Линейная алгебра и геометрия

Харитонцев-Беглов Сергей

17 января 2022 г.

Содержание

1. Векторные пространства

Рассмотрим простейшую систему уравнений:

$$\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f. \end{cases} \iff x\cdot\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}+y\cdot\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}$$

По сути задача: выразить $\binom{e}{f}$ через $\binom{a}{c}$, $\binom{b}{d}$: так как $x\cdot\binom{a}{c}=\binom{xa}{xc}$, тогда $\binom{xa}{xc}+\binom{yb}{yd}=\binom{xa+yb}{xc+yd}$.

***Определение* 1.1.** $x\binom{a}{c}+y\binom{b}{d}$ — линейная комбинация $\binom{a}{c}$ и $\binom{b}{d}$.

***Определение* 1.2.** $\left\{x\binom{a}{c}+y\binom{b}{d}\right\}$ — линейная оболочка $\binom{a}{c}$ и $\binom{b}{d}$. Она обозначается $\langle\binom{a}{c},\binom{b}{d}\rangle$.

***Определение* 1.3.** Пусть R — кольцо.

Множество $\left\{\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix} \mid a_1,a_2,\ldots,a_n\in R\right\}$ — называется n-мерным арифметическим (координатным) пространством (пространством столбцов) над R, обозначается R^n.

на котором мы ещё определяем операции сложения и умножения на скаляр:

- $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\\vdots\\a_n+b_n\end{pmatrix}$
- $r\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ra_1\\ra_2\\\vdots\\ra_n\end{pmatrix}\forall r\in R$

***Определение* 1.4.** Аналогично пространству столбцов, можно определить пространство строк. Всё ровно аналогично, но теперь элементы расположены в строку. Обозначается ${}^nK$

***Определение* 1.5.** Пусть K — поле. Векторное пространство над K — тройка $(V,+,\cdot)$, где V — множество, $+\colon V\times V\to V$, $\cdot\colon K\times V\to V$. Причем:

1–4 $(V,+)$ — абелева группа.

1. $a+b=b+a\ \forall a,b\in V$.
2. $(a+b)+c=a+(b+c)\forall a,b,c\in V$
3. $\exists\overline{0}\colon a+\overline{0}=a\forall a\in V$
4. $\forall a\in V\ \exists(-a)\in V\colon a+(-a)=\overline{0}$
5. $(k_1k_2)v=k_1(k_2v)$ (ассоциативность умножения на скаляр)
6. $(k_1+k_2)v=k_1v+k_2v$ (дистрибутивность умножения вектора на скаляр относительно сложения скаляров)

7. $k(v_1 + v_2) = kv_1 + kv_2$ (дистрибутивность умножения вектора на скаляр относительно сложения векторов)

8. $1_K \cdot v = v$ (унитарность, единица поля K является единицей и относительно умножения вектора на скаляр)

Здесь и далее (и немного ранее) скалярами называются элементы поля K, а векторами — элементы множества V.

Замечание. V — векторное пространство над K. Тогда:

- $0 \cdot v = \overline{0}\ \forall v \in V$.
- $k \cdot \overline{0} = \overline{0}\ \forall k \in K$.
- $(-1) \cdot v = -v\ \forall v \in V$.

Замечание. Из определений 2–8 следует 1.

***Определение* 1.6.** Пусть R — кольцо.
Тройка $(V, +, \cdot)$ с аксиомами 1-8 называется модулем над R.

Замечание. Абелевы группы(V — абелева, а умножение на скаляр выкинули) $\implies$ модули над $\mathbb{Z}$.

***Определение* 1.7.** V — векторное пространство над K. $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$. Тогда $\sum a_i v_i$ — линейная комбинация $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

***Определение* 1.8.** Пусть M — множесто векторов: $M \subset V$, тогда $\langle M \rangle = \{a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_kv_k \mid a_i \in$
называется линейной оболочкой множества M.

***Определение* 1.9.** Подпространство V — подмножество $U \subset V$, такое что $(U, +_V, \cdot_V)$ — векторное пространство.

Утверждение 1.1. $U \subset V$ — подпространство $\iff$ U — замкнуто, т.е. все операции с элементами U лежат в U.

Пример. ${}^nK$ — арифметическое пространство строк.

Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_m \in K^n$, т.е. векторы в пространстве столбцов. Рассмотрим $x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_mv_m = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ — однородную систему линейных уравнений (x_i — неизвестные). Рассмотрим всё множество решений — строк $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in {}^nK$. Утверждение — оно является подпространством в ${}^nK$. Для этого нужно просто проверить, что сумма двух решений — тоже решение, и решение, умноженное на какой-либо скаляр всё ещё остаётся решением. Доказывается просто расписав почленно $x_iv_i + y_iv_i = (x_i + y_i)v_i$ и получив итоговое равенство 0. Домножение на скаляр очевидно.

Полученное пространство не является всем пространством строк (${}^nK$), но является его подпространством, как мы только что доказали.

Обозначение: U — подмножество V: $U \leqslant V$.

Утверждение 1.2. $V_1, V_2, \leqslant V \implies V_1 \cap V_2 \leqslant V$.

Доказательство. Очевидно! $\square$

***Определение* 1.10.** Сумма по Минковскому: $A, B \subset V : A + V \coloneqq \{a + b \mid a \in A \wedge b \in B\}$.

Утверждение 1.3 (Сумма по Минковскому)**.** $V_1, V_2 \leqslant V \implies V_1 + V_2 \leqslant V$.

Доказательство.

- $x, y \in V_1 + V_2 \iff x = v_1 + v_2, y = v_1' + v_2'$, где $v_1, v_1' \in V_1,\ v_2, v_2' \in V_2$. Тогда $x + y = (v_1 + v_1') + (v_2 + v_2'), (v_1 + v_1') \in V_1, (v_2 + v_2') \in V_2 \implies x + y \in V_1 + V_2$
- $k \cdot x$ — очевидно.

$\square$

Замечание. $M \subset V$, $\langle M \rangle = \bigcap\limits_{\substack{U \leqslant V \\ U \supset M}} U$, доказывается как аналогичное утверждение из первого семестра.

***Определение* 1.11.** V_1, V_2 — векторные пространствами над K. Тогда $f : V_1 \to V_2$ — гомоморфизм (линейное отображение), если

1. $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)\ \forall v_1, v_2 \in V_1$.
2. $f(kv) = kf(v)$.

Если при этом f — биекция, то f — изоморфизм.

***Определение* 1.12.** Координатизация — сопоставление элементам векторного пространства координат пространства, являющимся изоморфным этому пространству, ака построение гомоморфизма:

$$\forall v \in V, v \to \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}, k_i \in K$$

Верно ли, что любое векторное пространство изоморфно какому-то K^n? Да, если правильно понимать, что за n, и вообще, мы это чуть позже докажем.

Пример векторных пространств.

1. K — векторное пространство над K (следует из аксиом поля)
2. Векторы над плоскостью/пространством.
3. $K\left[x\right]_n = \{f \in K[x] \mid \deg f \leqslant n\}$. Тогда $K[x]_n \cong K^{n+1}$.
4. M — множество, K — поле. Тогда $V = \{f : M \to K\}$ (множество функций из M в K) — векторное пространство:
   - $(f_1 + f_2)(m) \coloneqq f_1(m) + f_2(m)\ \forall m \in M$.
   - $(kf)(m) = k \cdot f(m)\ \forall k \in K$.

   По сути, каждая такая функция задаётся значениями в каждой точке M, и тогда получаем $f - \{f(m) \in K | m \in M\}$, что есть, по сути, $K^{|M|}$

4'. $M = K = \mathbb{R}$, $C_0(\mathbb{R})$ — непрерывные функции $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $C_0(\mathbb{R}) \leqslant (a_0, a_1, \ldots)$. Значения во всех рациональных точках. (Любая такая функция задаётся своими значениями во всех рациональных точках, а все рациональные точки можно пронумеровать и составить последовательность, и тогда каждая такая фукнция задаётся последовательностью значений во всех своих рациональных точках)

5. Последовательность фиббоначиевого типа: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Тогда множество таких последовательностей — векторное пространство $\cong \mathbb{R}^2$

6. M — множество. $V = 2^M$, $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $M_1 + M_2 \coloneqq M_1 \triangle M_2,\ 0 \cdot M = \varnothing, 1 \cdot M = M$. Тогда V — векторное пространство над $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $V \cong {}^n(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, а координатизация тут — битовая строка из 0 и 1.

Но в любом ли векторном пространстве есть координатизация? Да, это мы докажем, но чуть позже, смотри дальше.

***Определение* 1.13.** V — векторное пространство над K. $\{v_i\}_{i \in I}$ (множество векторов) называется базисом V, если $\forall v \in V\ \exists! \{a_i\}_{i \in I}$(множество коэффициентов)$, a_i \in K : v = \sum_{i \in I} a_i v_i$, из которых почти все (т.е. все, кроме какого-то конечного числа) $a_i = 0$

Замечание. В терминах этого определения $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ $V \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, то есть $V \cong K^n$.

***Определение* 1.14.** V — векторное пространство над полем K, тогда $\{v_i\}_{i \in I}$ называется линейно независимой системой (ЛНЗ), если выполнено одно из равносильных утверждений:

1. $\nexists i \in I \colon v_i = \sum\limits_{j \neq i} a_j v_j$

2. $\forall \{a_i\} \in K \colon \sum a_i v_i = 0 \implies a_i = 0\ \forall i \in I$.

Доказательство. $2 \implies 1$. Пусть $\exists i \colon v_i = \sum a_j v_j \implies \sum a_j v_j - v_i = 0 \xRightarrow{a_i = -1}$ не выполняется второе (не все коэффициенты равны нулю).

$1 \implies 2$. Пусть $a_i v_i = 0$, причем $\exists a_j \neq 0$. Тогда перенесём $a_j v_j$ в левую часть и разделим на $-a_j$ и получить $v_j = \sum\limits_{i \neq j} b_i v_i$, т.е. выразили, противоречие с первым пунктом. □

Теорема 1.4 (Равносильное определение базиса)**.** $\{v_i\}_{i \in I}, v_i \in V$, V — векторное пространство над K.

1. $\{v_i\}$ — базис.

2. $\{v_i\}$ — линейно независимая система и $\langle \{v_i\} \rangle = V$. $\{v_i\}$ — порождающая система.

3. $\{v_i\}$ — максимальная линейно независимая система, т.е. $\forall v \in V : \{v_i\}_{i \in I} \cup \{v\}$ — линейно зависимая.

4. $\{v_i\}$ — минимальная порождающая система. То есть выкидывание любого вектора делает систему не порождающей.

Доказательство.

- $1 \implies 2$. $\{v_i\}$ — базис $\implies$ $\{v_i\}$ порождающая по определению. Причем если $\sum a_i v_i = 0$, то $a_i = 0$, иначе получили два разложения для нуля (всегда есть разложение со всеми нулевыми коэффициентами), тогда получили, что $\{v_i\}$ — Л.Н.С.

- $2 \implies 1$. $\forall v \in V : v = \sum a_i v_i$, так как $\{v_i\}$ — порождающая. Тогда докажем единственность: пусть существуют $\sum a_i' v_i = v = \sum a_i v_i$. Тогда возьмем разность: $0 = \sum (a_i - a_i') v_i \iff a_i - a_i' = 0 \iff a_i = a_i'$.

- $3 \implies 2$. Нужно доказать, что $\{v_i\}$ — порождающая система. Рассмотрим произвольный $v \in V$. Знаем, что $v_i \cup v$ — линейно зависимая, значит $\exists a : \sum a_i v_i + av = 0$ и не все a равны нулю. Легко понять, что $a \neq 0$, иначе исходная система линейно зависимая, а тогда можно выразить вектор v — $v = \sum \frac{a_i}{-a} v_i$, умеем выражать любой вектор — значит мы порождающая система.

- $2 \implies 4$. Пусть наша $\{v_i\}$ — ЛНЗ и порождающая, хотим доказать, что тогда она минимальная порождающая. Пусть это не так, тогда если она не минимальная порождающая, то убрав один вектор, мы сможем его получить при помощи других наших векторов $\Rightarrow$ исходная система линейно зависима, противоречие.

$\square$

***Определение* 1.15.** V — векторное пространство над K.

V называется конечномерным, если $\exists$ конечная порождающая система, т.е. $V = \langle v_1, v_2, \cdots, v_n \rangle$.

Лемма. Из любой конечной порождающей системы $V = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ можно выбрать базис.

Доказательство. Во-первых, если она линейно независима, то все очевидно, вот и базис.

Иначе, пусть $\exists v_i = \sum\limits_{j \neq i} a_j b_j$. Тогда заметим, что система никак не пострадает, если убрать V_i из системы: мы все равно можем его получить при помощи остальных векторов.

Теперь можно продолжить этот процесс до момента, когда эта система станет линейно независимой. Так как система была конечной, то этот процесс когда-либо закончится (например, если выкинем все вектора). $\square$

Замечание. Пример пространства с пустым базисом: у множества $V = \{0\}$ базис равен $\varnothing$.

Следствие. В любом конечном пространстве есть базис.

Замечание. В любом пространстве есть базис.

Пример.

$$K[x] = \langle 1, x, x^2, \ldots \rangle$$
$$K[[x]] = \langle ??? \rangle$$

У $K[[x]]$ есть базис, но на человеческом нельзя задать.

У $\mathbb{R}$ тоже есть базис, но как его задать — вопрос.

***Определение* 1.16.** Размерность пространства $\dim V$ — количество элементов в базисе.

Это хорошо, но непонятно, почему это определение корректное, т.е. почему во всех базисах пространста одинаковое количество элементов.

Теорема 1.5. Все базисы имеют поровну элементов.

Лемма (Лемма о линейной зависимости линейных комбинаций)**.** Пусть $u_1, \dots, u_n \in \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$, $m > n$. Тогда $u_1, \dots, u_m$ линейно зависима.

Доказательство.

Лемма (О замене)**.** $\langle v_1, v_2, \dots v_n \rangle = \langle \sum a_i v_i, v_2, \dots, v_n \rangle$, т.е. можно заменить элемент на линейную комбинацию элементов без изменения линейной оболочки, если $a_1 \neq 0$

Доказательство. $\sum a_i v_i, v_2, \dots, v_n \in \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$, это очевидное доказательство в одну сторону. А для другой стороны заметим, что $v_2, v_3, \cdots, v_n \in \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, а $v_1 = \frac{(\sum a_i v_i) - a_2 v_2 - \dots - a_n v_n}{a_1}$ □

Доказательство ЛЗЛК:

Рассмотрим u_1. Если $u_1 = \overline{0}$, то система сразу линейно зависимая, конец. Иначе можно представить $u_1 = \sum a_i v_i$, и $\exists i : a_i \neq 0$ По лемме произведем замену v_i на сумму. Получили $\langle v_1, \cdots, v_{i-1}, u_1, v_{i+1}, \cdots v_n \rangle = \langle v_1, v_2, \cdots, v_n \rangle$. Давайте продолжать подобную операцию: на k-ом шаге заменяем/выражаем $u_k = \sum_{v_i \text{ — не заменен}} a_i v_i + \sum_{i<k} b_i u_i$ Если все $a_i = 0$, то мы выражаем u_k через остальные u, т.е. получили линейную зависимость. Иначе будем там заменять, и через n шагов получим:

$u_{n+1}, \cdots, u_m \in \langle v_1, v_2, \cdots, v_n \rangle = \langle u_1, u_2, \cdots, u_n, \rangle$, т.е. умеем выражать остальные u через первые n, т.е. система всё же линейно зависимая. □

Из доказанной леммы очевидно следует теорема о равенстве количеств элементов во всех базисах оного пространства, а значит и корректность определения.

Пример. Рассмотрим $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Пусть R — модуль над R.

$\{1\}$ — минимальная порождающая система. При этом, $\{2, 3\}$ — минимальная порождающая система.

Лемма. Пусть V — конечномерное пространство.

1. $\forall$ ЛНЗ систему можно дополнить до базиса.
2. $V_1 \leqslant V_2 \Rightarrow \dim V_1 \leqslant V_2$, причем $\dim V_1 = \dim V_2 \Rightarrow V_1 = V_2$.

Доказательство. Пусть $\dim V_1 = n$, $v_1, \dots, v_k$ — ЛНЗ система. Тогда заметим, что $k \leqslant n$ по лемме о линейной зависимости.

Процесс: $\exists v \notin \langle v_1, \dots, v_k \rangle$. Положим $v_{k+1} = v$. Если v не существует, то $v_1, \dots, v_k$ — базис. Причем, заметим, что $v_1, \dots, v_{k+1}$ — ЛНЗ система.

Продолжаем данный процесс. Заметим, что данный процесс будет длиться не более $n - k$ шагов, так как, если размер станет $n + 1$, то система точно будет ЛЗ.

Докажем второй пункт. Рассмотрим $v_1, \dots, v_k$ — базис V_1. Заметим, что $\{v_i\}$ — ЛНЗ и каждый $v_i \in V_2$. Тогда $\{v_i\}$ можно дополнить до базиса $V_2 \Rightarrow k \leqslant \dim V_2$. □

Замечание Напоминание. Пусть V — векторное пространство, причем $\dim V = n$, $v_1, \dots, v_n$ — базис $V \Rightarrow \exists$ изоморфизм векторных пространств.

$f: K^n \to V$, причем $f(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}) = \sum (a_i + b_i) v_i = \sum a_i v_i + \sum b_i v_i = f(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}) + f(\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix})$.

Плюс есть домножение на скаляр: $f(k \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}) = kf(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix})$

***Определение* 1.17.** $a \in \mathbb{C}$ называется алгебраическим, $\exists f \in \mathbb{Z}[x]$, такой что $f(a) = 0 \wedge f \not\equiv 0$

Утверждение 1.6. a — алгебраическое $\Rightarrow \langle 1, a, a^2, \dots \rangle$ — конечномерное.

Доказательство. $\exists P = \sum\limits_{i=0}^{n} k_i x^i$, такое что $k_n = 1, P(a) = 0$. Тогда $a^n = -\sum k_i a^i \in \langle 1, a, \dots, a^{n-1} \langle$, $a^{n+1} = -\sum k_i a^{i+1}$ и так далее для $\forall N > n$. $a^N \in \langle 1, a, \dots, a^{N-1} \rangle$ □

Утверждение 1.7. a, b — алгебраические. Тогда $\langle a^i b^k \rangle$ — конечномерное.

Доказательство. a — корень f: $\deg f = m$. b — корень g: $\deg g = n$.

Тогда $a^i \cdot b^k = (\sum\limits_{j=0}^{m-1} k_j a^j)(\sum\limits_{s=0}^{n-1} l_s b^s) = \sum \sum (k_j b_s) a^j b^s \Rightarrow \{a^j b^s\}_{\substack{j=0..m-1 \\ s=0..n-1}}$ — порождает $\langle \{a^i b^k\} \rangle$. □

Теорема 1.8. Алгебраические числа образуют кольцо. По факту хочется доказать: a, b — алгебраические $\Rightarrow a + b, ab$ — алгебраические.

Доказательство. $\mathbb{C}$ — векторное пространство над $\mathbb{Q}$.

Докажем, что $a + b$ — алгебраическое: рассмотрим $1, a + b, (a + b)^2, (a + b)^3, \dots$. $(a + b)^i = \sum \binom{i}{k} a^k b^{i-k} \in V$, причем $\dim V = N$. Тогда $1, a + b, \dots, (a + b)^N$ — ЛЗ система. $\implies c_i \in \mathbb{Q} : \sum c_i (a + b)^i = 0 \Rightarrow (a + b)^i$ — корень $\sum c_i x^i = 0$. ab — аналогично. □

Пример. SF — последовательности фиб. типа. $SF = \{(a_1, a_2, \dots) \mid {}_{a_{i+1} = a_i + a_{i-1}}^{a_i \in \mathbb{R}}\}$ — векторное пространство над $\mathbb{R}$. $\dim SF = 2$, причем $(1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$ и $(0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots)$ — Базис SF.

Координаты $(1, 1, 2, 3, \dots)$ в базисе, заданном сверху: $\binom{1}{1}$.

При этом есть другой, хороший базис: $\begin{matrix} u_1 = (1, \varphi, \varphi^2, \varphi^3, \dots) \\ u_2 = (1, -\frac{1}{\varphi}, \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^2, \dots) \end{matrix}$

Например, $u = au_1 + bu_2 \iff \begin{cases} 1 = a \cdot 1 + b \cdot 1 \\ 1 = a + \varphi + b\left(-\frac{1}{\varphi}\right) \end{cases} \rightsquigarrow \binom{a}{b}$ — вектор $\Rightarrow u_n = a\varphi^{n-1} + b\left(-\frac{1}{\varphi}\right)^{n-1}$.

2. Матрицы

***Определение* 2.1.** Пусть R — кольцо, I, J — конечные множества.

Тогда матрица A над R — отображение $I \times J \to R$.

Обычно $I = \{1, \dots, m\}, J = \{1, \dots, n\}, (i, j) \mapsto a_{ij} \in R$.

Тогда матрица $m \times n$: $(a_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$

***Определение* 2.2.** Множество матриц $M_{m,n}(R)$.

При $I = J$ мы называем квадратными $M_n(R)$.

Рассмотрим матрицу $A \in M_{m,n}$. Её можно разбить на n столбцов $(c_1 \mid c_2 \mid \dots \mid c_n), c_i \in K^m$ и m строчек: $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix}, r_i \in {}^nK$.

Также заметим, что $M_{m,n}(k)$ — векторное пространство над K. Ясно, что $M_{m,1}(K) \cong K^m$ и $M_{1,m}(K) \cong {}^nK$.

***Определение* 2.3.** Умножение матриц: $M_{m,n} \times K^n \to K^m$: $(a_{ij}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}) \mapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, где $u_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}x_k$.

Можно определить умножение строки на столбец: $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \rightsquigarrow \sum a_i x_i$. Тогда умножение матрицы на столбец можно записать как $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \cdot X \rightsquigarrow \begin{pmatrix} c_1 \cdot X \\ c_2 \cdot X \\ \vdots \\ c_m \cdot X \end{pmatrix}$.

Тогда заметим, что умножение матриц: $A \cdot B = \begin{pmatrix} Ac_1 & Ac_2 & \dots & A_l \end{pmatrix}$.

Пример .СЛУ. Системы линейных уравнений можно записывать как матрицу. Дальше я не успел.

Замечание. $A \in M_{m,n}(K)$. Рассмотрим $\mathcal{A}$: $K^n \to K^m$, $X \mapsto A \cdot X$.

Утверждение 2.1. $\mathcal{A}$ — линейное отображение.

Доказательство. $\mathcal{A}(X + Y) = A \cdot X + A \cdot Y \quad \forall x, y$, $\mathcal{A}(kX) = kA \cdot X$, $k \in K$. □

Однородная СЛУ: $AX = 0$. $A = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{pmatrix}$. Эта система имеет тривиальное решение $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \iff c_1, \dots, c_n$ — ЛНЗ. Тогда заметим, что если $n > m$, то $AX = 0$ имеет нетривиальное решение.

2.1. Структура линейных отображений

Пример. $V = R^2$. Поворот вокруг O — линейное отображение. Симметрия относительно прямой — линейное отображение, если $0 \in l$. Проекция на l — линейное отображение.

Свойства. 1. $\mathcal{A}(0) = 0, x = 0 \Rightarrow \mathcal{A}(0) = 0$.

2. $\mathcal{A}$ — инъекция $\iff$ $\mathcal{A}(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

3. $x_1, x_2, \dots, x_n$ — ЛЗ $\Rightarrow \mathcal{A}(x_i)$ — ЛЗ.

3'. $\mathcal{A}$ — инъекция: $\{x_i\}$ — ЛНЗ $\Rightarrow \{\mathcal{A}(x_i)\}$ — ЛНЗ.

4. $u_1, u_2, \dots, u_m$ — базис U. $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$. Тогда $\exists! A\colon i \to v$ такое что $\mathcal{A}(u_i) = v_i$.

Доказательство. 1. $\mathcal{A}(0) = \mathcal{A}(0 + 0) = \mathcal{A}(0) + \mathcal{A}(0)$

2. $\Rightarrow$: $\mathcal{A}$ — инъекция, $\mathcal{A}(x) = 0, \mathcal{A}(0) = 0 \Rightarrow x = 0$.

   $\Leftarrow$: От противного, пусть $x \neq y \in U : \mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(y) \Rightarrow \mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(y) = \mathcal{A}(x - y) = 0 \Rightarrow x - y = 0$. Противоречие.

3. $\sum a_i x_I = 0 \implies \sum a_i \mathcal{A}(x_i) = \sum \mathcal{A}(a_i x_i) = \mathcal{A}(\sum a_i x_i) = \mathcal{A}(0) = 0$.

3'. Пусть $\sum a_i x_i = 0 \Rightarrow \sum a_i \mathcal{A}(x_i) = \mathcal{A}(\sum a_i x_i) = 0 \implies a_i x_i = 0 \to a_i = 0$.

4. Определим A: пусть $u \in U$. $\exists! \{a_i\} : \ u = \sum a_i u_i$. Положим, $\mathcal{A}(u) = \sum a_i v_i$. $\mathcal{A}$ — линейно (очевидно/упражнение).

   Единственность: пусть $\mathcal{A}_2(u_i) = v_i$, тогда по линейности $\mathcal{A}_2(\sum a_i u_i) = \sum a_i \mathcal{A}_2(u_i) = \sum a_i v_i = \mathcal{A}(\sum a_i u_i)$.

□

***Определение* 2.4.** $\mathcal{A}\colon U \to V$ — линейное отображение.

Тогда $\ker \mathcal{A} = \{u \in U \mid \mathcal{A}(u) = 0\}$ — ядро $\mathcal{A}$. $\operatorname{Im} A = \{v \in V \mid \exists u : \mathcal{A}(u) = v\}$.

Свойства. 1. $\ker \mathcal{A} \leqslant U$, $\operatorname{Im} \mathcal{A} \leqslant U$.

2. $\operatorname{Im} \mathcal{A} = V \iff \mathcal{A}$ — сюръекция.

3. $\ker \mathcal{A} = \{0\} \iff \mathcal{A}$ — инъекция.

Доказательство. 1. Нам нужно собственно проверить замкнутость $\ker \mathcal{A}$. Пусть $x, y \in \ker \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}(x + y) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y) = 0$ по определению ядра. Осталось проверить замкнутость домножения на скаляр. Ну действительно, пусть $x \in \ker \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}(kx) = k \cdot \mathcal{A}(x) = 0$.

   $\operatorname{Im} \mathcal{A} \leqslant U$ аналогично. Пусть $X, Y \in \operatorname{Im} \mathcal{A} \Rightarrow \exists x, y \in U : \begin{cases} \mathcal{A}(x) = X \\ \mathcal{A}(y) = Y \end{cases} \Rightarrow \mathcal{A}(x + y) = X + Y$.

   Замкнутость по домножению на скаляр: пусть $x \in \operatorname{Im} \mathcal{A} \Rightarrow \exists x \in U : \mathcal{A}(x) = X \Rightarrow \mathcal{A}(kx) = kX$.

2. Это абсолютно тривиально – просто перефразирования одного и того же: если достигаются все значения, то у каждого значения хотя бы один достигающий его аргумент и наоборот.

3. $\Leftarrow$: Очевидно, так как тогда только $\mathcal{A}(0) = 0$.
   $\Rightarrow$: Предположим от противного: $x \neq y \in U : \mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(y) \Rightarrow \mathcal{A}(x-y) = 0 \Rightarrow 0 \neq x-y \in \ker \mathcal{A}$. Противоречие.

$\square$

Теорема 2.2 (О ядре и образе)**.** $\mathcal{A}$ — линейное отображение.

1. $\exists$ базис $u_1, u_2, \ldots, u_k, u_{k+1}, u_n$. Причем $u_1, \ldots, u_k$ — базис $\ker \mathcal{A}$, а $\mathcal{A}(u_{k+1}), \ldots, \mathcal{A}(u_n)$ — базис $\operatorname{Im} \mathcal{A}$.
2. $\dim(\ker \mathcal{A}) + \dim(\operatorname{Im} \mathcal{A}) = \dim U$.

Доказательство. Рассмотрим базис $u_1, u_2, \ldots, u_k$ — базис $\ker \mathcal{A}$. По лемме эту систему можно дополнить до базиса U. Рассмотрим $u_{k+1}, \ldots, u_n$ из нового базиса.

Хотим доказать, что $\mathcal{A}(u_{k+1}), \ldots, \mathcal{A}(u_n)$ — базис $\operatorname{Im} \mathcal{A}$. Докажем по определению, доказав линейную независимость и порождение всех векторов в пространстве.

- ЛНЗ-ть: Пусть $\sum a_{k+i}\mathcal{A}(u_{k+i}) = 0 \Rightarrow \mathcal{A}(\sum a_{k+i}u_{k+i}) = 0 \Rightarrow \sum a_{k+i}u_{k+i} \in \ker A \Rightarrow \exists a_1, a_2, ..., a_k :$ $\sum a_{k+i}u_{k+i} = \sum\limits_{i=1}^{k}(-a_i)u_i \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} a_i u_i = 0$. Противоречие, так как $u_1, u_2, ..., u_n$ – базис в U.
- Порождение: Возьмём какой-нибудь $u \in U$. Докажем, что $\mathcal{A}(u)$ выражается через базис. Разложим u через базис: $u = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i u_i \Rightarrow \mathcal{A}(u) = \mathcal{A}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i u_i\right) = \mathcal{A}\left(\sum\limits_{i=1}^{k} a_i u_i\right) + \sum\limits_{i=k+1}^{n} a_i\mathcal{A}(u_i)$. Но $\mathcal{A}\left(\sum\limits_{i=1}^{k} a_i u_i\right) = 0$, так как оно лежит в ядре. Значит действительно $\mathcal{A}(u) = \sum\limits_{i=k+1}^{n} a_i\mathcal{A}(u_i)$.

$\square$