# Математический анализ

Харитонцев-Беглов Сергей

2 февраля 2022 г.

## Содержание

# 1. Интегральное исчисление функции одной переменной

## 1.1. Первообразная и неопределенный интеграл

***Определение* 1.1.** $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$. Функция $F : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ — первообразная функции $f$, если $F'(x) = f(x) \forall x \in \langle a,b\rangle$

**Теорема 1.1.** Непрерывная на промежутке функция имеет первообразную.

**Доказательство**. Позже. □

*Замечание.* $\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 & \text{если } x > 0 \\ 0 & \text{если } x = 0 \\ -1 & \text{если } x < 0 \end{cases}$. Не имеет первообразной.

**Доказательство**. От противного: пусть нашлась $F\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ и $F'(x) = sign(x)$.

Тогда воспользуемся теоремой Дарбу для $F$ на отрезке $[0;1]$.

Пусть $k = \frac{1}{2} \in (\operatorname{sign}(0), \operatorname{sign}(1))$. Значит $\exists c \in (0,1)\colon F'(c) = k = \frac{1}{2}$. Противоречие. □

**Теорема 1.2.** $f, F\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ и $F$ — первообразная для $f$. Тогда:

1. $F + C$ — первообразная для $f$.
2. Если $\Phi\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ — первообразная для $f$, то $\Phi = F + C$.

**Доказательство**.

1. $(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x)$
2. $(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow (\Phi - F)' \equiv 0 \implies \Phi - F$ — константа.

□

***Определение* 1.2.** Неопределённый интеграл — множество всех первообразных.

$\int f(x)\,dx = \{F\colon F$ — первообразная f$\}$. Но мы будем записывать $\int f(x)\,dx = F(x) + C$

**Табличка интегралов.**

1. $\int 0\,dx = C$.
2. $\int x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C$, при $p \neq -1$.
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
4. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$, при $a > 0, a \neq 1$.
5. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$.
6. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$.

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.
10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$.
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C$.
12. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln|\frac{1+x}{1-x}| + C$.

**Доказательство**. Для 3. Если $x > 0$ $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ . Если $x < 0$ $\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C$, то есть $(\ln(-x))' = (\frac{1}{-x})(-x)' = \frac{-1}{x}$.

Для 11. $(\ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}|)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2 \pm 1}}(x + \sqrt{x^2 \pm 1})' = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2\pm1}}}{x+\sqrt{x^2}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2pm1}+x}{\sqrt{x^2\pm1}}}{\sqrt{x^2\pm1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2\pm1}}$

Для 13. $(\frac{1}{2}(\ln|1+x| - \ln|1-x|))' = \frac{1}{2}(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}) = \frac{1}{1-x^2}$ □

*Замечание.* $A + B \coloneqq \{a + b \colon a \in A, b \in B\}$, $cA \coloneqq \{ca \colon a \in A\}$.

$\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx = \{F + C\} + \{G + \widetilde{C}\} = \{F + G + C\}$.

**Теорема 1.3** (Арифметические действия с неопределенными интегралами)**.** Пусть $f, g \colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ имеют первообразные. Тогда:

1. $f + g$ имеет первообразную и $\int(f + g)\,dx = \int f\,dx + \int g\,dx$
2. $\alpha f$ имеет первообразную и $\int \alpha f\,dx = \alpha \int f\,dx$

**Доказательство**. Пусть $F$ и $G$ первообразные для $f$ и $g$.

1. Тогда $F + G$ — первообразная для $f + g$. Тогда $\int(f + g) = F + G + C = \int f + \int g$.
2. Тогда $\alpha F$ — первообразная для $\alpha f \implies \int \alpha F = \alpha F + C = \alpha(F + \frac{C}{\alpha}) = \alpha \int f$.

□

***Следствие Линейность неопрделенного интеграла.*** $f, g \colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ имеют первообразную $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $|\alpha| + |\beta| \neq 0$. Тогда $\int(\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$.

**Доказательство**. Прямое следствие из теоремы выше. □

**Теорема 1.4** (Теорема о замене переменной в непопределенном интеграле)**.** $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}, \varphi : \langle c, d\rangle \to \langle a, b\rangle$, $f$ имеет первообразную $F$. $\varphi$ дифференцируемая. Тогда $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C$.

**Доказательство**. Надо проверить, что $F(\varphi(t))$ — первообразная для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi(t)..$$

□

***Следствие.*** $\int f(\alpha x + \beta)\,dx = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x + \beta) + C$

**Доказательство**. $\int \alpha f(\alpha x + \beta dx) = F(\alpha x + \beta) + C$. И делим обе части на $\alpha$. □

**Теорема 1.5** (Форумла интегрирования по частям). $f, g\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, дифференцируемые, $f'g$ имеет первообразную.

Тогда $fg'$ имеет первообразную и $\int fg' = fg - \int f'g$

**Доказательство**. $H$ — первообразная для $f'g$. Тогда $H' = f'g$.

Надо доказать, что $fg - H$ — первообразная для $fg'$.

$(fg - H)' = f'g + gh' - H' = f'g + fg' - f'g = fg'$. □

## 1.2. Определенный интеграл

Пусть $\mathcal{F}$ — совокупность (множество) ограниченных плоских фигур.

***Определение* 1.3.** $\sigma\colon \mathcal{F} \to [0; +\infty)$,

1. $\sigma([a; b] \times [c, d]) = (b - a)(d - c)$
2. (Аддитивность). $\forall E_1, E_2 \in \mathcal{F}\colon E_1 \cap E_2 = \varnothing \Rightarrow \sigma(E_1 \cup E_2) = \sigma(E_1) + \sigma(E_2)$

***Свойство Монотонность площади.*** $\forall E, \widetilde{E}\colon E \subset \widetilde{E} \Rightarrow \sigma(E) \leqslant \sigma(\widetilde{E})$.

**Доказательство**. $E = \widetilde{E} \cup (\widetilde{E} \setminus E) \Rightarrow \sigma(\widetilde{E}) = \sigma(E) + \sigma(\widetilde{E} \setminus E)$. □

***Определение* 1.4.** $\sigma\colon \mathcal{F} \to [0; +\infty]$, причем

1. $\sigma([a; b] \times [c, d]) = (b - a)(d - c)$,
2. $\forall E, \widetilde{E} \in \mathcal{F}\colon E \subset \widetilde{E} \Rightarrow \sigma(E) \leqslant \sigma(\widetilde{E})$,
3. Разобьем $E$ вертикальной или горизонтальной прямой, в том числе теми прямыми, которые правее или левее $E$. Тогда $E = E_- \cup E_+, E_- \cap E_+ = \varnothing$ и $\sigma(E) = \sigma(E_-) + \sigma(E_+)$.

***Свойства.*** 1. Подмножество вертикальных или горизонтальных отрезков имеет нулевую площадь.

2. В определении $E_-$ и $E_+$ не важно куда относить точки из $l$.

   **Доказательство**. Заметим, что $\sigma(E_- \cup (E \cap l)) = \sigma(E_- \setminus l) + \underbrace{\sigma(E \cap l)}_{=0} \Rightarrow$ вообще не имеет разницы куда относить точки из $l$. □

**Пример.**

1. $\sigma_1(E) = \inf\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} |P_k|\colon P_k \text{ — прямоугольник}, \bigcup\limits_{k=1}^{n} \supset E\right\}$.
2. $\sigma_2(E) = \inf\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} |P_k|\colon P_k \text{ — прямоугольник}, \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \supset E\right\}$.

**Упражнение.**

1. Доказать, что $\forall E \quad \sigma_1(E) \geqslant \sigma_2(E)$.
2. $E = ([0, 1] \cap \mathbb{Q}) \times ([0, 1] \cap \mathbb{Q})$. Доказать, что $\sigma_1(E) = 1, \sigma_2(E) = 0$.

**Теорема 1.6.**

1. $\sigma_1$ — квазиплощадь.
2. Если $E'$ — сдвиг $E$, то $\sigma_1(E) = \sigma_1(E')$.

**Доказательство**.

2. $E'$ — сдвиг $E$ на вектор $v$. Пусть $P_k$ — покрытие $E \iff P'_k$ — покрытие $E'$. $\sigma_1(E) = \inf\{\sum\limits_{k=1}^{n} |P_k|\} = \inf\{\sum |P'_k|\} = \sigma_1(E')$.

1. $\Rightarrow$ монотонность. Пусть есть $E \subset \widetilde{E}$. Тогда возьмем покрытие $P_k$ для $\widetilde{E}$. $E \subset \widetilde{E} \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k$.

   А теперь заметим, что $\sigma_1$ — inf, а значит $\sigma_1(E) \leqslant \sum |P_k| = \sigma_1(\widetilde{E})$.

1'. Докажем теперь аддитивность.

«$\leqslant$». $\sigma_1(E) = \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+)$. Пусть $P_k$ — покрытие $E_-$, $Q_j$ — покрытие $E_+$. $\bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k \cup \bigcup\limits_{j=1}^{m} Q_j \supset E_i \cup E_+ = E$. А значит $\sigma_1(E) \leqslant \inf \left\{ \sum\limits_{k=1}^{n} |P_k| + \sum\limits_{j=1}^{n} |Q_j| \right\} = \inf\{\sum |P_k|\} + \inf\{\sum |Q_j|\} = \sigma_1(E_-) + \sigma(E_+)$. Заметим, Что переход с разделением инфинумов возможен, так как $P$ и $Q$ выбираются независимо.

«$\geqslant$». Пусть $P_k$ — покрытие $E$. Тогда можно разбить $|P_k| = |P_k^-| + |P_k^+|$. $\sum |P_k| = \sum |P_k^-| + \sum |P_k^+|$. Заметим, что сумму $\geqslant \sigma \Rightarrow \sum |P_k| \geqslant \sigma(E_1) + \sigma(E_2) \Rightarrow \sigma(E) \geqslant \sigma(E_1) + \sigma(E_2)$.

1". Проверим, что сама площадь прямоугольника не сломалась: $\sigma_1([a,b] \times [c,d]) = (b-a)(d-c)$. Заметим, что $\sigma_1(P) \leqslant |P|$.

Тогда посмотрим на $P_k$. Проведем прямые содержащие все стороны прямоугольников из разбиения. Заметим, что получили разбиение с суммой равной $|P|$. Тогда заметим, что некоторые части разбиения встречаются в $P_k$ несколько раз. А значит выкинув все лишнее мы как раз получим $|P|$, а значит $\sigma_1(P) \geqslant |P|$.

$\square$

***Определение* 1.5.** Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Тогда $f_+, f_- : [a,b] \to [0; +\inf)$. Причем $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$, $f_- = \max\{-f(x), 0\}$.

***Свойства.*** 1. $f = f_+ - f_-$.

2. $|f| = f_+ + f_-$
3. $f_+ = \frac{f+|f|}{2}$, $f_- = \frac{|f|-f}{2}$.
4. Если $f \in C([a,b])$ , то $f_\pm \in C([a,b])$.

***Определение* 1.6.** Пусть $f\colon [a,b] \to [0; \inf]$.

Тогда, подграфик $P_f([a;b]) \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b], 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$.

***Определение* 1.7.** $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^b f(x)dx = \sigma(P_{f_+}([a;b])) - \sigma(P_{f_-}([a;b]))$.

***Свойства.*** 1. $\int\limits_a^a f = 0$.

2. $\int\limits_a^b = c(b-a)$

   **Доказательство**. По графику очевидно :) $\square$

3. $f \geqslant 0 \Rightarrow \int\limits_a^b = \sigma(P_f)$.

4. $\int\limits_a^b (-f) = -\int\limits_a^b f$.

   **Доказательство**. $(-f)_+ = \max\{-f, 0\} = f_-$. $(-f)_- = \max\{f, 0\} = f+$. Откуда все и следует. $\square$

5. $f \geqslant 0 \wedge \int\limits_a^b = 0 \wedge a < b \Rightarrow f = 0$.

   **Доказательство**. От противного. $\exists c \in [a,b] : f(c) > 0$. Тогда, возьмем $\varepsilon \coloneqq \frac{f(c)}{2}, \delta$ из определения непрерывности в точке $c$. Если $x \in (c-\delta, c+\delta)$, то $f(x) \in (f(c)-\varepsilon, f(c)+\varepsilon) = (\frac{f(c)}{2}; \frac{3f(c)}{2}) \Rightarrow f(x) \geqslant \frac{f(c)}{2}$ при $x \in (c-\delta; c+\delta) \Rightarrow P_f \supset [c - \frac{\delta}{2}; c + \frac{\delta}{2}] \times [0; \frac{f(c)}{2}] \Rightarrow \int\limits_a^b f = \sigma(P_f) \geqslant \delta \cdot \frac{f(c)}{2} > 0$ $\square$

## 1.3. Свойства интеграла

**Теорема 1.7** (Аддиктивность интеграла)**.** Пусть $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $c \in [a,b]$.

Тогда $\int\limits_a^b f = \sum\limits_a^c f + \sum\limits_c^b f$.

**Доказательство**. $\int\limits_a^b f = \sigma(P_{f_+}([a,b])) - \sigma(P_{f_-}([a,b]))$. Разделим наш $[a,b]$ вертикальной прямой $x = c$. Тогда можно воспользоваться свойством 3 из определения квазиплощади. $\square$

**Теорема 1.8** (Монотонность интеграла)**.** Пусть $f, g \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ и $\forall x \in [a,b] \colon f(x) \leqslant g(x)$.

Тогда $\int\limits_a^b f \leqslant \int\limits_a^b g$.

**Доказательство**. $f_+ = \max\{f, 0\} \leqslant \max\{g, 0\} = g_+ \Rightarrow P_{f_+} \subset P_{g_+} \Rightarrow \sigma(P_{f_+}) \leqslant \sigma(P_{g_+})$.

$f_- = \max\{-f, 0\} \geqslant \max\{-g, 0\} = g_- \Rightarrow P_{f_-} \supset P_{g_-} \Rightarrow \sigma(P_{f_-}) \geqslant \sigma(P_{g_-})$. $\square$

***Следствие.***

1. $|\int\limits_a^b f| \leqslant \int\limits_a^b |f|$

2. $(b-a)\min\limits_{x\in[a,b]} f(x) \leqslant \int\limits_a^b f \leqslant (b-a)\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

**Доказательство**.

1. $-|f| \leqslant f \leqslant |f| \Rightarrow \int\limits_a^b -|f| \leqslant \int\limits_a^b f \leqslant \int\limits_a^b |f| \Rightarrow |\int\limits_a^b f| \leqslant \int\limits_a^b |f|$

2. $m \coloneqq \min f(x)$, $M \coloneqq \max f(x)$. $m \leqslant f(x) \leqslant M \Rightarrow \int\limits_a^b m \leqslant \int\limits_a^b f \leqslant \int\limits_a^b M$.

□

**Теорема 1.9** (Интегральная теорема о среднем)**.** Пусть $f \in C([a,b])$.

Тогда $\exists c \in (a,b)\colon \int\limits_a^b f = (b-a)f(c)$.

**Доказательство**. $m \coloneqq \min f = f(p), M \coloneqq \max f = f(q)$ (по теореме Вейерштрасса). Тогда $f(p) \leqslant \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f \leqslant f(q) \xRightarrow{\text{т. Б-К}} \exists c\colon f(c) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f$. □

***Определение* 1.8.** $I_f \coloneqq \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f$ — среднее значения $f$ на отрезке $[a,b]$.

***Определение* 1.9.** $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Интеграл с переменным верхним пределом $\Phi(x) \coloneqq \int\limits_a^x f$, где $x \in [a,b]$.

***Определение* 1.10.** $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Интеграл с переменным нижним пределом $\Psi(x) \coloneqq \int\limits_x^b f$, где $x \in [a,b]$.

*Замечание.* $\Phi(x) + \Psi(x) = \int\limits_a^b f$.

**Теорема 1.10** (Теорема Барроу)**.** Пусть $f \in C[a,b]$. Тогда $\Phi'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$. То есть $\Phi$ — первообразная функции $f$.

**Доказательство**. Надо доказать, что $\lim\limits_{y\to x}\frac{\Phi(y)-\Phi(x)}{y-x} = f(x)$. Проверим для предела справа.

Тогда $\Phi(y) - \Phi(x) = \int\limits_a^y f - \int\limits_a^x f = \int\limits_x^y f$.

Тогда $\frac{\Phi(y)-\Phi(x)}{y-x} = \frac{1}{y-x}\int\limits_x^y f = f(c)$ для некоторого $c \in (x,y)$.

Проверяем определение по Гейне. Берем $y_n > x$ и $y_n \to x$. Тогда $\frac{\Phi(y_n)-\Phi(x)}{y_n-x} = f(c_n)$, где $c_n \in (x,y_n)$, $x < c_n < y_n \to x \Rightarrow c_n \to x \Rightarrow f(c_n) \to f(x)$. □

***Следствие.*** $\Psi'(x) = -f(x) \quad \forall x \in [a,b]$.

**Доказательство**. $\Psi(x) = \int\limits_a^b f - \Phi(x) = C - \Phi(x) \Rightarrow \Psi' = (C - \Phi(x))' = -Phi'(x) = -f(x)$. □

**Теорема 1.11.** Непрерывная на промежутке функция имеет первообразную.

**Доказательство**. $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$.

Рассмотрим $F(x) \coloneqq \begin{cases} \int\limits_c^x f & \text{при } x \geqslant c \\ -\int\limits_x^c f & \text{при } x \leqslant c \end{cases}$.

Если $x > c$, то $F'(x) = f(x)$. □

**Теорема 1.12** (Формула Ньютона-Лейбница)**.** $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ и $F$ – её первообразная. Тогда $\int\limits_a^b f = F(b) - F(a)$.

**Доказательство**. $\Phi(x) = \int\limits_a^x f$ — первообразная и $F(x) = \Phi(x) + C$.

Тогда $F(b) - F(a) = (\Phi(b) + C) - (\Phi(a) + C) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int\limits_a^b f$ □

***Определение* 1.11.** $F \mid_a^b := F(b) - F(a)$

**Теорема 1.13** (Линейность интеграла)**.** $\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$.

**Доказательство**. $F, G$ — первообразные для $f, g$.

Тогда $\alpha F + \beta G$ — первообразная для $\alpha f + \beta g$. Тогда воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b \alpha f + \beta g = \alpha F + \beta G \mid_a^b = \alpha F(b) + \beta G(b) - \alpha F(a) - \beta G(a).$$

□

**Теорема 1.14** (Формула интегрирования по частям)**.** Пусть $f, g \in C^1[a, b]$.

Тогда $\int\limits_a^b fg' = fg \mid_a^b - \int\limits_a^b f'g$.

**Доказательство**. Докажем при помощи формулы Ньютона-Лейбница. Пусть $H$ — первообразная $f'g$. Тогда $fg - H$ — первообразная для $fg'$.

Проверим данный факт: $(fg - H)' = f'g + fg' - f'g = fg'$. А значит нам можно воспользоваться формулой Ньютона-Лейбница.

$\int\limits_a^b fg' = (fg - H) \mid_a^b = fg \mid_a^b - H \mid_a^b = fg \mid_a^b - \int_a^b f'g$. □

*Замечание Соглашение.* Если $a > b$, то $\int\limits_a^b f := -\int\limits_b^a f$.

Мотивация: Если $F$ — первообразная, то $\int\limits_a^b f = F \mid_a^b$.

**Теорема 1.15** (Формула замены переменной)**.** Пусть $f \in C[a, b]$, $\varphi\colon [c, d] \to [a, b]$, $\varphi \in C^1[c, d]$, $p, q \in [c, d]$.

Тогда $\int\limits_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int\limits_{\varphi p}^{\varphi q} f(x)\mathrm{d}x$.

**Доказательство**. Пусть $F$ — первообразная $f$. Тогда $\int\limits_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)\mathrm{d}x = F \mid_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} = F_0\varphi \mid_p^q$, где $F_0\varphi$ — первообразная для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

Проверим данные факты: $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

Тогда интеграл равен $\int\limits_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$ □

**Пример.**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2t}{1+\sin^4 t}\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Произведем замену $\varphi(t) = \sin^2 t$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $\varphi'(t) = 2\sin t\cos t = \sin 2t$, $\varphi(0) = 0, \varphi(\frac{\pi}{2}) = 1$:

$$(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi'(t)}{1+(\varphi(t))^2} = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(\frac{\pi}{2})} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \,|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

## 1.4. Приложения формулы интегрирования по частям

**Пример.** $W_n \coloneqq \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\mathrm{dt} = (1)$

Где $x = \frac{\pi}{2} - t =: \varphi(t)$, $\varphi'(t) = -1$, $\sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos t$.

Тогда $(1) = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \varphi(t) \cdot \varphi(t)\mathrm{dt} = -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n x\mathrm{d}x$

Частные случаи $W_0 = \frac{\pi}{2}$, $W_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x = -\cos|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

Общее решение: $W_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \cdot (\cos x)'\mathrm{d}x =$. Воспользовались тем, что $\sin x = -(\cos x)'$, $f'(x) = (n-1)\sin^{n-2} x \cdot \cos x$.

Тогда получаем:

$$= -\left(\underbrace{\sin^{n-1} x \cdot \cos x \,|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2} x \underbrace{\cos^2 x}_{=1-\sin^2 x} \mathrm{d}x\right) =$$

$$= (n-1)\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\mathrm{d}x - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x\right) = (n-1)(W_{n-2} - W_n).$$

Посчитаем для четных: $W_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot W_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} W_{2n-4} = \ldots = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}$, где $k!!$ — произведение натуральных чисел той же четности, что и $k$ и $\leqslant k$.

Для нечетных: $W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} W_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} W_{2n-3} = \ldots = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} W_1 = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$

**Теорема 1.16** (Формула Валлиса)**.**

$$\lim_{n\to\inf} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

**Доказательство**. $\sin^n x \geqslant \sin^{n+1} x$ на $[0, \frac{\pi}{2}]$. Тогда $W_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x \geqslant \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x\mathrm{d}x = W_{n+1}$.

Заметим, что $W_{2n+2} \leqslant W_{2n+1} \leqslant W_{2n} \iff \frac{\pi}{2}\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \leqslant \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leqslant \frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$. Поделим на $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$:

$$\frac{\pi}{2}\frac{2n+1}{2n+2} \leqslant \frac{((2n)!!)^2}{(2n+1)((2n-1)!!)^2} \leqslant \frac{\pi}{2} \implies \lim\left(\frac{(2n)!!}{\sqrt{(2n+1)}(2n-1)!!}\right)^2 = \frac{\pi}{2}.$$

□

***Следствие.***

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

**Доказательство**. Заметим, что $(2n)! = (2n)!! \cdot (2n-1)!!$, а $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n) = 2^n \cdot n!$. Тогда подставим в Сшку:

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{\frac{(2n)!!}{2^n}\frac{(2n)!!}{2^n}} = 4^n \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

При этом из Валлиса, заметим, что $\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2n+1} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2n} = \sqrt{\pi n}$. А значит все сойдется. □

**Теорема 1.17** (Формула Тейлора (с остатком в интегральной форме))**.** Пусть $f \in C^n[a,b]$, $x, x_0 \in [a,b]$. Тогда:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

**Доказательство**. Индукция по $n$:

- База. $n = 0$, $f(x) = f(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f'(t)\mathrm{d}t = f(x_0) + f\mid_{x_0}^{x}$
- Переход. $n \to n+1$.
- Доказательство. $f(x) = T_n(x) + \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} \underbrace{(x-t)^n}_{g'}\underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{f}\mathrm{d}t$. Проинтегрируем интеграл по частям. $g(t) = \frac{1}{n+1} - (x-t)^{n+1}$.

  Подставим: $\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t = -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \cdot f^{(n+1)}(t) \mid_{t=x_0}^{t=x} + \int_{x_0}^{x} \frac{1}{n+1}(x-t)^{n+1} \cdot f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t =$
  $\underbrace{\frac{1}{n+1}(x-x_0)^{n+1} f^{(n+1)}(x_0)}_{\text{новый член Тейлора!}} + \int_{x_0}^{x} \frac{1}{n+1}(x-t)^{n+1} \cdot f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t$

□

**Пример.**

$$H_j \coloneqq \frac{1}{j!}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^j \cos x\mathrm{d}x. \tag{2}$$

**Свойство 1.** $0 < H_j \leqslant \frac{1}{j}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2j}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2j}}{j!}$.

**Свойство 2.** $\forall c > 0 \colon c^j \cdot H_j \xrightarrow{j\to\inf} 0$. $0 < c^j H_j \leqslant \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2j} \cdot c^j}{j!} = \frac{\left(\frac{\pi^2}{4}c\right)^j}{j!} \to 0$.
**Свойство 3.** $H_0 = 1$, $H_1 = 2$ (*упражнение*).
**Свойство 4.** $H_j = (4j-2)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}$, при $j \geqslant 2$.

**Доказательство**.

$$j!H_j = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^j (\sin x)'\mathrm{d}x \tag{3}$$

Заметим, что $\left(\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^j\right)' = j\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^{j-1} \cdot (-2x)$. Тогда:

$$(3) = \underbrace{\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^j \sin x\,\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}}}_{=0} + 2j\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^{j-1} x \underbrace{\sin x}_{=(-\cos x)'}\,\mathrm{d}x =$$

$$= 2j\left(\underbrace{\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^{j-1} \cdot x \cdot (-\cos x)\,\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int\limits_0^{\frac{n}{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^{j-2} x^2 \cos x\mathrm{d}x\right)$$

$$= 2j\left((j-1)!H_{j-1} - 2(j-1)\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot (j-2)!H_{j-2} + 2(j-1)(j-1)!H_{j-1}\right).$$

Откуда с легкостью получаем $j!H_j = 2j!H_{j-1} - \pi^2 j!H_{j-2} + 4(j-1)j!H_{j-1} \iff H_j = (4j-2)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}$.

**Свойство 5.** Существует многочлен $P_n$ с целыми коэффициентами степени $\leqslant n$, такой что $H_j = P_j(\pi^2)$.

**Доказательство**. $P_0 \equiv 1, P_1 \equiv 2, P_n(x) = (4n-2)P_{n-1}(x) - xP_{n-2}(x)$. □

□

**Теорема 1.18** (Ламберта, доказательство: Эрмит)**.** Числа $\pi$ и $\pi^2$ иррациональные.

**Доказательство**. От противного. Пусть $\pi^2$ — рационально. Тогда пусть $\pi^2 = \frac{m}{n}$. Тогда $H_j = P_j(\frac{m}{n}) = \frac{\text{целое число}}{n^j} > 0$.

$n^j H_j =$ целое число $> 0 \Rightarrow n^j H_j \xrightarrow{j \to +\inf} 0$, но $n^j H_j \geqslant 1$. □

# Отступление. Равномерная непрерывность

***Определение* 1.12.** $f\colon E\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ равномерно непрерывна на $E$, если $\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall x,y\in E\colon$ $|x-y|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon$

***Определение* 1.13.** $f$ непрерывна во всех точках из $E$:
$\forall x\in E\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall y\in E\colon|x-y|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon$

**Пример.** $\sin x$ и $\cos x$ равномерно непрерывны на $\mathbb{R}$.

$|\sin x-\sin y|\leqslant|x-y|\Rightarrow\delta=\varepsilon$ подходит. $|\cos x-\cos y|\leqslant|x-y|$.

**Пример.** $f(x)=x^2$ не является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$. Рассмотрим $\varepsilon=1$, никакое $\delta>0$ не подходит. $x$ и $x+\frac{\delta}{2}$. $f(x+\frac{\delta}{2})-f(x)=(x+\frac{\delta}{2})^2-x^2=\ldots=\delta x+\frac{\delta^2}{4}>\delta x$. При $x=\frac{1}{\delta}$ противоречие.

**Теорема 1.19** (Теорема Кантора)**.** Пусть $f\in C[a,b]$, тогда $f$ равномерно непрерывна на $[a,b]$.

**Доказательство**. Берем $\varepsilon>0$ и предположим, что $\delta=\frac{1}{n}$ не подходит, то есть $\exists x_n,y_n\in[a,b]\colon$ $|x_n-y_n|<\frac{1}{n}$ и по теореме Больцано-Вейерштрасса у последовательности $x_n$ есть сходящаяся последовательность $x_{n_k}\to c$, то есть $\lim x_{n_k}=c\in[a,b]$.

$\underbrace{x_{n_k}-\dfrac{1}{n_k}}_{\to c}<y_{n_k}<\underbrace{x_{n_k}+\dfrac{1}{n_k}}_{\to c}\implies\lim y_{n_k}=c$. Но $f$ непрерывна в точке $c\implies f(x_{n_k})=f(c)=$ $\lim f(y_{n_k})\implies\lim(f(x_{n_k})-f(y_{n_k}))=0$, но $|f(x_{n_k})-f(y_{n_k})|\geqslant\varepsilon$. □

*Замечание.* Для интервала или полуинтервала неверно. $f(x)=\frac{1}{x}$ на $(0;1]$. Докажем, что нет равномерной непрерывностью на $(0;1]$.

Пусть $\varepsilon=1$ и $\delta>0$. Пусть $0<x<\delta$, $y=\frac{x}{2}$, $|x-y|=\frac{x}{2}<\delta$. Тогда $f(y)-f(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x}>1$.

***Определение* 1.14.** Пусть $f\colon E\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Тогда $\omega_f(\delta)\coloneqq\sup\{|f(x)-f(y)|\mid\forall x,y\in E,|x-y|\leqslant\delta\}$ — модуль непрерывности $f$.

***Свойства.***

1. $\omega_f(0)=0$,
2. $|f(x)-f(y)|\leqslant\omega_f(|x-y|)$.
3. $\omega_f\uparrow$.
4. Если $f$ — липшицева функция с константой $L$, то $\omega_f(\delta)\leqslant L\delta$.
   В частности, если $|f'(x)|\leqslant L\quad\forall x\in\langle a,b\rangle$.
5. $f$ равномерно непрерывна на $E\iff\omega_f$ непрерывна в нуле $\iff\lim\limits_{\delta\to0+}\omega_f(\delta)=0$.

**Доказательство**.

- $1\to2$. $\forall\varepsilon>0\gamma>0\forall x,y\in E\colon|x-y|<\gamma\implies|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.
  Возьмем $\delta<\gamma$. Тогда $|x-y|\leqslant\delta\implies|x-y|<\gamma\implies|f(x)-f(y)|<\varepsilon\implies\sup\leqslant\varepsilon$.
- $2\to1$. Из $\lim\limits_{\delta\to0+}\omega_f(\delta)=0$. Возьмем $\gamma>0$: $|f(x)-f(y)|\leqslant\omega_f(\delta)<\varepsilon\ \forall\delta\gamma$, $\forall x,y\in E$ : $|x-y|\leqslant\delta$.

□

6. $f \in C[a,b] \iff \omega_f$ непрерывен в нуле $\iff \lim \omega_f(\delta) = 0$.

   **Доказательство**. Для функции на отрезке равномерная непрерывность $\iff$ непрерывность. $\square$

# Продолжение главы 1

## 1.5. Интегральные суммы

***Определение* 1.15.** Пусть есть $[a, b]$. Тогда дробление (разбиение, пунктир) отрезка: набор точек: $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.

***Определение* 1.16.** Ранг дробления: $\max\limits_{k=1,2,\ldots,n}(x_k - x_{k-1}) =: |\tau|$, $\tau = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$

***Определение* 1.17.** Оснащение дробления — набор точек $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, такой что $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

***Определение* 1.18.** Интегральная сумма (сумма Римана) $S(f, \tau, \xi) :== \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$,

*По факту просто сумма прямоугольников под графиком рисунок принял ислам очень жаль.*

**Теорема 1.20** (Теорема об интегральных суммах)**.** Пусть $f \in C[a, b]$,

тогда $|\int\limits_a^b -S(f, \tau, \xi)| \leqslant (b-a)\omega_f(|\tau|)$.

**Доказательство**.

$$\Delta := \int\limits_a^b f - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(\xi_k)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} (f(t) - f(\xi_k))\mathrm{d}t.$$

$$|\Delta| \leqslant \sum |\int \ldots| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t) - f(\xi_k)|\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\omega_f(|\tau|) = (b-a)\omega_f(|\tau|).$$

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t) - f(\xi_k)|\mathrm{d}t \leqslant \int_{x_{k-1}}^{x_k} \omega_f(|\tau|)\mathrm{d}t = (x_k - x_{k-1})\omega_f(|\tau|)..$$

$\square$

***Следствие.*** $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall$ дробления ранга $\leqslant \delta$ $\forall$ оснащения $|\int\limits_a^b -S(f, \tau, \xi) < \varepsilon|$

***Следствие.*** Если $\tau_n$ последовательность дроблений, ранг которых $\to 0$, то $S(f, \tau_n, \xi_n) \to \int\limits_a^b f$.

**Пример.** $S_p(n) := 1^p + 2^p + \ldots + n^p$. Посчитаем $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_p(n)}{n^{p+1}}$.

Возьмем $fL[0, 1] \to \mathbb{R}$ $\quad f(t) = t^p$ $\frac{S_p(n)}{n^{p+1}} = \frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^p = S(f, \tau, \xi)$, где $x_k = \xi_k = \frac{k}{n}$.

Тогда $\lim \frac{S_p(n)}{n^{p+1}} = \int\limits_0^1 t^p \mathrm{d}t = \frac{t^{p+1}}{p+1} |_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{p+1}$

***Определение* 1.19.** Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, тогда $f$ интегрируема по Риману, если $\exists I \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \forall$ дробление ранги $< \delta \forall$ его оснащение $|S(f,\tau,\xi) - I| < \varepsilon$.

$I$ — интеграл по Риману $\int\limits_a^b f$.

**Лемма.** $f \in C^2[\alpha,\beta]$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t - \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta-\alpha) = -\frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f''(t)(t-\alpha)(\beta-t)\mathrm{d}t.$$

**Доказательство**. Пусть $\gamma \coloneqq \frac{\alpha+\beta}{2}$. Тогда:

$$\int\limits_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t = \int\limits_\alpha^\beta f(t)(t-\gamma)'\mathrm{d}t = f(t)(t-\gamma)\mid_{t=\alpha}^{t=\beta} - \int\limits_\alpha^\beta f'(t)(t-\gamma)\mathrm{d}t.$$

Заметим, что $f(t)(t-\gamma)\mid_{t=\alpha}^{t=\beta} = f(\beta)(\beta-\gamma) - f(\alpha)(\alpha-\gamma) = \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta-\alpha)$. Продолжим:

$$\text{левая часть} = -\int_\alpha^\beta f'(t)(t-\gamma)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f'(t)((t-\alpha)(\beta-t))'\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{2}f'(t)(t-\alpha)(\beta-t)\mid_{t=\alpha}^{t=\beta} - \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f''(t)(t-\alpha)(\beta-t)\mathrm{d}t.$$

Переход к $((t-\alpha)(\beta-t))'$:

$$((t-\alpha)(\beta-t))' = (-t^2 - (\alpha+\beta)t - \alpha\beta)' = -2t + (\alpha+\beta) = -2(t-\gamma).$$

$\square$

*Замечание.* Бла-бла-бла.

**Теорема 1.21** (Оценка погрешности в формуле трапеций)**.** Пусть $f \in C^2[a,b]$.

Тогда :

$$\left|\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1})\right| \leqslant \frac{|\tau|^2}{8}\int\limits_a^b |f''|$$

**Доказательство**. $\Delta \coloneqq \int\limits_a^b - \sum \ldots = \sum\limits_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} - \sum\limits_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1})$

$$|\Delta| \leqslant \sum_{k=1}^n |\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} - \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1})| = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(t)(t-x_{k-1})(x_k-t)\mathrm{d}t\right|.$$

Тогда вспомним, что $(t-x_{k-1})(x_k-t) \leqslant \left(\frac{x_k-x_{k-1}}{2}\right)^2 \leqslant \frac{|\tau|^2}{4} \leqslant \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |f''(t)| \cdot \frac{|\tau|^2}{4}\mathrm{d}t = \frac{|\tau|^2}{8}\sum \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |f''| = \frac{|\tau|^2}{8} \cdot \int\limits_a^b |f''|$ $\square$

*Замечание.* Пусть разбиение на $n$ равных отрезков $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n} = |\tau|$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} = \frac{b-a}{n}(f\frac{x_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + \frac{f(x_n)}{2})..$$

*Замечание.* Возьмем разбиение на равные отрезки и $\xi_k = x_k$:

$$S(f, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$

**Теорема 1.22** (формула Эйлера-Маклорена)**.** Пусть $f \in C^2[m, n]$, тогда

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \frac{f(m) + f(n)}{2} + \int_m^n f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_m^n f''(t)\{t\}(1 - \{t\})\mathrm{d}t.$$

**Доказательство**. Подставим $\alpha = k$ и $\beta = k + 1$ в лемму:

$$\int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t = \frac{f(k) + f(k+1)}{2} - \frac{1}{2}\int_k^{k+1} f''(t)(t - k)(k + 1 - t)\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{f(k) + f(k+1)}{2} - \frac{1}{2}\int_k^{k+1} f''(t)\{t\}(1 - \{t\})\mathrm{d}t.$$

Дальше суммируем по $k$ от $m$ до $n - 1$:

$$\int_m^n f(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=m}^{n-1} \frac{f(k) + f(k+1)}{2} - \frac{1}{2}\int_m^n f''(t)\{t\}(1 - \{t\})\mathrm{d}t.$$

Заметим, что $\sum\limits_{k=m}^{n-1} \frac{f(k)+f(k+1)}{2} = \frac{f(m)+f(n)}{2} + \sum_{k=m+1}^{n-1} f(k)$. И тогда:

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \frac{f(m) + f(n)}{2} + \int_m^n f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_m^n f''(t)\{t\}(1 - \{t\})\mathrm{d}t.$$

□

**Пример.** $S_p(n) = 1^p + 2^p + \ldots + n^p$, $f(t) = t^p$, $m = 1$, $f''(t) = p(p-1)t^{p-2}$.

$S_p(n) = \frac{1+n^p}{2} + \int\limits_1^n t^p\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int\limits_1^n p(p-1)t^{p-2}\{t\}(1 - \{t\})\mathrm{d}t.$

При $p \in (-1, 1)$ $\int_1^n t^p\mathrm{d}t = \frac{t^{p+1}}{p+1} |_1^n = \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1} = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \mathcal{O}(1).$

$$\int_1^n t^{p-2} \underbrace{\{t\}(1 - \{t\})}_{\leqslant\frac{1}{4}} \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{4}\int_1^n t^{p-2}\mathrm{d}t = \frac{1}{4} \cdot \frac{t^{p-1}}{p-1} |_1^n = \frac{1}{4} \cdot \frac{n^{p-1} - 1}{p-1} = \mathcal{O}(1)..$$

То есть $S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \mathcal{O}(1)$.

При $p > 1$ $S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \mathcal{O}(n^{p-1})$.

**Пример.** $H_n \coloneqq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$. $m = 1, f(t) = \frac{1}{t}, f''(t) = \frac{2}{t^3}$.

$$H_n = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} + \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} + \frac{1}{2}\int_1^n \frac{2}{t^3}\{t\}(1 - \{t\})\mathrm{d}t$$

Откуда получаем ($a_n := \int\limits_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^3}$):

$$H_n = \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + a_n.$$

Заметим, что $a_{n+1} = a_n + \int\limits_n^{n+1} \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^3}\mathrm{d}t > a_n$. То есть $a_n \uparrow$. Причем $a_b \leqslant \int\limits_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = -\frac{1}{2^2} \mid_1^n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} < \frac{1}{2}$.
А значит $a_n$ имеет предел, а значит $a_n = a + o(1)$.
Вывод: $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$, где $\gamma \approx 0.5772156649$ — постоянная Эйлера.

*Замечание.* $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$.

**Пример Формула Стирлинга.** $m = 1, f(t) = \ln t, f''(t) = -\frac{1}{t^2}$.

$$\ln n! = \sum_{k=1}^n \ln k = \underbrace{\frac{\ln 1 + \ln n}{2}}_{=\frac{1}{2}\ln n} + \underbrace{\int_1^n \ln t \mathrm{d}t}_{=t\ln t - t|_1^n = n\ln n - n + 1} - \underbrace{\frac{1}{2}\int_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^2}\mathrm{d}t}_{:=b_n}.$$

Посмотрим на $b_n$:

$$b_n \leqslant \frac{1}{2}\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{1}{2}(-\frac{1}{t}) \mid_1^n = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n}) < \frac{1}{2} \implies b_n = b + o(1)..$$

А значит $\ln n! = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + (1-b) + o(1)$. $n! = n^n e^{-n}\sqrt{n}e^{1-b}e^{o(1)} \sim n^n e^{-n}\sqrt{n}C$.

Вспомним (из следствия формулы Валлиса): $\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$. А еще знаем, что $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2n}C}{(n^n e^{-n}\sqrt{n}C)^2} = \frac{4^n\sqrt{2}}{\sqrt{n}C}$.

Тогда получаем, что $\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \sim \frac{4^n\sqrt{2}}{\sqrt{n}C} \implies C \sim \frac{4^n\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{\pi n}}{4^n} = \sqrt{2\pi}$.

Итоговый результат:

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$
$$\ln n! = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln(2\pi n) + o(1).$$

*Замечание.* $\ln n! = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln(2\pi n) + \mathcal{O}(\frac{1}{n})$.

## 1.6. Несобственные интегралы

***Определение* 1.20.** Пусть $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ и $f \in C[a,b)$.

Тогда определим $\int\limits_a^{\to b} f := \lim\limits_{B\to b-} \int\limits_a^B f$.

Если $-\infty \leqslant a < b < +\infty, f \in C(a,b]$, тогда $\int\limits_{\to a}^b f := \lim\limits_{A\to a+} \int\limits_A^b f$.

*Замечание.* Если $b < +\infty$ и $f \in C[a,b]$, то определение не дает ничего нового:

$$\int_a^b f = \lim_{B\to b} f$$
$$\left|\int_a^b f - \int_a^B f\right| \leqslant M(b-B) \to 0.$$

**Пример.** 1. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim\limits_{y\to+\infty} \int\limits_a^y \frac{dx}{x^p} = \lim\limits_{\substack{y\to+\infty \\ \text{при } p\neq 1}} -\frac{1}{(p-1)x^{p-1}} \mid_{x=1}^{x=y} = \frac{1}{p-1} - \lim\limits_{y\to+\infty} \frac{1}{(p-1)y^{p-1}} = \frac{1}{p-1}$ при $p > 1$, при $p < 1$ получаем $+\infty$, а при $p = 1$ $\lim\limits_{y\to+\infty} \ln x \mid_1^y = \lim\limits_{y\to+\infty} \ln y = +\infty$

2. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim\limits_{y\to 0+} \int\limits_y^1 \frac{dx}{x^p} = \lim\limits_{y\to 0+} -\frac{1}{(p-1)x^{p-1}} \mid_{x=y}^{x=1} = -\frac{1}{p-1} + \lim\limits_{y\to 0+} = \frac{y^{1-p}}{p-1} = \frac{1}{1-p}$ при $p < 1$, при $p > 1$ получаем $+\infty$, а вот при $p = 1$ $\lim\limits_{y\to 0+} \ln x \mid_y^1 = \lim\limits_{y\to 0+} -\ln y = +\infty$.

   То есть, при $p < 1$ $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}$,

   при $p \geqslant 1$ $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p} = +\infty$.

*Замечание.* Если $f \in C[a, b)$ и $F$ его первообразная, то $\int\limits_a^b f = \lim\limits_{B\to b-} F(B) - F(a)$.

Если $f \in C(a, b]$ и $F$ его первообразная, то $\int\limits_a^b f = F(b) - \lim\limits_{A\to a+} F(A)$.

**Доказательство**. Очевидно по формуле Ньютона-Лейбница. □

***Определение* 1.21.** $F \mid_a^b := \lim\limits_{B\to b-} F(B) - F(a)$.

***Определение* 1.22.** $\int\limits_a^{\to b} f$ сходится, если $\lim B$ его определении существует и конечен.

**Теорема 1.23** (Критерий Коши)**.** Пусть $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, $f \in C[a, b)$.

Тогда $\int\limits_a^b f$ сходится $\iff \forall \varepsilon \exists c \in (a, b) \colon \forall A, B \in (c, b)$ $\left|\int\limits_A^B f\right| < \varepsilon$.

*Замечание.* 1. Если $b = +\infty$ это означает, что $\forall \varepsilon \exists c > a \forall A, B > c \colon \left|\int\limits_A^B f\right| < \varepsilon$.

2. Если $b < +\infty$ это означает, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall A, B \in (b - \delta; b) \colon \left|\int\limits_A^B f\right| < \varepsilon$.

**Доказательство**. Для $b < +\infty$.

- "$\Rightarrow$" $\int\limits_a^b f$ сходится $\implies \exists$ конечный $\lim\limits_{B\to b-} \int\limits_a^B f =: g(B)$.

  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \begin{array}{ll} \forall B \in (b - \delta, b) & |g(B) - I| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall A \in (b - \delta, b) & |g(A) - I| < \frac{\varepsilon}{2} \end{array} \implies |g(B) - g(A)| \leqslant |g(B) - I| + |I - g(A)| < \varepsilon$

- "$\Leftarrow$" $\int\limits_a^B f =: g(B)$.

  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall A, B \in (b - \delta, b) : |g(B) - g(A)| < \varepsilon$ это условие из критерия Коши для $\lim\limits_{B\to b-} g(B)$.

□

*Замечание.* Если существует $A_n, B_n \in [a, b) \colon \lim A_n = \lim B_n = b \colon \int\limits_{A_n}^{B_n} f \not\to 0$, то $\int\limits_a^b f$ расходится.

**Доказательство**. Возьмем $A_{n_k}$ и $B_{n_k}\colon |\int\limits_{A_{n_k}}^{B_{n_k}} f| \to C > 0 \implies |\int\limits_{A_{n_k}}^{B_{n_k}} f| > \frac{C}{2}$ при больших $k$. Но это противоречит критерию Коши. □

***Свойства несобственных интегралов.***

1. Аддитивность. Пусть $f \in C[a, b)$, $c \in (a, b)$. Если $\int\limits_a^b f$ сходятся, то $\int\limits_a^b f$ сходятся и $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$.
2. Если $\int\limits_a^b f$ сходится, то $\lim\limits_{c\to b-} \int\limits_c^b f = 0$
3. Линейность $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $\int\limits_a^b f$ и $\int\limits_a^b g$ сходятся. Тогда $\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g)$ сходится и $\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$.
4. Монотонность. Пусть $\int\limits_a^b f$ и $\int\limits_a^b g$ существует в $\overline{R}$ и $f \leqslant g$ на $[a, b)$. Тогда $\int\limits_a^b f \leqslant \int\limits_a^b g$.
5. Интегрирование по частям. $f, g \in C^1[a; b) \implies \int\limits_a^b fg' = fg\,|_a^b - \int\limits_a^b f'g$.
6. Замена переменных. $\varphi\colon [\alpha, \beta) \to [a, b)$, $\varphi \in C^1[\alpha, \beta)$ и $\exists \lim\limits_{\gamma\to\beta-} \varphi(\gamma) =: \varphi(\beta-)$ и $f \in C[a, b)$. Тогда $\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f(x)\mathrm{d}x$. «Если существует один из $\int$, то существует второй и они равны»

**Доказательство**.

1. $\int\limits_a^b f = \lim\limits_{B\to b-} F(B) - F(a) \implies \lim_{B\to b-} F(B)$ существует и конечный $\implies \int\limits_c^b = \lim\limits_{B\to b-} F(b) - F(c)$ — сходится.
   $\int\limits_a^b = \lim F(B) - F(a) = \lim F(B) - F(c) + F(c) - F(a) = \int\limits_c^b f + \int_a^c f$.
2. $\int\limits_c^b f = \int\limits_a^b f - \int\limits_a^c f \to \int\limits_a^b f - \int\limits_a^b f = 0$
3. $\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g) = \lim\limits_{B\to b-} \int\limits_a^B (\alpha f + \beta g) = \lim\limits_{B\to b-} (\alpha \int\limits_a^B f + \beta \int\limits_a^B g) = \alpha \lim\limits_{B\to b-} \int\limits_a^B f + \beta \lim\limits_{B\to b-} \int\limits_a^B g = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$.
4. $\int\limits_a^B f \leqslant \int\limits_a^B g$ (монотонность интеграла), а дальше предельный переход.
5. $a < B < b$. $\int\limits_a^B fg' = fg\,|_a^B - \int_a^B f'g$ и переход к пределу.
6. $F(y) \coloneqq \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{y} f(x)\mathrm{d}x$, $\Phi(\gamma) \coloneqq \int_\alpha^\gamma f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$. Знаем, что $F(\varphi(\gamma)) = \Phi(\gamma)$ при $\alpha < \gamma < \beta$.

Пусть существует правый $\int$, то есть $\exists \lim\limits_{y\to\varphi\beta-} F(y)$. Возьмем $\gamma_n \nearrow \beta \implies \varphi(\gamma_n) \to \varphi(\beta-) \implies \Phi(\gamma_n) = F(\varphi(\gamma_n)) \to \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f(x)\mathrm{d}x$. При этом $\Phi(\gamma_n) \to \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$.

Пусть существует левый $\int$, то есть $\exists \lim\limits_{\gamma\to\beta-} \Phi(\gamma)$. Докажем, что $\exists$ правый $\int$. При $\varphi(\beta-) < b$ нечего доказывать.

Пусть $\varphi(\beta-) = b$. Тогда возьмем $b_n \nearrow b$. Можно считать, что $b_n \in [\varphi(\alpha), b)$. Тогда $\exists \gamma_n \in [\alpha, \beta) \colon \varphi(\gamma_n) = b_n$. Докажем, что $\gamma_n \to \beta$. Пусть это не так. Тогда найдется $\gamma_{n_k} \to \widetilde{\beta} < \beta \implies \varphi(\gamma_{n_k}) \to \varphi(\widetilde{\beta}) < b$ по непрерывности в $\widetilde{\beta}$. Противоречие.

Итак, $\gamma_n \to \beta$, $F(b_n) = F(\varphi(\gamma_n)) = \Phi(\gamma_n) \to \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$.

$\square$

*Замечание ко второму свойству.*

1. Если $\int\limits_a^b f$ сходится, а $\int\limits_a^b g$ расхоидится, то $\int\limits_a^b (f+g)$ расходится. Доказательство от противного, путь интеграл сходится, то $g = (f+g) - f \implies \int\limits_a^b g$ сходится.
2. Если $\int\limits_a^b f$ и $\int\limits_a^b g$ расходятся, то $\int\limits_a^b (f+g)$ может сходиться. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ и $\int\limits_1^{+\infty} -\frac{\mathrm{d}x}{x}$ расходятся.

*Замечание к шестому свойству.* $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Сделаем замену $x = b - \frac{1}{t} = \varphi(t)$, $\varphi'(t) = \frac{1}{t^2}, \varphi(\alpha) = a, \alpha = \frac{1}{b-a}$.

Тогда $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f(b - \frac{1}{t})\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$.

***Определение* 1.23.** Пусть $f$ непрерывен на $(a, b)$ за исключением точек $c_1 < c_2 < \ldots < c_n$.

$\int\limits_a^b f$ сходится, если сходятся интегралы по все маленьким отрезкам (содержащих только одну выколотую точку).

## Несобственные интегралы от неотрицательных функций

**Теорема 1.24.** Пусть $f \in C[a, b)$ и $f \geqslant 0$.

Тогда $\int\limits_a^b f$ сходится $\iff F(y) := \int\limits_a^y f$ ограничена сверху.

**Доказательство**. $f \geqslant 0 \implies F$ монотонно возрастает. $\int\limits_a^b f$ сходится $\iff \exists$ конечный $\lim\limits_{y\to b-} F(y) \iff F$ ограничена сверху. $\square$

*Замечание.* $f \in C[a; b), f \geqslant 0$. $\int\limits_a^b f$ расходящийся означает, что $\int\limits_a^b f = +\infty$.

***Следствие Признак сравнения.*** $f, h \in C[a, b)$, $f, g \geqslant 0$ и $f \leqslant g$.

1. Если $\int\limits_a^b g$ сходится, то $\int\limits_a^b f$ сходится.

2. Если $\int\limits_a^b f$ расходится, то $\int\limits_a^b g$ расходится.

**Доказательство**. $F(y) \coloneqq \int\limits_a^y f$ и $G(y) \coloneqq \int\limits_a^y g$.

1. Пусть $\int\limits_a^b g$ сходящийся $\implies$ $G(y)$ ограничена, но $F(y) \leqslant G(y)$ $\implies$ $F(y)$ ограничена $\implies \int\limits_a^b f$ сходящаяся.

2. От противного.

$\square$

*Замечание.* 1. Неравенство $f \leqslant g$ нужно лишь для аргументов близких к $b$.

2. Неравенство $f \leqslant g$ можно заменить на $f = \mathcal{O}(g)$.

   $f = \mathcal{O}(g) \implies f \leqslant cg$. $\int\limits_a^b g$ сходящийся $\implies \int\limits_a^b cg$ сходящийся $\implies \int\limits_a^b f$ – сходящийся.

3. Если $f = \mathcal{O}(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}})$ для $\varepsilon > 0$, то $\int\limits_a^{+\infty} f$ — сходящийся.

   $g(x) = \frac{1}{x^{1+\varepsilon}}$ и можно считать, что $a \geqslant 1$ $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ — сходящийся.

***Следствие.*** $f, g \in C[a, b)$, $f, g \geqslant 0$ и $f(x) \sim g(x), x \to b-$. Тогда $\int\limits_a^b f$ и $\int\limits_a^b g$ ведут себя одинаково (либо оба сходятся, либо оба расходятся).

**Доказательство**. $f \sim g \implies f = \varphi \cdot g$, где $\varphi(x) \xrightarrow{x \to b-} 1 \implies$ в окрестности $b$ $\frac{1}{2} \leqslant \varphi \leqslant 2 \implies f \leqslant 2g \land g \leqslant 2f$ в окрестности $b \implies$ из сходимости интеграла $g$ следует сходимость $f \land$ наоборот. $\square$

***Определение* 1.24.** $f \in C[a, b)$. $\int\limits_a^b f$ абсолютно сходится, если $\int\limits_a^b |f|$ сходится.

**Теорема 1.25.** $\int_a^b f$ сходится абсолютно $\int\limits_a^b f$ сходится.

**Доказательство**. $f = f_+ - f_-$, $|f| = f_+ + f_-$. $|f| \geqslant f_\pm \geqslant 0$. Если $\int\limits_a^b f$ сходится абсолютно $\implies \int\limits_a^b$ сходится $\int\limits_a^b f_\pm$ сходится $\implies \int\limits_a^b f = \int\limits_a^b f_+ - \int\limits_a^b f_-$ сходящийся. $\square$

**Теорема 1.26** (Признак Дирихле)**.** $f, g \in C[a, +\infty)$. Если

1. $f$ имеет ограниченную на $[a, +\infty]$ первообразную, то есть $\left|\int\limits_a^y f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant K \quad \forall y$.

2. $g$ монотонна.

3. $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$

, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ сходится.

**Доказательство**. Только для случая $g \in C^1[a; +\infty)$.

Надо доказать, что $\exists$ конечный $\lim\limits_{y\to+\infty} \int\limits_a^y f(x)g(x)\mathrm{d}x$, $F(y) \coloneqq \int\limits_a^y f(x)\mathrm{d}x$.

$$\int\limits_a^y f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^y F'(x)g(x)\mathrm{d}x = F(x)g(x)\mid_a^y - \int_a^y F(x)g'(x)\mathrm{d}x = F(y)g(y) - \int_a^y F(x)g'(x)\mathrm{d}x$$

$\lim\limits_{y\to+\infty} F(y)g(y) = 0$ — произведение бесконечно малой и ограниченной функции.

$\int\limits_a^y F(x)g'(x)\mathrm{d}x$ имеет конечный lim, то есть $\int\limits_a^{+\infty} F(x)g'(x)\mathrm{d}x$ сходится.

Докажем, что он абсолютно сходится. $\int\limits_a^{+\infty} |F(x)||g'(x)|\mathrm{d}x$, $|F(x)||g'(x)| \leqslant K|g'(x)| = Kg'(x)$. $\int_a^{+\infty} g'(x)\mathrm{d}x = g\mid_a^{+\infty} = \lim\limits_{y\to+\infty} g(y) - g(a) = -g(a) \implies$ сходящийся. $\square$