Дискретная математика

Харитонцев-Беглов Сергей

7 сентября 2021 г.

Содержание

1. Теория множеств **1**
1.1 Базовые понятия 1
1.2 Операции с множествами 1

1. Теория множеств

1.1. Базовые понятия

Есть официальный конспект, который будет Здесь.

***Определение* 1.1.** Множество — набор различимых между собой по какому-то признаку предметов.

***Определение* 1.2.** Предметы входящие в это множество называются его элементами.

Если мы хотим описать множество, то нужно просто описать предметы этого множества. Например, чтобы задать множество студентов необходимо задать просто студентов.

Есть конечные, счетные, несчетные и целый зоопарк множеств разных мощностей. Самое простое множество — $\varnothing$, множество ничего не содержащее — пустое.

***Определение* 1.3.** X подмножество ($\subseteq$) $Y \Leftarrow \forall y \in Y : \ y \in X$.
$\varnothing$ и X — тривиальные, остальные — нетривиальные. все подмножества, кроме X — собственные.

1.2. Операции с множествами

Символ	**Определение**	**Словами**
$\cap$	$A \cap B = \dots$	Пересечение множества
$\cup$	$A \cup B = \dots$	Объединение множеств
$\setminus$	$A \setminus B =$ ...	Разность множеств
$\triangle$	$A \triangle B = \dots$	Симметрическая разность множеств

***Определение* 1.4.** Алгебраическая структура — множество, на котором ввели какую-то операцию.

Пример. Пусть заданы несколько множеств:

1. $\exists e : \ a \cdot e = a \, \forall a \in G$
2. $\forall a \in G \, \exists a^{-1} \in G : \ a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$
3. $\forall a, b, c : \ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
4. $\forall a, b \in G a \cdot b = b \cdot a$

То это абелева группа и это к алгебре.

А дискретная математика не имеет аксиом, то есть мало чего можно использовать из алгебры / матана.

Если задать какое-то надмножество X над A, то появится операция дополнения: $A' = X \setminus A$. Законы Де Моргана:

Теорема 1.1. $(A \cup B)' = A' \cap B'$

Теорема 1.2. $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Доказательство смотри в конспекте Омеля, тут мне лень это делать.

***Определение* 1.5.** Система иножеств — множество, элементами которого являются множества.

***Определение* 1.6.** Семейство множеств — упорядоченный набор неких множеств $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$. Причем множества в наборе могут повторяться.

***Определение* 1.7.** Некоторое покрытие множества X системой множеств — система множеств, объединение элементов которого равняется X.

***Определение* 1.8.** Разбиение множества X на блоки — система $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$, удовлетворяющая неким условиям:

1. $X = \bigcup_{i=1}^{k} X_i$
2. $\forall i :\ X_i \neq \varnothing$
3. $\forall i, j = 1..k :\ X_i \cap X_j = \varnothing$

***Определение* 1.9.** Пара элементов (x, y) — упорядоченный набор из двух элементов. То есть для $x \neq y$: $(x, y) \neq (y, x)$

***Определение* 1.10** (Декартово произведение)**.** $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$

можно ввести понятие «nки» — упорядоченный набор из n элементов. Поэтому можно ввести $A \times B \times C \times \ldots$ и A^2, A^n

***Определение* 1.11.** Отношение между множествами — некое подмножество декартого произведения этих множеств

Пусть ω — отношение между X и Y. Тогда их записывают $X\omega Y$, а отсутствие — $X\not\omega Y$.

***Определение* 1.12.** Отношение эквивалентности $(X, \sim)$:

1. $x \sim x\ \forall x \in X$
2. $x \sim, y \Rightarrow y \sim x\ \forall x, y \in X$
3. $x \sim y, y \sim z, \Rightarrow x \sim z\ \forall x, y, z \in X$

Пусть $\widetilde{x} = \{y \in X \mid y \sim x\}$.

Свойство. пусть $y \in \widetilde{x} \Rightarrow \widetilde{y} = \widetilde{x}$

Теорема 1.3. Разбиение на блоки задает классы эквивалентности.

- $X = \bigcup_{x \in X} \widetilde{x}$
- $\widetilde{x} \neq \varnothing$, т.к. хотя бы $x \in \widetilde{x}$.
- Рассмотрим $\widetilde{x}, \widetilde{y}$. Пусть $\exists z :\ z \in \widetilde{x} \cap \widetilde{y}$. Тогда $\left.\begin{matrix}\widetilde{z} = \widetilde{x}\\ \widetilde{z} = \widetilde{y}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \widetilde{x} = \widetilde{y}$

***Определение* 1.13.** Мультимножество — $(x; \varphi) :\ \varphi \to \mathbb{Z}_+$

Есть еще несколько базовых понятий: k-перестановки/сочетания из n элементов с/без повторений.

$|A \cup B| = |A| + |B|$, если $A \cap B = \varnothing$. Поэтому, если есть разбиение на блоки, то $X = X_1 \cup \ldots \cup X_k \Rightarrow |X| = |X_1| + \ldots + |X_k|$

$X = X_1 \times \ldots \times X_k$, тогда $|X| = |X_1| \cdot \ldots \cdot |X_k|$

$|A' \cap B'| = |(A \cup B)'| = |X| - |A \cup B| = |X| - |A| - |B| + |A \cap B|$