# Математический анализ

Харитонцев-Беглов Сергей

20 декабря 2021 г.

## Содержание

# 1. Множества, отношения

## 1.1. Орг. моменты

- За основу начала была взята книжка "Виноградов, Громов «Курс по математическому анализу». Том 1". Но это было давно, как база, но смотреть туда можно.
- Зорич «Математический анализ».
- Фихтенгольц. Книжка устарела, написана старым языком, но там разобрано много примеров, поэтому можно смотреть просто темы.
- Курс на степике. (Часть вторая).

Для связи можно использовать почту `aikhrabrov@mail.ru`.

Система состоит из нескольких кусочков: 0.3·оценка за практику(АЗ, кр...)+0.35·Коллоквиум в неч ·Экзамен в четном модуле. Хвост образуется только в конце семестра.

Первый модуль — общие слова, последовательности, пределы последовательности, функции, непрерывность. Второй модуль — конец непрерывности, производная, начало интегралов.

## 1.2. Что такое множество

Обойдемся без формалистики — мы тут занимаемся прикладной математикой. Поэтому

***Определение* 1.1.** Множество — какой-то набор элементов. Для любого элемента можно сказать принадлежит множеству или нет.

| Операция | определение | название |
|---|---|---|
| $A \subset B$ | $\forall x:\ x \in A \Rightarrow x \in B$ | $A$ — подмножество $B$ |
| $A = B$ | $A \subset B \wedge B \subset A$ | $A$ равно $B$ |
| $A \subsetneq B$ | $A \subset B \wedge A \neq b$ | $A$ — собственное подмножество $B$ |

Способы задания множеств:

- Полное задание: $\{a, b, c\}$.
- Неполное: $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Но должно быть понятно как образована последовательно. Например $\{1, 5, \ldots, 22\}$ — непонятно
- Можно так же и бесконечные: $\{a_1, a_2, \ldots\}$
- Словесным описанием. Например, множество простых чисел.
- Формулой. Например, пусть задана функция $\Phi(x)$ — функция для всех чисел, которая возращает истину или ложь. Тогда можно взять множество $\{x:\ \Phi(x) = \text{истина}\}$.
  Но не всякая функция подходит, особенно если функция из реального мира. Например: «натуральное число может быть описано не более чем 20 словами русского языка». Не подходит оно по следующей причине: пусть наша функция подходит, то образуется множество $A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$. У каждого множества есть минимальный элемент, тогда минимальное невходящее число может быть описано как «первое число, которое нельзя описать не более чем 20 словами русского язык», что меньше 20 слов. Противоречие.

## 1.3. Операции с множествами.

| Символ | Определение | Описание |
|---|---|---|
| $\cap$ | $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ | Пересечение множеств |
| $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ | $A = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ | Пересечение множества множеств |
| $\cup$ | $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ | Объединение множеств |
| $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ | $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ | Объединение множества множеств |
| $\setminus$ | $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ | Разность множеств |
| $\times$ | $A \times B = \{(x,\, y) \mid x \in A, y \in B\}$ | Произведение множеств |
| $\triangle$ | $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ | Симметрическая разность |
| $\varnothing$ | $\forall x :\ x \notin \varnothing$ | пустое множество |
| $\mathbb{N}$ | | Натуральные числа |
| $\mathbb{Z}$ | | целые числа |
| $\mathbb{Q}$ | $\frac{a}{b}$, где $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$ | рациональные числа |
| $\mathbb{R}$ | | действительные числа |
| $2^X$ | | множество всех подмножеств $X$ |

Важный момент: $1 \in \{1\}$, но $1 \notin \{\{1\}\}$

Правила де Моргана. Пусть есть $A_\alpha \subset X$

1. $X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha$.
2. $X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha$.

**Доказательство**: $X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : x \in X \wedge x \notin A_\alpha \ \forall \alpha \in I\} = \{x : \forall \alpha \in I X \setminus A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha$.

**Теорема 1.1.** $A \cap \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} A \cap B_\alpha$
$A \cup \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} A \cup B_\alpha$

**Доказательство**. TODO. □

***Определение* 1.2.** Упорядоченная пара $\langle x, y \rangle$. Важное свойство $\langle x, y \rangle = \langle x', y' \rangle \iff x = x' \wedge y = y'$

***Определение* 1.3.** Пусть даны множества $X_1, \ldots, X_n$, то упорядоченной $n-$ (кортеж) — $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, обладающее условием $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle = \langle y_1, \ldots, y_n \rangle \iff x_1 = y_1 \land \ldots \land x_n = y_n$

***Определение* 1.4.** Отношение $R \subset X \times Y$. $x$ и $y$ находятся в отношении $R$, если их $\langle x, y \rangle \in R$.

***Определение* 1.5.** Область отношения $\delta_R = \mathrm{dom}_R = \{x \in X : \exists y \in Y : \langle x, y \rangle \in R$.

***Определение* 1.6.** Область значений $\rho_R = \mathrm{ran}_R = \{y \in Y : \exists x \in X : \langle x, y \rangle \in R$

***Определение* 1.7.** Обратное отношение $R^{-1} \subset Y \times X \;\; R^{-1} = \{\langle y, x \rangle\} \in R$.

***Определение* 1.8.** Композиция отношения. $R_1 \subset X \times Y, R_2 \subset Y \times Z : R_1 \circ R_2 \subset X \times Z$.
$R_1 \circ R_2 = \{\langle x, z \rangle \in X \times Z \mid \exists y \in Y : \langle x, y \rangle \in R_1 \land \langle y, z \rangle \in R_2\}$

Примеры отношений.

- Отношение равенства. $R = \{\langle x, x \rangle : x \in X\}$. Но это просто равенство.
- ”$\geqslant$” $(X = \mathbb{R})$. $R = \{\langle x, y \rangle : x \geqslant y\}$
- ”$>$” $(X = \mathbb{R})$. $R = \{\langle x, y \rangle : x > y\}$
  $\delta_> = 2, 3, 4 \ldots$
  $\rho_> = \mathbb{N}$
  $>^{-1} = < = \{\langle x, y \rangle : x < t\}$
  $> \circ > = \{\langle x, z \rangle \;\; x - z \geqslant 2\}$
- $X$ — прямые на плоскости. ”$\perp$”: $R = \{\langle x, y \rangle : x \perp y\}$.
  $\delta_\perp = \rho_\perp = X$
  $\perp^{-1} = \perp$
  $\perp \circ \perp = \parallel$
- $\langle x, y \rangle \subset R$, когда $x$ — отец $y$.
  $\delta_R = \{$Все, у кого есть сыновья$\}$.
  $\rho_R$ — религиозный вопрос. См. Библию
  $R^{-1} =$ сын
  $R \circ R = \{$дед по отцовской линии$\}$

***Определение* 1.9.** Функция из $X$ в $Y$ — отношение $(\delta_f = X)$, для которого верно:

$$\left.\begin{array}{l} \langle x, y \rangle \in f \\ \langle x, z \rangle \in f \end{array}\right\} \Rightarrow y = z.$$

Используется запись $y = f(y)$.

***Определение* 1.10.** Последовательность — функция у которой $\delta_f = \mathbb{N}$

***Определение* 1.11.** Отношение $R$ называется рефлективным, если $\forall x : \langle x, x \rangle \in R$.

***Определение* 1.12.** Отношение $R$ называется симметричным, если $\forall x, y \in X : \langle x, y \rangle \in R \Rightarrow \langle y, x \rangle \in R$

***Определение* 1.13.** Отношение $R$ называется иррефлективным, если $\forall x \, \langle x, x \rangle \notin R$

***Определение* 1.14.** Отношение $R$ называется антисимметричным, если $\left.\begin{array}{l} \langle x, y \rangle \in R \\ \langle y, x \rangle \in R \end{array}\right\} \Rightarrow x = y$

***Определение* 1.15.** Отношение $R$ называется транзитивным, если $\left.\begin{array}{l} \langle x, y \rangle \in R \\ \langle x, z \rangle \in R \end{array}\right\} \Rightarrow \langle x, z \rangle \in R$

***Определение* 1.16.** Отношение называется отношением эквивалентности, если отношение рефлективно, симметрично, транзитивно.

**Пример.** Равенство, сравнение по модулю $\mathbb{Z}$, $\|$, отношение подобия треугольников.

***Определение* 1.17.** Если выполняется рефлективность, антисимметричность и транзитивность, от данное отношение — отношение нестрогого частичного порядка.

**Пример.** $\geqslant$; $A \subset B$ на $2^X$.

***Определение* 1.18.** Если выполняется иррефлективность и транзитивность, то данное отношение — отношение строгого частичного порядка.

**Пример.** $>$; $A$ собственное подмножество $B$ на $2^X$.

**Упражнение.** Иррефлексивность + транзитивность $\Rightarrow$ антисимметрично.

**Упражнение.** $R$ — нестрогий ч.п. $\Rightarrow R = \{\langle x, y\rangle \in R : \ x \neq y\}$ — строгий ч.п.

## 1.4. Вещественные числа

Есть две операции.

- $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
  - Коммутативность. $x + y = y + x$.
  - Ассоциативность. $(x + y) + z = x + (y + z)$
  - Существует ноль. $\exists 0 \in \mathbb{R} \ \ x + 0 = x$
  - Существует противоположный элемент. $\exists(-x) \in \mathbb{R} \ \ x + (-x) = 0$
- $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
  - Коммутативность. $x \cdot y = y \cdot x$.
  - Ассоциативность. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
  - Существует единица. $\exists 1 \in \mathbb{R} \ \ x \cdot 1 = x$
  - Существует обратный элемент. $\exists x^{-1} \in \mathbb{R} \ \ x \cdot x^{-1} = 1$

Свойство дистрибутивности: $(x+y)\cdot z = x\cdot z+y\cdot z$. Структура с данными операциями называется полем.

Введем отношение $\leqslant$. Оно рефлексивно, антисимметрично и транизитивно, то есть нестрогий частичного порядка. Причем:

- $x < y \Rightarrow x + z < y + z$
- $0 \leqslant x \wedge 0 \leqslant y \Rightarrow 0 \leqslant x \cdot y$

**Аксиома полноты.** Если $A$ и $B \subset \mathbb{R}$ и $\forall a \in A, b \in B : \ \ a \leqslant b$ и $A \neq \varnothing \wedge B \neq \varnothing$, тогда $\exists c \in \mathbb{R} \ a \leqslant c \leqslant b$.

***Замечание.*** Множество рациональных не удовлетворяет аксиоме полноты. Например: $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$, $B = \{x \in Q \mid x > 0 \wedge x^2 > 2\}$. Единственная точка, между этими множествами — $\sqrt{2}$

**Теорема 1.2** (Принцип Архимеда)**.** Пусть $x \in \mathbb{R} \wedge y > 0$. Тогда $\exists n \in \mathbb{N} : \ x < ny$

**Доказательство**. $A = \{u \in \mathbb{R} : \ \exists n \in \mathbb{N} : \ u < ny\}$. Пусть $A \neq! \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R} \setminus A \neq \varnothing$, $A \neq \varnothing$, т.к. $0 \in A$.
Возьмем $a \in A, b \in B$. $b < a \Rightarrow \exists n : \ a < ny \Rightarrow b < ny \Rightarrow$ противоречие.
По аксиоме полноты $\exists c \in \mathbb{R} : \ a \leqslant c \leqslant b \ \forall a \in A, \forall b \in B$.
Пусть $c \in A$. Тогда $c < ny \Rightarrow c < c+y < ny+y = (n+1)y \Rightarrow c < c+y \Rightarrow c+y \in A$. Противоречие.
Пусть $c \in B$. Рассмотрим $c-y < c \Rightarrow c-y \in A \Rightarrow \exists n : \ c-y < ny \Rightarrow c < ny+y = (n+1)y \Rightarrow c \in A$. Противоречие. □

***Следствие.*** Если $\epsilon > 0$, то $\exists n \in \mathbb{N} \ \frac{1}{n} < \epsilon$

**Доказательство**. $x = 1, y = \epsilon \Rightarrow ny = n\epsilon > x = 1 \iff \epsilon > \frac{1}{n}$ □

## 1.5. Мат. индукции

Пусть $P_n$ - последовательность утверждений. Тогда, если $P_1$ — верное и из того, что $P_n$ — верно следует, что $P_{n+1}$ — верно. Тогда все $P_n$ верны $\forall n \in \mathbb{N}$

***Определение* 1.19.** Пусть $A \subset \mathbb{R}$. Тогда $A$ — ограничено сверху, если $\exists c \in \mathbb{R} : \ \forall a \in A \ a \leqslant c$. Такое $c$ называется верхней границей.

***Определение* 1.20.** Пусть $A \subset \mathbb{R}$. Тогда $A$ — ограничено снизу, если $\exists b \in \mathbb{R} : \ \forall a \in A \ a \geqslant b$. Такое $b$ называется нижней границей.

***Определение* 1.21.** Пусть $A \subset \mathbb{R}$. Тогда $A$ — ограничено, если оно ограничено сверху и снизу.

**Пример.** $\mathbb{N}$ не ограничено сверху, но ограничено снизу.

**Доказательство**. Пусть $\exists c \in \mathbb{R} : \ c \geqslant n \ \forall n \in \mathbb{N}$. Тогда это противоречит принципу Архимеда при $x = c, y = 1$.
Для ограниченности снизу достаточно взять $c = -1$. □

## 1.6. Наибольшие/наименьшие элементы

**Теорема 1.3.** В непустом конечном множестве $A$ есть наибольший и наименьший элементы.

**Доказательство**. Докажем по индукции:

- База. $|A| = 1$. Очевидно.
- Переход. $n \to n+1$.
- Доказательство. Рассмотрим множество из $n+1$ элемента $\{x_1 \dots x_n, x_{n+1}\}$. Выкинем из него последний элемент. Тогда по индукционному предположению у нас есть максимальный элемент $x_k$. Тогда рассмотрим два случая:
  1. $x_k \geqslant x_{n+1}$. Тогда $x_k$ — наибольший элемент множества $\{x_1 \dots x_n, x_{n+1}\}$.
  2. $x_k < x_{n+1}$. Тогда по транзитивности $x_{n+1}$ больше всех других элементов множества. Значит, $x_{n+1}$ — наибольший элемент множества $\{x_1 \dots x_n, x_{n+1}\}$.

□

**Теорема 1.4.** В непустом ограниченном сверху (снизу) множестве целых чисел есть наибольший (наименьший) элемент.

**Доказательство**. Пусть $A \subset \mathbb{Z}$. $c$ — его верхняя граница.

Возьмем $b \in A$ и рассмотрим $B \coloneqq x \in A \mid x \geqslant b$. Заметим, что $B$ содержит конечное число элементов, значит в нем есть наибольший элемент. Пусть это $m \in B$: $\forall x \in B : \ x \leqslant m$. Докажем, что $m$ — наибольший элемент и в $A$.

Для этого заметим, что любой $x \in A$ либо лежит в $B$, либо $x < b$, а по транзитивности $x < b \leqslant m$. □

***Определение* 1.22.** Пусть $x \in \mathbb{R}$, тогда $[x] = \lfloor x \rfloor$ — наименьшее целое число, не превосходящее $x$.

1. $[x] \leqslant x < [x] + 1$

   Левое неравенство очевидно. Правое неравенство можно доказать от противного: пусть $x \geqslant [x] + 1$, тогда справа целое число большое $[x]$, но меньшее $x$. Противоречие.

2. $x - 1 < [x] \leqslant x$

**Теорема 1.5.** Если $x < y$ $(x, y \in \mathbb{R})$, то

1. $\exists r \in \mathbb{Q} : \ x < r < y$.

2. $\exists r \notin \mathbb{Q} : \ x < r < y$

*Пункт 1.* $\epsilon \coloneqq y - x > 0$.

Найдется $n \in \mathbb{N} : \ \frac{1}{n} < \varepsilon = y - x$. Тогда $m \coloneqq [xn] + 1$: $r = \frac{m}{n}$ подходит.

$\frac{m}{n} > x \iff [xn] + 1 = m > xn$ — свойство целой части. $\frac{m}{n} < y$. $\frac{m-1}{n} = \frac{[nx]}{n} \leqslant \frac{nx}{n} = x \Rightarrow \frac{m}{n} \leqslant x + \frac{1}{n} < x + \epsilon = x + y - x = y$ □

*Пункт 2.* $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Рассмотрим $x - \sqrt{2} < y - \sqrt{2} \Rightarrow \exists r \in Q : \ x - \sqrt{2} < r < y - \sqrt{2} \Rightarrow x < \underbrace{r + \sqrt{2}}_{r'} < y$.

Почему $r'$ иррационально? Иначе $\sqrt{2} = r' - r \in \mathbb{Q}$. □

## 1.7. Инфинум/Супремум

***Определение* 1.23.** $A \subset \mathbb{R}$ — непустое и ограниченное сверху. Тогда супремум — наименьшая из всех верхних границ $A$. Обозначается $\sup A$.

***Определение* 1.24.** $A \subset \mathbb{R}$ — непустое и ограниченное снизу. Тогда инфинум — наибольшая из всех нижних границ $A$. Обозначается $\inf A$.

**Пример.** $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. $\sup A = 1$. $\inf A = 0$.

**Теорема 1.6.** Пусть $A \subset \mathbb{R}$ — непустое и ограниченное сверху. Тогда $\sup A$ существует и единственен.

**Доказательство**. Существование: Пусть $B$ — все верхние границы $A$. Во-первых $B$ — не пусто, так как $A$ ограничено сверху.

Тогда возьмем $b \in B$. $b$ — верхняя граница для $A$, то есть $\forall a \in A : \ a \leqslant b$. Тогда по аксиоме полноты $\exists C \in \mathbb{R} \ \forall a \in A, b \in B : \ a \leqslant c \leqslant b$. Из левого неравенства получаем, что $c$ — верхняя граница, то есть $c \in B$. Из второго неравенства получаем, что $c$ — наименьший элемент $B$. Так и получается, что $c = \sup A$.

Единственность. Если $c = \sup A$ и $c' = \sup A$, то $c \leqslant c'$, так как $c$ — наименьший элемент $B$, но и $c' \leqslant c$, так как $c'$ — наименьший элемент $B$. Значит $c = c'$. Противоречие. □

***Следствие.*** $A \subset B \subset \mathbb{R}$, $B$ ограничено сверху, $A$ — не пустое. Тогда $\sup A \leqslant \sup B$.

**Доказательство**. Если $c$ — верхняя граница $B$, то $c$ — верхняя граница для $A$. Заметим, что все верхние границы $A \supset B$. Тогда все понятно. □

**Теорема 1.7.** Пусть $A \subset \mathbb{R}$ — непустое и ограниченное снизу. Тогда $\inf A$ существует и единственен.

**Упражнение.** Доказательство.

***Следствие.*** $A \subset B \subset \mathbb{R}$, $B$ ограничено снизу, $A$ — не пустое. Тогда $\inf A \geqslant \inf B$.

*Замечание.* Без аксиомы полноты теоремы существования не верны. $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$. Любое рациональное число $> \sqrt{2}$ — верхние границы. А вот $\sup A$ нет.

**Теорема 1.8.** Пусть непустое $A \in \mathbb{R}$. Тогда

- $a = \inf A \iff \begin{cases} a \leqslant x \ \forall x \in A \\ \forall \epsilon > 0 \ \exists x \in A : \ x < a + \epsilon \end{cases}$ .
- $b = \sup A \iff \begin{cases} a \geqslant x \ \forall x \in A \\ \forall \epsilon > 0 \ \exists x \in A : \ x > a - \epsilon \end{cases}$

**Доказательство**. Рассмотрим два неравенства по отдельности:

1. $b$ — верхняя граница.
2. $b - \epsilon$ — не является верхней границей множества $A$. То есть $\forall b' < b : \ b'$ — не является верхней границей.

Все это в точности значит, что $b = \sup A$. □

**Теорема 1.9** (Теорема о вложенных отрезках)**.** Пусть $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \ldots$. Тогда $\exists c \in \mathbb{R} : \forall n : \ c \in [a_n, b_n]$.

**Доказательство**. Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots\}, B = \{b_1, b_2, \ldots\}$. Заметим, что так как отрезки вложены, то $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots$,а $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots$. Проверим, что $a_i \leqslant b_j \forall i, j \in \mathbb{N}$. Пусть $i \leqslant j$, тогда $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_i \leqslant \ldots \leqslant a_j \leqslant b_j$. Пусть $i > j$, тогда $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots b_j \geqslant \ldots b_i \geqslant a_i$. Тогда по аксиоме полноты $\exists c \in \mathbb{R} : \ a_i \leqslant c \leqslant b_j \ \forall i, j \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall n \forall a_n \leqslant c \leqslant b_n \Rightarrow c \in [a_n, b_n]$ □

*Замечание.* $\sqrt{2} = 1.41\ldots$. Тогда отрезке: $[1, 2], [1.4, 1.5], [1.41, 1.42], \ldots$. Тогда единственная точка, лежащая во всех отрезках: $\sqrt{2}$.

*Замечание.* Для полуинтервалов, (интервалов) неверно:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (0, \frac{1}{n}) = \varnothing.$$

*Замечание.* Для лучей неверно.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [n, +\infty) = \varnothing.$$

# 2. Последовательности

## 2.1. Предел последовательности

***Определение* 2.1.** $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Способы задания последовательностей

1. Формулой. $f_n \coloneqq \frac{\sin n}{n^n}$
2. Рекуррентой: $f_1 = 1, f_2 = 2, f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$.

Способы визуализации:

1. Можно ставить точки на прямой. Но если последовательность, например, $a_n \coloneqq \sin(\frac{n\pi}{2})$, то получится кукож.
2. График. Считаем значения в натуральных точках.

***Определение* 2.2.** Последовательность $a_n$ ограничена сверху, если $\exists C: \ \forall n \in \mathbb{N}: \ a_n \leqslant c$.

***Определение* 2.3.** Последовательность $a_n$ ограничена снизу, если $\exists C: \ \forall n \in \mathbb{N}: \ a_n \geqslant c$.

***Определение* 2.4.** Последовательность $a_n$ ограничена, если она ограничена и сверху, и снизу.

***Определение* 2.5.** Последовательность $a_n$ монотонно возрастает, если $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots$.

***Определение* 2.6.** Последовательность $a_n$ строго монотонно возрастает, если $a_1 < a_2 < \ldots$.

***Определение* 2.7.** Последовательность $a_n$ монотонно убывает, если $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots$.

***Определение* 2.8.** Последовательность $a_n$ строго монотонно убывает, если $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$.

***Определение* 2.9** (Нетрадиционное определение предела)**.** $l = \lim a_n \iff$ вне любого интервала, содержащего $l$ находится конечное число членов последовательности.

*Замечание.* Мы можем смотреть только на симметричные относительно точки $l$ интервалы. Если он не симметричен, то можно большую границу уменьшить. Так можно сделать, так как мы знаем, что вне меньшего конечное число точек, то и снаружи большего точно конечное число точек. Тогда наш интервал выглядит как $(l - \varepsilon; l + \varepsilon)$

*Замечание.* Конечное число точек снаружи интервала $\iff$ начиная с некоторого номера все попали в интервал, так как возьмем последнюю точку вне интервалов, и взяли её номер $+ 1$.

***Определение* 2.10** (Традиционное определение предела)**.** $l = \lim a_n \iff \forall \varepsilon > 0: \ \exists N: \ \forall n \geqslant N: \ |a_n - l| < \varepsilon$

1. Предел единственный. Пусть $l$ и $l'$ единственный. *(Картинка).* Рассмотрим интервал содержащий $l$, но не $l'$. Снаружи конечное число точек, теперь наоборот, там тоже конечное число точек. Тогда последовательность конечна.
2. Если из последовательности выкинуть какое-то число членов, то предел не изменится. Доказательство через картинку.

3. Если как-то переставить члены последовательности, то предел не изменится. Ну очевидно, что количество членов не изменилось, точки не поменяли своё местоположение.

4. Если члены последовательности записать с какой-то кратностью (конечной), то предел не изменится.

5. Если добавить к последовательности конечное число членов, то наличие/отсутствие предела и значение предела, если он существует, не поменяется. Доказательство по картинке.

6. Изменение конечного числа членов в последовательности не меняет предел.

**Пример.** $\lim \frac{1}{n} = 0$. Мы знаем, что найдется такой номер, что $\frac{1}{n} < \beta$, тогда при $n \geqslant N$ $0 < \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{N} < \beta$

**Пример.** $a_n = (-1)^n$ не имеет предела.

**Доказательство**. Посмотрим на картинку. Возьмем сначала точку не равную $\pm 1$. Тогда можно выбрать интервал, которые не содержит $\pm 1$. То есть интервал не содержит бесконечное число точек.

Для $x = 1$ можно взять $(0; 2)$, для $x = -1$ можно взять $(-2; 0)$. □

**Лемма.** $\forall a, b, x_n, y_n, \varepsilon > 0 : a = \lim x_n \wedge b = \lim y_n \Rightarrow \exists N : \forall n \geqslant N : |x_n - a| < \varepsilon \wedge |y_n - b| < \varepsilon$

**Доказательство**. Запишем определения пределов: $\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 \forall n \geqslant N_1 |x_n - a| < \varepsilon$ и $\forall \varepsilon > 0 \exists N_2 \forall n \geqslant N_2 |y_n - b| < \varepsilon$. Тогда просто возьмем $N = \max(N_1, N_2)$. □

**Теорема 2.1** (Предельный переход в неравенствах)**.** $\forall x_n, y_n (x_i < y_i \ \forall i)$ $a = \lim x_n \wedge b = \lim y_n \Rightarrow a \leqslant b$

**Доказательство**. Докажем от противного. Пусть $a > b$. Посмотрим картиночку. Пусть $\varepsilon := \frac{a-b}{2}$. По лемме $\exists N : \forall n \geqslant N : |x_n - a| < \varepsilon \wedge |y_n - b| < \varepsilon$. Заметим, что $x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow x_n > a - \varepsilon$, а $|y_n - b| < \varepsilon \Rightarrow y_n < b + \varepsilon \Rightarrow x_n > a - \varepsilon = b + \varepsilon > y_n$. Противоречие. □

*Замечание.* Строгий знак может не сохраняться. Пример: $x_n = -\frac{1}{n} < y_n = \frac{1}{n}$, но предел и там, и там 0. Т.к. $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geqslant N : \frac{1}{n} = |y_n| = |x_n| < \varepsilon$

***Следствие.*** Три пункта:

1. $\forall n x_n \leqslant b \wedge \lim x_n = a \Rightarrow a \leqslant b$.

2. $\forall n a \leqslant y_n \wedge \lim y_n = b \Rightarrow a \leqslant b$.

3. $\forall n x_n \in [a; b] \wedge \lim x_n = l \Rightarrow l \in [a, b]$.

**Доказательство**. Константу можно заменить на последовательность $z_n = \mathrm{const}$ □

**Теорема 2.2** (Теорема о двух милиционерах(теорема о сжатой последовательности))**.** Пусть $\forall n : x_n \leqslant y_n \leqslant z_n \wedge \lim x_n = \lim z_n =: l$, тогда $\lim y_n = l$.

**Доказательство**. Возьмем $\varepsilon > 0$. По лемме: $\exists N : \forall n \geqslant N : |x_n - l| < \varepsilon \wedge |z_n - l| < \varepsilon$, откуда $x_n > l - \varepsilon$ и $z_n < l + \varepsilon$. Тогда $l - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < l + \varepsilon \Rightarrow l - \varepsilon < y_n < l + \varepsilon$, то есть $|y_n - l| < \varepsilon$. □

***Следствие.*** Если $\forall n |y_n| \leqslant z_n \wedge \lim z_n = 0 \Rightarrow \lim y_n = 0$

**Доказательство**. $x_n := -z_n$. Тогда $|y_n| \leqslant z_n \iff -z_n \leqslant y_n \leqslant z_n$. Ну тогда и $\lim y_n = 0$ □

**Теорема 2.3** (Теорема Вейерштрасса для монотонной последовательности)**.** Три пункта:

1. $\forall x_n x_n \uparrow \wedge x_n$ — ограничена сверху $\Rightarrow \exists a = \lim x_n$.
2. $\forall x_n x_n \downarrow \wedge x_n$ — ограничена снизу $\Rightarrow \exists a = \lim x_n$.
3. Монотонная последовательность имеет предел $\iff$ она ограничена.

*Пункт 1.* $b \coloneqq \sup\{x_1, x_2, \dots\}$ — существует, т.к. $x_n$ — ограничено сверху. Теперь докажем, что $\lim x_n = b$, возьмем $\varepsilon > 0$. $b$ — наименьшая верхняя граница $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 b - \varepsilon$ — не верхняя граница. То есть $\exists N : x_N > b - \varepsilon$. Проверим, что такое $N$ подходит: при $n \geqslant N$ $b - \varepsilon < x_N < x_{N+1} < \dots x_n \leqslant b \leqslant b + \varepsilon \Rightarrow b - \varepsilon < x_n < b + \varepsilon$. □

*Пункт 3.* Докажем отдельно в каждую сторону:

- $\Leftarrow$ Если $\uparrow$, то пункт 1, иначе пункт 2.
- $\Rightarrow$ Докажем это утверждение для любой последовательности.

  Пусть $\lim x_n = a$. Возьмем $\varepsilon = 1$, тогда $\exists N : \forall n > N : |x_n - a| < 1 \Rightarrow a - 1 < x_n < a + 1$. Ну тогда верхняя граница $\max\{a + 1, x_1, x_2, \dots, x_{N+1}\}$, а нижняя $\min\{a - 1, \dots\}$.

□

*Замечание.* В 1: $\lim x_n = \sup\{x_1, x_2, \dots\}$, во 2: $\lim x_n = \inf\{x_1, x_2, \dots\}$.

**Теорема 2.4** (О арифметических операциях с пределами)**.** $\forall x_n, y_n a = \lim x_n \wedge \lim y_n = b$. Тогда:

1. $x_n + y_n$ имеет предел и он равен $a + b$
2. $x_n - y_n$ имеет предел и он равен $a - b$
3. $x_n \cdot y_n$ имеет предел и он равен $a \cdot b$
4. $|x_n|$ имеет предел и он равен $|a|$
5. $\frac{x_n}{y_n}$ имеет предел, если $b \neq 0 \wedge \forall n y_n \neq 0$ и он равен $\frac{a}{b}$

**Доказательство**.

1. Возьмем $\varepsilon > 0$ и найдем $N$ из леммы для $\frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $\forall n \geqslant N : |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge |y_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |(x_n + y_n) - (a + b)| \leqslant |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
2. Так же.
3. Поскольку $\lim y_n = b$, то $y_n$ — ограничена, а значит $\exists M : |y_n| \leqslant M$. Рассмотрим $|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - a y_n + a y_n - ab| \leqslant |x_n y_n - a y_n| + |a y_n - ab| = |y_n||x_n - a| + |a||y_n - b| \leqslant M|x_n - a| + |a||y_n| - b$. $M|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \iff |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Значит $\exists N_1$ при котором $\forall n > N_1$ выполнено. $|a||y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \Leftarrow |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|a|+1}$. Тогда найдется $N_2$, такой что $\forall n \geqslant N_2$ это выполнено. Такой что $N = \max N_1, N_2$.
4. $||x| - |a|| \leqslant |x_n - a| \iff -|x_n - a| \leqslant |x_n| - |a| \leqslant |x_n - a|$, а в правой части написано, что $|x_n| = |(x_n - a) + a| \leqslant |x_n - a| + |a|$. Понятно, что это выполняется при любых $x_n, a$.

   Возьмем $N$, для которого $\forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon$. Тогда $\forall n \geqslant N : ||x_n| - |a|| \leqslant |x_n - a| < \varepsilon$

5. Докажем, что $\lim \frac{1}{y_n} = \frac{1}{b}$. Возьмем $|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}| = \frac{|y_n - b|}{|y_n||b|} \iff$ (1). Посмотрим на картинку: возьмем $\varepsilon = \frac{b}{2}$. Получим интервал $(\frac{b}{2}; \frac{3b}{2})$. Тогда берем $N_1 : \forall n \geqslant N |y_n - b| < |b|/2 \Rightarrow |y_n| > \frac{|b|}{2}$. Тогда (1) $\iff \frac{|y_n - b|}{\frac{|b|}{2}|b|} = \frac{2}{|b|^2}|y_n - b| < \varepsilon \iff |y_n - b| < \varepsilon \cdot \frac{|b|}{2}$. Поэтому $\exists N_2 : \forall n \geqslant N_2$ такой, что это выполняется. Ну тогда $N = \max N_1, N_2$.

□

***Следствие.*** Если $\lim x_n = a$, то $\lim cx_n = ca$.

***Следствие.*** Если $\lim x_n = a \wedge \lim y_n = b$, то $\lim(cx_n + dy_n) = ca + db$

*Замечание.* Если $\lim y_n = b \neq 0$, то начиная с некоторого $N$, $y_n \neq 0$

**Пример.** $\lim \frac{n^2+2n-3}{4n^2-5n+6} = \frac{1+\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}}{4-\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}} = \frac{\lim(1+\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2})}{4-\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}} = \frac{1}{4}$

## 2.2. Бесконечно большие и бесконечно малые

***Определение 2.11.*** Последовательность $x_n$ называется бесконечной малой, если $\lim x_n = 0$.

**Утверждение 2.5.** $\forall x_n, y_n : x_n$ — бесконечно мала последовательность $\wedge\, y_n$ ограничена, $x_n y_n$ — бесконечно малая последовательность.

**Доказательство**. $y_n$ — ограничена $\Rightarrow \exists M : \forall n : |y_n| \leqslant M$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и подставим в определение $\lim x_n = 0$. Тогда найдется $N : \forall n \geqslant N : |x_n| < \frac{\varepsilon}{M}$. Следовательно $x_n y_n \leqslant M|x_n| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon \Rightarrow \lim x_n y_n = 0$. □

***Определение 2.12.*** $\lim x_n = +\infty$ означает то, что вне любого луча вида $(E; +\infty)$ лежит лишь конечное число членов последовательности. Или: $\forall E \exists N : \forall n \geqslant N x_n > E$.

***Определение 2.13.*** $\lim x_n = -\infty$ означает то, что вне любого луча вида $(-\infty, E)$ лежит лишь конечное число членов последовательности. Или: $\forall E \exists N : \forall n \geqslant N x_n < E$.

***Определение 2.14.*** $\lim x_n = \infty$ означает то, что в любом промежутке содержится конечное число членов последовательности. Или: $\forall E \exists N \forall n \geqslant N |x_n| > E$.

*Замечание.* $\lim x_n = \infty \iff \lim |x_n| = +\infty$

*Замечание.* $\lim x_n = +\infty$(или $-\infty$)$\Rightarrow \lim x_n = \infty$. Но $\not\Leftarrow$! Пример $x_n = (-1)^n \cdot n$.

*Замечание.* $\lim x_n = \infty \Rightarrow x_n$ — неограниченная последовательность. Но наоборот неверно. Пример: $x_n = \begin{cases} n & n \text{ — четно} \\ 0 & n \text{ — нечетно} \end{cases}$.

***Определение 2.15.*** $x_n$ называется бесконечно большой, если $\lim x_n = \infty$.

**Теорема 2.6.** $\forall x_n : \forall n x_n \neq 0 \Rightarrow x_n$ — бесконечно малая $\iff \frac{1}{x_n}$ — бесконечно большая.

**Доказательство**. Докажем в каждую сторону отдельно:

- $\Rightarrow$ $x_n$ — бесконечно малая $\iff \lim x_n = 0$. Возьмем $E$ из определения бесконечно большой и $\varepsilon = \frac{1}{E}$, подставим в предел. Тогда $\exists N : \forall n \geqslant N |x_n| < \varepsilon = \frac{1}{E} \Rightarrow |\frac{1}{x_n}| > E$.
- $\Leftarrow$ $\frac{1}{x_n}$ — бесконечно большая $\Rightarrow \lim \frac{1}{x_n} = \infty$. Возьмем $\varepsilon > 0$ из определения бесконечно малой и $E = \frac{1}{\varepsilon}$ и подставим в lim. Тогда $\exists N, \forall n \geqslant N : |\frac{1}{x_n}| > E = \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |x_n| < \varepsilon$

□

***Определение* 2.16.** $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \pm\infty$

**Теорема 2.7.** В $\overline{\mathbb{R}}$ предел единственен.

**Доказательство**. Пусть $\lim x_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$ и $\lim x_n = b \in \overline{\mathbb{R}}$. Если $a, b \in \mathbb{R}$, то знаем. Иначе рассмотрим случаи:

- $a = \pm\infty, b \in \mathbb{R}$. Картинка.
- $a = +\infty, b = -\infty$. Ну такого быть не может, смотри картинку.

□

**Теорема 2.8** (о стабилизации знака)**.** Если $\lim x_n = a \in \overline{\mathbb{R}} \wedge a \neq 0 \Rightarrow \exists N : \forall n \geqslant N$ все члены последовательности имеют тот же знак, что и $a$.

**Доказательство**. Несколько случаев:

- $a \in \mathbb{R}$. Картинка. Начиная с некоторого номер все $x_n \in (0; 2a)$ или $x_n \in (2a; 0)$.
- $a = +\infty$. Картинка. Возьмем $E = 0$, начина с некоторого номера все члены попали в этот луч.
- $a = -\infty$. Аналогично.

□

**Теорема 2.9** (предельный переход в неравентсве $\overline{\mathbb{R}}$)**.** $\forall n : x_n \leqslant y_n \wedge \lim x_n = a \in \overline{\mathbb{R}} \wedge \lim y_n = b \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow a \leqslant b$.

**Доказательство**. Если $a, b \in \mathbb{R}$, то уже есть. Иначе предположим противное:

- $a = +\infty$ и $b \in \mathbb{R}$. Картинка...

□

**Теорема 2.10** (Теорема о двух миллиционерах)**.**

1. $\forall x_n, y_n : x_n \leqslant y_n \wedge \lim x_n = +\infty \Rightarrow \lim y_n = +\infty$
2. $\forall x_n, y_n : x_n \leqslant y_n \wedge \lim y_n = -\infty \Rightarrow \lim x_n = -\infty$

**Доказательство**.

1. $\lim x_n = +\infty \Rightarrow \forall E : \exists N : \forall n \geqslant N x_n > E$, но $y_n \geqslant x_n > E$.
2. Упражнение для читателя.

□

**Теорема 2.11** (О арифметических действиях с бесконечно большими)**.**

1. $\forall x_n, y_n \lim x_n = +\infty, y_n$ — ограничена снизу $\Rightarrow \lim(x_n + y_n) = +\infty$
2. $\forall x_n, y_n \lim x_n = -\infty, y_n$ — ограничена сверху $\Rightarrow \lim(x_n + y_n) = -\infty$

3. $\forall x_n, y_n \lim x_n = \infty, y_n$ — ограничена $\Rightarrow \lim(x_n + y_n) = \infty$

4. $\forall x_n, y_n \lim x_n = \pm\infty \wedge \exists C : \forall n : y_n \geqslant C > 0 \Rightarrow \lim(x_n y_n) = \pm\infty$

5. $\forall x_n, y_n \lim x_n = \pm\infty \wedge \exists C : \forall n : y_n \leqslant C < 0 \Rightarrow \lim(x_n y_n) = \mp\infty$

6. $\forall x_n, y_n \lim x_n = \infty \wedge \exists C : \forall n : |y_n| \geqslant C > 0 \Rightarrow \lim(x_n y_n) = \infty$

7. $\forall x_n, y_n \lim x_n = a \neq 0 \wedge \lim y_n = 0 \Rightarrow \lim \frac{x_n}{y_n} = \infty$

8. $\forall x_n$ — ограничена, $y_n : \lim y_n = \infty \Rightarrow \lim \frac{x_n}{y_n} = 0$

9. $\forall x_n, y_n$ — ограничена : $\lim x_n = \infty \wedge y_n \neq 0 \Rightarrow \lim \frac{x_n}{y_n} = \infty$

**Доказательство**.

1. $y_n$ — ограничена снизу $\Rightarrow y_n \geqslant c$. А так как $\lim x_n = +\infty \Rightarrow \forall E \exists N : \forall n \geqslant N : x_n > E$. Подставим $E - c$ вместо $E$. $\exists N \forall n \geqslant N x_n > E - C \Rightarrow x_n + y_n \geqslant E - c + y_n \geqslant E - c + c = E$.

2. Упражнение.

3. Упражнение.

4. $\lim x_n = +\infty \Rightarrow \forall E \exists N \forall n \geqslant N : x_n > E$. Подставим $\frac{E}{c}$ вместо $E$: $x_n > \frac{E}{c} \Rightarrow x_n y_n \geqslant xnC > \frac{E}{c} \cdot c = E$.

5. Упражнение.

6. Упражнение.

7. $\lim y_n = 0 \Rightarrow y_n$ — бесконечно малое $\Rightarrow \frac{1}{y_n}$ — бесконечно большая. Поймем, что $|x_n| \geqslant C > 0$ при больших $n$. Возьмем картинку и окрестность $\frac{a}{2}$. Заметим, что начиная с некоторого номер $|x_n| \geqslant \frac{a}{2} > 0$.

8. $y_n$ — бесконечно большая $\Rightarrow \frac{1}{y_n}$ — бесконечно малая $\Rightarrow x_n \cdot \frac{1}{y_n}$ — произведение ограниченное и бесконечно малой.

9. $x_n$ — бесконечно большая $\frac{1}{x_n}$ — бесконечно малая $\Rightarrow y_n \cdot \frac{1}{x_n}$ — бесконечно малая $\Rightarrow \frac{y_n}{x_n}$ — бесконечно малая.

□

Арифметика с бесконечностями:

1. $\pm\infty + c = \pm\infty$

2. $+\infty + \infty = +\infty$

3. $-\infty + -\infty = -\infty$

4. $\pm\infty \cdot c = \pm\infty$, если $c > 0$

5. $\pm\infty \cdot c = \mp\infty$, если $c < 0$

6. $+\infty \cdot +\infty = +\infty$
   $-\infty - \infty = +\infty$
   $+\infty - \infty = -\infty$

Запрещенные операции:

1. $+\infty - +\infty$ или $+\infty + -\infty$. Может получиться беспредел, любое число, любая бесконечность.
2. $+\infty \cdot 0$
3. $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.Может получиться беспредел, любое число, бесконечность правильного знака.
4. $\frac{0}{0}$ — любое число, любая бесконечность, отсутствие предела.

**Пример.**

- $x_n = n + a, y_n = n, x_n - y_n = a : \lim x_n = +\infty, \lim y_n = +\infty, \lim x_n - y_n = a$
- $x_n = 2n \to +\infty, y_n = n\infty + \infty, x_n - y_n = n \to +\infty$
- ясно.
- $x_n = n + (-1)^n \to +\infty, y_n = n \to +\infty, x_n - y_n = (-1)^n$ — нет предела.

**Упражнение.** Примеры к остальному.

## 2.3. Экспонента

**Теорема 2.12** (Неравенство Бернулли)**.** $\forall x \geqslant -1, n \in \mathbb{N} (1 + x)^n \geqslant 1 + nx$. Равенство при $x = 0 \vee n = 1$.

**Доказательство**. Индукция:

- База $n = 1$: $1 + x \geqslant 1 + x$.
- Переход $n \to n + 1$.
- Предположение: $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$.
- Заметим, что $(1+x)^{n+1} = (1+x)\cdot(1+x)^n \geqslant (1+x)(1+nx) = 1+x+nx+nx^2 = 1+(n+1)x+nx^2 \geqslant 1 + (n + 1)x$. Строгий знак при $x \neq 0$.

□

***Замечание.*** На самом деле $(1 + x)^P \geqslant 1 + Px$, если $x > -1$ и $P \geqslant -1$ или $P \leqslant 0$. Иначе верно $(1 + x)^P \leqslant 1 + Px$.

**Теорема 2.13.** Пусть $a \in \mathbb{R}$ и $x_n \coloneqq (1 + \frac{a}{n})^n$. Тогда при $n > -a$ монотонно возрастает и ограничена сверху.

**Доказательство**. $\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{(1+\frac{a}{n})^n}{(1+\frac{a}{n-1})^{n-1}} = \frac{(n+a)^n}{n^n}\cdot\frac{(n-1)^{n-1}}{(n-1+a)^{n-1}} = \frac{n-1+a}{n-1}\left(\frac{(n+a)(n-1)}{n\cdot(n-1+a)}\right)^n = \frac{n-1+a}{n-1}\left(\frac{n^2+an-n-a}{n^2+an-n}\right)^n = \frac{n-1+a}{n-1}\left(1 - \frac{a}{n(n-1+a)}\right)^n \geqslant \frac{n-1+a}{n-1}(1 + n\cdot\frac{-a}{n(n-1+a)}) = \frac{n-1+a}{n-1}\cdot\frac{n-1+a-a}{n-1+a} = 1$

Убедимся в выполнении условий для неравенства Бернулли. Посмотрим на $\frac{a}{n-1+a}$. Если $a > 0$, то очевидно. Если $a < 0$, то $n_1 > a$, а значит дробь меньше нуля.

Ограниченность: $y_n \coloneqq (1 - \frac{a}{n})^n$ возрастает при $n > a$. $x_n y_n = \left(\left(1 + \frac{a}{n}\right)\left(1 - \frac{a}{n}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{a^2}{n^2}\right)^n$, что не больше 1. Тогда $x_n \leqslant \frac{1}{y_n} \leqslant \frac{1}{y_{n-1}} \leqslant \ldots \leqslant \frac{1}{y_{[a]+1}}$ □

***Следствие.*** $x_n \coloneqq \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$ имеет предел.

***Определение* 2.17.** $\exp a \coloneqq \lim\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$
$e \coloneqq \exp 1 = \lim(1+\frac{1}{n})^n \approx 2.7182818284590$

***Следствие.*** Последовательность $z_n \coloneqq (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ монотонно убывает и стремится к $e$.

**Доказательство**. $\lim z_n = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \lim\left(1+\frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e$. $\frac{1}{z_n} = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ — строго монотонно возрастает. □

Свойства экспоненты:

1. $\exp 0 = 1, \exp 1 = e$.
2. $\exp a > 0$
3. $\exp a \geqslant 1 + a$. $\left(1+\frac{a}{n}\right)^n \geqslant 1 + n\frac{a}{n} = 1 + a$, при $n > -a$. Далее совершим предельный переход.
4. $\exp a \exp(-a) \leqslant 1$. $\left(1+\frac{a}{n}\right)^n \cdot \left(1-\frac{a}{n}\right)^n = \left(1-\frac{a^2}{n^2}\right)^n \leqslant 1$. Далее предельный переход.
5. $\forall a, b : a \leqslant b \Rightarrow \exp a \leqslant \exp b$. Знаем, что $1+\frac{a}{n} \leqslant 1+\frac{b}{n}$ и при больших $n$ они положительны, тогда можно возвести в $n$-ую степень и совершить предельный переход.
6. $\exp a < \frac{1}{1-a}$ при $a \leqslant 1$. $\exp a \cdot \exp(-a) \leqslant 1 \Rightarrow \exp a \leqslant \frac{1}{\exp(-a)}$. А $\exp(-a) \geqslant 1 + (-a) = 1 - a$ (применили Бернулли). Тогда можно уменьшить знаменатель, тем самым увеличить дробь.
7. $\forall n \in \mathbb{N} x_n < e < z_n$. Знаем, что $x_n \uparrow$. Тогда возьмем $k \geqslant n+1 : x_n < x_{n+1} < x_k$. Устремляем $k \to \infty : x_n < x_{n+1} \leqslant e \iff x_n < e$.

   С другой стороны $z_n \downarrow$. Тогда по той же технике $z_n > z_{n+1} \geqslant e \iff z_n \geqslant e$.
8. $2 < e < 3$. $2 = x_1$, $3 = z_5$ или $z_6$.

*Замечание.* $z_n - x_n = \frac{x_n}{n} \approx \frac{e}{n}$.

**Лемма.** $\forall a_n \lim a_n = a \Rightarrow y_n \coloneqq (1+\frac{a_n}{n})^n \to \exp a$.

**Доказательство**. Пусть $x_n = (1+\frac{a}{n})^n$, $A = 1+\frac{a}{n}$, $B = 1+\frac{a_n}{n}$. Тогда $|x_n - y_n| = |A^n - B^n| = \underbrace{|A-B|}_{=\frac{|a-a_n|}{n}} \cdot |A^{n-1} + A^{n-2}B + \ldots + B^{n-1}|$.

Тогда $\lim a_n = a \Rightarrow a_n$ — ограниченная последовательность ($|a_n| \leqslant M$). Тогда $|a_n| \leqslant M \Rightarrow A = 1+\frac{a}{n} \leqslant 1+\frac{M}{n}, B = 1+\frac{a}{n} \leqslant 1+\frac{M}{n}$.Тогда исходное: $\frac{|a-a_n|}{n} n\left(1+\frac{M}{n}\right)^{n-1} \leqslant |a-a_n|(1+\frac{M}{n})^n \leqslant |a-a_n| \exp M \to 0$. Что произошло: $(1+\frac{M}{n})^n < \exp M$ при любом $n$, а $|a-a_n| \to 0$, получили в пределе $0 \cdot \mathrm{const} = 0$.

То есть $\lim x_n - y_n = 0 \Rightarrow \lim y_n = \lim x_n - \lim(x_n - y_n) = \exp a - 0 = \exp a$. □

**Теорема 2.14.** $\exp(a+b) = \exp a \cdot \exp b$.

**Доказательство**. $x_n \coloneqq \left(1+\frac{a}{n}\right)^n \to \exp a$. $y_n \coloneqq (1+\frac{b}{n})^n \to \exp b$. Тогда $x_n y_n = \left((1+\frac{a}{n})(1+\frac{b}{n})\right)^n = \left(1+\frac{a+b+\frac{ab}{n}}{n}\right)^n \xrightarrow[a+b+\frac{ab}{n}\to a+b]{\text{Лемма}} \exp(a+b)$ □

***Следствие.***

1. $\forall t : |t| < 1 \Rightarrow \lim t^n = 0$
2. $\forall t : |t| > 1 \Rightarrow \lim t^n = \infty$

**Доказательство**.

2. Пусть $x = |t| - 1 > 0$. Тогда $|t^n| = |t|^n = (1+x)^n > 1 + nx \to +\infty$
1. Если $0 < |t| < 1$, то $|\frac{1}{t}| > 1$ и $\left(\frac{1}{t}\right)^n$ — бесконечно большая $\Rightarrow t^n$ — бесконечно малая.

□

**Теорема 2.15.** $\forall x_n > 0 \lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = a < 1 \Rightarrow \lim x_n = 0$.

**Доказательство**. Картинка. Возьмем окрестность с правой границей $b = \frac{a+1}{2}$. Тогда начиная с некоторого номера $m$ члены последовательности $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ попали в этот интервал. То есть $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant b < 1$ при $n \geqslant m$.

Пусть $n < m$. $x_n = x_m \cdot \frac{x_{m+1}}{x_m} \cdot \frac{x_{m+2}}{x_{m+1}} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{x_{n-1}} \leqslant x_m b^{n-m} \cdot x_m = \frac{x_m}{b^m} \cdot b^n \to \frac{x_m}{b^m} \lim b^n = 0$. □

***Следствие.***

1. $\lim \frac{n^k}{a^n} = 0$ при $a > 1$ и $k \in \mathbb{N}$.
2. $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$, при $a \in \mathbb{R}$.
3. $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$.

**Доказательство**.

1. $x_n = \frac{n^k}{a^n}$. $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^k}{a^{n+1}} \cdot \frac{a^n}{n^k} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \cdot \frac{1}{a} \to \frac{1}{a} < 1$.
2. $x_n = \frac{a^n}{n!}$. $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1} \to 0$.
3. $x_n = \frac{n!}{n^n}$. $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n+1}{(n+1)^{n+1}} n^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} < 1$.

□

**Теорема 2.16** (Теорема Штольца)**.** Пусть $y_1 < y_2 < y_3 < \ldots$ и $\lim y_n = +\infty$. Если $\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\lim \frac{x_n}{y_n} = l$.

**Доказательство**. Ключевой случай: $l = 0$. Пусть $a_n \coloneqq \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$. По условию $\lim a_n = 0$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда найдется номер $m$, такой, что при $n \geqslant m \Rightarrow |a_n| < \varepsilon$. Тогда $|x_{n+1} - x_n| = |a_n|(y_{n+1} - y_n) < \varepsilon(y_{n+1} - y_n)$. $|x_n - x_m| \leqslant |x_n - x_{n-1}| + |x_{n-1} + x_{n-2}| + \ldots + |x_{m+1} - x_m| < \varepsilon(y_n - y_{n-1}) + \varepsilon(y_{n-1} + y_{n-2}) + \ldots + \varepsilon(y_{m+1} - y_m) = \varepsilon(y_n - y_m)$.

Теперь посмотрим на $|\frac{x_n}{y_n}| \leqslant \frac{|x_n - x_m| + |x_m|}{|y_n|} < \frac{\varepsilon(y_n - y_m)}{y_n} + \frac{|x_m|}{y_n} < \varepsilon \frac{1 y_n}{y_n} + \frac{|x_m|}{y_n} = \varepsilon + \frac{|x_m|}{y_n} < 2\varepsilon$. Берем такой $N : \forall n \geqslant N y_n \geqslant \frac{1}{\varepsilon}|x_m|$. Если $n > \max\{m, N\}$, то $|\frac{x_n}{y_n}| < 2\varepsilon$. Тогда $\lim \frac{x_n}{y_n} = 0$

Рассмотрим случай $l \in \mathbb{R}$. Рассмотрим $\widetilde{x_n} \coloneqq x_n - l y_n$. Тогда $\frac{(\widetilde{x_{n+1}} - \widetilde{x_n}) - (x_n - l y_n)}{y_{n+1} - y_n} = \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} - l \to 0$, т.к. $\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \to l$. Тогда, по случаю выше получаем что $\frac{\widetilde{x_n}}{y_n} \to 0 \iff \frac{x_n}{y_n} - l \to 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to l$

Рассмотрим случай $l = +\infty$. $\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \to +\infty \Rightarrow \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} > 1$ при $n \geqslant N \Rightarrow x_{n+1} - x_n > y_{n+1} - y_n > 0 \Rightarrow x_n \uparrow$.

Из того, что для $x_n - x_{n-1} > y_n - y_{n-1} \wedge \ldots \wedge x_{N+1} - x_N > y_{N+1} - y_N \Rightarrow x_n - x_N > y_n - y_N \Rightarrow x_n > \underbrace{y_n}_{\to +\infty} + \underbrace{(x_N - y_N)}_{=const} \Rightarrow x_n \to +\infty$. Тогда $\frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} \to 0 \xrightarrow{\text{Случай 0}} \frac{y_n}{x_n} \to 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to \infty \frac{x_n}{y_n} \to +\infty$.

Случай $l = -\infty$. $\widetilde{x_n} = -x_n$. □

**Пример.** $S_n = 1^k + 2^k + \ldots + n^k < n^n k = n^{k+1}$. Можно еще взять половину: получим $\leqslant \frac{n^{k+1}}{2^{k+1}}$

Тогда $\lim \frac{S_n}{n^{k+1}} = \lim \frac{S_n - S_{n-1}}{n^{k+1}-(n-1)^{k+1}} = \lim \frac{n^k}{n^{k+1}-(n^{k+1}-k\cdot n^k+\frac{k(k-1)}{2}n^{k-1}-\ldots)} = \lim \frac{1}{k-\ldots n^{-1}+\ldots n^{-2}+\ldots} = \frac{1}{k}$

*Замечание.* Тоже самое можно сказать, если $y_n \downarrow -\infty$

**Теорема 2.17** (Теорема Штольца 2)**.** $\lim x_n = \lim y_n = 0 \wedge y_n > y_{n+1} > 0$. Тогда $\lim \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = l \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim \frac{x_n}{y_n} = l$.

**Доказательство**. Случай $l = 0$. $a_k := \frac{x_{k+1}-x_k}{y_{k+1}-y_k}$. $\lim a_n = 0$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и найдем $m \geqslant N$ : $|a_n| < \varepsilon$ при $n \geqslant N$. Тогда $x_n - x_m = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} + x_{n-2}) + \ldots + (x_{m+1} - x_m) = a_{n-1}(y_n - y_{n-1}) + a_{n-2}(y_{n-1} - y_{n-2}) + \ldots + a_m(y_{n+1} - y_n)$.

Тогда $|x_n - x_m| \leqslant |a_{n-1}|(y_{n-1} - y_n) + \ldots + |a_m|(y_m - y_{m-1}) < \varepsilon((y_{n-1} - y_n) + (y_{n-2} - y_{n-1}) + \ldots + (y_m - y_{m+1})) = \varepsilon(y_m - y_n)$

$|x_n - x_m| < \varepsilon(y_m - y_n) \to \varepsilon y_m \Rightarrow |x_m| \leqslant \varepsilon y_m \Rightarrow |\frac{x_m}{y_m} \leqslant \varepsilon$. Получили определение предела!!!

Случай $l \in \mathbb{R}$. См. выше.

Случай $l = +\infty$ нужна лишь монотонность.

Случай $l = -\infty$. □

## 2.4. Подпоследовательность

***Определение* 2.18.** Последовательность: последовательность $x_{n_i}$, заданная как набор индексов $n_i : 1 \leqslant n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$.

Свойства.

1. $n_k \geqslant k$. Индукция. $n_{k+1} > n_k \geqslant k$.
2. Если последовательность предел в $\overline{\mathbb{R}}$, то подпоследовательность имеет тот же предел.
3. Две две подпоследовательности $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots$ и $x_{m_1}, x_{m_2}, \ldots$ в объединение дают всю последовательность и они имеют один и тот же предел $l \in \overline{R}$, то $\lim x_n = l$. Доказательство по картинке.

**Теорема 2.18** (О стягивающихся отрезках)**.** Пусть $[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \ldots$ и $\lim(b_n - a_n) = 0$. Тогда $\exists! c \in \mathbb{R}$ принадлежащая всем отрезкам и $\lim a_n = \lim b_n = c$.

**Доказательство**. Существование следует из теоремы о вложенных отрезка. Докажем единственность. Пусть $c, d \in [a_n; b_n]$. Тогда $c - d \leqslant b_n - a_n \to 0 \Rightarrow c = d$.

Проверим, что $\lim a_n = c$. $|a_n - c|$ — длина подотрезка $[a_n; b_n]$, тогда $|a_n - c| \leqslant b_n - a_n \to 0 \Rightarrow a_n - c \to 0 \Rightarrow \lim a_n = c$. □

**Теорема 2.19** (Больцано-Вейерштрасса)**.** Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность. То есть, если $x_n$ — ограниченная последовательность, то существует $x_{n_k}$ имеющая конечный предел.

**Доказательство**. $a$ — нижняя граница, $b$ — верхняя для $x_n$. То есть $\forall n : x_n \in [a; b]$. В какой-то половине отрезка бесконечное число членов (иначе в сумме конечное число членов). Назовем подходящую $[a_1; b_1]$. Теперь делю эту половинку пополам. В одной из половинок половинки бесконечное число членов. Получили процесс деления отрезков на кусочки.

Заметим, что $[a;b] \supset [a_1;b_1] \supset \ldots$. $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$. Тогда $\exists c \in R : \lim a_n = \lim b_n = c$. Берем $[a_1;b_1]$, там бесконечное число членов. Берем какой-то $x_{n_1}$. Берем $[a_2;b_2]$, там есть $n_2 > n_1$. Тогда получили возрастание индексов и $x_{n_k} \in [a_k;b_k]$. $a_k \leqslant x_{n_k} \leqslant b_k$, то тогда по двум милиционерам $\lim x_{n_k} = c$. □

**Теорема 2.20.** Несколько пунктов:

1. Монотонная неограниченная последовательность стремится к $\pm\infty$.
2. Из неограниченной сверху последовательности можно выбрать подпоследовательность, стремящуюся к $+\infty$.
3. Из неограниченной снизу последовательности можно выбрать подпоследовательность, стремящуюся к $-\infty$.

**Доказательство**.

1. Пусть $x_n$ монотонно возрастает. Докажем, что $\lim x_n = +\infty$. $\forall E$. Это не верхняя граница, значит найдется $x_N > E \Rightarrow \exists n \geqslant N \Rightarrow E < x_N \leqslant X_{N+1} \leqslant \ldots \leqslant x_n$.
2. 1 — не верхняя граница $\Rightarrow$ есть $x_{n_1} > 1$. $2 + x_{n_1}$ — не верхняя граница $\Rightarrow$ есть $x_{n_k} > 2 + x_{n_k} + 2$. И так далее ...Получилось, что $x_{n_k} > k \to \infty \Rightarrow x_{n_k} \to +\infty$. Дальше переставим члены в порядке возрастания индексов.

□

***Определение* 2.19.** $l$ — Частичный предел предел последовательности, если существует подпоследовательность, стремящаяся к $l$.

*Замечание.* Больцано-Виерштрасса + 2/3 пункт предыдущей теоремы говорят о том, что частичный предел точно существует.

***Определение* 2.20.** Пусть $l \in \mathbb{R}$. Тогда окрестность $l$ — произвольный интервал $(l-\varepsilon; l+\varepsilon)$.

***Определение* 2.21.** Окрестность $+\infty$ — луч $(E;+\infty)$, $-\infty$ — луч $(-\infty;E)$

**Теорема 2.21.** $l \in \overline{R}$ — частичный предел последовательности $\iff$ в любой окрестности $l$ содержится бесконечно много членов.

**Доказательство**.

- $\Rightarrow$ $l$ — частичный предел $\Rightarrow$ найдется подпоследовательность $x_{n_k} \to l \Rightarrow$ вне любой окрестности $l$ конечное число членов последовательности $x_{n_k} \Rightarrow$ внутри бесконечное.
- $\Leftarrow$ Возьмем $(l-1;l+1)$. В ней бесконечное число членов. Возьмем любой $x_{n_1}$. Далее из $(a-\frac{1}{2}; a+\frac{1}{2})$ возьмем $x_{n_2}, n_2 > n_1$. Повторим процесс: $x_{n_k} \in (a-\frac{1}{k}; a+\frac{1}{k}), n_k > n_{k-1}$. Тогда получили подпоследовательность, для которой верно: $a-\frac{1}{k} < x_{n_k} < a+\frac{1}{k} \xRightarrow[\text{2 мил.}]{\text{Th.}} x_{n_k} \to a \Rightarrow l$ — частичный предел.

□

***Определение* 2.22.** $x_n$ — фундаментальная (сходящаяся в себе, последовательность Коши), если $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m,n \geqslant N : |x_n - x_m| < \varepsilon$.

***Свойство.*** Сходящаяся последовательность фундаментальна.

**Доказательство**. Пусть предел $l = \lim x_n$. Берем $\varepsilon > 0$. $\exists N \forall n \geqslant N |x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge |x_m - l| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |x_n - x_m| \leqslant |x_n - l| + |l - x_m| < \varepsilon$ □

***Свойство.*** Фундаментальная последовательность ограничена.

**Доказательство**. Берем $\varepsilon = 1$. Тогда $\exists N \forall m, n \geqslant N : |x_n - x_m| < 1 \Rightarrow |x_n - x_N| < 1 \Rightarrow |x_n| < 1 + |x_N| \Rightarrow |x_n| \leqslant \max\{|x_1|, \ldots, |x_{N-1}|, 1 + |x_N|\}$. □

***Свойство.*** Если фундаментальная последовательность содержит сходящуюся последовательность, то она сама сходящаяся.

**Доказательство**. Берем $\varepsilon > 0$. $\exists N : \forall n, m \geqslant N |x_n - x_m| < \varepsilon$. $\exists K : \forall k \geqslant K |x_{n_k} - l| < \varepsilon$. Возьмем $n \geqslant N$ и рассмотрим $x_n - l \leqslant |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - l| < 2\varepsilon$, если $k = \max\{N, K\}$. □

**Теорема 2.22** (Критерий Коши)**.** Последовательности фундаментальна $\iff$ последовательность сходящаяся.

**Доказательство**.

- $\Leftarrow$. Св-во 1.
- $\Rightarrow$ Фундаментальна $\Rightarrow$ ограничена $\Rightarrow$ существует сходящаяся подпоследовательность.

□

**Пример.** $x_n \coloneqq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{2^k}$. Проверим фундаментальность. Пусть $n > m$. $|x_n - x_m| = |\sum_{k=m+1}^{n} \frac{\sin k}{2^k}| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} \frac{|sin k|}{2^k} \leqslant \sum_{m+1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^m} < \varepsilon$.

***Определение* 2.23.** $x_n$ — последовательность. $y_n \coloneqq \inf_{k \geqslant n} x_k, z_n \coloneqq \sup_{k \geqslant n} x_k$. Тогда верхний предел $x_i$ $\overline{\lim} x_n = \lim z_n$, а нижний предел $\underline{\lim} x_n = \lim y_n$

**Теорема 2.23.** $\exists \underline{\lim}$ и $\overline{\lim}$. $\overline{\lim} \geqslant \underline{\lim}$.

**Доказательство**. $y_n \leqslant z_n \Rightarrow \underline{\lim} \leqslant \overline{\lim}$.

Существование. $y_n$ монотонно убывает. $y_{n+1} = \inf\{x_{n+1}, \ldots\} \geqslant \inf\{x_n, \ldots\} = y_n$. Тогда у нее есть предел. Аналогично $z_n$ монотонно убывает. □

*Замечание.* $\overline{\lim} = \inf z_n = \inf \sup_{k \geqslant n} x_n$.

$\underline{\lim} = \sup y_n = \sup \inf_{k \geqslant n} x_n$.

**Теорема 2.24.**

1. Верхний предел — наибольший из всех частичных пределов.
2. Нижний предел — наименьший из всех частичных пределов.
3. Если $\underline{\lim} = \overline{\lim}$, то последовательность имеет предел и он равен $\underline{\lim}$.

**Доказательство**.

1. Пусть $a = \overline{\lim} \in \mathbb{R}$. Тогда $a = \lim z_n$, где $z_n = \sup_{k \geqslant n} x_k$. Мы знаем, что $z_n \downarrow a$. Значем, что $z_1 \geqslant a = \sup x_n \Rightarrow n_1 : x_{n_1} > a - 1$. Тогда знаем, что $z_{n_1+1} = \sup_{k \geqslant n+1} \geqslant a \Rightarrow \exists n_2 > n_1 : x_{n_2} > a - \frac{1}{3}$. И так далее.

   Тогда получили $n_1 < n_2 < \ldots$ и $z_{n_k} > x_{n_k} > a - \frac{1}{k} \Rightarrow x_{n_k} \to a$. Так как $z_{n_k} \to a$.

Пусть $a = -\infty$, значит $z_n \downarrow -\infty$, тогда $x_n \leqslant z_n \to -\infty \Rightarrow x_n \to -\infty$.

Пусть $a = +\infty$, значит $\forall n : z_n = +\infty \Rightarrow$ последовательность $x_n$ не ограничена сверху. Тогда выберем подпоследовательность, стремящаяся к $+\infty$.

Поняли, что $a$ — частичный предел. Докажем, что он максимальный. Возьмем $x_{n_k} \to b$. Тогда $x_{n_k} \leqslant z_{n_k} \wedge x_{n_k} \to b \wedge z_{n_k} \to a \Rightarrow b \leqslant a$.

2. Упражнение.

3. $y_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, \ldots\} \leqslant x_n \leqslant \sup\{x_n, x_n + 1, \ldots\} = x_n$. Тогда два милиционера.

□

**Теорема 2.25.**

1. $a = \underline{\lim}\, x_n \iff \begin{cases} \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geqslant N : x_n > a - \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0\ \forall N\ \exists n \geqslant N : x_n < a + \varepsilon \end{cases}$

2. $b = \overline{\lim}\, x_n \iff \begin{cases} \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geqslant N : x_n < b + \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0\ \forall N\ \exists n \geqslant N : x_n > b - \varepsilon \end{cases}$

**Доказательство**. Будем доказывать второй пункт.$z_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$

1. $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geqslant N x_n < b + \varepsilon \xLeftrightarrow[\text{def } z_n]{\text{def sup}} \forall \varepsilon > 0 \exists N : z_N < b + \varepsilon$. Там достаточно этого по определению $z_n$ и sup.

2. $\forall \varepsilon > 0 \forall N \exists n \geqslant N x_n > b - \varepsilon \iff \varepsilon > 0 \forall N z_N > b - \varepsilon$.

3. Так как $z_n \downarrow \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geqslant N : z_n \leqslant b + \varepsilon$. Поэтому $\forall N \in N : z_N \geqslant b - \varepsilon \wedge z_N \leqslant b + \varepsilon$, то $z_n \to b$.

□

**Теорема 2.26.** $\forall x_n, y_n : x_n \leqslant y_n \Rightarrow \underline{\lim} x_n \leqslant \underline{\lim} y_n \wedge \overline{\lim} x_n \leqslant \overline{\lim} y_n$.

**Доказательство**. Раскрываем определения, получаем $\inf\{\ldots\} \leqslant \inf\{\ldots\}$. □

*Замечание.* Арифметики нет. Пример: $x_n = (-1)^n, y_n = (-1)^{n+1}$.

## 2.5. Ряды

***Определение* 2.24.** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim \sum_{k=1}^{n} a_k$, если lim существует, и $\in \overline{\mathbb{R}}$.

***Определение* 2.25.** Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — сходится, если его сумма конечна, иначе ряд расходится.

**Пример.** $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \lim \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \frac{1}{1-q} + \frac{\lim q^n}{q-1}$.

Если $|q| < 1$, то $\lim q^n = 0$ и $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ ряд сходится.

Если $q > 1$, то $\lim q^n = +\infty$ и $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty$ ряд расходится.

Если $q \leqslant -1$, то $\lim q^n$ не существует и $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ расходится.

**Пример.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$. $S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$.

**Пример.** Гармонический ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$. $H_n \coloneqq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$. Поймем, что $\lim H_n = +\infty$. Разобьем на блоки: $1+\frac{1}{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}_{>2\cdot\frac{1}{4}}+\underbrace{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)}_{4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}}+\ldots > 1+\frac{n}{2} \to +\infty$

Свойства:

1. Если ряд сходился, то сумма определена однозначно.
2. Добавление/выкидывание из ряда конечного числа членов не влияет на сходимость (но может влиять на сумму).
3. Расстановка скобок: $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}+\ldots \to (a_1+a_2)+a_3+(a_4+a_5+a_6)+(a_7+a_8)+a_9+a_{10}+\ldots$. Взятие в скобки означает, что мы заменяем скобки на посчитанную сумму. Но это не меняет его сумму.

   *Замечание.* Ряд $1-1+1-1+\ldots$ можно сгруппировать двумя способами: $(1-1)+(1-1)+\ldots = 0$ и $1+(-1+1)+(-1+1)+\ldots = 1$, так что надо сначала проверить сходимость.

4. $\forall a_n, b_n$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — сходится и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ — сходится $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ — сходится, причем $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
5. $\forall a_n$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — сходится $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

**Доказательство**. $A_n \coloneqq \sum_{k=1}^{n} a_k \wedge B_n \coloneqq \sum_{k=1}^{n} B_k \Rightarrow S_n \coloneqq \sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = A_n + B_n$ □

# 3. Предел и непрерывность

## 3.1. Предел функции

***Определение* 3.1.** $a \in \mathbb{R}$, тогда $U_a$ — окрестность точки $a \Leftarrow U_a = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

***Определение* 3.2.** $\dot{U}_a = U_a \setminus \{a\}$ — выколотая окрестность.

***Определение* 3.3.** $E \subset \mathbb{R}$ a — предельная точка $E$, если любая $\dot{U}_a$ пересекается с $E$.

**Теорема 3.1.** Следующие условия равносильны:

1. $a$ — предельная точка $E$.
2. В любой $U_a$ содержится бесконечное кол-во точек из $E$.
3. $\exists \{a_n\} : \forall n : a_n \in E \wedge a_n \to a$. Более того, можно выбрать последовательность $x_n \in E$ так, что $|x_n - a| \downarrow 0$.

**Доказательство**.

- $2 \Rightarrow 1$. $U_a \cap E$ содержит бесконечное число точек $\Rightarrow$ хотя бы одна из них не $a$ и тогда $\dot{U}_a \cap E \neq \varnothing$.
- $3 \Rightarrow 2$. Берем $x_n \neq a \in E : \lim x_n = a$. Возьмем $U_a = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. $\exists N : \forall n \geqslant N \; x_n \in (x_n) \in U_a$.
- $1 \Rightarrow 3$. Возьмем $\varepsilon_1 = 1$: $(a-1; a+1)$ содержит точку из $E \setminus \{a\}$. Назовем такую точку $x_i$.

  Возьмем $\varepsilon_2 = \min\{\frac{1}{2}, |x_i - a|\} > 0 : (a - \varepsilon_2; a + \varepsilon_2)$ содержит точку из $E \setminus \{a\}$. Назовем её $x_2$.

  Возьмем $\varepsilon_3 = \min\{\frac{1}{3}, |x_2 - a|\} > 0$ (заметим, что $|x_2 - a| < \varepsilon_2 < |x_1 - a|$). Тогда $(a - \varepsilon_3, a + \varepsilon_3)$ содержит точку из $E \setminus \{a\}$.

  Получили $|x_1 - a| > |x_2 - a| > \ldots$ причем $|x_k - a| < \varepsilon_k = \min\{\frac{1}{k}, |x_{k-1} - a|\} \leqslant \frac{1}{k} \to 0 \Rightarrow x_k - a \to 0 \Rightarrow x_k \to a$.

□

***Определение* 3.4.** Пусть $a$ — предельная точка $E$. $f : E \to \mathbb{R}$. Тогда $A = \lim_{x \to a} f(x)$, если

1. По Коши. $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in E : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.
2. Окрестности. $\forall U_A \exists U_a : f(\dot{U}_a \cap E) \subset U_A$.
3. По Гейне. Для любой последовательности $a \neq x_n \in E : \lim x_n = a \Rightarrow \lim f(x_n) = A$.

*Равносильность 1. и 2.* $\forall U_a \exists U_a : f(\dot{U}_a \cap E) \subset U_A$.

$\forall U_a \iff \forall \varepsilon > 0 : U_A = (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$.

$\exists U_a \iff \exists \delta > 0 : U_a = (a - \delta, a + \delta)$.

$x \in \dot{U}_a \in E \iff x \in E \wedge x \in \dot{U}_a \iff 0 < |x - a| < \delta$.

$f(\ldots) \in U_A \iff |f(x) - A| < \varepsilon$. □

***Свойство.*** Определение предела — локальное свойство. То есть, если $f$ и $g$ совпадают в $\dot{V}_a$, то либо оба предела не существуют, либо существуют и равны.

**Доказательство**. $\lim_{x\to a} f(x) = A$. $\forall U_A\,\exists U_a : f(\dot{U}_a \cap E) \subset U_A$. Возьмем $U_a \cap V_a$. Тогда все совпадет. $\square$

***Свойство.*** Значение $f$ в точке $a$ не участвует в определении.

***Свойство.*** В определении по Гейне. Если для любой последовательности $x_n \in E : x_n \to a$ $\lim f(x_n)$ существует, то все эти пределы равны.

**Доказательство**. Пусть $x_n \in E x_n \to a$ и $\lim f(x_n) = A$ и $y_n \to E y_n \to a$ и $\lim f(y_n) = B$.

Рассмотрим $z_n \coloneqq x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots \Rightarrow z_n \to a \Rightarrow \lim f(z_n) =: C$. Но $\{f(x_n)\}$ — подпоследовательность $\{f(z_n)\} \Rightarrow \lim f(x_n) = \lim f(z_n) = C$. Тоже самое для $y_n$. $\square$

**Теорема 3.2.** Определение по Коши и по Гейне равносильны.

**Доказательство**.

- $C \Rightarrow H$. $\forall \varepsilon > 0\,\exists \delta > 0\,\forall x \in E : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$. Пусть $x_n \in E : \lim x_n = a$. Проверим, что $\lim(x_n) = A$. Возьмем $\varepsilon > 0$, берем соответствующий $\delta$ из определения. Найдется $N : \forall n \geqslant N : 0 \leqslant \underbrace{|x_n - a| < \delta}_{\text{предел последовательности}} \Rightarrow |f(x_n) - A| < \varepsilon$.
- $H \Rightarrow C$. От противного: нашелся $\varepsilon > 0$ для которого ни одна $\delta > 0$ не подходит. Возьмем $\delta = \frac{1}{n}$. Она не подходит, то есть $\exists x \in E : 0 < |x - a| < \delta$, но $|f(x) - A| \geqslant \varepsilon$. Получили $x_n$.

  Посмотрим на последовательность: $x_n \neq a \in E$ $|x_n - a| < \frac{1}{n} \Rightarrow \lim x_n = a \Rightarrow \lim f(x_n) = A \Rightarrow |f(x_n) - A| < \varepsilon$. Противоречие.

$\square$

Свойства пределов:

1. Предел единственный.
2. Если существует $\lim_{x\to a} f(x) = A$, то $f$ локально ограничена, то есть существует $U_a$, $f$ в $U_a$ ограничена.
3. (Стабилизация знака). Если $\lim_{x\to a} f(x) = A \neq 0$, то существует такая окрестность $U_a$, что $f(x)$ при $x \in \dot{U}_a$ имеет тот же знак, что и $A$.

**Доказательство**.

1. Пусть $\lim_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim_{x\to a} f(x) = B$. Возьмем $\lim x_n \in E$, такой, что $x_n \to a$ (рассматриваем только предельные точки $E$). Тогда $\lim f(x_n) = A$ и $\lim f(x_n) = B$, но предел последовательности единственен $\Rightarrow A = B$.
2. Возьмем $\varepsilon = 1$ в определении по Коши. $\exists \delta > 0\,\forall x \in E\colon 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon = 1$. $U_a = (a - \delta, a + \delta)$, тогда $f$ ограничена на $U_a \cap E$. $|f(x)| \leqslant |A| + |f(x) - A| < A + 1$. Аккуратно рассмотрим еще про $x = a$.
3. Пусть $A > 0$. Возьмем $\varepsilon = A$. $\exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \wedge x \in E \Rightarrow |f(x) - A| < A \iff 0 < f(x) < 2A$. Берем $U_a = (a - \delta, a + \delta)$ для нее значения $> 0$.

$\square$

**Теорема 3.3** (Теорема о арифметических действиях с пределами)**.** Пусть $a$ — предельная точка $E$, $f, g : E \to \mathbb{R}$ и $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$. Тогда

1. $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$
2. $\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$
3. $\lim_{x\to a} |f(x)| = |A|$
4. $B \neq 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$

**Доказательство**. Проверим определение по Гейне. Берем последовательность $a \neq x_n \in E : \lim x_n = a$. Тогда $\lim f(x_n) = A$ и $\lim g(x_n) = B$. Следовательно $\lim(f(x_n) \pm g(x_n)) = A \pm B \Rightarrow \lim(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$.

Второй и третий пункт доказывается ровно так же.

Но вот в четвертом пункте надо что-то сказать про $g(x)$. Если $\lim_{x\to a} g(x) = B \neq 0$, то по теореме о стабилизации знака $\exists\delta > 0 : a \neq x_n \in E \wedge |x - a| < \delta \Rightarrow g(x) \neq 0$. Тогда для $x \in (a - \delta; a + \delta) \cap E$ можно писать $\frac{f(x)}{g(g)}$. $\square$

**Теорема 3.4** (О предельном переходе в неравенствах)**.** Пусть $a$ — предельная точка $E$, $f, g : E \to \mathbb{R}$ и $f(x) \leqslant g(x)$. Если $\lim_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim_{x\to a} g(x) = B$, то $A \leqslant B$.

**Доказательство**. Возьмем какую-то последовательность $a \neq x_n \in E : \lim x_n = a$ (найдется, так как $a$ — предельная точка $E$). Тогда $A = \lim f(x_n)$ и $B = \lim g(x_n)$.

Тогда знаем, что $\forall n : f(x_n) \leqslant g(x_n) \xRightarrow[\text{для послед.}]{\text{пред. переход}} A \leqslant B$ $\square$

**Теорема 3.5** (О двух милиционерах)**.** Пусть $a$ — предельная точка $E$, $f, g, h : E \to \mathbb{R}$ и $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ при всех $x \in E$. Тогда, $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) =: A \Rightarrow \lim_{x\to a} g(x) = A$.

**Доказательство**. Проверим определение по Гейне для $\lim_{x\to a} g(x) = A$. Берем любую последовательность $a \neq x_n \in E : \lim x_n = a$. Тогда $\lim f(x_n) = A \wedge \lim h(x_n) = A \wedge f(x_n) \leqslant g(x_n) \leqslant h(x_n) \xRightarrow[\text{для послед.}]{\text{Th. о 2 мил.}} \lim g(x_n) = A$. $\square$

**Теорема 3.6** (Критерий Коши для предела функции)**.** $a$ — предельная точка $E$, $f : E \to \mathbb{R}$. Тогда существует конечный $\lim_{x\to a} f(x) \iff \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \forall x, y \in E : \begin{matrix} |x - a| < \delta \\ |y - a| < \delta \end{matrix} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

**Доказательство**.

- $\Rightarrow$. Пусть $\lim_{x\to a} f(x) = A$. Тогда $\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \begin{matrix} \forall a \neq x \in E : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall a \neq y \in E : |y - a| < \delta \Rightarrow |f(y) - A| < \frac{\varepsilon}{2} \end{matrix}$.

  Тогда, если сложить получим $|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - A| + |A - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

- $\Leftarrow$. Докажем, что существует конечный $\lim_{x\to a} f(x)$ по Гейне. Берем последовательно $a \neq x_n \in E : \lim x_n = a$. Надо доказать, что $\lim f(x_n)$ существует и конечен. Для этого проверим, что $f(x_n)$ фундаментальная последовательность.

  Возьмем $\varepsilon > 0$ и соответствующую ему $\delta > 0$. $\exists N : \forall n \geqslant N |x_n - a| < \delta$. Берем $m, n \geqslant N \begin{matrix} |x_n - a| < \delta \\ |x_m - a| < \delta \end{matrix} \wedge a \neq x_n \in E \wedge a \neq x_m \in E \Rightarrow |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$, т.е. $f(x_n)$ — фундаментальная последовательность $\Rightarrow$ существует конечный $\lim f(x)$.

$\square$

***Определение* 3.5.** $f : E \to \mathbb{R}$, $E_1 = (-\infty, a) \cap E$. Пусть $a$ - предельная точка $E_1$, $g \coloneqq f$ на $E_1$. $\lim_{x\to a} g(x) = A$, то $\lim_{x\to a-} f(x) = A$ ($\lim_{x\to a-0} f(x) = A$) — предел слева в точке $A$.

***Определение* 3.6.** $f : E \to \mathbb{R}$, $E_2 = (a, +\infty) \cap E$. Пусть $a$ - предельная точка $E_2$, $g \coloneqq f$ на $E_2$. $\lim_{x\to a} g(x) = A$, то $\lim_{x\to a+} f(x) = A$ ($\lim_{x\to a+0} f(x) = A$) — предел справа в точке $A$.

*Замечание.* $A = \lim_{x\to a-} f(x) \iff \forall\varepsilon > 0\,\exists\delta > 0\,\forall x \in E : a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

*Замечание.* $B = \lim_{x\to a+} f(x) \iff \forall\varepsilon > 0\,\exists\delta > 0\,\forall x \in E : a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - B| < \varepsilon$

*Замечание.* $\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) =: A \iff \lim_{x\to a} f(x) = A$

***Определение* 3.7.** $f : E \to \mathbb{R}$. Тогда $f$ — монотонно возрастает $\Leftarrow \forall x, y \in E : x < y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$. Дальше бла-бла-бла.

**Теорема 3.7.** $f : E \to \mathbb{R}, E_1 \coloneqq (-\infty, a) \cap E$, $a$ — предельная точка $E_1$. Тогда

1. Если $f$ монотонно возрастает и ограничена сверху, то существует конечный предел $\lim_{x\to a-} f(x)$.
2. Если $f$ монотонно убывает и ограничена снизу, то существует конечный предел $\lim_{x\to a-f(x)}$.

*Замечание.* На самом деле в 1 $\lim_{x\to a-} f(x) = \sup_{x\in E_1} f(x)$, в 2 $\lim_{x\to a-} f(x) = \inf_{x\in E_1} f(x)$.

**Доказательство**.

1. $A \coloneqq \sup_{x\in E_1} f(x)$. Проверим, что $\lim_{x\to a-} f(x) = A$. Возьмем $\varepsilon > 0$. Тогда $A - \varepsilon$ не верхняя граница $\{f(x) : x \in E_1\} \Rightarrow$ найдется $x_0 \in E_1 : f(x_0) > A - \varepsilon$. $\delta \coloneqq a - x_0 > 0$. Проверим, что он подходит. Возьмем $x \in E : a - \delta = x_0 < x < a \Rightarrow f(x_0) \leqslant A - \varepsilon < f(x) \leqslant A < A + \varepsilon \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

$\square$

## 3.2. Непрерывные функции

***Определение* 3.8.** $f : E \to \mathbb{R}$ и $a \in E$. $f$ непрерывна в точке $a$, если $a$ — не предельная точка или $a$ — предельная точка и $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

***Определение* 3.9.** с $\varepsilon-\delta$. Тогда $\forall\varepsilon > 0\,\exists\delta > 0\,\forall x \in E|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) = f(a)| < \varepsilon$

***Определение* 3.10.** С окрестностями. $\forall U_{f(a)} \exists U_a f(U_a \cap E) \subset U_{f(a)}$

***Определение* 3.11.** $\forall x_n \in E : \lim x_n = a \Rightarrow \lim f(x_n) = f(a)$.

**Пример.** $f(x) = c$ — непрерывна всегда.

**Пример.** $f(x) = x$ — непрерывна всегда.

**Пример.** $f(x) = [x]$. Если $a \notin \mathbb{Z} \lim_{x\to a}[x] = n = [a]$. Иначе предела нет.

**Пример.** $f(x) = |\{x\} - \frac{1}{2}|$.

$a \notin \mathbb{Z}$ — очевидно. $a = n \in \mathbb{Z}$: $\lim_{x\to n+} |\{x\} - \frac{1}{2}| = \lim_{x\to n+} = |x - n - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2} = f(n)$. $\lim_{x\to n-} |\{x\} - \frac{1}{2}| = \lim_{x\to n-} = |x - (n - 1) - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2} = f(n)$.

Функция непрерывна!

**Теорема 3.8.** $\exp x$ непрерывна во всех точках.

**Доказательство**. $\lim_{x\to a}\exp x = \exp a$. Пусть $h \coloneqq x-a \to 0$. $\lim_{h\to 0}\exp(a+h) = \exp a$. Тогда надо доказать, что $\lim_{h\to 0}\exp h = 1$. Заметим, что $1+h \leqslant \exp h \leqslant \frac{1}{1-h}$, при $|h| \leqslant 1$. Значит, по 2 милиционерам $\exp h \to 1$. □

**Теорема 3.9** (Теорема об арифметических действиях с непрерывными функциями)**.** $f, g : E \to \mathbb{R}, a \in E$, $f, g$ непрерывны в $a$. Тогда:

1. $f \pm g$ непрерывна $a$.
2. $f \cdot g$ непрерывна в $a$.
3. $|f|$ непрерывна в $a$
4. ˙если $g(a) \neq 0$, то $\frac{f}{g}$ непрерывна.

**Доказательство**. Если $a$ не предельная, то очев. Иначе ссылаемся на арифм. действия с пределами. □

***Следствие.***

1. Многочлены непрерывны во всех точках.
2. Рациональные функции функции (т.е. отношение двух многочленов) непрерывны на всех области определения.

**Доказательство**.

1. $f(x) = c, g(x) = x \Rightarrow cx^k$ — непрерывна $\Rightarrow$ многочлены непрерывны.
2. $\frac{P(x)}{Q(x)}$ непрерывна в точке $a$, если $Q(a) \neq 0$.

□

**Теорема 3.10** (О стабилизации знака)**.** $f : E \to \mathbb{R}$, $a \in E$, $f$ — непрерывна в $a$ и $f(a) \neq 0$. Тогда $\exists U_a : \forall x \in U_a \cap E$ знак $f(x)$ совпадает с $f(a)$.

**Доказательство**.

- Точка не предельная. Берем окрестность только из $a$.
- Иначе ссылаемся на соответствующую теорему из условия.

□

**Теорема 3.11.** Пусть $f, a$ такие же, как выше. $g : D \to \mathbb{R}, \lim_{x\to a} f(x) = A$, $g$ — непрерывна в $A$, $D \supset f(E)$, тогда $\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(A)$.

**Доказательство**. $g$ непрерывна в точке $A \Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall y \in D|y-A| < \delta \Rightarrow |g(y)-g(A)| < \varepsilon$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и по нему возьмем $\delta > 0$ и подставим его вместо $\varepsilon$ в определение $\lim_{x\to a} f(x) = A$.

$\forall\delta > 0\ \exists\gamma > 0\ \forall x \in E|x-a| < \gamma \Rightarrow |f(x)-A| < \delta$. Подставим $y = f(x)$: $|g(f(x)) - g(A)| < \varepsilon$. □

***Следствие Непрерывность композиции.*** $f, a, g$ бла-бла-бла. $g \circ f$ непрерывна в $a$.

**Доказательство**. Если $a$ не предельная, то там неинтересно.

Если предельная, то предыдущая теорема. □

***Замечание.*** Без непрерывности $g$ неверно. $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$. $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ $g(y) = \begin{cases} 0 & y = 0 \\ 1 & y \neq 0 \end{cases}$. $\lim_{y\to 0} g(y) = 1$. Но $\lim g(f(x))$ не существует. $x_n = \frac{1}{\pi n}$, $f(x_n) = 0$. $g(f(x_n)) = 0$. $y_n = \frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}$ $f(y_0) = y_n \neq 0$.

**Теорема 3.12.** $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin x < x < \operatorname{tg} x$.

***Следствие.*** $\forall x : |\sin x| \leqslant |x|$

**Доказательство**.

- $0 < x < \frac{\pi}{2}$ — уже было.
- $x > \frac{\pi}{2} \Rightarrow |\sin x| \leqslant 1 < \frac{}{2} \leqslant |x|$.
- При $x < 0 \Rightarrow |x| = |-x|$ и $|\sin x| = |sin(-x)|$.

□

***Следствие.***

1. $|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|$
2. $|\cos x - \cos y| \leqslant |x - y|$

**Доказательство**. $|\sin x - \sin y = 2|\sin\frac{x-y}{2}||cos\frac{x+y}{2}| \leqslant 2|sin\frac{x-y}{2}| \leqslant 2|\frac{x-y}{2}| \leqslant |x - y|$

Второй так же. □

**Теорема 3.13.** $\sin, \cos, \operatorname{tg}, \operatorname{ctg}$ — непрерывны.

**Доказательство**. А где пруф??? □

**Теорема 3.14** (Первый замечательный предел)**.**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

**Доказательство**. Нам известно неравенство $\sin x \leqslant x \leqslant \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, при $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Тогда $\sin x \leqslant x \leqslant \operatorname{tg} x \iff \frac{1}{\operatorname{tg} x} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{\sin x}$

Тогда $\cos x \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant 1$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}$.

Тогда применим двух милиционеров: $\cos x \to 1$, $1 \to 1$ при $x \to 0$, а значит $\frac{\sin x}{x} \to 1$. □

**Теорема 3.15** (Теорема Вейерштрасса)**.**

1. Непрерывная на отрезке функция ограничена.
2. Непрерывная на отрезке функция принимает наибольшее и наименьшее значение.

**Доказательство**. Введем обозначения: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна во всех точках.

1. От противного. Число $n$ не является верхней границей для $|f|$. Значит $\exists x_n \in [a, b] : |f(x_n)| > n$.

   Применим теорему Больцано-Вейерштрасса. Выберем $x_{n_k}$ имеющий предел $c \in \mathbb{R}$. Причем, так как $a \leqslant x_{n_k} \leqslant b \Rightarrow a \leqslant c \leqslant b$. А значит, $f$ непрерывна в точке $c$, тогда $\lim\limits_{x\to c} |f(x)| = |f(c)| \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} |f(x_{n_k})| = |f(c)|$, но $|f(x_{n_k}) > n_k \to +\infty$. Получили противоречие. $+\infty \neq c \in \mathbb{R}$.

2. Будем доказывать максимум. $M \coloneqq \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) \in \mathbb{R}$. Пусть он не достигается, то есть $f(x) < M\ \forall x \in [a,b]$.

   Тогда рассмотрим вспомогательную функцию $g(x) \coloneqq \frac{1}{M-f(x)}$ — непрерывна на $[a,b] \Rightarrow g$ ограничена $\Rightarrow g(x) \leqslant \widehat{M}\ \forall x \in [a,b]$.

   Тогда $M - f(x) \geqslant \frac{1}{\widehat{M}} \Rightarrow f(x) \leqslant M - \frac{1}{\widehat{M}} < M$. Получили противоречие, так как $M$ — супремум.

□

*Замечание.* Отрезок нельзя менять на интервал или полуинтервал. $f(x) = \frac{1}{x}$ на $(0,1]$ — непрерывность есть, ограниченности нет.

*Замечание.* Непрерывность должна быть на всех точках. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \in (0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ на $[0,1]$. Ограниченности нет, непрерывность во всех точках, кроме одной.

**Теорема 3.16** (Теорема Больцано-Коши, теорема о промежуточных значениях)**.**

1. $f$ непрерывна на $[a,b]$ и значение $f(a)$ и $f(b)$ разных знаков. Тогда $\exists c \in (a,b)\colon f(c) = 0$.
2. $f$ непрерывна на $[a,b]$ и $y$ лежит между $f(a)$ и $f(b)$. Тогда $\exists c \in (a,b)\colon f(c) = y$

**Доказательство**.

1. Считаем, что $f(a) < 0 \land f(b) > 0$. Будем делить отрезок на части. $a_0 \coloneqq a, b_0 \coloneqq b$. Тогда:

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} [\frac{a_n+b_n}{2}, b_n] & \text{если } f(\frac{a_n+b_n}{2}) < 0 \\ [a_n, \frac{a_n+b_n}{2}] & \text{если } f(\frac{a_n+b_n}{2}) > 0 \end{cases}.$$

   Тогда, если процесс не оборвался, получили $[a,b] = [a_0,b_0] \supset [a_1,b_1] \subset [a_2,b_2] \supset \ldots$. Стягивающиеся отрезки $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$. Тогда найдется $c$, лежащая во всех отрезках, причем $\lim a_n = \lim b_n = c$. Функция непрерывна в $c \Rightarrow \lim \overbrace{f(a_n)}^{<0} = f(c) = \lim \overbrace{f(b_n)}^{>0} \Rightarrow 0 \geqslant \lim f(a_n) = f(c) \land \lim f(b_n) \geqslant 0 \Rightarrow f(c) = 0$.

2. $g(x) \coloneqq f(x) - y$. Тогда $g(a)$ и $g(b)$ разных знаков $\Rightarrow \exists c \in [a,b]\colon f(c) - y = g(c) = 0$

□

*Замечание.* Нужна непрерывность во всех точках. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in [0,1] \\ -1 & \text{при } x \in [-1;0) \end{cases}$ непрерывна на $[-1,1]$, за исключением 0.

*Замечание.* Бывают разрывные функции, удовлетворяющие теореме о промежуточных значениях. $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{при } x \in (0;1] \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$. Если $a, b \in [0,1]$, то на $[a,b]$ $f$ принимает все значения между $f(a)$ и $f(b)$. Случай $0 < a < b$ — теорема Больцано-Коши. Случай $a = 0 < b$ на $(0,b)$ принимает все значения. Так как на $[\frac{1}{2\pi(n+1)}; \frac{1}{2\pi n}]$ $\sin\frac{1}{x}$ принимает все значения от $-1$ до 1.

**Теорема 3.17.** Непрерывный образ отрезка — отрезок. То есть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывная $\Rightarrow f([a,b])$ — отрезок.

**Доказательство**. $m \coloneqq \min\limits_{x\in[a,b]} f(x) \quad M \coloneqq \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. По теореме Вейерштрасса $\exists p,q \in [a,b]:$ $m = f(p), M = f(q)$. Рассмотрим отрезок с концами в $p$ и $q$ по теореме Больцано-Коши на $(p,q)$ функция принимает все значения между $f(p)$ и $f(q)$, то есть все значения из $[m,M]$ достигаются $\Rightarrow f([a,b]) = [m,M]$. □

***Определение* 3.12.** $\langle a,b\rangle$ означает один из промежутков $[a,b]; (a,b]; [a,b); (a,b)$.

**Теорема 3.18.** Непрерывный образ промежутка — промежуток (но, возможно, промежуток другого типа.)

**Доказательство**. $\langle a,b\rangle$ — промежуток. $m \coloneqq \inf_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$ (возможно $-\infty$). $M \coloneqq \sup_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$.

Тогда $m \leqslant f(x) \leqslant M\ \forall x \in \langle a,b\rangle$. Докажем, что $f(\langle a,b\rangle) \supset (m;M)$, но при этом $f(\langle a,b\rangle) \subset [m,M]$.

Возьмем $y \in (m,M)$, такой что $m < y < M$.

$m = \inf \Rightarrow y$ — не нижняя граница $\Rightarrow \exists p \in \langle a,b\rangle \colon f(p) < y$.

$M = \sup \Rightarrow y$ — не верхняя граница $\Rightarrow \exists p \in \langle a,b\rangle \colon f(q) > y$.

Применим теорему Больцано-Коши для отрезка с концами $p$ и $q \Rightarrow \exists c \in (p,q) \subset \langle a,b\rangle \colon f(c) = y$.

Тогда $(m,M) \subset f(\langle a,b\rangle) \subset [m,M] \Rightarrow f(\langle a,b\rangle)$ — промежуток. □

*Замечание.* $f(x) = x^2$ на $(-1,1)$, образ $[0,1)$.

$f(x) = \sin x$ на $(0,2\pi)$, образ $[-1,1]$.

$f(x) = \frac{\sin\frac{1}{x}}{x}$ на $(0,1]$, образ $\mathbb{R}$.

***Определение* 3.13.** Пусть $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ и инъективна. Тогда $g$ — обратная к $f \iff g : f(\langle a,b\rangle) \to \langle a,b\rangle$ и $f(g(y)) = y \wedge g(f(x)) = x$.

$g$ обозначатся как $f^{-1}$.

*Замечание.* Обратная функция существует, так как $f$ — биекция между $\langle a,b\rangle$ и $f(\langle a,b\rangle)$.

*Замечание.* График непрерывной функции симметричен относительно прямой $y = x$.

**Теорема 3.19.** $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ непрерывна и строго монотонна. $m \coloneqq \inf_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$ (возможно $-\infty$). $M \coloneqq \sup_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$. Тогда:

1. $f$ обратима и $f^{-1} \colon \langle m,M\rangle \to \langle a,b\rangle$
2. $f^{-1}$ строго монотонна.
3. $f^{-1}$ непрерывна на $\langle m,M\rangle$.

**Доказательство**.

1. Строгая монотонность $\Rightarrow f$ — инъекция $\Rightarrow f$ — обратима.
2. Пусть $f$ строго возрастает $\Rightarrow f(x) < f(y) \iff x < y$. Тогда $x < y \Rightarrow f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$.
3. Непрерывность. Возьмем $y_0 \in \langle m,M\rangle$. Докажем непрерывность в точке $y_0$. $A \coloneqq \sup_{y<y_0} f^{-1}(y) = \lim_{y\to y_0-} f^{-1}(y)$ (функция строго монотонная) $\leqslant f^{-1}(y_0) \leqslant \lim_{y\to y_0+} f^{-1}(y) = \inf_{y>y_0} f^{-1}(y) \eqqcolon B$. Докажем, что $A = B$.

   Пусть $A < B$. Рассмотрим множество значений $f^{-1} : (-\infty;A] \cup \{f^{-1}(y_0)\} \cup [B;+\infty) \supset f^{-1}(\langle m,M\rangle) = \langle a,b\rangle$. Противоречие.

□

## 3.3. Элементарные функции

**Обратные тригонометрические функции**.

- $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ непрерывна и строго возрастает. По теории у него есть обратная функция.
- $\arcsin\colon [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ непрерывна и строго возрастает.
- $\cos\colon [0; \pi] \to [-1, 1]$ непрерывна и строго убывает.
- $\arccos\colon [-1, 1] \to [0, \pi]$ непрерывна и строго убывает.
- $\mathrm{tg}\colon \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ непрерывна и строго возрастает. По теории у него есть обратная функция.
- $\mathrm{arctg}\colon \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ непрерывна и строго возрастает.
- $\mathrm{ctg}\colon (0; \pi) \to \mathbb{R}$ непрерывна и строго убывает.
- $\mathrm{arcctg}\colon \mathbb{R} \to (0, \pi)$ непрерывна и строго убывает.

**Логарифм.**

$\exp : \mathbb{R} \to (0; +\infty)$ непрерывна и строго возрастает. Обратная функция $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ непрерывна и строго возрастает.

***Свойства.***

- $\lim_{x\to 0+} \ln x = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
- $\ln(1 + x) \leqslant x$, при $x > -1$.
- $\ln(1 + x) \geqslant 1 - \frac{1}{1+x}$, при $x > -1$.

**Доказательство**.

- Предел существует из монотонности, они такие, т.е. множество значений у $\ln$ — $\mathbb{R}$.
- $\exp(u + v) = \exp u \cdot \exp v$. Если $\exp u = a, \exp v = b$, то $u = \ln a, v = \ln b$, тогда $\exp(u + v) = a \cdot b \Rightarrow \ln(ab) = u + v = \ln a + \ln b$
- $\exp u \geqslant 1 + u \Rightarrow u = \ln(\exp u) \geqslant \ln(1 + u)$
- $y \coloneqq \ln(1 + x)$. $\exp y = 1 + x \Rightarrow 1 + x = \exp y \leqslant \frac{1}{1-y} \Rightarrow 1 - y \leqslant \frac{1}{1+x}$.

□

**Теорема 3.20.**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1.$$

**Доказательство**. $\frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x} \leqslant \ln(1 + x) \leqslant x$, при $-1 < x < 1$.

При $x > 0$: $\underbrace{\frac{1}{1 + x}}_{\to 1} \leqslant \frac{\ln(1+x)}{x} \leqslant 1$.

При $x < 0$: $1 \leqslant \frac{\ln(1+x)}{x} \leqslant \frac{1}{1+x} \to 1$ □

***Определение* 3.14.** $a^b \coloneqq \exp(b \ln a)$, при $a > 0, b \in \mathbb{R}$

Если $b \in \mathbb{N}$: $a^n = \exp(\underbrace{\ln a + \ln a + \ldots + \ln a}_{n \text{ штук}}) = \exp(\ln a) \cdot \ldots \exp(\ln a)$ — штук.

$a^{-n} = \exp(-n \ln a) = \frac{1}{\exp(n \ln a)} = \frac{1}{a^n}$.

$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$. $\exp(\frac{m}{n} \ln a) = \exp(m \frac{\ln a}{n}) = (\exp(\frac{\ln a}{n}))^m$.

**Упражнение.** Доказать, что $a^b = \lim a^b$, где $b_n \in \mathbb{Q}$ и $b_n \to b$.

***Следствие.***

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \tag{1}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = \lim_{x \to -\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e \tag{2}$$

**Доказательство**. 1. $(1+x)^{\frac{1}{x}} = \exp(\frac{1}{x} \ln(1+x))$

$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \exp(\frac{\ln(1+x)}{x}) = \exp(\lim \ldots) = \exp 1 = e$

2. $y = \frac{1}{x}$. $(1+x)^{\frac{1}{x}} = (1 + \frac{1}{y})^y$. При $x \to 0+$ $y \to +\infty$. При $x \to 0-$ $y \to -\infty$

$\square$

### Показательная функция

***Определение* 3.15.** Показательная функция $a^x \coloneqq \exp(x \ln a) : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, при $a > 0$.

***Свойства.*** 1. При $a > 1$ строго возрастает. Так как $\ln a > 0$.

2. При $a < 1$ строго убывает.

3. $a^x \geqslant 1 + x \ln a$ по свойству экспоненты.

**Теорема 3.21.**

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

**Доказательство**.

$$a^x \geqslant 1 + x \ln a \Rightarrow a^x - 1 \geqslant x \ln a$$

$$a^{-x} \geqslant 1 - x \ln a \Rightarrow a^x = \frac{1}{a^{-x}} \leqslant \frac{1}{1 - x \ln a} \text{ при малых } x$$

$$a^x - 1 \leqslant -1 + \frac{1}{1 - x \ln a} = \frac{x \ln a}{1 - x \ln a}.$$

Тогда $\frac{a^x - 1}{x}$ зажато между $\ln a$ и $\frac{\ln a}{1 - x \ln a} \xrightarrow[x \to 0]{} \ln a$. $\square$

### Степенная функция

***Определение* 3.16.** Степенная функция: $x^p \coloneqq \exp(p \ln x) \colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, когда $p \in \mathbb{R}$.

Функция непрерывна и, если $p \neq 0$, то строго монотонная.

**Теорема 3.22.**

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^p - 1}{x} = p.$$

**Доказательство**.

$$(1+x)^p = \exp(p\ln(1+x)) \geqslant 1 + p\ln(1+x)$$
$$(1+x)^p = \frac{1}{(1+x)^{-p}} \leqslant \frac{1}{1-p\ln(1+x)}, \text{при } x \text{ близких к нулю}$$
$$p\ln(1+x) = (1+x)^p - 1 \leqslant \frac{1}{1-p\ln(1+x)} - 1 = \frac{p\ln(1+x)}{1-p\ln(1+x)}$$

Тогда $\frac{(1+x)^p-1}{x}$ зажато между $p\cdot\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow{\text{зам. предел}} p$ и $p\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{1}{1-p\ln(1+x)} \xrightarrow[\text{непрерывность}]{\text{зам. предел}} p$. Дальше два милиционера. □

## 3.4. Сравнение функций

***Определение* 3.17.** $f, g\colon E \to \mathbb{R}$. $x_0$ — предельная точка $E$. Если $\exists \varphi\colon E \to \mathbb{R}\colon f = \varphi g$, при $x \in \dot{U}_{x_0} \cap E$ и

1. $\varphi$ — ограниченная: $f = \mathcal{O}(g)$. $|f(x)| \leqslant C|g(x)|$ в окрестности $x_0$.
2. $\varphi(x) \xrightarrow{x\to x_0} 0$: $f = o(g)$. $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$
3. $\varphi(x) \xrightarrow{x\to x_0} 1$: $f \sim g$. $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$

***Определение* 3.18.** $f = \mathcal{O}(g)$ на множестве $E \overset{\text{def}}{\iff} \exists C > 0\colon |f(x)| \leqslant C|g(x)|\ \forall x \in E$.

***Определение* 3.19.** $f = \mathcal{O}(g)\quad f \prec g\quad g \succ f$. Если $f = \mathcal{O}(g)$ и $g = \mathcal{O}(f)$, то $f \asymp g \iff \exists C_1, C_2 > 0\colon C_1|g(x)| \leqslant |f(x)| \leqslant C_2|g(x)|$.

*Замечание.* $g(x) \neq 0 \Rightarrow \varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ и $g(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ (иначе $\varphi(x)$ не существует.)

***Свойства.***

1. $\sim$ — отношение эквивалентности.
2. $f_1 \sim g_1 \wedge f_2 \sim g_2 \Rightarrow f_1 f_2 \sim g_1 g_2$.
3. $f_2$ и $g_2$ не обращаются в ноль в $\dot{U}_{x_0} \Rightarrow f_1 \sim g_1 \wedge f_2 \sim g_2 \Rightarrow \frac{f_1}{f_2} \sim \frac{g_1}{g_2}$
4. $f \sim g \iff f = g + o(g) \iff f = g + o(f)$.

**Доказательство**.

1. Рефлективность $f \sim f$: $\varphi = 1$.

   Симметричность $f \sim g \Rightarrow g \sim f\quad f \sim g \Rightarrow f = \varphi g \Rightarrow g = \frac{1}{\varphi} f$, где $\lim_{x\to x_0}\varphi(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{1}{\varphi(x)} = 1$.

   Транзитивность: $f \sim g \wedge g \sim h \Rightarrow f \sum h$. $f = \varphi_1 g \wedge g = \varphi_2 h \Rightarrow= f\varphi_1\varphi_2 h$. И еще пределы (очевидно).
2. $f_i \sim g_i \Rightarrow f_i = \varphi_i g_i$, и $\lim_{x\to x_0}\varphi_i = 1$. Можно перемножить $\varphi_i$, все будет ок.
3. $\frac{f_1}{f_2} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}\frac{g_1}{g_2}$.
4. $f \sim g \iff f = \varphi g \iff f = g + (\varphi - 1)g$. Так как $\varphi \to 1 \Rightarrow \varphi - 1 \to 0$.

□

***Свойства.***

6. $f = o(g) \Rightarrow f = \mathcal{O}(g)$ в точке $x_0$.

7. $f \sim g \Rightarrow f = \mathcal{O}(g)$ в точке $x_0$.

8. $f \cdot o(g) = o(fg)$

9. $o(f) + o(f) = o(f)$ и $\mathcal{O}(f) + \mathcal{O}(f) = \mathcal{O}(f)$.

10. $\lim_{x \to x_0} f(x) = a \iff f(x) = a + o(1)$

**Доказательство**. 6. $f = o(g) \Rightarrow f = \varphi g$, где $\lim_{x\to x_0} \varphi = 0$. Для $\sim$ $\lim_{x\to x_0} \varphi = 1 \Rightarrow \varphi$ ограничена в окрестности.

7. $h = f \cdot o(g) \iff h = f\varphi g$, где $\lim_{x\to x_0} \varphi = 0 \iff h = \varphi f g \iff h = o(fg)$.

8. $g = o(f), h = o(f) \Rightarrow g + h = o(f)$. $g = \varphi f, h = \psi f$, Где $\lim_{x\to x_0} \varphi = \lim_{x\to x_0} \psi = 0 \Rightarrow g + h = (\varphi + \psi) f$ и предел $= 0$.f

   $g = \mathcal{O}(f) \Rightarrow |g| \leqslant C|f| \wedge h = \mathcal{O}(f) \Rightarrow |h| \leqslant C'|f| \Rightarrow |g + h| \leqslant |g| + |h| \leqslant (C + C')|F|$.

9. $f(x) = a + o(1)$, где $o(1)$ — что-то, стремящееся к 0. $\lim_{x\to x_0}(f(x) - a) = 0 \iff \lim_{x\to x_0} f(x) = a$

□

**Пример.** $\sin x \sim x, \ln(1+x) \sim x, \operatorname{tg} x \sim x$ при $x \to 0$.

**Пример.** $\sin x = x + o(1)$.

$\ln(1+x) = x + o(1)$

$\operatorname{tg} x = x + o(x)$

$\frac{(1+x)^p - 1}{x} \to p \iff \frac{(1+x)^p - 1}{x} = p + o(1) = (1+x)^p = 1 + px + o(1)$

$\frac{a^x - 1}{x} \to \ln a \iff \frac{a^x - 1}{x} = \ln a + o(1) \iff a^x = 1 + x \ln a + o(x)$.

$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \sim \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2} = \frac{1}{2}$. Получается, что $\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} + o(1)$. А значит $1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \iff \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

# 4. Дифференциальное исчисление

## 4.1. Дифференцируемость и производная

***Определение* 4.1.** $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R} \land x_0 \in \langle a,b\rangle$.

$f$ — дифференцируема в точке $x_0$, если существует такое $k \in \mathbb{R}\colon f(x) = f(x_0) + k(x - x_0) + o(x - x_0)$ при $x \to x_0$. Можно думать, что $\alpha(x) = o(x - x_0)$, где $\alpha\frac{x}{x-x_0} \xrightarrow{x\to x_0} 0$.

***Определение* 4.2.** Производная функции $f$ в точке $x_0$ — $\lim_{x\to x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} =: f'(x)$.

**Теорема 4.1** (Критерий дифференцируемости)**.** $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}, x_0 \in \langle a,b\rangle$. Следующие условия равносильны:

1. $f$ дифференцируема в точке $x_0$.
2. $f$ имеет в точке $x_0$ конечную производную.
3. $\exists \varphi\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R} : f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0)$ и $\varphi$ непрерывна в точке $x_0$.

Причем, если выполнены эти условия, то $k = f'(x_0) = \varphi(x_0)$

**Доказательство**.

- 1. $\Rightarrow$ 2.$f(x) = f(x_0) + k(x - x_0) + o(x - x_0) \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{k(x-x_0)+o(x-x_0)}{x-x_0} = k + o(1) \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = k \Rightarrow f'(x_0) = k$
- 2. $\Rightarrow$ 3. $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$. $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & x \neq x_0 \\ f'(x_0) & x = x_0 \end{cases} \Rightarrow \varphi$ — непрерывна в $x_0$.
- 3. $\Rightarrow$ 1. $f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0)$, причем $\lim_{x\to x_0}\varphi(x) = \varphi(x_0) \Rightarrow f(x) = f(x_0) + \varphi(x_0)(x - x_0) + (\varphi(x) - \varphi(x_0))$???

$\square$

***Определение* 4.3.** Бесконечная производная $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$

**Пример.** $f(x) = \sqrt[3]{x}$. $f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty$

***Определение* 4.4.** $f'_+ :== \lim_{x\to x_0+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ $f'_- :== \lim_{x\to x_0-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

*Замечание.* Существование $f'(x_0) \iff$ существование $f'_\pm(x_0)$ и их равенство.

**Пример.** $f(x) = |x|$. $f'_+(x) = 1, f'_-(x) = -1$

***Определение* 4.5.** Касательная — предельное положение секущей.

**Пример.** Уравнение касательной. Пусть $f$ дифференцируема в точке $u \in \langle a,b\rangle$.

$y = f(u) + \frac{f(v)-f(u)}{v-u}(x - u)$. $f'(u) = \lim_{v\to u}\frac{f(v)-f(u)}{v-u}$. То есть $y = f(u) + f'(u)(x - u)$.

***Определение* 4.6.** Дифференциал функции $f(x_0 + h) = f(x_0) + k\cdot h + o(h)$ при $h \to 0$. $f(x_0)$ — константа, $k \cdot h$ — что-то линейное.

Дифференциал функции — линейное отображение $k\cdot$.

**Утверждение 4.2.** Если $f$ дифференцируема в $x_0$, то $f$ непрерывна в $x_0$.

**Доказательство**. $f(x) = f(x_0) + \underbrace{k(x-x_0)}_{\to 0} + \underbrace{o(x-x_0)}_{\to 0} \xrightarrow{x\to x_0} f(x_0)$ □

**Теорема 4.3** (Арифметические действия с дифференцируемыми функциями)**.** $f, gg : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}, x_0 \in \langle a, b\rangle, f, g$ — дифференцируемые в $x_0$. Тогда:

1. $f \pm g$ дифференцируема в $x_0$ и $(f \pm g)' = f' \pm g'$
2. $f \cdot g$ дифференцируема в $x_0$ и $(f \cdot g)' = f'g + fg'$
3. $cf$ дифференцируема в $x_0$ и $(cf)' = cf'$
4. $\alpha f + \beta g$ дифференцируема в $x_0$ и $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$
5. если $g(x_0) \neq 0$, то $\frac{f}{g}$ дифференцируема в $x_0$ и $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$

**Доказательство**.

1. $(f+g)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{(f(x)+g(x))-(f(x_0)+g(x_0))}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$
2. $(fg)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} = \frac{f(x)g(x)-f(x)g(x_0)+f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)}{=} \lim_{x\to x_0} f(x)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$ $\lim_{x\to x_0} g(x)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = fg' + f'g$
3. $(cf)' = cf' + c'f = cf'$
4. $(\alpha f + \beta g)' = (\alpha f)' + (\beta g)' = \alpha f' + \beta g'$
5. $\left(\frac{f}{g}\right)' = (f' \cdot \frac{1}{g}) + f \cdot (\frac{1}{g})'$.

   $(\frac{1}{g})'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x_0)g(x_0)} \frac{g(x_0)-g(x)}{x-x_0} = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$.

□

**Теорема 4.4** (Дифференцируемость композиции)**.** Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $g : \langle c, d\rangle \to \langle a, g\rangle$, $x_0 \in \langle c, d\rangle$, $g$ дифференцируема в точке $x_0$, $f$ дифференцируема в точке $g(x_0)$.

Тогда $f \circ g$ дифференцируема в точке $x_0$, и $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$.

**Доказательство**. $g$ дифференцируема в точке $x_0 \Rightarrow g(x) - g(x_0) = \psi(x)(x - x_0)$, где $\psi$ — непрерывна в точке $x_0$. $f$ дифференцируема в точке $y_0 = g(x_0) \Rightarrow f(y) - f(y_0) = \varphi(y)(y - y_0)$, где $\varphi$ непрерывна в точке $y_0$.

Поставим $y = g(x)$, получим $f(g(x)) - f(g(x_0)) = \varphi(g(x))(g(x) - g(x_0) = \underbrace{\varphi(g(x))}_{\text{непрерывна в точке } x_0 \text{ как композиция}} \psi(x)(x - x_0) \Rightarrow$
$f \circ g$ дифференцируема в точке $x_0$ и $(f \circ g)'(x_0) = \varphi(g(x_0))\psi(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$ □

**Теорема 4.5** (дифференцируемость обратной функции)**.** Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, строго монотонная, непрерывна, $x_0 \in \langle a, b\rangle$, f дифференцируема в точке $x_0$ и $f'(x_0) \neq 0$.

Тогда $f^{-1}$ дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$ и $(f^{-1})' = \frac{1}{f'(x_0)}$.

**Доказательство**. $f$ дифференцируема в $x_0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0)$, где $\varphi$ — непрерывна в точке $x_0$. Пусть $y = f(x)$. Тогда предыдущее равенство можно написать как $y - y_0 = \varphi(f^{-1}(y))(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0))$.

$\varphi(f^{-1}(y))$ непрерывна в точке $y_0$ как композиция непрерывных и $\varphi(f^{-1}(y_0)) = \varphi(x_0) = f'(x_0) \neq 0$. Тогда $\varphi(x) \neq 0$ в окрестности $x_0$ и $f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) = \frac{1}{\varphi(f^{-1}(y))}(y - y_0)$

$f^{-1}(y_0) = \frac{1}{\varphi(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{\varphi(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$ □

***Следствие.*** $f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

## 4.2. Таблица производных

1. $c' = 0$
2. $(x^p)' = px^{p-1}, p \in \mathbb{R}, x > 0$
3. $(a^x)' = a^x \ln a, a > 0$
   $(e^x)' = e^x$
4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, a > 0, a \neq 1$
   $(lnx)' = \frac{1}{x}$
5. $(\sin x)' = \cos x$
6. $(\cos x)' = -\sin x$
7. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10. $(\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
12. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

**Доказательство**.

- Очевидно.
- $(x^p)' = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^p - x^p}{h} = x^p \lim_{h\to 0} \frac{(1+\frac{h}{x})^p - 1}{\frac{h}{x}} \frac{1}{x} = x^p \frac{p}{x} = px^{p-1}$.
- $(a^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \ln a$
- $\log_a x$ — обратная к $a^x$ функция $f(x) = a^x$, тогда $(\log_a y)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{a^{f^{-1}(y)} \ln a} = \frac{1}{y \ln a}$
- $(\sin x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} = \sin x \lim_{h\to 0} + \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = \cos x \cdot 1 + \sin x \cdot 0$
- Тоже самое.
- $(\operatorname{tg} x)' = (\frac{\sin x}{\cos x})' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x) \sin x}{\cos^x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

- Тоже самое.
- $f(x) = \sin x$. $\arcsin'(y) = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(\arcsin y)} = \frac{1}{\cos(\arcsin y)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.
- $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$.
- $f(x) = \operatorname{tg} x$, $\operatorname{arctg}\colon \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}; \frac{pi}{2})$.
  $(\operatorname{arctg})'(y) = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(\operatorname{arctg} y)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} y)}} = \cos^2(\operatorname{arctg} y) = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} y)} = \frac{1}{1+y^2}$, так как $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$

□

## 4.3. Теоремы о среднем

**Теорема 4.6** (Теорема Ферма). $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$, $f$ — дифференцируема в точке $x_0$.

$f(x_0) = \max_{x\in\langle a,b\rangle} f(x) \vee f(x_0) = \min_{x\in\langle a,b\rangle} f(x) \Rightarrow f'(x_0) = 0$

**Доказательство**. Пусть $f(x_0) = \max_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$. Тогда $f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0+} \dfrac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\leqslant 0}}{\underbrace{x - x_0}_{>0}} \leqslant 0$.

Посмотрим на $f'(x_0) = f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0-} \dfrac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\leqslant 0}}{\underbrace{x - x_0}_{<0}} \geqslant 0$.

Значит, что $f'(x_0) \leqslant 0$ и $f'(x_0) \geqslant 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$. □

**Пример.** У $f(x) = x$ на отрезке $[0, 1]$ максимум в 1, минимум в 0, но производная на концах 1.

**Теорема 4.7** (Теорема Ролля). $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна во всех точках и дифференцируема на $(a, b)$. Если $f(a) = f(b)$, то $\exists\colon c \in (a, bf'(c) = 0$

**Доказательство**. $f$ непрерывна на $[a, b] \xRightarrow[\text{Вейерштрасса}]{\text{теорема}} f$ достигает наибольшего и наименьшего значения.

Пусть $f(p) = \min, f(q) = \max$. Если $p$ и $q$ — концы отрезка, то $\max = \min \Rightarrow f = \mathrm{const} \Rightarrow f' = 0$ во всех точках.

А если же одна из этих точек не является концом отрезка, то по теорема Ферма $f'$ в этой точке равна 0. □

*Замечание.* Геометрический смысл теоремы Ферма: в точках min, max касательная горизонтальна.

Геометрический смысл теоремы Ролля: если значения на концах равны, то можно провести горизонтальную касательную

**Теорема 4.8** (Лагранжа, Формула конечных приращений). $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на $(a, b)$. Тогда $\exists c \in (a, b)\colon f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

**Доказательство**. $g(x) = f(x) - kx$. Подберем $k$ так, что $g(a) = g(b)$. $f(a) - ka = g(a) = g(b) = f(b) - kb \Rightarrow k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Применим теорему Ролля к функции $g(x)$. $\exists c \in (a, b) : g'(c) = 0 \iff 0 = g'(c) = f'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ и умножим на $b - a$. □

*Замечание.* $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ — угловой коэффициент секущей, $f'(c)$ — угловой коэффициент касательной в точке $c$. В некоторой точке касательная параллельная секущей.

**Теорема 4.9** (Теорема Коши). $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывны на $[a,b]$, дифференцируемы на $(a,b)$, $g'(x) \neq 0\ \forall x \in (a,b)$. Тогда $\exists c \in (a,b)\colon \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

**Доказательство**. $h(x) \coloneqq f(x) - kg(x)$. Подберем $k$ так, что $h(a) = h(b)$.

$f(a) - kg(a) = h(a) = h()b = f(b) - kg(b) \Rightarrow k = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ (по Роллю у нас $g'(x) \neq 0$, а значит в концах значения точно не равны).

по т. Ролля для $h$ найдем $c \in (a,b)\colon h'(c) = 0$. Тогда $h'(c) = f'(c) - kg'(c) \Rightarrow k = \frac{f'(c)}{g'(c)}$. □

*Замечание.* Геометрический смысл. $g(t), f(t))$ координаты точки в момент времени $t$. Тогда $k$ — угловой коэффициент секущей. $(f'(t), g'(t))$ — вектор скорости в момент времени $t$. Тогда $\frac{f'(t)}{g'(t)}$ — угловой коэффициент касательной.

***Определение* 4.7.** $f\colon E \to \mathbb{R}$ — липшивеца функция с константной $M$, если $\forall x, y \in E\colon |f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|$.

***Следствие Следствия теоремы Лагранжа.***

1. $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ непрерывна на $\langle a,b\rangle$, дифференцируема на $(a,b)$ и $|f'(x)| \leqslant M\ \forall x \in (a,b)$.
   Тогда $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|\ \forall x, y \in \langle a,b\rangle$
2. $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ непрерывна на $\langle a,b\rangle$, дифференцируема на $(a,b)$. Если $f'(x) = 0\ \forall x \in (a,b) \Rightarrow f = \mathrm{const}$.
3. $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ непрерывна на $\langle a,b\rangle$, дифференцируема на $(a,b)$, $f'(x) > 0\ \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ строго возрастает.
4. $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ непрерывна на $\langle a,b\rangle$, дифференцируема на $(a,b)$, $f'(x) \geqslant 0\ \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ нестрого возрастает.
5. $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ непрерывна на $\langle a,b\rangle$, дифференцируема на $(a,b)$, $f'(x) < 0\ \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ строго убывает.
6. $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ непрерывна на $\langle a,b\rangle$, дифференцируема на $(a,b)$, $f'(x) \leqslant 0\ \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ нестрого убывает.

**Доказательство**.

1. $[x,y] \subset \langle a,b\rangle$. Применим теорему Лагранжа к $[x,y]$. Тогда $\exists c \in (x,y) \subset (a,b)\colon f(y) - f(x) = f'(c)(y-x) \Rightarrow |f(y) - f(x)| = |f'(c)| \cdot |y-x| \leqslant M|y-x|$
2. Аналогично: $f(y) - f(x) = f'(c)(y-x) = 0$, $y - x \neq 0$.
3. Напишем Лагранжа для $[x,y] \subset \langle a,b\rangle, (x,y) \subset (a,b)$. Тогда $\exists c \in (a,b) : f(y) - f(x) = f'(c)(y-c)$, что $> 0 \iff f(y) > f(x)$.
4. Аналогично.
5. Аналогично.
6. Аналогично.

□

**Теорема 4.10** (Теорема Дарбу). $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ дифференцируема во всех точках. Пусть $C$ лежит между $f'(a)$ и $f'(b)$. Тогда найдется $c \in (a,b)$, такая что $f'(c) = C$.

**Доказательство**. Пусть $f'(a) < 0 < f'(b)$. Покажем, что $\exists c \in (a,b)\colon f'(c) = 0$, $f$ непрерывна на $[a,b]$. По теореме Вейерштрасса $f$ достигает $\min$ пусть это в точке $c$. Покажем, что $c \neq a$ и $c \neq b$.

От противного: пусть $f(a) = \min$. Тогда $f'(a) = f'_+(a) = \lim \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Заметим, что числитель $\geqslant 0$ и знаменатель $> 0$, тогда по предельному переходу предел $\geqslant 0$. Противоречие.

Пусть $f(b) = \min$. Тогда $f'(b) = f'_-(b) = \lim_{x\to b-} \frac{f(x)-f(b)}{x-b}$. Заметим, что числитель $\geqslant 0$, а знаменатель $< 0$. Противоречие.

Следовательно, $c \in (a,b)$. Тогда по теореме Ферма $f'(c) = 0$. Общий случай $g(x) \coloneqq f(x) - C(x)$. $g'(x) = f'(x) - C \Rightarrow g'(a)$ и $g'(b)$ разных знаков, следовательно $\exists c \in (a,b): g'(c) f'(c) - C = 0 \Rightarrow f'(c) = C$. $\square$

***Следствие.*** $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, дифференцируема на $\langle a,b\rangle, f'(x) \neq 0\ \forall x \in \langle a,b\rangle$. Тогда $f$ строго монотонна.

**Доказательство**. Очев. $\square$

**Теорема 4.11** (Правило Лопиталя). $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, $f, g$ дифференцируемы на $(a,b)$. $g'(x) \neq 0\ \forall x \in (a,b)$ и $\lim)x \to a+ f(x) = \lim_{x\to a+} = 0$.

Если $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \to \overline{R}$, то $\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

**Доказательство**. Проверяем по Гейне. Возьмем $x_n \to a$, причем убывающую. $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \xrightarrow{?} l$. Посчитаем $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{g(x_{n+1}) - g(x_n)} = \lim_{n\to+infty} \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}$, так как $\frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}$, где $c_n \to (x_{n+1}, x_n)$. Последовательность $c_n$ стремится к $a$ справа. Тогда по Штольцу $\lim \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = l$. Надо было проверить, что $g(x_n)$ строго монотонна. Это из последнего следствия и монотонности $x_n$. $\square$

**Теорема 4.12** (Второе правило Лопиталя). $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. $f, g$ дифференцируемы на $(a,b)$. $\forall x \in (a,b)\colon g'(x) \neq 0, \lim_{x\to a+} g(x) = +\infty$. $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \to \overline{R} \Rightarrow \lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

**Пример.** $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^P} = 0$ при $p > 0$.

Подставляем в Лопиталя $f(x) = \ln x, g(x) = x^p$, $f'(x) = \frac{1}{x}$, $g'(x) = px^{p-1}$. $\lim_{x\to+infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{px^{p-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{p}\frac{1}{x^p} = 0$

**Пример.** $\lim_{x\to+infty} \frac{x^p}{a^x} = a^x$. $f'(x) = px^{-1}, g'(x) = a^x \ln a$.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{px^{p-1}}{a^x \ln a} = \frac{p}{\ln a} \lim_{x\to+infty} \frac{x^{p-1}}{a^x} = 0$, при $p \leqslant 1$.

**Пример.** $\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{x\ln x} = e^{\lim_{x\to 0+} x \ln x} = e^0 = 1$.

$\ln x^x = x \ln x, \lim_{x\to 0+} x\ln x = \lim_{x\to+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+}(-x) = 0$

## 4.4. Производные высших порядков

***Определение* 4.8.** $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \langle a,b\rangle$, $f$ – дифференцируема в окрестности $x_0$. И если $f'$ дифференцируема в $x_0$, то $f$ дважды дифференцируема в $x_0$.

То есть $f''(x_0) \coloneqq (f'(x))' \mid_{x=x_0}$

***Определение* 4.9.** $f$ дважды дифференцируема в окрестности $x_0$. Если $f''$ дифференцируема в точке $x_0$, то $f$ трижды дифференцируема в точке $x_0$.

***Определение* 4.10.** $f \in C(E) \iff f : E \to \mathbb{R} \wedge$ непрерывна во всех точках.

***Определение* 4.11.** $f \in C^1(\langle a, b\rangle)$ $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, дифференцируема во всех точках и $f'$ не непрерывна.

Будем называть такое свойство «непрерывной дифференцируемостью».

***Определение* 4.12.** $f \in C^n(\langle a, b\rangle)$. $f \colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ $n$ раз дифференцируема и $f^{(n)}$ непрерывна.

***Определение* 4.13.** $f \in C^\infty(\langle a, b\rangle)$ означает, что $f \in C^n(\langle a, b\rangle)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

*Замечание.* $C^n(\langle a, b\rangle) \supsetneqq C^{n+1}(\langle a, b\rangle) \supset C^\infty(\langle a, b\rangle)$

**Пример.** $f_n(x) \coloneqq x^{n+\frac{1}{3}}$. Покажем, что $f_n \in C^n(\mathbb{R}), f_n \not{i}nC^{n+1}(\mathbb{R})$.

Тогда $f^{(n)}(x) = (n + \frac{1}{3}(n - \frac{2}{3}) \ldots \frac{4}{3}) =: cx^{\frac{1}{3}}$. Заметим, что $f^{(n+1)}$ в пределе равна $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, что в предел бесконечность.

**Теорема 4.13** (Арифметические действия с $n$-ми производными)**.** $f, g \colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}, x_0 \in \langle a, b\rangle$, $f, g$ $n$ раз дифференцируема в $x_0$. Тогда:

1. $\alpha f + \beta g$ $n$ раз дифференцируема в точке $x_0$ и $(\alpha f + \beta g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)}$
2. $fg$ $n$ раз дифференцируема в точке раз и $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n)} g^{(n-k)}$.
3. $f(\alpha x + \beta)^{(n)} = \alpha f^{(n)}(\alpha x + \beta)$
4. (Композиция: формула Фаа-Ди Бруно)

**Доказательство**.

1. Индукция по $n$.
2. Индукция по $n$. База $n = 1$. $(fg)' = f'g + fg'$.
   Переход $n \to n + 1$. $(fg)^{(n+1)} = ((fg)^{(n)})' = (\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (f^{(k)} g^{(k-i)})' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (f^{(k-1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n-k+1)}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)}$.
3. Индукция по $n$. Очев.

□

**Пример.**

1. $(x^p)^{(n)} = p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1)x^{p-n}$
2. $(\frac{1}{x})^{(n)} = (-1)(-2)\ldots(-n)x^{-1-n} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$
3. $(\ln x)^{(n)} = ((\ln x)')^{(n-1)} = (\frac{1}{x})^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$
4. $a^x = ((a^x)')^{(n-1)} = (\ln a a^x)^{(n-1)} = \ldots = (\ln a)^n a^x$
   $(e^x)^{(n)} = e^x$
5. $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{\pi n}{2})$
   $(\sin x)^{(n)} = ((\sin x)^{(n-1)})' = (\sin(x + \frac{\pi n}{2}))' = \sin(x + \frac{\pi(n-1)}{2} + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + \frac{\pi n}{2})$
6. $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{\pi n}{2})$

**Теорема 4.14** (формула Тейлорпа для многочленов)**.** $T$ — многочлен степени $n$. Тогда $T(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{T^{(n)}(x_0)}{k!}(x - x)^k$

**Лемма.** $f(x) = (x - x_0)^k \Rightarrow f^m(x_0) = \begin{cases} k! = m! & \text{если, } k = m \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$

*Доказательство леммы.* $f^{(m)}(x) = k(k-1)\dots(k-m+1)(x-x_0)^{k-m}$.

Если $k > m$, то $f^{(m)}(x_0) = 0$

Если $k = m$, то $f^{(m)}(x_0) = k(k-1)\dots 1 = k!$

Если $k < m$, то $f^{(k)}(x) \equiv k!$ и $f^{(k+1)}(x) =\equiv 0$ □

*Доказательство теоремы.* Напишем разложение $T(x) = \sum_{k=0}^n c_k(x-x_0)^k$. (Пояснение: $T(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = \sum_{k=0}^n a_k(x_0 + (x-x_0))^k$ и раскроем скобки).

Поймем, что $c_k = \frac{T^{(k)}(x_0)}{k!}$. Заметим, что $T^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^n (c_k(x-x_0)^k)^{(m)} \mid_{x=x_0} = m!$. □

***Определение* 4.14.** Пусть $f$ $n$ раз дифференцируема в точке $x_0$. Многочлен Тейлора степени $n$ $T_{n,x_0}f(x) :== \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{K!}(x-x_0)^k$.

$R_{n,x_0}f(x) \coloneqq f(x) - T_{n,x_0}f(x)$

**Лемма.** $g$ $n$ раз дифференцируема в $x_0$ и $g(x_0) = g'(x_0) = \ldots = g^{(n)}(x_0) = 0$.

Тогда $g(x) = o((x-x_0)^n)$ при $x \to x_0$.

**Доказательство**. $\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{(x-x_0)^n} \overset{\text{Лопиталь}}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{g'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \frac{g''(x)}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}} = \ldots = \lim_{x\to x_0} \frac{g^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)} = 0$

$g^{(n-1)}$ — дифференцируема в $x_0 \Rightarrow g^{(n-1)}(x) = g^{(n-1)}(x_0) + g^{(n)}(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) = o(x-x_0)$ □

**Теорема 4.15** (Формула Тейлора с остатком в форме Пеано)**.** Пусть $f$ $n$ раз дифференцируема в точке $x_0$. Тогда $f(x) = T_{n,x_0}f(x) + o((x-x_0)^n) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$.

**Доказательство**. $g(x) \coloneqq f(x) - T_{n,x_0}f(x)$. $g^{(m)}(x_0) = f^{(m)}(x_0) - (T_{n,x_0}f)^{(m)}(x_0) = f^{(m)} - f^{(m)}(x_0)$, смотри теорему выше про Тейлора для многочлена.

Таким образом, $g(x_0) = g'(x_0) = \ldots = g^n(x_0) = 0$.

По лемме $g(x) = o((x-x_0)^n) \Rightarrow f(x) - T_{n,x_0}f(x) = o((x-x_0)^n)$. □

***Следствие.*** $f$ $n$ раз дифференцируема в точке $x_0$ $f(x) = P(x) + o((x-x_0)^n)$ при $x \to x_0$, где $P$ — многочлен степени $\leqslant n$. Тогда $P(x) = T_{n,x_0}f(x)$

**Доказательство**. $Q(x) \coloneqq P(x) - T_{n,x_0}f(x) = o((x-x_0)^n)$ при $x \to x_0$.

$Q(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x-x_0)^k$ пусть $a_m \neq 0$ — ненулевой коэффициент с наименьшим индексом $\Rightarrow \frac{Q(x)}{(x-x_0)^m} = a_m + \sum_{k=m+1}^n a_k(x-x_0)^{k-m}$. Левая часть стремится к нулю, справа второе слагаемое стремится к 0. Но значит и $a_m$ должно быть нулю. □

**Теорема 4.16** (Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа)**.** $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \langle a,b\rangle$, $f$ $(n+1)$ раз дифференцируема на $\langle a,b\rangle$. Тогда $\exists c$ между $x$ и $x_0$, такой что $f(x) = T_{n,x_0}f(x) + \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

**Доказательство**. Зафиксируем $x$ и возьмем $M \in \mathbb{R}$, такой что $f(x) = T_{n,x_0}f(x) + M(x-x_0)^{n-1}$. Рассмотрим $g(y) \coloneqq f(t) - T_{n,x_0}f(t) - M(t-x_0)^{n+1}$

$g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - M(n+1)!$, то есть надо доказать, что $g^{(n+1)}(c) = 0$, в некоторой точке между $x$ и $x_0$. Знаем, что $g(x) = 0$, $g(x_0) = g'(x_0) = \ldots = g^{(n)}(x_0) = 0$. $g(x) = g(x_0) = 0 \xRightarrow{\text{Ролль}} \exists x_1$ между $x$ и $x_0$, такая что $g'(x_1) = 0$.

$g'(x_1) = g'(x_0) = 0 \xRightarrow{\text{Ролль}} \exists x_2$ между $x$) и $x_1$, такая что $g''(x_2) = 0$.

И так далее до $g^{(n)}(x_n) = g^{(n)}(x_0) = 0 \xRightarrow{\text{Ролль}} \exists c$ между $x$ и $x_0$, такая что $g^{(n+1)}(c) = 0$ □

***Следствие.*** Если $|f^{(n+1)}(t)| \geqslant M\ \forall t \in (x_0, x)$, то $|R_{n,x_0} f(x)| \leqslant \frac{M(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} = \mathcal{O}((x-x_0)^{n+1})$.

***Следствие.*** Если $|f^{(n)}(t)| \leqslant M\ \forall n\ \forall t \in (a,b)$, то $T_{n,x_0} f(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$

**Доказательство**. $|f(x) - T_{n,x_0} f(x)| = |\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}| \leqslant M\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$. Так как $x - x_0 = h, M \cdot \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$. □

**Формулы Тейлора для элементарных функций. Везде $x_0 = 0$.**

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$.
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$.
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} x^{\frac{n}{n}} + o(x^n)$
- $(1+x)^P = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$.

**Доказательство**.
- Для $f(x) = \ln(1+x)$. $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$ $f^(k)(0) = () - 1)^{k-1}(k-1)!$

  Тогда $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \ldots =$.
- ???

□

**Ряды Тейлора для $e^x$, $\sin x$, $\cos x$**

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{3}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{4}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \tag{5}$$

**Доказательство**. $\sin x, \cos x$ удовлетворяют следствию 2. $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{\pi n}{2}) \Rightarrow |\sin^{(n)}(x)| \leqslant 1$. $|\cos^{(n)}(x)| \leqslant 1$

Следовательно, $T_{n,0} f(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$. А значит по определению ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \ldots = \sin x$

Рассмотрим $f(x) = e^x$ на $[a,b] \Rightarrow f^{(n)}(x) = e^x \leqslant e^b$, тогда $|f^{(n)}(x)| \leqslant e^b$. Тогда по свойству ряда и соображениям выше, получаем, что сумма данного ряда равна $e^x$. □

**Теорема 4.17.** $e$ — иррационально.

**Доказательство**. Пусть $e = \frac{m}{n}$, $n \geqslant 2$ (так как $2 < e < 3$).

Напишем формулу Тейлора с остатком в форме Лагранжа для функции $e^x$, точки $x_0 = 0$ и $x = 1$:

$$e = e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)},\ 0 < \text{c} < 1$$

$$\underbrace{m(n-1)!}_{\text{целое число}} = \underbrace{n! + n! + \frac{n!}{2!} + \ldots + \frac{n!}{n-1!} + \frac{n!}{n!}}_{\text{целое число}} + \frac{e^c}{n+1}$$

Тогда получаем, что $\frac{e^c}{n+1}$ — целое число. Но $\frac{e^c}{n+1} > 0 \implies \frac{e^c}{n+1} \geqslant 1$. А значит $\frac{e^c}{n+1} \leqslant \frac{e}{2+1} = \frac{e}{3} < 1$. $\square$

## 4.5. Экстремумы функций

***Определение* 4.15.** $f : E \to \mathbb{R}$ и $a \in E$. $a$ — точка локального минимума $\iff \exists U(a) : \forall x \in E \cap U\ f(a) \leqslant f(x)$

***Определение* 4.16.** $a$ — точка строгого локального минимума $\iff \exists U(a) : \forall x \in E \cap U\ x \neq a \implies f(a) < f(x)$.

***Определение* 4.17.** $f : E \to \mathbb{R}$ и $a \in E$. $a$ — точка локального максимума $\iff \exists U(a) : \forall x \in E \cap U\ f(a) \geqslant f(x)$

***Определение* 4.18.** $a$ — точка строгого локального максимума $\iff \exists U(a) : \forall x \in E \cap U\ x \neq a \implies f(a) > f(x)$.

***Определение* 4.19.** $a$ — точка экстремума, если $a$ — точка локального минимума/максимума.

***Определение* 4.20.** $a$ — точка строго экстремума, если $a$ — точка локального $max/min$.

**Теорема 4.18** (необходимые условия экстремума)**.** $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируема в $x_0 \in (a, b)$. Тогда $x_0$ — точка экстремума $\implies f'(x_0) = 0$.

**Доказательство**. Возьмем какую-то окрестность $x_0$, $x_0$ — точка локального минимума. Причем окрестность такая, что $f(x_0) \leqslant f(x)\ \forall x \in U$.

Тогда, рассмотрим $f$ на $U$. $x_0$ — точка минимума этой функции, по теореме Ферма $f'(x_0) = 0$. $\square$

*Замечание.* Обратное неверно: $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0$, но 0 — не точка экстремума.

*Замечание.* Экстремум может быть в точке, где нет дифференцируемости. Пример: $f(x) = |x|$.

*Замечание.* Экстремум может быть в концах отрезка.

**Теорема 4.19** (Достаточное условия экстремума в терминах первой производной)**.** $x_0 \in (a, b)$, $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $f$ непрерывна в $x_0$, дифференцируема на $(x_0 - \delta, x_0) \cap (x_0, x_0 + \delta)$. Тогда:

1. $f'(x) < 0$ на $(x_0 - \delta, x_0)$ и $f'(x) > 0$ на $(x_0, x_0 + \delta)$, то $x_0$ — строгий минимум.
2. $f'(x) > 0$ на $(x_0 - \delta, x_0)$ и $f'(x) < 0$ на $(x_0, x_0 + \delta)$, то $x_0$ — строгий максимум.

**Доказательство**. На $[x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0]$ $f$ непрерывна, дифференцируема внутри и $f' < 0 \xRightarrow{\text{сл. т. Лагранжа}}$ $f$ строго убывает на $[x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0] \implies f(x_0) < f(x)\ \forall [x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0)$.

На $[x_0, x_0 + \frac{\delta}{2}]$ $f$ непрерывна, дифференцируема внутри и $f' > 0 \implies f$ строго возрастает на $[x_0, x_0 + \frac{\delta}{2}] \implies f(x_0) < f(x)\ \forall x \in (x_0, x_0 + \frac{\delta}{2}]$ $\square$

**Теорема 4.20** (достаточные условия экстремума в терминах второй производной)**.** $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$. $x_0 \in (a,b), f$ дважды дифференцируема в $x_0$ и $f'(x_0) = 0$. Тогда:

1. $f''(x_0) > 0$, то $x_0$ — строгий минимум.

2. $f''(x_0) < 0$, то $x_0$ — строгий максимум.

**Теорема 4.21** (Достаточные условия экстремума в терминах $n$-ой производной)**.** $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$. $x_0 \in (a,b), f$ $n$ раз дифференцируема в $x_0$ и $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$. Тогда:

1. $n$ — четно и $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow x_0)$ — строгий минимум.

2. $n$ — четно и $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow x_0)$ — строгий максимум.

3. $n$ — нечетно и $f^n(x_0) \neq 0 \Rightarrow x_0$ не точка экстремума.

**Доказательство**. $f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o((x-x_0)^n)$

Тогда $f(x) - f(x_0) = (x-x_0)^n(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1)$.

Тогда в 1: $(x-x_0)^n > 0$ при $x \neq 0$. $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} > 0 \implies$ по теореме о стабилизации знака скобка $(\ldots) > 0$ при $x$ близких к $x_0$.

В 3: наоборот стабилизация знака. □

## 4.6. Выпуклые функции

***Определение* 4.21.** $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$. $f$ — выпуклая, если $\forall x,y \in \langle a,\rangle \forall \lambda \in (0,1)\colon f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$.

Понятно, что такое строго выпуклая, вогнутая (выпуклая вниз), строго вогнутая.

**Пример.** $x^2$ — выпуклая функция. $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) = \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2$.

$(\lambda x + (1-\lambda)y)^2 = \lambda^2x^2 + 2\lambda(1-\lambda)xy + (1-\lambda)^2y^2$.

Откуда получаем $2xy \leqslant x^2 + y^2$.

### Геометрический смысл определения

Возьмем $z = \lambda x + (1-\lambda)y < \lambda y + (1-\lambda)y = y$ и $z > \lambda x + (1-\lambda)x = x$. Тогда получаем, что $\lambda(x-y) = z - y \Rightarrow \frac{y-z}{y-x} > 0$. Теперь посмотрим на прямую через точки $x, y$. Тогда получаем, что точка $(s,t)$ на прямой удовлетворяет уравнению $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}(s-x) + f(x) = t$. Тогда подставим $s = z$ и получим значение функции из определения.

А значит геом. смысл — любая хорда выше, чем точка.

***Определение* 4.22.** Пусть $u < v < w; u,v,w \in \langle a,b\rangle$ $\lambda = \frac{y-z}{y-x} = \frac{w-v}{w-u}$, тогда $1 - \lambda = \frac{v-u}{w-u}$.

$f(v) \leqslant \frac{w-v}{w-u}f(u) + \frac{v-u}{w-u}f(w)$.

Тогда $(w-u)f(v) \leqslant (w-v)f(u) + (v-u)f(w)$

***Свойства.***

1. $f, g$ — выпуклые, то $f + g$ — выпуклые.

2. $f$ — выпуклая, $\alpha > 0$, то $\alpha f$ — выпуклая.

3. $f$ — выпуклая, $-f$ — вогнутая.

**Лемма** (О трех хордах)**.** $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ выпуклая, $u<v<w$, $u,v,w\in\langle a,b\rangle$.

Тогда $\frac{f(v)-f(u)}{v-u} \leqslant \frac{f(w)-f(u)}{w-u} \leqslant \frac{f(w)-f(u)}{w-v}$.

**Доказательство**. Докажем первое неравенство: $\frac{f(v)-f(u)}{v-u} \leqslant \frac{f(w)-f(u)}{w-u} \iff (w-u)(f(v)-f(u)) \leqslant (v-u)(f(w)-f(u)) \iff (w-u)f(v) \leqslant \underbrace{((w-u)-(v-u))}_{=w-v} f(u) + (v-u)f(w)$.

Второе/третье аналогично. ☐

**Теорема 4.22.** $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ выпуклая. Тогда $\forall x\in(a,b)$ существуют конченые $f'_{\pm}(x)$ и $f'_-(x) \leqslant f'_+(x)$

**Доказательство**. Возьмем три точки $x<v<w$. $\frac{f(v)-f(x)}{v-x}$ возрастает по $v$. $\frac{f(w)-f(x)}{w-x} \geqslant \frac{f(v)-f(x)}{v-x}$ из леммы о трех хордах. Значит дробь $\frac{f(v)-f(x)}{v-x}$ возрастает по $v$ и ограничена снизу $\implies$ существует конечный $\lim_{v\to x+} \frac{f(v)-f(x)}{v-x} \geqslant \frac{f(u)-f(x)}{u-x}$.

$\frac{f(u)-f(x)}{u-x}$ возрастает по $u$ и ограничена сверху $f'_+(x) \implies f'_-(x)\ lim_{u\to x-} \frac{f(u)-f(x)}{u-x} \leqslant f'_+(x)$ ☐

***Следствие.*** $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ выпуклая $\implies$ $f$ непрерывна $(a,b)$

**Доказательство**. существует конечная $f'_+(x) \Rightarrow f$ непрерывна в точке $x$ справа $+\ \exists f'_-(x) \implies f$ непрерывна в $x$ слева $\implies f$ непрерывна в $x\in(a,b)$. ☐

*Замечание.* Про концы ничего неизвестно.

**Теорема 4.23.** $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируемая. Тогда $f$ — выпуклая $\iff f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)\ \forall x,x_0\in\langle a,b\rangle$

**Доказательство**. В сторону $\Leftarrow$: $u<v<w, x_0=v$. Тогда $f(u)\geqslant f(v)+f'(u)(v-u)$, $f(w)\geqslant f(u)+f'(u)(v-w)$. Первое домножаем на $(w-v)$, второе на $(v-u)$

В сторону $\Rightarrow$. Пусть $x>x_0$. Надо доказать, что $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant f'(x_0) = \lim_{y\to x_0} \frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}$

Можно считать, что $x_0<y<x$. Тогда $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant \frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0} \to f'(x_0)$. ☐

**Теорема 4.24** (Критерий выпуклости)**.**

1. $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ непрерывна на $\langle a,b\rangle$ и дифференцируема на $(a,b)$. $f$ (строго) выпукла $\iff f'$ строго монотонно возрастает на $(a,b)$.
2. $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ непрерывна на $\langle a,b\rangle$ и дважды дифференцируема на $(a,b)$. $f$ выпукла $\iff f'' \geqslant 0$ на $(a,b)$.

**Доказательство**.

1. $\Rightarrow$. $u<v$: $f'(u) \leqslant \frac{f(v)-f(u)}{v-u} \leqslant f'(v)$ по предыдущей теореме $f'(x)$ возрастает.

   $\Leftarrow u<v<w$ $\frac{f(v)-f(u)}{v-u} \leqslant \frac{f(w)-f(v)}{w-v}$ по теореме Лагранжа левое равно $f'(\xi)$, правое — $f'(\eta)$. Поскольку $f'$ возрастает, то все верно.
2. $f$ — выпуклая $\iff f'$ возрастает $(f')'\geqslant 0$.

☐

**Пример.**

1. $a^x$ выпуклая, $a\neq 1$. $f(x)=a^x \implies f'(x)=a^x\ln a \implies f''(x)=a^x(\ln a)^2 \implies$ строго выпукла.
2. $\ln x$ строго вогнута.

   $f(x)\ln x \implies f'(x)=\frac{1}{x} \implies f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \implies$ строго вогнутая.

3. $x^p$, при $x > 0$. $p > 1$ — строгая выпуклость, $p < 0$ строгая выпуклость, если $0 < p < 1$ строгая вогнутость.

**Теорема 4.25** (Неравенство Йенсена)**.** Пусть $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ выпуклая функция, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \langle a, b\rangle$ и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$, причем их сумма равна 1. Тогда:

$$f(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$

**Замечание**. Если $\lambda_k > 0$, $x_k$ различны и $f$ строго выпуклая, то знак строгий.

**Доказательство**. Индукция по $n$. База $n = 2$: $f(\lambda_1 x_1 + \underbrace{\lambda_2}_{1-\lambda_1} x_2) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \underbrace{\lambda_2}_{1-\lambda_1} f(x_2)$. Это определение индукции.

Переход от $n$ к $n+1$:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1 - \lambda_{n+1} \Rightarrow \frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} + \ldots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} = 1.$$

Тогда по предположению:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} \geqslant f(\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k x_k}{1-\lambda_{n+1}}) = f(y).$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k) \geqslant (1-\lambda_{n+1}) f(y) \implies \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k f(x_k) &\geqslant (1-\lambda_{n+1}) f(y) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \geqslant \\ &\geqslant f(\lambda_{n+1} x_{n+1} + (1-\lambda_{n+1}) y) = \\ &= f(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k).\end{aligned}$$

Второе $\geqslant$ после $\implies$ следует из определения выпуклости. □

***Следствие.*** У вогнутой функции все знаки в другую сторону.

**Теорема 4.26** (Неравенство о средних)**.** $x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$. Тогда $\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$.

Причем из равенства следует равенство чисел.

**Доказательство**. $f(x) = \ln x$ и $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \frac{1}{n}$. Если $x_k = 0$, то неравенство очевидно.

Надо доказать, что $\frac{1}{n}(\ln x_1 + \ln x_2 + \ldots + \ln x_n) \leqslant \ln(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$. А это неравенство Йенсена:

$$\ln(\frac{1}{n} x_1 + \frac{1}{n} + x_2 + \ldots + \frac{1}{n} x_n) \geqslant \frac{1}{n} \ln x_1 + \frac{1}{n} + \ln x_2 + \ldots + \frac{1}{n} \ln x_n.$$

□

***Определение 4.23.*** Среднее степенное порядка $p$ $M_p := \left(\frac{x_1^p + x_2^p + \ldots x_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}$.

***Определение 4.24.*** Среднее арифметическое $M_1 := \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$.

***Определение 4.25.*** Среднее квадратическое $M_2 := \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}}$

***Определение 4.26.*** Среднее гармоническое — $M_{-1}$

***Определение* 4.27** (Доопределение)**.** $M_0$ — среднее геометрическое, $M_{+\infty}$ — максимальное из чисел, $M_{-\infty}$ — минимальное из чисел.

**Упражнение.** Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$. Доказать, что $\lim_{p\to 0} M_p = M_0$, $\lim_{p\to+\infty} M_p = M_{+\infty}$, $\lim_{p\to-\infty} M_p = M_{-\infty}$.

**Теорема 4.27** (Неравенство между средними степенными)**.** Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ и $p < q$. Тогда:

$$\left(\frac{x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p}{n}\right)^p \leqslant \left(\frac{x_1^q + x_2^q + \ldots + x_n^q}{n}\right)^q.$$

**Доказательство**.

1. Случай 1. $p = 1$. $f(x) = x^q$ — выпуклая функция, $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \frac{1}{n}$. Тогда просто подставляем в неравенство Йенсена:

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^q = f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \leqslant \frac{x_1^q + x_2^q + \ldots + x_n^q}{n}.$$

   А дальше просто извлечь корень степени $q$.

2. Случай 2. $0 < p < q$. Возьмем $r = \frac{q}{p} > 1$ и подставим $x_k^p$ в случай 1 $(p = 1, q = r)$:

$$\frac{x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p}{n} \leqslant \left(\frac{(x_1^p)^r + (x_2^p)^r + \ldots + (x_n^p)^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\frac{x_1^q + x_2^q + \ldots + x_n^q}{n}\right)^{\frac{p}{q}}.$$

3. Случай 3. $p < q < 0$. Возьмем $\frac{p}{q} > 1$ и подставим $x_k^q$ в случай 1.

4. Случай 4. $p < 0 < q$. $\left(\frac{x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leqslant \left(\frac{x_1^q + x_2^q + \ldots + x_n^q}{n}\right)^{\frac{1}{q}}$.

   Подставим $x_1^q, x_2^q, \ldots x_n^q$ в неравенство о средних

$$\frac{x_1^q + x_2^q + \ldots + x_n^q}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1^q x_2^q \ldots x_n^q} = \left(\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}\right)^q.$$

   и корень степени $q > 0$.

$$\frac{x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1^p x_2^p \ldots x_n^p} = \left(\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}\right)^p.$$

   и корень степени $p < 0$, знак поменяется.

$\square$

*Замечание.* $M_p \leqslant M_q$, если $p \leqslant q$.

**Теорема 4.28** (Неравенство Гёлдера)**.** $a_k, b_k \geqslant 0$, $p, q > 1$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда:

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}..$$

**Доказательство**. Берем $f(x) = x^p$. Пусть $B := \sum_{k=1}^n b_k^q$. Тогда возведем неравенство в степень $p$: $\left(\sum_{k=1}^n a_k \frac{b_k}{B^{\frac{1}{q}}}\right)^p \leqslant \sum_{k=1}^n a_k^p$.

Пытаемся подогнать под вид Йенсена, получаем систему $\lambda_k x_k^p = a_k^p$ и $\lambda_k x^k = \frac{a_k b_k}{B^{\frac{1}{q}}}$.

Получаем, что $x_k^{p-1} = \frac{a_k^{p-1} B^{\frac{1}{q}}}{b_k}$.

Тогда $x_k = \frac{a_k}{b_k^{\frac{1}{p-1}}} \cdot B^{\frac{1}{q(p-1)}} = \frac{a_k}{b_k^{\frac{q}{p}}} \cdot B^{\frac{1}{p}}$. Откуда можно выразить $\lambda$. □

***Следствие Неравенство Коши-Буняковского.***

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

**Доказательство**. Давайте применим неравенство Гёлдера для чисел $|a_k|$ и $|b_k|$, а $p = q = 2$.

Тогда $(\sum_{k=1}^n |a_k|^2) \cdot (\sum_{k=1}^n |b_k|^2) \geqslant (\sum_{k=1}^n |a_k| \cdot |b_k|)^2$.

Это почти то, что нужно с точностью до модулей.

Заметим, что в левой части модули можно отбросить, так как возводится в квадрат.

В правой же части можно заметить, что $(\sum_{k=1}^n |a_k| \cdot |b_k|)^2 \geqslant (\sum_{k=1}^n a_k b_k)^2$.

Значит по транзитивности получим то, что нужно. □

***Следствие Неравенство Минковского.*** $p \geqslant 1, a_k, b_k \geqslant 0$. Тогда

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

**Доказательство**. $p = 1$ очевидно.

$$C \coloneqq \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)(a_k + b_k)^{p-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k (a_k + b_k)^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} b_k (a_k + b_k)^{p-1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k (a_k + b_k)^{p-1} \leqslant (\sum_{k=1}^{n} a_k^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{k=1}^{n} ((a_k + b_k)^{p-1})^q)^{\frac{1}{q}} = (\sum_{k=1}^{n} a_k^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p)^{\frac{p-1}{n}}$$

$$C \leqslant (\sum a_k^p)^{\frac{1}{p}} \cdot c^{\frac{p-1}{p}} + (\sum b_k^p)^{\frac{1}{p}} \cdot C^{\frac{p-1}{p}} \Rightarrow C^{\frac{1}{p}} \leqslant (\sum a_k^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum b_k^p)^{\frac{1}{p}}$$

□

# 5. Интегральное исчисление функции одной переменной

## 5.1. Первообразная и неопределенный интеграл

***Определение* 5.1.** $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$. Функция $F : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ — первообразная функции $f$, если $F'(x) = f(x) \forall x \in \langle a,b\rangle$

**Теорема 5.1.** Непрерывная на промежутке функция имеет первообразную.

**Доказательство**. Позже. □

*Замечание.* $\mathrm{sign}x = \begin{cases} 1 & \text{если } x > 0 \\ 0 & \text{если } x = 0 \\ -1 & \text{если } x < 0 \end{cases}$. Не имеет первообразной.

**Доказательство**. От противного: пусть нашлась $F : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ и $F'(x) = sign(x)$.

Тогда воспользуемся теоремой Дарбу для $F$ на отрезке $[0;1]$.

Пусть $k = \frac{1}{2} \in (sign(0), sign(1))$. Значит $\exists c \in (0,1) \colon F'(c) = k = \frac{1}{2}$. Противоречие. □

**Теорема 5.2.** $f, F \colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ и $F$ — первообразная для $f$. Тогда:

1. $F + C$ — первообразная для $f$.
2. Если $\Phi \colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ — первообразная для $f$, то $\Phi = F + C$.

**Доказательство**. /

1. $(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x)$
2. $(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow (\Phi - F)' \equiv 0 \implies \Phi - F$ — константа.

□

***Определение* 5.2.** Неопределённый интеграл — множество всех первообразных.

$\int f(x)\,dx = \{F \colon F$ — первообразная f$\}$. Но мы будем записывать $\int f(x)\,dx = F(x) + C$

**Табличка интегралов.**

1. $\int 0\,dx = C$.
2. $\int x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C$, при $p \neq -1$.
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
4. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$, при $a > 0, a \neq 1$.
5. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$.
6. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$.

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$

10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C.$

12. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln|\frac{1+x}{1-x}| + C.$

**Доказательство**. Для 3. Если $x > 0$ $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ . Если $x < 0$ $\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C$, то есть $(\ln(-x))' = (\frac{1}{-x})(-x)' = \frac{-1}{x}$.

Для 11. $(\ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}|)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2\pm1}}(x + \sqrt{x^2 \pm 1})' = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2\pm1}}}{x+\sqrt{x^2}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2pm1}+x}{\sqrt{x^2\pm1}}}{\sqrt{x^2\pm1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2\pm1}}$

Для 13. $(\frac{1}{2}(\ln|1+x| - \ln|1-x|))' = \frac{1}{2}(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}) = \frac{1}{1-x^2}$ □

*Замечание.* $A + B \coloneqq \{a + b \colon a \in A, b \in B\}$, $cA \coloneqq \{ca \colon a \in A\}$.

$\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx = \{F + C\} + \{G + \widetilde{C}\} = \{F + G + C\}$.

**Теорема 5.3** (Арифметические действия с неопределенными интегралами)**.** Пусть $f, g \colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ имеют первообразные. Тогда:

1. $f + g$ имеет первообразную и $\int(f + g)\,dx = \int f\,dx + \int g\,dx$

2. $\alpha f$ имеет первообразную и $\int \alpha f\,dx = \alpha \int f\,dx$

**Доказательство**. Пусть $F$ и $G$ первообразные для $f$ и $g$.

1. Тогда $F + G$ — первообразная для $f + g$. Тогда $\int(f + g) = F + G + C = \int f + \int g$.

2. Тогда $\alpha F$ — первообразная для $\alpha f \implies \int \alpha F = \alpha F + C = \alpha(F + \frac{C}{\alpha}) = \alpha \int f$.

□

***Следствие Линейность неопрделенного интеграла.*** $f, g \colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ имеют первообразную $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $|\alpha| + |\beta| \neq 0$. Тогда $\int(\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$.

**Доказательство**. Прямое следствие из теоремы выше. □

**Теорема 5.4** (Теорема о замене переменной в непопределенном интеграле)**.** $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}, \varphi : \langle c, d\rangle \to \langle a, b\rangle$, $f$ имеет первообразную $F$. $\varphi$ дифференцируемая. Тогда $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C$.

**Доказательство**. Надо проверить, что $F(\varphi(t))$ — первообразная для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi(t)..$$

□

***Следствие.*** $\int f(\alpha x + \beta)\,dx = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x + \beta) + C$

**Доказательство**. $\int \alpha f(\alpha x + \beta dx) = F(\alpha x + \beta) + C$. И делим обе части на $\alpha$. □

**Теорема 5.5** (Форумла интегрирования по частям)**.** $f, g\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, дифференцируемые, $f'g$ имеет первообразную.

Тогда $fg'$ имеет первообразную и $\int fg' = fg - \int f'g$

**Доказательство**. $H$ — первообразная для $f'g$. Тогда $H' = f'g$.

Надо доказать, что $fg - H$ — первообразная для $fg'$.

$(fg - H)' = f'g + gh' - H' = f'g + fg' - f'g = fg'$. □