное решение $AX = B \iff A^{-1}B = X$.

3. Явные формулы в линейной алгебре (Теория определителей)

Мотивация: Решим систему $\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$. Получим решения $\begin{cases} x=\frac{ed-bf}{ad-bc} \\ y=\frac{af-ec}{ad-bc} \end{cases}$.

В чем смысл $ad-bc$. Возьмем вектора $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$. Тогда площадь параллелограмма, натянутого на эти вектора $S=|ad-bc|$ и $ad-bc$.

Пусть $\widehat{S}(\Phi)$ — ориентированная площадь, $|\widehat{S}(\Phi)|=S(\Phi)$. $\widehat{S}(\Phi)>0$, если поворот от первого вектора ко второму против часовой стрелки.

Свойства. 1. $\widehat{S}(V_1,V_2)=-\widehat{S}(V_2,V_1)$.

2. $\widehat{S}(kv_1,kv_2)=k\widehat{S}(v_1,v_2)$.

3. $S(v_1,v_2'+v_2'')=S(v1,v_2')+S(v_1,v_2'')$

Общий случай.

***Определение* 3.1.** $V_1,V_2,\ldots,V_n$, V — векторные пространства над K.

Отображение $\mathcal{A}\colon V_1\times V_2\times\ldots\times V_n\to V$ называется полилинейным, если $\forall i\forall v_i\in V_i\mathcal{A}_{v_1,\ldots,v_n}: V_i\to V$ — линейно. То есть, если закрепить все переменные, кроме одной, то отображение будет линейно.

Будем изучать $V=K^n,\omega\colon (K^n)^m\to K$.

Лемма. $e_1,\ldots,e_n$ — базис K^n. $\omega\colon (K^n)^m\to K$ — полилинейно, тогда $\omega(v_1,v_2,\ldots,v_m)=\sum\limits_{\{i_1,\ldots,i_m\}\in\{1..n\}^n} a_{i_11}\cdot a_{i_22}\ldots a_{i_mm}\omega(e_{i_1},e_{i_2},\ldots,e_{i_m})$.

Доказательство. $\omega(v_1,v_2,\ldots,v_m)=\omega(\sum a_{j_1}e_j,\sum a_{j_2}e_j,\ldots)=\sum\limits_{j=1}^{n} a_{j_1}\cdot\omega(e_j,\sum\ldots)$ и дальше по линейности. □

***Определение* 3.2.** Кососимметрической n-формой называется полилинейное отображение $\omega: (K^n)^n\to K$, такое что $(\exists i,j: v_i=v_j \implies \omega(v_1,\ldots,v_n)=0)$.

Утверждение 3.1. 1. ω — кососимметрична $\implies$ $\forall i\neq j: \omega(v_1,v_2,\ldots,v_i,\ldots,v_j,\ldots,v_n)=-\omega(v_1,\ldots,v_j,\ldots,v_i,\ldots v_n)$.

2. $\operatorname{char} k\neq 2 \implies$ верно и обратное. То есть, если выполняется равенство то и ω — кососимметричная.

Доказательство. 1. фиксируем все, кроме v_i. Тогда $f(x,y)=\omega(v_1,..,v_{i-1},x,v_{i+1},\ldots,y,\ldots,v_n)$. f — полилинейно. Надо доказать??

□

Утверждение 3.2. $\exists$ не более одной кососимметричной n-формы с точностью до линейного множества.

Доказательство. ω определено однозначено значениями

1. На базисе: $\omega(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{e_n}) = \widetilde{\omega}(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n})$. Из леммы известно, что тогда $\omega = \widetilde{\omega}$.
2. ω — кососимметрична, среди $i_1, \ldots, i_n$ есть одинаковые. Тогда $\omega(e_{i_1}, \ldots) = 0$.
3. Осталось изучить перестановки e. Пусть π перестановка. Тогда $e_{\pi(1)}, e_{\pi(2)}, \ldots$ — правильный порядок. Каждая перестановка двух элементов меняет знак у ω. То есть $\omega(e_{\pi(1)}, e_{\pi(2)}, \ldots) = (-1)^k \omega(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, где k — количество сделанных ходов.

Из 1,2,3 следует, что $\omega(e_1, e_2, \ldots, e_n) = \widetilde{\omega}(e_1, \ldots, e_n)$ и они кососимметричны, то они равны.

Тогда потребуем, чтобы ω была кососимметричной n-формой, $\omega(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1$, где $e_1, e_2, \ldots, e_n$ базис в K^n. Тогда таких функция $\leqslant 1$. □

***Определение* 3.3.** Такие функции называются определителем порядка n.

***Определение* 3.4.** S_n — группа перестановок: $S_n = \{f \colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\} \mid f$ — биекция$\}$. С операцией $\cdot$ — композиция.

***Определение* 3.5.** $t_{ij} \in S_n$ — транспозиция. $t_{ij}(i) = j, t_{ij}(j) = i, t_{ij}(k) = k$, при $i \neq j$.

Утверждение 3.3. $\langle \{t_{ij}\}_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}} \rangle = S_n$.

Доказательство. Индукция по n.

- База $n = 2$: $S_2 = \langle id, t_{12} \rangle$.
- Переход. $n \to n+1$. Пусть $\pi \in S_{n+1}$. $\exists i = n+1$. Рассмотрим $t_{i,n+1}$, то есть $t_{i,n+1}(i) = n+1$ и $t_{i,n+1}(n+1) = i$. $\pi \circ t_{i,n+1}(n+1) = \pi(i) = n+1$.

  Тогда сузим π до n. Получим $\widetilde{\pi} = \{1 \ldots n\} \to \{1 \ldots n\}$. Тогда заметим, что

$$\pi = \underbrace{t_{i_1,j_1} \circ t_{i_2,j_2} \circ \ldots}_{\text{образующие для} \widetilde{\pi}} \circ (t_{i,n+1})^{-1}.$$

□

***Определение* 3.6.** Перестановка π называется четной (нечетной), если выполнено одно из равносильных условий:

1. $\pi = t_{i_1,j_1} \ldots t_{i_{2k},j_{2k}}$ (соответственно $2k+1$).
2. $\#\{(i,j) \mid {\substack{i \in \{1..n\} \\ j \in \{1..n\}}} \wedge \begin{cases} i < j \\ \pi(i) > \pi(j) \end{cases} \}$ — четно/нечетно соответственно.
3. $\prod\limits_{i<j} \frac{\pi(i) - \pi(j)}{i - j} = 1$ (соответственно -1).

Следствие. 1. корректно (то есть четность чила множителей не зависит от разложения).

Доказательство. Докажем, что $1 \iff 2$.

Количество из определения 2 называется число инверсий. Надо доказать, что $\pi = \prod\limits_{l=1}^{k} t_{i_l,j_l} \implies$ количество инверсий $\equiv k \pmod 2$.

Индукция по k:

- База. $k = 0, \pi = \text{id}$. 0 инверсий.

- Переход: надо доказать, что $\pi \in S_n \forall i, j$ четности числа инверсий для π и $t_{ij}\pi$ — разные.

  Какие пары поменяли статус при применении t_{ij}: $(\pi(i), t_l), (\pi(j), t_l), (\pi(i), \pi(j))$. Первого типа — k, второго — k, третьего — 1. А значит четность изменилась.

□

Определение 3.7. $A \in M_n(K)$. Определителем A называется число

$$detA = |A| = \sum_{\pi \in S_n} \varepsilon(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \ldots a_{n\pi(n)}$$

, где $\varepsilon(\pi) = 1$ — π четна, -1 иначе.

Замечание. t_{12}. $\pi \leftrightarrow t_{12} \circ \pi$ — биекция между четными и нечетными.

Утверждение 3.4. Функция $\omega\colon (K^n)^n \to K$, $\omega(c_1, \ldots, c_n) = \det(C_1 \mid C_2 \mid \ldots \mid C_n)$ — полилинейная кососимметрическая форма.

Доказательство. Полилинейность — очев.

Кососимметричность: $\omega(c_1, \ldots, c_i, \ldots, c_j, \ldots) = 0$, если $c_i = c_j$. Докажем, что все слагаемые в формуле разбиваются на пары вида $(x, -x)$ для det.

Рассмотрим $\varepsilon(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \ldots a_{n\pi(n)}$. Здесь a_{ki} и a_{lj}.

Тогда пусть $\pi(k) = i, \pi(l) = j$.

Рассмотрим $\varepsilon(t_{ij}\pi)$. Здесь все будет так же, за исключением $a_{ki} = a_{kj}, a_{li} = a_{lj}, \varepsilon(t_{ij}\pi) = -\varepsilon(\pi) \implies A + B = 0$. □

Теорема 3.5. $\det(A) = \det(A^T)$.

Следствие. Любое свойство det про столбцы $\rightsquigarrow$ такое же свойство про строки.

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{\pi \in S_n} a_{1\pi(1)} \ldots a_{n\pi(n)} \cdot \varepsilon(\pi). \\
\det A^T &= \sum_{\pi \in S_n} a_{\pi(1)1} a_{\pi(2)2} \ldots a_{\pi(n)n} \cdot \varepsilon(\pi) = \\
&= \sum_{\pi \in S_n} a_{\pi(1),\pi^{-1}(\pi(1))} a_{\pi(2),\pi^{-1}(\pi(2))} \ldots a_{\pi(n),\pi^{-1}(\pi(n))} \varepsilon(\pi) \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \ldots a_{n,\sigma(n)} \varepsilon(\sigma) = \det A
\end{aligned}$$

Здесь $\sigma = \pi^{-1}$. $\varepsilon(\pi) = \varepsilon(\sigma)$ так как количество транспозиций у них равно. □

Теорема 3.6. $A \in M_n(K)$.

1. $\det(t_{ij}(a)A) = \det(At_{ij}(a)) = \det A$.
2. $\det(m_i(a)A) = \det(A \cdot m_i(a)) = a \det A$
3. $\det(s_{ij}A) = \det(As_{ij}) = -\det A$.

Доказательство. 3. кососимметричность. (Второе определение).

2. Линейность по i-ой строке (столбцу).

1. $\det(t_{ij}A) = \det(A)$. Пусть r_i — i-ая строка.

Тогда $\det\begin{pmatrix} A_1 \\ \hline r_i + r_j \cdot a \\ \hline B_1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A_1 \\ \hline r_i \\ \hline B_1 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} A_1 \\ \hline r_j \cdot a \\ \hline B_1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A_1 \\ \hline r_i \\ \hline B_1 \end{pmatrix} + a \cdot \det\begin{pmatrix} A_1 \\ \hline r_j \\ \hline \vdots \\ \hline r_j \\ \hline \vdots \end{pmatrix} =$ $\det A$. Последний переход за счет определения кососимметрической формы.

□

Замечание. Определитель — сумма произведения элементов A по ладейной расстановке.

Умеем приводить матрицу к треугольному виду. Тогда заметим, что единственная ненулевая перестановка — id. А значит det треугольной матрицы — произведение элементов матрицы на диагонали. А дальше надо домножить на -1 в степени количества перестановок.

Теорема 3.7. A — обратима $\iff \det A \neq 0$.

Доказательство. A — обратима $\iff e_1 \dots e_k A =$ треугольная матрица B — обратима.

$\det B \neq 0 \iff$ все $a_i \neq 0$.

B — обратима $\iff a_i \neq 0$ (доказывали). □

Теорема 3.8. $A, B \in M_n(K)$. Тогда

1. $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
2. если $\exists A^{-1}$, то $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.
3. $\det E = 1$.

То есть $\det\colon GL(n,k) \to K^*$ — гомоморфизм групп (единственный нетривиальный).

Доказательство. 3. E — частный случай треугольной. Очев

2. Следует из 1 и 3: $1 = \det E = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$.

1. Представим B как набор столбцов c_1 — переменная, а $A = \text{const}$.

   $A \cdot B = (A \cdot C_1 \mid A \cdot C_2 \mid \dots \mid A \cdot C_n)$. $B \mapsto \det(AB)$ — кососимметрическая полилинейная форма от $C_1, C_2, \dots, C_n$. Воспользуемся кососимметричностью: $C_i = C_j \implies AC_i = A \cdot C_j$ — два одинаковых столбца в $AB \implies \det AB = 0$.

   $B' = (C_1' \mid C_2 \mid \dots \mid C_n), B'' = (C_1'' \mid C_2 \mid \dots \mid C_n)$. Тогда $AB = (A(C_1' + C_1'') \mid C_2 \mid \dots) = (AC_1' + AC_2'' \mid \dots)$.

   $(AB') = ()$

□

Теорема 3.9 (Определитель блочной матрицы)**.** 1. $A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & * \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right) \implies \det A = \det(A_1)\det(A_2)$.

2. Если блоков k, то $\det A = \prod \det(A_i)$. (A_i — квадратные блоки).

Доказательство. Второй пункт из первого по индукции (упражнение).

1. $\det\left(\begin{array}{c|c} E_x & * \\ \hline 0 & E_y \end{array}\right) = 1$. Так как треугольная матрица.

2. Зафиксируем B. $\det\left(\begin{array}{c|c} A_1 & B \\ \hline 0 & E \end{array}\right)$ — полилинейная и кососимметричная относительно столбцов A_1.

   Поставим $A_1 = E \implies \text{const} = 1$ по пункту 1.

3. fix B, A_1 $\det\left(\begin{array}{c|c} a_1 & b \\ \hline 0 & a_2 \end{array}\right) = c_{A_1,B} \cdot \det(A_2)$. Подставляем $A_2 = E$: $\det A_1 = \det\left(\begin{array}{c|c} A_1 & B \\ \hline 0 & E \end{array}\right) = c_{A_1,B} \cdot 1 \implies c_{A_1,B} = \det A_1$. А значит $\det\left(\begin{array}{c|c} a_1 & b \\ \hline 0 & a_2 \end{array}\right) = \det A_1 \det A_2$.

□

Теорема 3.10 (Разложение по строкам/столбцам)**.** $A = (a_{ij})$. $A_{ij} = \det$ матрицы, полученной удалением i-ой строки и j-го столбца.

Тогда $\forall i \det A = \sum j = 1^n (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij}$ — разложение по строке.

Сила в том, что определитель n-го порядка можно свести к det $(n-1)$-го порядка.

Доказательство. Для строк. Пусть $r_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) = \sum a_{ik} f_k$, где f_k — строка с 1 на k строке.

По полилинейности $\det A = \sum a_{ik} \det A_k$. $A_k = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_{i-1} \\ 0 \ \ldots \ 1 \ 0 \ \ldots \ 0 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$.

Тогда $\det A_k = (-1)^{i+k} \cdot \det B$. Где B мы просто перенесли i-ой строки и k-го столбца на первые места. Тогда получилась блочная матрица. $= A_{ik} \cdot (-1)^{i+k}$. □

Следствие. $\sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot A_{kj} = 0$ $(k \neq i)$.

Доказательство. Эта сумма по предыдущей теореме равна $\pm \det$ матрицы вида $k \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$ (разложение по k-ой) строке, а он равен 0. □