

Дискретная математика

Харитонцев-Беглов Сергей

23 ноября 2021 г.

Содержание

1. Теория множеств	1
1.1 Базовые понятия	1
1.2 Операции с множествами	1
2. Комбинаторика	4
2.1 Сетки	4
2.2 Биномиальные коэффициенты	5
2.3 Мультимножество	5
2.4 k -перестановки	5
2.5 Комбинаторика в схемах и мемах	6
3. Вероятности	8
3.1 Дискретная вероятность	8
3.2 Случайная величина	9
3.3 Биномиальное распределение	9
3.4 Геометрическое распределение	10
3.5 Гипергеометрическое распределение	10
3.6 Численные характеристики	10
4. Рекуррентные соотношения	12
4.1 Определение	12
4.2 Линейные рекурренты	12
4.3 Неоднородные линейные рекурренты	13
5. Графы	14
5.1 Определения	14
5.2 Маршруты, пути, циклы. Связные графы	15
5.3 Подграфы. Основные операции над графами	17

1. Теория множеств

1.1. Базовые понятия

Есть официальный конспект, который будет Здесь.

Определение 1.1. Множество — набор различных между собой по какому-то признаку предметов.

Определение 1.2. Предметы входящие в это множество называются его элементами.

Если мы хотим описать множество, то нужно просто описать предметы этого множества. Например, чтобы задать множество студентов необходимо задать просто студентов.

Есть конечные, счетные, несчетные и целый зоопарк множеств разных мощностей. Самое простое множество — \emptyset , множество ничего не содержащее — пустое.

Определение 1.3. X подмножество (\subseteq) $Y \Leftrightarrow \forall y \in Y : y \in X$.

\emptyset и X — тривиальные, остальные — нетривиальные. все подмножества, кроме X — собственные.

1.2. Операции с множествами

Символ	Определение	Словами
\cap	$A \cap B = \dots$	Пересечение множества
\cup	$A \cup B = \dots$	Объединение множеств
\setminus	$A \setminus B = \dots$	Разность множеств
Δ	$A \Delta B = \dots$	Симметрическая разность множеств

Определение 1.4. Алгебраическая структура — множество, на котором ввели какую-то операцию.

Пример. Пусть заданы несколько множеств:

1. $\exists e : a \cdot e = a \forall a \in G$
2. $\forall a \in G \exists a^{-1} \in G : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$
3. $\forall a, b, c : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
4. $\forall a, b \in G a \cdot b = b \cdot a$

То это абелева группа и это к алгебре.

А дискретная математика не имеет аксиом, то есть мало чего можно использовать из алгебры / матана.

Если задать какое-то надмножество X над A , то появится операция дополнения: $A' = X \setminus A$.
Законы Де Моргана:

Теорема 1.1. $(A \cup B)' = A' \cap B'$

Теорема 1.2. $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Доказательство смотри в конспекте Омеля, тут мне лень это делать.

Определение 1.5. Система иномножеств — множество, элементами которого являются множества.

Определение 1.6. Семейство множеств — упорядоченный набор неких множеств (X_1, X_2, \dots, X_k) . Причем множества в наборе могут повторяться.

Определение 1.7. Некоторое покрытие множества X системой множеств — система множеств, объединение элементов которого равняется X .

Определение 1.8. Разбиение множества X на блоки — система (X_1, X_2, \dots, X_k) , удовлетворяющая неким условиям:

1. $X = \bigcup_{i=1}^k X_i$
2. $\forall i: X_i \neq \emptyset$
3. $\forall i, j = 1..k: X_i \cap X_j = \emptyset$

Определение 1.9. Пара элементов (x, y) — упорядоченный набор из двух элементов. То есть для $x \neq y: (x, y) \neq (y, x)$

Определение 1.10 (Декартово произведение). $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$

можно ввести понятие « n ки» — упорядоченный набор из n элементов. Поэтому можно ввести $A \times B \times C \times \dots$ и A^2, A^n

Определение 1.11. Отношение между множествами — некое подмножество декартова произведения этих множеств

Пусть ω — отношение между X и Y . Тогда их записывают $X\omega Y$, а отсутствие — $X\not\omega Y$.

Определение 1.12. Отношение эквивалентности (X, \sim) :

1. $x \sim x \forall x \in X$
2. $x \sim y \Rightarrow y \sim x \forall x, y \in X$
3. $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z \forall x, y, z \in X$

Пусть $\tilde{x} = \{y \in X \mid y \sim x\}$.

Свойство. пусть $y \in \tilde{x} \Rightarrow \tilde{y} = \tilde{x}$

Теорема 1.3. Разбиение на блоки задает классы эквивалентности.

- $X = \bigcup_{x \in X} \tilde{x}$
- $\tilde{x} \neq \emptyset$, т.к. хотя бы $x \in \tilde{x}$.
- Рассмотрим \tilde{x}, \tilde{y} . Пусть $\exists z: z \in \tilde{x} \cap \tilde{y}$. Тогда $\left. \begin{matrix} \tilde{z} = \tilde{x} \\ \tilde{z} = \tilde{y} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \tilde{x} = \tilde{y}$

Определение 1.13. Мультимножество — $(x; \varphi): \varphi \rightarrow \mathbb{Z}_+$

Есть еще несколько базовых понятий: k -перестановки/сочетания из n элементов с/без повторений.

$|A \cup B| = |A| + |B|$, если $A \cap B = \emptyset$. Поэтому, если есть разбиение на блоки, то $X = X_1 \cup \dots \cup X_k \Rightarrow |X| = |X_1| + \dots + |X_k|$

$X = X_1 \times \dots \times X_k$, тогда $|X| = |X_1| \cdot \dots \cdot |X_k|$

$|A' \cap B'| = |(A \cup B)'| = |X| - |A \cup B| = |X| - |A| - |B| + |A \cap B|$

2. Комбинаторика

2.1. Сшки

Есть два способа записи цэшек: $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Обычно формулы в комбинаторике используются не для подсчетов, а для определения асимптотики/верней оценки и так далее. Например если взять $n = 100$, то уже проблема: $100!$ — довольно большое число. Но там еще и деление!!! Короче, может получится небольшое число при больших числах в подсчетах.

Давайте забудем эту дурацкую формулу и будем использовать рекурренты: легко считать, пишется в миг. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, $\binom{0}{0} = 1$.

Доказательство. Пусть есть множество из n элементов. Разобьем все k -элементные подмножества на блоки: в одном все без последнего элемента, в другом все с последним. Тогда в первом блоке тогда есть $\binom{n-1}{k}$ элементов. В другом $\binom{n-1}{k-1}$ элементов. А значит $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ \square

Есть пара граничных случаев: $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{k} (n < k) = 0$. После этого можно сделать треугольник Паскаля:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & & & & 1 \\
 & & & & & & 1 & 1 \\
 & & & & & 1 & 2 & 1 \\
 & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1
 \end{array}$$

Рассмотрим решетчатую плоскость (если вы это читаете это и здесь нет картиночки напишите @doktorkrab, чтобы я добавил картиночку). Какое здесь количество путей? Ну $An^k = A_{n-1}^k + A_{n-1}^{k-1}$. А это Сшки.

Теперь посмотрим на сумму на диагонали. Получаем гипотезу: $\sum m = 0^n \binom{m}{k} = \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \dots + \binom{n-1}{k} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$.

Доказательство. По основному комбинаторному тождеству: $\binom{m+1}{k+1} = \binom{m}{k+1} \binom{m}{k} \Rightarrow \binom{m}{k} = \binom{m+1}{k+1} - \binom{m}{k+1}$. Тогда:

$$\sum_{m=k}^n \binom{m}{k} = \underbrace{\sum_{m=k}^n \binom{m+1}{k+1}}_{\binom{n+1}{k+1} + \sum_{m=k}^{n-1} \binom{m+1}{k+1}} - \underbrace{\sum_{m=k}^n \binom{m}{k+1}}_{\sum_{m=k+1}^n \binom{m}{k+1}}.$$

Дальше, если, расписать сумму все получится.

Пусть хочу набрать $k+1$ -элементное подмножество из $n+1$ -элементного множества. Пусть мы выбрали последний элемент, тогда у нас есть $\binom{n}{k}$ способов, а если не выбрали, то $\binom{n}{k+1}$ способов. А по индукции $\binom{n}{k+1} = \binom{n-1}{k+1} + \binom{n-1}{k}$. И так далее. \square

Рассмотрим $\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \cdot \binom{m}{k-i}$

Доказательство. Рассмотрим два множества: одно n -элементное ("мальчики"), другое m -элементное ("девушки"). Тогда пусть мы выбрали i мальчиков, тогда нам нужно выбрать $k-i$ девушек. \square

Мы здесь применили принцип **double counting**: если мы посчитали что-то двумя способами, то результаты равны.

2.2. Биномиальные коэффициенты

Подробности на втором курсе.

Рассмотрим бином Ньютона: $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k}$

Доказательство. Раскроем скобки в левой части: $(x+y)(x+y)(x+y) \dots$ Когда у нас x^k ? Когда мы ровно в k скобках выбрали x . Сколько способов? Очевидно $\binom{n}{k}$. \square

Частные случаи:

- $x = y = 1$. Тогда $2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$

Рассмотрим множество $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Каждому числу можно сопоставить 0/1 — берем/не берем. Тогда количество подмножеств — количество бинарных строчек длины n . Такой метод называется биективным: когда мы доказываем, что один объект является биекцией другого, то их количества равны.

- $x = 1, y = -1$. Тогда $0 = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$ — количества способов выбрать подмножество четных длин и нечетных длин равны.

2.3. Мультимножество

Хотим посчитать $\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)$ — количество k -элементных подмультимножеств.

Пусть $X = [n]$. По принципу биекции найдем сначала $\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)$ для X , а потом найти для произвольного множества.

Пусть есть множество A , заменим его на множество $\{i + A_i\}$. $\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \binom{n+k-1}{k}$

2.4. k -перестановки

Определение 2.1. Упорядоченные набор из k элементов, где все элементы принадлежат множеству X .

Если мы считаем, что с повторениями, то ответ n^k , а если без то $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = (n)_k$. Перестановку можно записать как: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$. То есть i перешло в a_i . После

этого можно композировать перестановки: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Заметим, что:

1. Существует нейтральный элемент — тождественная перестановка $e = \{1, 2, \dots, n-1, n\}$
2. Существует обратный элемент: $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = e$
3. Ассоциативность: $\sigma \cdot (\tau \cdot \pi) = (\sigma \cdot \tau) \cdot \pi$

Значит перестановки с операцией композиции — группа. Носит название S_n . Есть теорема о том, что любая конечная группа представима как подгруппа S_n .

Рассмотрим $(n)_k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \binom{n}{k} \cdot k!$. Тогда $\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}$. Тогда можно заменить n на $q, q \in \mathbb{C}$. Тогда

$$\binom{q}{k} = \begin{cases} \frac{(q)_k}{k!} & k > 0 \\ 1 & k = 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

Пусть $(n)^k = n \cdot (n+1) \cdot \dots \cdot (n+k-1)$. Тогда $\binom{n}{k} = \frac{(n)^k}{k!}$

2.5. Комбинаторика в схемах и мемах

Пусть есть n различных предметов. Нужно выбрать k предметов с различными ограничениями: с повторениями/без, упорядоченные/неупорядоченные.

	с повторениями	без повторений
упорядоченные	n^k	$(n)_k$
неупорядоченные	$\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k}$

Схема ящиков.

	\forall	≤ 1	1	≥ 1
ящики+предметы различимы	n^k	$(n)_k$	$1/n!$	$\widehat{S}(n, k)$
ящики различимы, а предметы — нет	$\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k}$	$1/0$	$\binom{n}{k-n}$
ящики не различимы, а предметы различимы				$S(n, k)$
ящики+предметы неразличимы				

Последнюю строчку мы не сможем заполнить на первом курсе, нужны производящие функции. Эта строчка решает множество задач, например, разложение числа на слагаемые.

Отображение $f : X \rightarrow Y$ — такое правило, что $\forall x \in X \exists! y \in Y : y = f(x)$. Количество k^n ($|X| = n, |Y| = k$)

Определение 2.2. Отображение — тройка из $(x, y, \Gamma \subseteq X \times Y)$, причем каждый x_i встречается в Γ ровно один раз.

Определение 2.3. Отображение называется инъективным, если $\forall x_1, x_2 \in X \ f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Их количество — $(k)_n$

Определение 2.4. Отображение называется биективным, если $\forall y \in Y \exists! x \in X : y = f(x)$. Количество — $n!$.

Определение 2.5. Отображение называется сюръективным, если $\forall y \in Y \exists x \in X : y = f(x)$.

Посчитаем количество сюръективных отображений. Пусть $\text{Im}(f) = \{y \in Y \mid \exists x \in X : y = f(x)\}$. Тогда для любого отношения $f : X \rightarrow \text{Im}(f)$ — сюръективно.

Пусть $|\text{Im}(f)| = i$, а количество сюръективных отображений — $\widehat{S}(n, i)$. Тогда $\widehat{S}(n, i) \cdot \binom{k}{i}$ — количество сюръективных подмножеств мощности k .

$$\text{Тогда } k^n = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \widehat{S}(n, i)$$

Пусть есть две числовые последовательности $f_0, f_1, \dots, f_k, \dots$ и $g_0, g_1, \dots, g_k, \dots$. Причем $g_k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} f_i$, тогда $f_k = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} g_i$. Значит $\widehat{S}(n, k) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \cdot i^n$

Рассмотрим отображение $\{\{x_1, x_2\}, \{x_3\}, \emptyset\}$. Получение разбиение на блоки. Предположим, что отображение сюръективно, значит получили разбиение k предметов n ящиков.

Предположим, что в первый ящик нужно положить a_1 предмет, во второй — a_2 , и так далее. Тогда количество вариантов: $\sum \binom{n}{a_1} \binom{n-a_1}{a_2} \dots$. Если взять $\sum_{a_i \geq 0, a_1 + \dots + a_k = n} \binom{n}{a_1} \binom{n-a_1}{a_2} = k^n = \frac{n!}{a_1! a_2! \dots a_k!}$. А если $\sum_{a_i > 0, a_1 + \dots + a_k = n} \binom{n}{a_1} \binom{n-a_1}{a_2} = \widehat{S}(n, k)$

Хотим разбить на блоки вида a_1 предметов + a_2 предметов + a_3 предметов... Тогда заметим, что это $\sum_{a_i \geq 0, \sum a_i = n} \binom{n}{a_1} \binom{n-a_1}{a_2} \dots \binom{n-a_1-a_2-\dots-a_{k-1}}{a_k}$. Заметим, что суммарно это k^n , а если строго больше нуля, то $\widehat{S}(n, k)$. Также можно раскрыть скобки и получить. $\frac{n!}{a_1! a_2! \dots a_k!}$

Рассмотрим $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = P(n; k; n-k)$. Комбинаторно они равны через битовые строки.

Теперь посмотрим на $\left(\binom{n}{k}\right) = \frac{(n-1+k)!}{(n-1)!k!}$, через шары и перегородки.

Вернемся к k^n — все отображения, $\widehat{S}(n, k)$ — все сюръективные отображение, $S(n, k)$ — количество разбиений n -множества на k -подмножества. (Числа Стирлинга второго рода).

Заметим, что $S(n, k) \cdot k! = \widehat{S}(n, k)$, так как в S с крышечкой это про неупорядоченные. $S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n$. $S(0, 0) = 1$. $\forall S(n, 0) = 0$. $S(n, k) = S(n-1, k-1) + k \cdot S(n-1, k)$. Доказываем так: либо удаляем x_n , либо пишем x_n куда-то.

$$k^n = \sum_{i=0}^n \binom{k}{i} \widehat{S}(n, i) = \sum_{i=0}^n \frac{k!}{i!(k-i)!} S(n, i).$$

Откуда:

$$x^n = \sum_{i=0}^n (x)_i \cdot S(n, i) \iff (x)_n = \sum_{i=0}^n x^i s(n, i)..$$

Где $s(n, i)$ — числа Стирлинга первого рода.

Решим задачу, где мы хотим разбить n различных предметов в k различных ящиков $B(n, k) = \sum_{i=0}^k S(n, i)$. Причем $B(n, n) = B_n$ — числа Белла. Количество способов разбить n -множество на блоки.

3. Вероятности

3.1. Дискретная вероятность

Вероятностное событие — событие в какой-то вероятностной математической модели. (Результат трудно предсказать)

Множество исходов $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ — состоит из элементарных исходов. В дискретной вероятности Ω конечно или счетно.

Событие A — подмножество Ω .

Рассмотрим какой-то набор событий, добавим туда \emptyset, Ω . Получим алгебру. Тогда вероятность это отображение $P : \Omega \mapsto [0, 1]$, такое что $\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$. Тогда $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$.

1. $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Определение 3.1. Назовем события A и B несовместными, если $A \cap B = \emptyset$.

Некоторым очень хочется дать определение вида $P_r(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$. Это не работает, если события не равновероятны.

Пусть есть два события на кубике: A — число > 3 , B — четное число. $P_r(A) = \frac{1}{2}, P_r(B) = \frac{1}{2}$.

Теперь пусть есть инсайд: событие A произошло. Тогда $P_r(B | A) = \frac{2}{3}$. Тогда посмотрим на картинку и получим $P_r(B | A = \frac{|A \cap B|}{|A|})$. Но не забудем, про то, что мы смотрели на равновероятные события, тогда поделим на $|\Omega|$. Получим $P_r(B|A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P_r(A \cap B)}{P_r(A)}$.

Посмотрим на крайние случаи: $P_r(A|A) = 1$, $P_r(A|\Omega) = P_r(A)$, $P_r(B|A) = 1$, если $A \subseteq B$.

Тогда пусть $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Тогда $P_r((B_1 \cup B_2) \cap A) = P_r((B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A)) = P_r(B_1 \cap A) + P_r(B_2 \cap A)$.
 A $P_r(B_1 \cup B_2 | A) = P_r(B_1 | A) + P_r(B_2 | A)$.

Посмотрим на $P_r(B|\bar{A}) = \frac{1}{3}$. Докажем, что $P_r(B | A) \cdot P_r(A) + P_r(B | \bar{A}) \cdot P_r(\bar{A}) = 1$. Докажем формулу полной вероятности.

Доказательство. Пусть Ω разбита на блоки $\{A_1, \dots, A_k\}$. Заметим, что $P_r(B) = P_r(B \cap \Omega) = P_r(B \cap (A_1 \cup \dots \cup A_k)) = P_r((B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_k))$. Дальше заметим, что $\forall i, j : A_i \cap A_j = \emptyset$. Тогда получаем $P_r(B \cap A_1) + P_r(B \cap A_2) + \dots + P_r(B \cap A_k)$. Применив формулу условной вероятности, получим формулу полной вероятности:

$$P_r(B) = P_r(B | A_1) \cdot P_r(A_1) + P_r(B | A_2) \cdot P_r(A_2) + \dots + P_r(B | A_k) \cdot P_r(A_k).$$

□

Заметим, что $P_r(A \cap B) = P_r(B | A) \cdot P_r(A)$ и $P_r(B \cap A) = P_r(A | B) \cdot P_r(B) \Rightarrow P_r(A | B) = \frac{P_r(B|A)P_r(A)}{P_r(B)}$. Тогда, вспомнив формулу полной вероятности, получаем:

$$P_r(A_i | B) = \frac{P_r(B | A_i) \cdot P_r(A_i)}{\sum_{j=1}^k P_r(B | A_j) \cdot P_r(A_j)}.$$

Пусть у вас есть событие $P_r(B)$, причем $P_r(B) = P_r(B | A) = \frac{P_r(A \cap B)}{P_r(A)} P_r(A) \Rightarrow P_r(A \cap B) = P_r(A) \cdot P_r(B)$

Определение 3.2. Два события называются независимыми, если вероятность их пересечения равна произведению вероятностей этих событий.

Схема Бернулли: есть n независимых испытаний, где есть два исхода: $p > 0$ и $q > 0$, $p + q = 1$. Все элементарных исходов можно записать в виде бинарной строки длины n . Тогда для какого-то ω $P_r(\omega) = p^k \cdot q^{n-k}$, $k = \sum_{i=1}^n a_i$. Заметим, что $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p + q)^n = 1^n = 1$.

Определение 3.3. Независимые в совокупности события — события A_1, \dots, A_k , такие что $P_r(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) = P_r(A_1) \cdot P_r(A_2) \cdot \dots \cdot P_r(A_k)$,

$\Omega_1 = \{\text{успех, неудача}\}$, $P_{r_1}(\omega) = \begin{cases} p & \text{успех} \\ q & \text{неуспех} \end{cases}$, $A_1 = \{\emptyset, \text{успех, неудача}, \Omega\}$. Тогда $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$, $A = A_1 \times \dots \times A_n$.

Тогда рассмотрим (Ω_1, A_1, P_{r_1}) , (Ω_2, A_2, P_{r_2}) . Тогда $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $A = A_1 \times A_2$. Тогда события $A_1 \times \Omega_2$, $\Omega_1 \times A_2$.

3.2. Случайная величина

Определение 3.4. Случайная величина ξ — отображение $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Иногда описание при помощи $\Omega, \mathbb{A}, \text{Pr}$ даёт слишком точное, громоздкое описание. А мы хотим только суть: например сумму значений после броска двух кубиков.

Рассмотрим некую Ω : $|\Omega| = m$, $|X| = n$, где $X = \{x_i \mid x_i = \xi(\omega)\}$. Рассмотрим событие $A_k = \{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) = x_k\}$. Тогда $\text{Pr}(A_k) = \sum_{\omega \in \Omega; \xi(\omega) = x_k} \text{Pr}(\omega)$.

Определение 3.5. $\{\text{Pr}(A_1), \dots, \text{Pr}(A_n)\}$ — распределение вероятности случайной величины ξ . Причем $\sum_{k=1}^n \text{Pr}(A_k) = 1$.

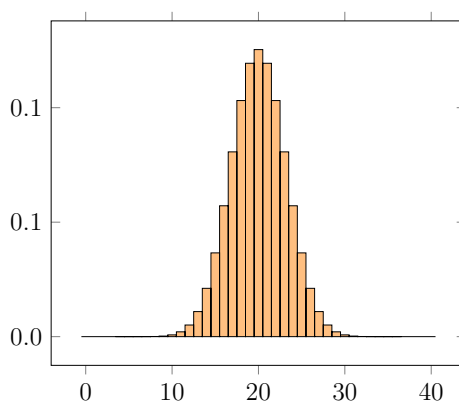
А теперь пусть B — множество всех подмножеств X , тогда можно перейти к пространству (X, B, Pr) . Так мы получили более простой эксперимент.

3.3. Биномиальное распределение

Вспомним, что такое схема Бернулли: пусть есть монетка, которую кидаем n раз, орел выпадает с вероятностью p , решка с вероятностью q . Тогда $\omega = (0, 1, 1, 0, \dots, 0)$, в общем случае $\omega = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $a_n \in \{0, 1\}$. $k := \sum_{i=1}^n a_i$ — количество успехов в n испытаниях.

Нам кажется, что такое описание ω довольно сложно, нам хочется просто знать что-то про k . Тогда введем ξ : $\xi(\omega) = k$. Тогда $X = \{0, 1, 2, \dots, n\}$, а $\text{Pr}(\xi(\omega) = w) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

Тогда заметим, что $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p + q)^n = 1^n = 1$. Значит, у нас нормальная вероятность. Построим тогда график.



3.4. Геометрическое распределение

Нам интересен первый момент, когда у нас произошел фейл. Тогда пусть $\xi(\omega) = k$ — первый момент фейла. $\Pr(\xi(\omega) = k) = q^{k-1} \cdot p$. Тогда проверим нормировку: $\sum_{k=1}^{\infty} p \cdot q^{k-1} = p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \frac{p}{1-q} = \frac{p}{p} = 1$.

3.5. Гипергеометрическое распределение

У нас есть три переменных n, m, k . Число предметов первого и второго сорта. $\xi(\omega)$ — кол-во предметов 1-го сорта в выборке из k человек. $\Pr(\xi(\omega) = i) = \frac{\binom{n}{i} \binom{m}{k-i}}{\binom{n+m}{k}}$

У нас могут начаться проблемы из-за того, что у нас может быть задано несколько величин. Пусть η — произведение при броске двух кубиков.

y	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16
$\Pr(B)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$										

Определение 3.6. Если $\forall \omega : \Pr(\xi(\omega) = x \wedge \eta(\omega) = y) = \Pr(\xi(\omega) = x_k) \cdot \Pr(\eta(\omega) = k)$, то случайные величины независимы.

Посмотрим на $\xi(\omega) = x_i, \eta(\omega) = y_i$. Тогда пусть $\chi(\omega) = \eta(\omega) + \xi(\omega)$. Тогда $\Pr(\chi(\omega) = z) = \Pr(\chi(\omega) = x_i + y_i) = \sum_{k,j: x_k + y_j = z} \Pr(\xi(\omega) = x_k \wedge \eta(\omega) = y_k)$. Если величины независимы, то получим под суммой $\Pr(\xi(\omega)) \cdot \Pr(\eta(\omega))$

3.6. Численные характеристики

$\xi(\omega) \in X = \{x_1, \dots, x_n\}$. $\{p_1, p_n\}$ — распределение вероятности: $p_i = \Pr(\xi(\omega) = x_i)$. Посмотрим на среднее: $\frac{x_1 \cdot (p_1 N) + x_2 \cdot (p_2 N) + \dots + x_n \cdot (p_n N)}{N} = \sum_{i=1}^n p_i \cdot x_i =: E(\xi)$.

Определение 3.7. $E(\xi)$ — мат. ожидание величины ξ .

Определение 3.8. Медианой называется число m , такое что $\Pr(\xi(\omega) \geq m) \geq \frac{1}{2}$ и $\Pr(\xi(\omega) \leq m) \geq \frac{1}{2}$

Пример. Пусть в университете работает 100 человек, у 96 зарплата 20 тысяч рублей, у 4 — 2 миллиона. Тогда $E = 99200$ рублей. А медиана равна 20 тысячам. Поэтому медиану лучше использовать в неравномерных распределениях.

Помним, что $E(\xi) = \sum_{k=1}^n x_k \cdot p_k = \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega) \cdot \Pr(\omega)$. Так как $p_k = \Pr(\xi(\omega) = x_k) = \sum_{\omega: \xi(\omega)=x_k} \Pr(\omega)$.

Утверждение 3.1. $E(c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2) = c_1 E(\xi_1) + c_2 E(\xi_2)$.

Доказательство. $E(\xi_1 + \xi_2) = \sum_{\omega \in \Omega} (\xi_1 + \xi_2) \Pr(\omega) = \sum_{\omega} \xi_1 \Pr(\omega) + \sum_{\omega} \xi_2 \Pr(\omega) = E(\xi_1) + E(\xi_2)$ \square

Определение 3.9. Дисперсия $Var(\xi) = E(\xi - E(\xi))^2$

Посчитаем это: $= E(\xi^2 - 2E(\xi)\xi + E^2(\xi)) = E(\xi^2) - 2E(\xi)E(\xi) + E^2(\xi) = E(\xi^2) - E^2(\xi)$.

Заметим, что дисперсия не линейна: $Var(\xi_1 + \xi_2) = E((\xi_1 + \xi_2)^2) - E^2(\xi_1 + \xi_2) = \dots = E(\xi_1^2) + 2E(\xi_1 \cdot \xi_2) + E(\xi_2^2) - E^2(\xi_1) - 2E(\xi_1)E(\xi_2) - E^2(\xi_2) = Var(\xi_1) + Var(\xi_2) + 2cor(\xi_1; \xi_2)$, где $cor(\xi_1, \xi_2) = E(\xi_1 \xi_2) - E(\xi_1) \cdot E(\xi_2)$

Теорема 3.2 (Теорема Чебышева). $E((\xi - \mu)^2 \geq \alpha) \leq \frac{Var(\xi)}{\alpha} \forall \alpha > 0$, где $\mu := E(\xi)$.

Следствие. $\sigma := \sqrt{\text{Var}(\xi)}$; $\text{Var}(\xi) = \sigma^2 \Rightarrow \alpha = c^2 \sigma^2$. Тогда $E(|\xi - \mu| \geq c\sigma) \leq \frac{1}{c^2}$.

4. Рекуррентные соотношения

4.1. Определение

Определение 4.1. Пусть есть последовательность (a_0, a_1, a_2, \dots) и $a_{n+1} = F(a_0, a_1, \dots)$. Тогда данная последовательность рекуррентная.

Будем рассматривать последовательности, в которых n -ый считается от фиксированного количества предыдущих членов.

Пример. Разводим лягушек. Изначально есть 50 лягушек. Каждый год количество увеличивается в 4 раза, но сто лягушек едут во Францию (навсегда...). Тогда количество лягушек в i -ый год: $a_n = 4a_{n-1} - 100$.

Очень классно, но что с этим можно сделать? Все просто — есть проблема в скорости пересчета, поэтому хочется найти замкнутую форму (формулу).

Но не для всех можно придумать формулу, конечно, не всегда. Но такие последовательности от дьявола.

4.2. Линейные рекурренты

Определение 4.2. Линейными рекуррентным соотношениями будем называть рекурренты вида:

$$a_{n+m} = b_1(n) \cdot a_{n+m-1} + b_2(n)a_{n+m-2} + \dots + u(n).$$

Где $b_i(n) = \text{const} = u(n)$.

Определение 4.3. Соотношение однородное, если $u(n) = 0$.

Если соотношение однородное, то можно сказать $a_n = \lambda^n$! Что просто замечательно! $a_{n+2} = b_1 a_{n+1} + b_2 a_n$. Тогда $\lambda^{n+2} = b_1 \lambda^{n+1} + b_2 \lambda^n$.

Тогда получаем, $\lambda^2 = b_1 \lambda + b_2$ — **характеристическое уравнение рекуррентного соотношения**.

Пусть мы в решении мы нашли два неравных решения λ_1, λ_2 . Тогда заметим, что их сумма подходит. А еще домножение каждого на константу работает.

То есть $a_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n, \forall c_1, c_2$. Тогда нам можно выбрать просто a_0, a_1 .

Заметим, что по a_0, a_1 можно найти c_1, c_2 :
$$\begin{cases} a_0 = c_1 \lambda_1^0 + c_2 \lambda_2^0 = c_1 + c_2 \\ a_1 = c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 \end{cases}$$
. Откуда получаем,

что $c_2 = \frac{a_1 - \lambda_1 a_0}{\lambda_2 - \lambda_1}$ и $c_1 = a_0 - c_2$.

Теперь разберем случай, когда $\lambda_1 = \lambda_2$. Тогда будем искать вид $a_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \cdot n \cdot \lambda_1^n$.

Доказательство. Хотим доказать:

$$c_1 \cdot \lambda^{n+2} + c_2(n+2)\lambda^{n+2} = b_1 c_1 \lambda^{n+1} + c_2(n+1)\lambda^{n+1} + b_1 c_1 \lambda^n + c_2(n)\lambda^n.$$

Заметим, что достаточно доказывать, что $c_1 \dots = c_1 \dots$ и $c_2 \dots = c_2 \dots$. Тогда докажем, что штука $(n+2)\lambda_1^{n+2} = b_1(n+1)\lambda^{n+1} + b_2 n \lambda^n$:

$$n \lambda_1^n + 2 \lambda^{n+2} = n \lambda_1^{n+1} + n \lambda_1^n + \lambda_1^{n+1}.$$

Заметим, что штуки с n решаются понятно как (λ_1 — корень хар. уравнения). Тогда получили:

$$2\lambda_1^{n+2} = \lambda_1^{n+1} \iff 2\lambda_1^2 - \lambda_1 = 0.$$

Дальше решаем систему для a_0, a_1 и живем счастливо! □

Пример Числа Фиббоначи.

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, F_n = \lambda^n.$$

$$\lambda^{n+1} = \lambda^n + \lambda^{n-1} \iff \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{cases} F_0 = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 \\ F_1 = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 \end{cases}.$$

Откуда получаем, что $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Пусть у нас больше двух членов в рекурренте. Заметим, что там техника будет ровно такая же. Только теперь получим $a_n = \sum c_i \lambda_i^n$. Но пусть у лямбды есть кратность, тогда будем искать: $a_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 n \lambda_1^n + c_3 n^2 \lambda_1^n + \dots$. Соответственно, если кратность ds , то для лямбды будет $\sum c_i n^i \lambda^n$.

4.3. Неоднородные линейные рекурренты

Пусть есть $a_{n+1} = 4a_n - 100$. Тогда скажем, что на самом деле $a_{n+1} = ba_n + 4 = b(ba_{n-1} + 4) = b(b(ba_{n-2} + 4) + 4) + 4 = \dots = b^{n+1}a_0 + (b^n + b^{n-1} + \dots + b + 1) \cdot 4 = b^{n+1} \cdot a_0 + \frac{b^{n+1}-1}{b-1} \cdot 4$.

Теорема 4.1. $a_{n+m} = b_1 a_{n+m-1} + \dots + b_m a_n + u(n)$. Если α_n — решение левого, а β_n — удовлетворяет тому же, но без $u(n)$. То $\alpha_n + c\beta_n$ будет удовлетворять рекурренте.

Доказательство. $\alpha_{n+m} + c\beta_{n+m} = b_1(\alpha_{n+m-1} + c\beta_{n+m-1}) + \dots + u(n)$. □

Пример. $a_{n+1} = 2a_n + 7$. $a_n = C$, тогда $c = -7$. $a_{n+1} = 2a_n \Rightarrow a_n = c2^n$. $a_0 = c \cdot 2^0 - 7 \Rightarrow C = a_0 + 7$

Пример. $a_{n+1} = 2a_n + (n+1)3^n$. Будем искать частное решение вида $(b_1 n + b_0)3^n$:

$$b_1(n+1)3^{n+1} + b_03^{n+1} = 2b_13^n + 2b_1b_03^n + (n+1)3^n.$$

Сокращаем на 3^n :

$$3b_1n + 3b_1 + 3b_0 = n + 2b_1 + b_0 + 1..$$

Что выполняется для любого n . Тогда $3b_1 = 1$ и $3b_1 + 3b_0 = 2b_1 + 2b_0 + 1$

Пример. $a_{n+1} = a_n + 1$. Заметим, что здесь $c = c + 1$ уже не подходит. А характеристическое уравнение: $a_{n+1} = a_n \Rightarrow \lambda = 1$.

Пример. $a_{n+2} = 7a_{n+1} + 11a_n + 7^n + (n+1)3^n$. Последние два слагаемые нельзя представить в виде $P(n)R^n$. Тогда можно отдельно решить без них, с первым с двумя. А дальше как обычно.

5. Графы

5.1. Определения

Определение 5.1. Граф G — тройка (V, E, I) :

1. V — конечное множество вершин.
2. E — конечное множество ребер.
3. $I: E \rightarrow \binom{V}{2}$.

Определение 5.2. Концевые вершины ребра — вершины, которые соединены этим ребром.

Определение 5.3. Если два ребра имеют одинаковые концевые вершины, то такие ребра — кратные (мультиребра).

Определение 5.4. Если ребро соединяет вершину с собой, то это ребро — петля.

Определение 5.5. Граф простой — без петель и мультиребер.

Определение 5.6. Степень ребра (валентность) — количество ребер, исходящих из вершины.

Теорема 5.1. Сумма степеней вершин в графе равна удвоенному количеству ребер. То есть

$$\sum_{v \in V(G)} \deg v = 2 \cdot |E|$$

Доказательство. Каждое ребро состоит из двух полуребер. Из каждой вершины «торчит» $\deg v$ полуребер (принцип биекции). Тогда получили, что $\sum \deg v = 2|E|$ \square

Следствие. Количество вершин нечетной степени в графе чётно.

Определение 5.7. Ребро e инцидентно вершине u , если u — концевая вершина ребра.

Определение 5.8. Матрица инцидентности — таблица, где строчки соответствуют вершинам, а столбцы — рёбрам, а на пересечении столбца и строки стоит 0, если эта вершина не инцидентна этому ребру, иначе то, сколько раз она ему инцидентна (1, если не петля, иначе — 2).

Можно заметить, что сумма всех чисел в каждом столбце — два, а в каждой строке — степень вершины. Из этого несложно в очередной раз заметить, что сумма удвоенного количества рёбер есть сумма степеней вершин.

Определение 5.9. Полный граф — полный простой граф на n вершинах. K_n . Граф, в котором каждая вершина соединена ребром с каждой.

Определение 5.10. Дополнением графа G называется граф \bar{G} : $V(\bar{G}) = V(G)$, а $E(\bar{G}) = \binom{V(G)}{2} \setminus E(G)$

Определение 5.11. Граф называется двудольным $V(G) = V_1 \cup V_2, V_1 \cap V_2 = \emptyset$. И все ребра ведут из V_1 в V_2 .

Определение 5.12. Полный двудольный граф — двудольный граф со всеми возможными ребрами. $K_{n,m}$, если в одной доле n вершин, а в другой m .

Определение 5.13. Граф « k -мерный куб» — Q_k , такой граф, что V — множество бинарных строк длины k . $E : e = uv \iff u$ и v отличаются в одном бите.

Замечание. Заметим, что данный граф двудольный: одна доля с четной суммой битов, другая — с нечетной.

Определение 5.14. P_n — граф «путь». Просто простой путь. Ничего лишнего.

Определение 5.15. C_n — граф «цикл». Простой путь, замкнутый в кольцо.

Определение 5.16. Регулярный граф — граф, в котором степень всех вершин равны. R -регулярный граф — граф, в котором степени всех вершин равны R .

Определение 5.17. Ортаф (ориентированный граф) $D = (V, E, I)$, где $I : E \rightarrow V \times V$.

Теорема 5.2. $\sum_{v \in V(G)} \text{indeg}(v) = \sum_{v \in V(G)} \text{outdeg}(v) = |E(D)|$

Доказательство. Очев. Реально очев. Входящих концов у ребер суммарно столько же, сколько и исходящих. \square

Определение 5.18. Не помню, было ли тут что-нибудь. Если вам кажется, что мы пропустили какое-то определение — напишите пж.

Определение 5.19. Ориентацией графа G называется граф G полученный ориентацией всех ребер графа G .

Определение 5.20. Граф называется турниром, если он является ориентацией полного графа.

Определение 5.21. Две вершины называются смежными, если есть ребро между ними.

Определение 5.22. Матрица смежности — матрица размера V на V . $A_{i,j}$ показывает сколько ребер идет из i в j .

Определение 5.23. Список смежности — список списков, где для каждой вершины храним выходящие из нее ребра.

5.2. Маршруты, пути, циклы. Связные графы

Определение 5.24. Маршрут (walk) — набор вершин и ребер вида: $v_0, e_0, v_1, e_1, \dots$, где v_i — вершины графа, e_i — ребра графа, причем $e_i = v_{i-1}v_i$

Определение 5.25. Путь (trail) — маршрут без повторяющихся ребер.

Определение 5.26. Простой путь (path) — Путь (сложный) без повтора вершин.

Определение 5.27. Вершины x и $y \in V$ называются связанными, если существует путь, соединяющий x, y .

Замечание. Заметим, что связность — отношение эквивалентности. $x \rightarrow x$ — очев, $x \rightarrow y = y \rightarrow x$. $x \rightarrow y, y \rightarrow z$, тогда $x \rightarrow z = x \rightarrow y \cup y \rightarrow z$.

Тогда можно разбить на блоки — компоненты связности.

Определение 5.28. Расстояние $d(x, y)$ — длина кратчайшего пути из x в y .

Определение 5.29. Диаметр графа — это расстояние между двумя наиболее удаленными точками.

Определение 5.30. $x \in V(G)$ эксцентриситет $\varepsilon(x) = \max_{y \in V(G)} d(x, y)$

Определение 5.31. Радиус G : $r(G) = \min_{x \in V(G)} \varepsilon(x)$

Определение 5.32. Замкнутый путь — путь, которого стартовая вершина равна конечной.

Определение 5.33. Обхват — минимальная длина цикла в графе. Если в графе циклов нет, то равен бесконечности.

Определение 5.34 (Теорема Кенига(König)). Граф двудольный \iff в нем нет циклов нечетной длины.

Доказательство.

- \Rightarrow . Предположим, что есть цикл нечетной длины. Каждое ребро — переход в другую долю. То есть в стартовую долю мы переходим через четное число ходов. Противоречие.
- \Leftarrow , нет простых нечетных циклов \Rightarrow двудольный.

Будем считать, что G — связный. Возьмем вершину x . Поместим все вершины на нечетном расстоянии в правую долю, все остальные в левую.

Неправильное решение: Рассмотрим случаи двух смежных вершин на нечетном + нечетном и четном + четном расстоянии. Проблема: путь может быть сложным, поэтому объединение может давать не простой цикл.

Правильное решение: пойти читать конспект Омеля, нам очень лень рисовать или писать словами. Поэтому очень жаль:((НО! если вы сильный, то можете написать)

□

Проверка на двудольность: для каждой вершины кидаем смежную вершину в другую долю.

Определение 5.35. Пусть x, y — вершины орграфа D , то они называются связанными, если существует путь из x в y и существует путь из y в x .

Замечание. Такая связанность — отношение эквивалентности. Блоки — компоненты сильной связности.

Определение 5.36. Компоненты слабой связности — компоненты связности, если забыть про ориентацию.

Лемма. Пусть H_1, H_2 — компоненты сильной связности. Если существует ребро $H_1 \rightarrow H_2$, то ребра $H_2 \rightarrow H_1$ не существует.

Доказательство. Предположим, что ребро существует. Тогда получили одну компоненту сильной связности. Противоречие. □

Лемма. Я пропустил лемму. Видимо про то, что из компонент сильной связности можно сделать граф без циклов.

Доказательство. По предыдущей лемме — очев. □

Определение 5.37. Топологическая сортировка — запись вершин в таком порядке, что все ребра идут слева направо.

Утверждение 5.3. Любой ациклический граф может быть топологически отсортирован.

Доказательство. Омель так сказал. □

Замечание. В графе может быть несколько топологических сортировок.

Следствие. В ациклическом графе есть вершина, из которой не выходит ребро.

5.3. Подграфы. Основные операции над графами

Определение 5.38. Граф H называется подграфом графа G , если

1. $V(H) \subseteq V(G)$
2. $E(H) \subseteq E(G)$
3. $I_H: E(H) \rightarrow V(H) \times V(H)$
 $I_G: E(G) \rightarrow V(G) \times V(G)$
 I_H — сужение I_G .

Определение 5.39. Операция удаления ребра — $G \setminus e_5$ или $G - e_5$. Просто удаляем ребро. Получаем $(G', V, E \setminus e_5)$.

Определение 5.40. Операция удаления вершины. Удаляем вершину + все смежные вершины. $(G \setminus V \setminus \{v\}, E \setminus \bigcup_{u \sim v} vu)$

Утверждение 5.4. Любой подграф получается удалением ребер и вершин.

Доказательство. Удалим ребра $E \setminus E'$, удалим вершины $V \setminus V'$. □

Определение 5.41. Если подграф H графа G можно получить удалением из G только ребер, то H — остовный подграф.

Определение 5.42. Если подграф H графа G можно получить только удалением вершин, то H — порожденный или индуцированный подграф. $V(H)$ — порождающее множество.

Определение 5.43. Операция стягивания ребра. Есть ребро (u, v) удалим, u, v и добавим вершину w , причем w смежна с x , если x смежна с v или x смежна с u .

Определение 5.44. Мост — ребро, при удалении которого число компонент связности увеличивается.

Определение 5.45. Вершина v называется точкой сочленения, если при удалении данной вершины компонента связности распадается на 2 и более.

Утверждение 5.5. Вершина v в связном графе G является точкой сочленения тогда, и только тогда, когда существуют вершины x и y , что любой путь из x в y проходит через v .

Доказательство. Пусть v — точка сочленения. Пусть существует путь из x в y , не проходящий через v . Тогда после удаления v , из x в y все еще будет путь \Rightarrow они в одной компоненты связности.

В обратную сторону. Удалим v , тогда из x больше нет пути в y . Значит компонента разбилась хотя бы на две компоненты. □