Дискретная математика

Харитонцев-Беглов Сергей

8 декабря 2021 г.

Содержание

1. Теория множеств 1
- 1.1 Базовые понятия . . . 1
- 1.2 Операции с множествами . . . 1

2. Комбинаторика 4
- 2.1 Сшки . . . 4
- 2.2 Биномиальные коэффициенты . . . 5
- 2.3 Мультимножество . . . 5
- 2.4 k-перестановки . . . 5
- 2.5 Комбинаторика в схемах и мемах . . . 6

3. Вероятности 8
- 3.1 Дискретная вероятность . . . 8
- 3.2 Случайная величина . . . 9
- 3.3 Биномиальное распределение . . . 9
- 3.4 Геометрическое распределение . . . 10
- 3.5 Гипергеометрическое распределение . . . 10
- 3.6 Численные характеристики . . . 10

4. Рекуррентные соотношения 12
- 4.1 Определение . . . 12
- 4.2 Линейные реккуренты . . . 12
- 4.3 Неоднородные линейные реккуренты . . . 13

5. Графы 14
- 5.1 Определения . . . 14
- 5.2 Маршруты, пути, циклы. Связные графы . . . 15
- 5.3 Подграфы. Основные операции над графами . . . 17
- 5.4 Деревья . . . 18

1. Теория множеств

1.1. Базовые понятия

Есть официальный конспект, который будет Здесь.

***Определение* 1.1.** Множество — набор различимых между собой по какому-то признаку предметов.

***Определение* 1.2.** Предметы входящие в это множество называются его элементами.

Если мы хотим описать множество, то нужно просто описать предметы этого множества. Например, чтобы задать множество студентов необходимо задать просто студентов.

Есть конечные, счетные, несчетные и целый зоопарк множеств разных мощностей. Самое простое множество — $\varnothing$, множество ничего не содержащее — пустое.

***Определение* 1.3.** X подмножество $(\subseteq)$ $Y \Leftarrow \forall y \in Y : \ y \in X$.
$\varnothing$ и X — тривиальные, остальные — нетривиальные. все подмножества, кроме X — собственные.

1.2. Операции с множествами

Символ	**Определение**	**Словами**
$\cap$	$A \cap B = \dots$	Пересечение множества
$\cup$	$A \cup B = \dots$	Объединение множеств
$\setminus$	$A \setminus B =$ ...	Разность множеств
$\triangle$	$A \triangle B = \dots$	Симметрическая разность множеств

***Определение* 1.4.** Алгебраическая структура — множество, на котором ввели какую-то операцию.

Пример. Пусть заданы несколько множеств:

1. $\exists e : \ a \cdot e = a \, \forall a \in G$
2. $\forall a \in G \, \exists a^{-1} \in G : \ a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$
3. $\forall a, b, c : \ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
4. $\forall a, b \in G a \cdot b = b \cdot a$

То это абелева группа и это к алгебре.

А дискретная математика не имеет аксиом, то есть мало чего можно использовать из алгебры / матана.

Если задать какое-то надмножество X над A, то появится операция дополнения: $A' = X \setminus A$. Законы Де Моргана:

Теорема 1.1. $(A \cup B)' = A' \cap B'$

Теорема 1.2. $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Доказательство смотри в конспекте Омеля, тут мне лень это делать.

***Определение* 1.5.** Система иножеств — множество, элементами которого являются множества.

***Определение* 1.6.** Семейство множеств — упорядоченный набор неких множеств $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$. Причем множества в наборе могут повторяться.

***Определение* 1.7.** Некоторое покрытие множества X системой множеств — система множеств, объединение элементов которого равняется X.

***Определение* 1.8.** Разбиение множества X на блоки — система $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$, удовлетворяющая неким условиям:

1. $X = \bigcup_{i=1}^{k} X_i$
2. $\forall i : \ X_i \neq \varnothing$
3. $\forall i, j = 1..k : \ X_i \cap X_j = \varnothing$

***Определение* 1.9.** Пара элементов (x, y) — упорядоченный набор из двух элементов. То есть для $x \neq y$: $(x, y) \neq (y, x)$

***Определение* 1.10** (Декартово произведение)**.** $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$

можно ввести понятие «nки» — упорядоченный набор из n элементов. Поэтому можно ввести $A \times B \times C \times \ldots$ и A^2, A^n

***Определение* 1.11.** Отношение между множествами — некое подмножество декартого произведения этих множеств

Пусть ω — отношение между X и Y. Тогда их записывают $X\omega Y$, а отсутствие — $X \not\omega Y$.

***Определение* 1.12.** Отношение эквивалентности $(X, \sim)$:

1. $x \sim x \ \forall x \in X$
2. $x \sim, y \Rightarrow y \sim x \ \forall x, y \in X$
3. $x \sim y, y \sim z, \Rightarrow x \sim z \ \forall x, y, z \in X$

Пусть $\widetilde{x} = \{y \in X \mid y \sim x\}$.

Свойство. пусть $y \in \widetilde{x} \Rightarrow \widetilde{y} = \widetilde{x}$

Теорема 1.3. Разбиение на блоки задает классы эквивалентности.

- $X = \bigcup_{x \in X} \widetilde{x}$
- $\widetilde{x} \neq \varnothing$, т.к. хотя бы $x \in \widetilde{x}$.
- Рассмотрим $\widetilde{x}, \widetilde{y}$. Пусть $\exists z : \ z \in \widetilde{x} \cap \widetilde{y}$. Тогда $\left.\begin{array}{l} \widetilde{z} = \widetilde{x} \\ \widetilde{z} = \widetilde{y} \end{array}\right\} \Rightarrow \widetilde{x} = \widetilde{y}$

***Определение* 1.13.** Мультимножество — $(x; \varphi) : \ \varphi \to \mathbb{Z}_+$

Есть еще несколько базовых понятий: k-перестановки/сочетания из n элементов с/без повторений.

$|A \cup B| = |A| + |B|$, если $A \cap B = \varnothing$. Поэтому, если есть разбиение на блоки, то $X = X_1 \cup \ldots \cup X_k \Rightarrow |X| = |X_1| + \ldots + |X_k|$

$X = X_1 \times \ldots \times X_k$, тогда $|X| = |X_1| \cdot \ldots \cdot |X_k|$

$|A' \cap B'| = |(A \cup B)'| = |X| - |A \cup B| = |X| - |A| - |B| + |A \cap B|$

2. Комбинаторика

2.1. Сшки

Есть два способа записи цэшек: $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$. Обычно формулы в комбинаторике используются не для подсчетов, а для определения асимптотики/верней оценки и так далее. Например если взять $n = 100$, то уже проблема: $100!$ — довольно большое число. Но там еще и деление!!! Короче, может получиться небольшое число при больших числах в подсчетах.

Давайте забудем эту дурацкую формулу и будем использовать рекурренты: легко считать, пишется в миг. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n}{k-1}, \binom{0}{0} = 1$.

Доказательство. Пусть есть множество из n элементов. Разобьем все k-элементные подмножества на блоки: в одном все без последнего элемента, в другом все с последним.Тогда в первом блоке тогда есть $\binom{n-1}{k}$ элементов. В другом $\binom{n-1}{k-1}$ элементов. А значит $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ $\square$

Есть пара граничных случаев: $\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{k}(n < k) = 0$. После этого можно сделать треугольник Паскаля:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

Рассмотрим решетчатую плоскость (если вы это читаете это и здесь нет картиночки напишите `@doktorkrab`, чтобы я добавил картиночку). Какое здесь количество путей? Ну $An^k = A_{n-1}^k + A_{n-1}^{k-1}$. А это Сшки.

Теперь посмотрим на сумму на диагонали. Получаем гипотезу: $\sum m = 0^n \binom{m}{k} = \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \ldots + \binom{n-1}{k} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$.

Доказательство. По основному комбинаторному тождеству: $\binom{m+1}{k+1} = \binom{m}{k+1}\binom{m}{k} \Rightarrow \binom{m}{k} = \binom{m+1}{k+1} - \binom{m}{k+1}$. Тогда:

$$\sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} = \underbrace{\sum_{m=k}^{n} \binom{m+1}{k+1}}_{\binom{n+1}{k+1} + \sum_{m=k}^{n-1} \binom{m+1}{k+1}} - \underbrace{\sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k+1}}_{\sum_{m=k+1}^{n} \binom{m}{k+1}}.$$

Дальше, если, расписать сумму все получится.

Пусть хочу набрать $k + 1$-элементное подмножество из $n + 1$-элементного множества. Пусть мы выбрали последний элемент, тогда у нас есть $\binom{n}{k}$ способов, а если не выбрали, то $\binom{n}{k+1}$ способов. А по индукции $\binom{n}{k+1} = \binom{n-1}{k+1} + \binom{n-1}{k}$. И так далее. $\square$

Рассмотрим $\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot \binom{m}{k-i}$

Доказательство. Рассмотрим два множества: одно n-элементное ("мальчики"), другое m-элементное ("девушки"). Тогда пусть мы выбрали i мальчиков, тогда нам нужно выбрать $k - i$ девушек. $\square$

Мы здесь применили принцип `double counting`: если мы посчитали что-то двумя способами, то результаты равны.

2.2. Биномиальные коэффициенты

Подробности на втором курсе.

Рассмотрим бином Ньютона: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k}$

Доказательство. Раскроем скобки в левой части: $(x+y)(x+y)(x+y)\ldots$. Когда у нас x^k? Когда мы ровно в k скобках выбрали x. Сколько способов? Очевидно $\binom{n}{k}$. □

Частные случаи:

- $x = y = 1$. Тогда $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

  Рассмотрим множество $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Каждому числу можно сопоставить $0/1$ — берем/не берем. Тогда количество подмножеств — количество бинарных строчек длины n. Такой метод называется биективным: когда мы доказываем, что один объект является биекцией другого, то их количества равны.
- $x = 1, y = -1$. Тогда $0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$ — количества способов выбрать подмножество четных длин и нечетных длин равны.

2.3. Мультимножество

Хотим посчитать $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ — количество k-элементных подмультимножеств.

Пусть $X = [n]$. По принципу биекции найдем сначала $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ для X, а потом найти для произвольного множества.

Пусть есть множество A, заменим его на множество $\{i + A_i\}$. $\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \binom{n+k-1}{k}$

2.4. k-перестановки

***Определение* 2.1.** Упорядоченные набор из k элементов, где все элементы принадлежат множеству X.

Если мы считаем, что с повторениям, то ответ n^k, а если без то $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = (n)_k$. Перестановку можно записать как: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$. То есть i перешло в a_i. После этого можно композировать перестановки: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Заметим, что:

1. Существует нейтральный элемент — тождественная перестановка $e = \{1, 2, \ldots, n-1, n\}$
2. Существует обратный элемент: $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = e$
3. Ассоциативность: $\sigma \cdot (\tau \cdot \pi) = (\sigma \cdot \tau) \cdot \pi$

Значит перестановки с операцией композиции — группа. Носит название S_n. Есть теорема о том, что любая конечная группа представима как подгруппа S_n.

Рассмотрим $(n)_k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \binom{n}{k} \cdot k!$. Тогда $\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}$. Тогда можно заменить n на $q, q \in \mathbb{C}$. Тогда

$$\binom{q}{k} = \begin{cases} \frac{(q)_k}{k!} & k > 0 \\ 1 & k = 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}.$$

Пусть $(n)^k = n \cdot (n+1) \cdot \ldots \cdot (n+k-1)$. Тогда $\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \frac{(n)^k}{k!}$

2.5. Комбинаторика в схемах и мемах

Пусть есть n различных предметов. Нужно выбрать k предметов с различными ограничениям: с повторениями/без, упорядоченные/неупорядоченные.

	с повторениями	без повторений
упорядоченные	n^k	$(n)_k$
неупорядоченные	$\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$	$\binom{n}{k}$

Схема ящиков.

	$\forall$	$\leqslant 1$	1	$\geqslant 1$
ящики+предметы различимы	n^k	$(n)_k$	$1/n!$	$\widehat{S}(n,k)$
ящики различимы, а предметы — нет	$\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$	$\binom{n}{k}$	$1/0$	$\left(\!\binom{n}{k-n}\!\right)$
ящики не различимы, а предметы различимы				$S(n,k)$
ящики+предметы неразличимы				

Последнюю строчку мы не сможем заполнить на первом курсе, нужны производящие функции. Эта строчка решает множество задач, например, разложение числа на слагаемые.

Отображение $f : X \to Y$ — такое правило, что $\forall x \in X\ \exists! y \in Y : y = f(x)$. Количество k^n $(|X| = n, |Y| = k)$

***Определение* 2.2.** Отображение — тройка из $(x, y, \Gamma \subseteq X \times Y)$, причем каждый x_i встречается в Γ ровно один раз.

***Определение* 2.3.** Отображение называется иньективным, если $\forall x_1, x_2 \in X\ f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Их количество — $(k)_n$

***Определение* 2.4.** Отображение называется биективным, если $\forall y \in Y\ \exists! x \in X : y = f(x)$. Количество — $n!$.

***Определение* 2.5.** Отображение называется сурьективным, если $\forall y \in Y\ \exists x \in X : y = f(x)$.

Посчитаем количество сурьективных отображений. Пусть $\mathrm{Im}(f) = \{y \in Y \mid \exists x \in X : y = f(x)\}$. Тогда для любого отношения $f : X \to \mathrm{Im}(f)$ — сурьективно.

Пусть $|\mathrm{Im}(f)| = i$, а количество сурьективных отображений — $\widehat{S}(n,i)$. Тогда $\widehat{S}(n,i) \cdot \binom{k}{i}$ — количество суьективных подмножеств мощности k.

Тогда $k^n = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \widehat{S}(n,i)$

Пусть есть две числовые последовательности $f_0, f_1, \ldots, f_k, \ldots$ и $g_0, g_1, \ldots, g_k, \ldots$. Причем $g_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f_i$, тогда $f_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-1} \binom{k}{i} g_i$. Значит $\widehat{S}(n,k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-1} \binom{k}{i} \cdot i^n$

Рассмотрим отображение $\{\{x_1, x_2\}, \{x_3\}, \varnothing\}$. Получение разбиение на блоки. Предположим, что отображение сурьективно, значит получили разбиение k предметов n ящиков.

Предположим, что в первый ящик нужно положить a_1 предмет, во второй — a_2, и так далее. Тогда количество вариантов: $\sum \binom{n}{a_1}\binom{n-a_1}{a_2} \ldots$. Если взять $\sum_{a_i \geqslant 0, a_1 + \ldots + a_k = n} \binom{n}{a_1}\binom{n-a_1}{a_2} = k^n = \frac{n!}{a_1! a_2! \ldots a_k!}$. А если $\sum_{a_i > 0, a_1 + \ldots + a_k = n} \binom{n}{a_1}\binom{n-a_1}{a_2} = \widehat{S}(n,k)$

Хотим разбить на блоки вида a_1 предметов + a_2 предметов + a_3 предметов...Тогда заметим, что это $\sum_{a_i \geqslant 0, \sum a_i = n} \binom{n}{a_1}\binom{n-a_1}{a_2} \ldots \binom{n-a_1-a_{k-1}}{a_k}$. Заметим, что суммарно это k^n, а если строго больше нуля, то $\widehat{S}(n,k)$. Также можно раскрыть скобки и получить. $\frac{n!}{a_1! a_2! \ldots a_k!}$

Рассмотрим $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = P(n;k;n-k)$. Комбинаторно они равны через битовые строки.

Теперь посмотрим на $\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \frac{(n-1+k)!}{(n-1)!\cdot k!}$, через шары и перегородки.

Вернемся к k^n — все отображения, $\widehat{S}(n,k)$ — все сюръективные отображение, $S(n,k)$ — количество разбиений n-множества на k-подмножества. (Числа Стирлинга второго рода).

Заметим, что $S(n,k)\cdot k! = \widehat{S}(n,k)$, так как в S с крышечкой это про неупорядоченные. $S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}i^n$. $S(0,0) = 1$. $\forall S(n,0) = 0$. $S(n,k) = S(n-1,k-1) + k\cdot S(n-1,k)$. Доказываем так: либо удаляем x_n, либо пихаем x_n куда-то.

$$k^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{k}{i}\widehat{S}(n,i) = \sum_{i=0}^{n}\frac{k!}{i!(k-i!)}S(n,i).$$

Откуда:

$$x^n = \sum_{i=0}^{n}(x)_i\cdot S(n,i) \iff (x)_n = \sum_{i=0}^{n}x^i s(n,i)..$$

Где $s(n,i)$ — числа Стирлинга первого рода.

Решим задачу, где мы хотим разбить n различимых предметов в k различимых ящиков $B(n,k) = \sum_{i=0}^{k}S(n,i)$. Причем $B(n,n) = B_n$ — числа Белла. Количество способов разбить n-множество на блоки.

3. Вероятности

3.1. Дискретная вероятность

Вероятностное событие — событие в какой-то вероятностной математической модели. (Результат трудно предсказать)

Множество исходов $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ — состоит из элементарных исходов. В дискретной вероятности Ω конечно или счетно.

Событие A — подмножество Ω.

Рассмотрим какой-то набор событий, добавим туда $\varnothing, \Omega$. Получим алгебру. Тогда вероятность это отображение $P : \Omega \mapsto [0, 1]$, такое что $\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$. Тогда $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$.

1. $P(\varnothing) = 0, P(\Omega) = 1$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

***Определение* 3.1.** Назовем события A и B несовместными, если $A \cap B = \varnothing$.

Некоторым очень хочется дать определение вида $P_r(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$. Это не работает, если события не равновероятны.

Пусть есть два события на кубике: A — число > 3, B — четное число. $P_r(A) = \frac{1}{2}, P_r(B) = \frac{1}{2}$.

Теперь пусть есть инсайд: событие A произошло. Тогда $P_r(B \mid A) = \frac{2}{3}$. Тогда посмотрим на картинку и получим $P_r(B \mid A = \frac{|A \cap B|}{|A|})$. Но не забудем, про то, что мы смотрели на равновероятные события, тогда поделим на $|\Omega|$. Получим $P_r(B|A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P_r(A \cap B)}{P_r(A)}$.

Посмотрим на крайние случаи: $P_r(A|A) = 1$, $P_r(A|\Omega) = P_r(A)$, $P_r(B|A) = 1$, если $A \subseteq B$.

Тогда пусть $B_1 \cap B_2 = \varnothing$. Тогда $P_r((B_1 \cup B_2) \cap A) = P_r((B_1 \cap A) \cup (b_2 \cap A)) = P_r(B_1 \cap A) + P_r(B_2 \cap A)$. А $P_r(B_1 \cup B_2 \mid A) = P_r(B_1 \mid A) + P_r(B_2 \mid A)$.

Посмотрим на $P_r(B|\overline{A}) = \frac{1}{3}$. Докажем, что $P_r(B \mid A) \cdot P_r(A) + P_r(B \mid \overline{A}) \cdot P_2(\overline{A}) = 1$. Докажем формулу полной вероятности.

Доказательство. Пусть Ω разбита на блоки $\{A_1, \ldots, A_k\}$. Заметим, что $P_r(B) = P_r(B \cap \Omega) = P_r(B \cap (A_1 \cup \ldots \cup A_k)) = P_r((B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_k))$. Дальше заметим, что $\forall i, j : A_i \cap A_j = \varnothing$. Тогда получаем $P_r(B \cap A_1) + P_r(B \cap A_2) + \ldots + P_r(B \cap A_k)$. Применив формулу условной вероятности, получим формулу полной вероятности:

$$P_r(B) = P_r(B \mid A_1) \cdot P_r(A_1) + P_r(B \mid A_2) \cdot P_r(A_2) + \ldots + P_r(B|A_k) \cdot P_r(A_k).$$

□

Заметим, что $P_r(A \cap B) = P_r(B \mid A) \cdot P_r(A)$ и $P_r(B \cap A) = P_r(A \mid B) \cdot P_r(B) \Rightarrow P_r(A \mid B) = \frac{P_r(B|A) P_r(A)}{P_r(B)}$. Тогда, вспомнив формулу полной вероятности, получаем:

$$P_r(A_i \mid B) = \frac{P_r(B \mid A_i) \cdot P_r(A_i)}{\sum_{j=1}^{k} P_r(B \mid A_j) \cdot P_r(A_j)}.$$

Пусть у вас есть событие $P_r(B)$, причем $P_r(B) = P_r(B \mid A) = \frac{P_r(A \cap B)}{P_2(A)} P_r(A) \Rightarrow P_r(A \cap B) = P_r(A) \cdot P_r(B)$

***Определение* 3.2.** Два события называются независимыми, если вероятность их пересечения равна произведению вероятностей этих событий.

Схема Бернулли: есть n независимых испытаний, где есть два исхода: $p > 0$ и $q > 0$, $p+q = 1$. Все элементарных исходов можно записать в виде бинарной строки длины n. Тогда для какого-то ω $P_r(\omega) = p^k \cdot q^{n-k}, k = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Заметим, что $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1^n = 1$.

***Определение* 3.3.** Независимые в совокупности события — события $A_1, \ldots, A_k$, такие что $P_r(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) = P_r(A_1) \cdot P_r(A_2) \cdot \ldots \cdot P_r(A_k)$,

$\Omega_1 = \{\text{успех}, \text{неудача}\}$, $P_{r_1}(\omega) = \begin{cases} p & \text{успех} \\ q & \text{неуспех} \end{cases}$, $A_1 = \{\varnothing, \text{успех}, \text{неудача}, \Omega\}$. Тогда $\Omega = \Omega_1 \times \ldots \Omega_n$, $A = A_1 \times \ldots \times A_n$.

Тогда рассмотрим (Ω_1, A_1, P_{r_1}), (Ω_2, A_2, P_{r_2}). Тогда $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $A = A_1 \times A_2$. Тогда события $A_1 \times \Omega_2$, $\Omega_1 \times A_2$.

3.2. Случайная величина

***Определение* 3.4.** Случайная величина ξ — отображение $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$.

Иногда описание при помощи $\Omega, \mathbb{A}, \Pr$ даёт слишком точное, громоздкое описание. А мы хотим только суть: например сумму значений после броска двух кубиков.

Рассмотрим некую Ω: $|\Omega| = m, |X| = n$, где $X = \{x_i \mid x_i = \xi(\omega)\}$. Рассмотрим событие $A_k = \{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) = x_k\}$. Тогда $\Pr(A_k) = \sum_{\omega \in \Omega; \xi(\omega) = x_k} \Pr(\omega)$.

***Определение* 3.5.** $\{\Pr(A_1), \ldots, \Pr(A_n)\}$ — распределение вероятности случайной величины ξ. Причем $\sum_{k=1}^{n} \Pr(A_k) = 1$.

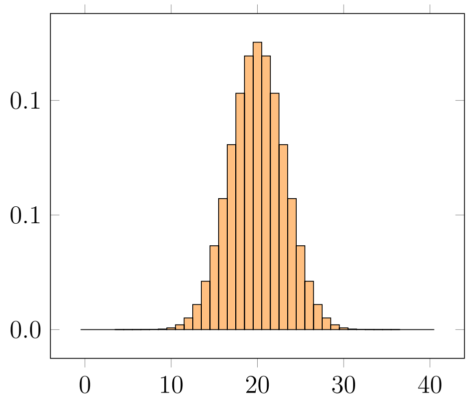
А теперь пусть B — множество всех подмножеств X, тогда можно перейти к пространству $(X, B, \Pr)$. Так мы получили более простой эксперимент.

3.3. Биномиальное распределение

Вспомним, что такое схема Бернулли: пусть есть монетка, которую кидаем n раз, орел выпадает с вероятностью p, решка с вероятностью q. Тогда $\omega = (0, 1, 1, 0, \ldots, 0)$, в общем случае $\omega = (a_1, a_2, \ldots, a_n), a_n \in \{0, 1\}$. $k \coloneqq \sum_{i=1}^{n} a_i$ — количество успехов в n испытаниях.

Нам кажется, что такое описание ω довольно сложно, нам хочется просто знать что-то про k. Тогда введем ξ: $\xi(\omega) = k$. Тогда $X = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, а $\Pr(\xi(\omega) = w) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

Тогда заметим, что $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1^n = 1$. Значит, у нас нормальная вероятность. Построим тогда график.



3.4. Геометрическое распределение

Нам интересен первый момент, когда у нас произошел фейл. Тогда пусть $\xi(\omega) = k$ — первый момент фейла. $\Pr(\xi(\omega) = k) = q^{k-1} \cdot p$. Тогда проверим нормировку: $\sum_{k=1}^{\infty} = p \cdot q^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \frac{p}{1-q} = \frac{p}{p} = 1$.

3.5. Гипергеометрическое распределение

У нас есть три переменных n, m, k. Число предметов первого и второго сорта. $\xi(\omega)$ — кол-во предметов 1-го сорта в выборке из k человек. $\Pr(\xi(\omega) = i) = \frac{\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}}{\binom{n+m}{k}}$

У нас могут начаться проблемы из-за того, что у нас может быть задано несколько величин. Пусть η — произведение при броске двух кубиков.

y	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16
$\Pr(B)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$										

***Определение* 3.6.** Если $\forall\omega : \Pr(\xi(\omega) = x \wedge \eta(\omega) = y) = \Pr(\xi(\omega) = x_k) \cdot \Pr(\eta(\omega) = k)$, то случайные величины независимы.

Посмотрим на $\xi(\omega) = x_i, \eta(\omega) = y_i$. Тогда пусть $\chi(\omega) = \eta(\omega) + \xi(\omega)$. Тогда $\Pr(\chi(\omega) = z) = \Pr(\chi(\omega) = x_i + y_i) = \sum_{k,j: x_k + y_j = z} \Pr(\xi(\omega) = x_k \wedge \eta(\omega) = y_k)$. Если величины независимы, то получим под суммой $\Pr(\xi(\omega)) \cdot \Pr(\eta(\omega))$

3.6. Численные характеристики

$\xi(\omega) \in X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. $\{p_1, p_n\}$ — распределение вероятности: $p_i = \Pr(\xi(\omega) = x_i)$. Посмотрим на среднее: $\frac{x_1 \cdot (p_1 N) + x_2 \cdot (p_2 N) + \ldots + x_n \cdot (p_n N)}{N} = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i =: E(\xi)$.

***Определение* 3.7.** $E(\xi)$ — мат. ожидание величины ξ.

***Определение* 3.8.** Медианой называется число m, такое что $\Pr(\xi(\omega) \geqslant m) \geqslant \frac{1}{2}$ и $\Pr(\xi(\omega) \leqslant m) \geqslant \frac{1}{2}$

Пример. Пусть в университете работает 100 человек, у 96 зарплата 20 тысяч рублей, у 4 — 2 миллиона. Тогда $E = 99200$ рублей. А медиана равна 20 тысячам. Поэтому медиану лучше использовать в неравномерных распределениях.

Помним, что $E(\xi) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot p_k = \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega) \cdot \Pr(\omega)$. Так как $p_k = \Pr(\xi(\omega) = x_k) = \sum_{\omega : \xi(\omega) = x_k} \Pr(\omega)$.

Утверждение 3.1. $E(c_1\xi_1 + c_2\xi_2) = c_1 E(\xi_1) + c_2 E(\xi_2)$.

Доказательство. $E(\xi_1 + \xi_2) = \sum_{\omega \in \Omega} (\xi_1 + \xi_2) \Pr(\omega) = \sum_{\omega} \xi_1 \Pr(\omega) + \sum_{\omega} \xi_2 \Pr(\omega) = E(\xi_1) + E(\xi_2)$ □

***Определение* 3.9.** Дисперсия $Var(\xi) = E(\xi - E(\xi))^2$

Посчитаем это: $= E(\xi^2 - 2E(\xi)\xi + E^2(\xi)) = E(\xi^2) - 2E(\xi)E(\xi) + E^2(\xi) = E(\xi^2) - E^2(\xi)$.

Заметим, что дисперсия не линейна: $Var(\xi_1 + \xi_2) = E((\xi_1 + \xi_2)^2) - E^2(\xi_1 + \xi_2) = \ldots = E(\xi_1^2) + 2E(\xi_1 \cdot \xi_2) + E(\xi^2) - E^2(\xi_1) - 2E(\xi_1)E(\xi_2) - E^2(\xi_2) = Var(\xi_1) + Var(\xi_2) + 2cor(\xi_1; \xi_2)$, где $cor(\xi_1, \xi_2) = E(\xi_1\xi_2) - E(\xi_1) \cdot E(\xi_2)$

Теорема 3.2 (Теорема Чебышева)**.** $E((\xi - \mu)^2 \geqslant \alpha) \leqslant \frac{Var(\xi)}{\alpha}$ $\forall\alpha > 0$, где $\mu \coloneqq E(\xi)$.

Следствие. $\sigma \coloneqq \sqrt{Var(\xi)}; Var(\xi) = \sigma^2 \Rightarrow \alpha = c^2\sigma^2$. Тогда $E(|\xi - \mu| \geqslant c\sigma) \leqslant \frac{1}{c^2}$.

4. Рекуррентные соотношения

4.1. Определение

***Определение* 4.1.** Пусть есть последовательность $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ и $a_{n+1} = F(a_0, a_1, \ldots)$. Тогда данная последовательность реккурентая.

Будем рассматривать последовательности, в которых n-ый считается от фиксированного количества предыдущих членов.

Пример. Разводим лягушек. Изначально есть 50 лягушек. Каждый год количество увеличивается в 4 раза, но сто лягушек едут во Францию (навсегда...). Тогда количество лягушек в i-ый год: $a_n = 4a_{n-1} - 100$.

Очень классно, но что с этим можно сделать? Все просто — есть проблема в скорости пересчета, поэтому хочется найти замкнутую форму (формулу).

Но не для всех можно придумать формулу, конечно, не всегда. Но такие последовательности от дьявола.

4.2. Линейные реккуренты

***Определение* 4.2.** Линейными реккурентным соотношениями будем называть реккуренты вида:

$$a_{n+m} = b_1(n) \cdot a_{n+m-1} + b_2(n)a_{n+m-2} + \ldots + u(n).$$

Где $b_i(n) = \text{const} = u(n)$.

***Определение* 4.3.** Соотношение однородное, если $u(n) = 0$.

Если соотношение однородное, то можно сказать $a_n = \lambda^n$! Что просто замечательно! $a_{n+2} = b_1 a_{n+1} + b_2 a_n$. Тогда $\lambda^{n+2} = b_1\lambda^{n+1} + b_2\lambda^n$.

Тогда получаем, $\lambda^2 = b_1\lambda + b_2$ — **характеристическое уравнение реккурентного соотношения**.

Пусть мы в решении мы нашли два неравных решения λ_1, λ_2. Тогда заметим, что их сумма подходит. А еще домножение каждого на константу работает.

То есть $a_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$, $\forall c_1, c_2$. Тогда нам можно выбрать просто a_0, a_1.

Заметим, что по a_0, a_1 можно найти c_1, c_2: $\begin{cases} a_0 = c_1\lambda_1^0 + c_2\lambda_2^0 = c_1 + c_2 \\ a_1 = c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 \end{cases}$. Откуда получаем, что $c_2 = \frac{a_1 - \lambda_1 a_0}{\lambda_2 - \lambda_1}$ и $c_1 = a_0 - c_2$.

Теперь разберем случай, когда $\lambda_1 = \lambda_2$. Тогда будем искать вид $a_n = c_1\lambda_1^n + c_2 \cdot n \cdot \lambda_1^n$.

Доказательство. Хотим доказать:

$$c_1 \cdot \lambda^{n+2} + c_2(n+2)\lambda^{n+2} = b_1c_1\lambda^{n+1} + c_2(n+1)\lambda^{n+1} + b_1c_1\lambda^n + c_2(n)\lambda^n..$$

Заметим, что достаточно доказывать, что $c_1 \ldots = c_1 \ldots$ и $c_2 \ldots = c_2 \ldots$. Тогда докажем, что штука $(n+2)\lambda_1^{n+2} = b_1(n+1)\lambda^{n+1} + b_2 n\lambda^n$:

$$n\lambda_1^n + 2\lambda^{n+2} = n\lambda_1^{n+1} + n\lambda_1^n + \lambda_1^{n+1}.$$

Заметим, что штуки с n решается понятно как (λ_1 — корень хар. уравнения). Тогда получили:

$$2\lambda_1^{n+2} = \lambda_1^{n+1} \iff 2\lambda_1^2 - \lambda_1 = 0.$$

Дальше решаем систему для a_0, a_1 и живем счастливо!. □

Пример Числа Фиббоначи.

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, F_n = \lambda^n.$$

$$\lambda^{n+1} = \lambda^n + \lambda^{n-1} \iff \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{cases} F_0 = c_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^0 + c_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^0 \\ F_0 = c_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^1 + c_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^1 \end{cases}.$$

Откуда получаем, что $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Пусть у нас больше двух членов в реккуренте. Заметим, что там техника будет ровно такая же. Только теперь получим $a_n = \sum c_i \lambda_i^n$. Но пусть у лямбды есть кратность, тогда будем искать: $a_n = c_1\lambda_1^n + c_2 n\lambda_1^n + c_2 n^2 \lambda_1^n + \ldots$. Соответственно, если кратность ds, то для лямбды будет $\sum c_i n^i \lambda^n$.

4.3. Неоднородные линейные реккуренты

Пусть есть $a_{n+1} = 4a_n - 100$. Тогда скажем, что на самом деле $a_{n+1} = ba_n + 4 = b(ba_{n-1} + 4) = b(b(ba_{n-2} + 4) + 4) + 4 = \ldots = b^{n+1}a_0 + (b^n + b^{n-1} + \ldots + b + 1) \cdot 4 = b^{n+1} \cdot a_0 + \frac{b^{n+1}-1}{b-1} \cdot 4$.

Теорема 4.1. $a_{n+m} = b_1 a_{n+m-1} + \ldots + b_m a_n + u(n)$. Если α_n — решение левого, а β_n — удовлетворяет тому же, но без $u(n)$. То $\alpha_n + c\beta_n$ будет удовлетворять реккуренте.

Доказательство. $\alpha_{n+m} + c\beta_{n+m} = b_1(\alpha_{n+m-1} + \beta_{n+m-1}) + \ldots + u(n)$. □

Пример. $a_{n+1} = 2a_n + 7$. $a_n = C$, тогда $c = -7$. $a_{n+1} = 2a_n \Rightarrow a_n = c2^n$. $a_0 = c \cdot 2^0 - 7 \Rightarrow C = a_0 + 7$

Пример. $a_{n+1} = 2a_n + (n+1)3^n$. Будем искать частное решение вида $(b_1 n + b_0)3^n$:

$$b_1(n+1)3^{n+1} + b_0 3^{n+1} = 2b_1 3^n + 2b_1 b_0 3^n + (n+1)3^n.$$

Сокращаем на 3^n:

$$3b_1 n + 3b_1 + 3b_0 = n + 2b_1 + b_0 + 1..$$

Что выполняется для любого n. Тогда $3b_1 = 1$ и $3b_1 + 3b_0 = 2b_1 + 2b_0 + 1$

Пример. $a_{n+1} = a_n + 1$. Заметим, что здесь $c = c + 1$ уже не подходит. А характеристическое уравнение: $a_{n+1} = a_n \Rightarrow \lambda = 1$.

Пример. $a_{n+2} = 7a_{n+1} + 11a_n + 7^n + (n+1)3^n$. Последние два слагаемые нельзя представить в виде $P(n)R^n$. Тогда можно отдельно решить без них, с первым с двумя. А дальше как обычно.

5. Графы

5.1. Определения

***Определение* 5.1.** Граф G — тройка (V, E, I):

1. V — конечное множество вершин.
2. E — конечное множество ребер.
3. $I\colon E \to \binom{V}{2}$.

***Определение* 5.2.** Концевые вершины ребра — вершины, которые соединены этим ребром.

***Определение* 5.3.** Если два ребра имеют одинаковые концевые вершины, то такие ребра — кратные (мультиребра).

***Определение* 5.4.** Если ребро соединяет вершину с собой, то это ребро — петля.

***Определение* 5.5.** Граф простой — без петель и мультиребер.

***Определение* 5.6.** Степень ребра (валентность) — количество ребер, исходящих из вершины.

Теорема 5.1. Сумма степеней вершин в графе равна удвоенному количеству ребер. То есть $\sum\limits_{v \in V(G)} \deg v = 2 \cdot |E|$

Доказательство. Каждое ребро состоит из двух полуребер. Из каждой вершины «торчит» $\deg v$ полуребер (принцип биекции). Тогда получили, что $\sum \deg v = 2|E|$ □

Следствие. Количество вершин нечетной степени в графе четно.

***Определение* 5.7.** Ребро e инцидентно вершине u, если u — концевая вершина ребра.

***Определение* 5.8.** Матрица инцидентности — таблица, где строчки соответствуют вершинам, а столбцы — рёбрам, а на пересечении столбца и строки стоит 0, если эта вершина не инцидентна этому ребру, иначе то, сколько раз она ему инцидентна (1, если не петля, иначе — 2).

Можно заметить, что сумма всех чисел в каждом столбце — два, а в каждой строке — степень вершины. Из этого несложно в очередной раз заметить, что суммма удвоенного количества рёбер есть сумма степеней вершин.

***Определение* 5.9.** Полный граф — полный простой граф на n вершинах. K_n. Граф, в котором каждая вершина соединена ребром с каждой.

***Определение* 5.10.** Дополнением графа G называется граф $\overline{G}$: $V(\overline{G}) = V(G)$, а $E(\overline{G}) = \binom{V(G)}{2} \setminus E(G)$

***Определение* 5.11.** Граф называется двудольным $V(G) = V_1 \cup V_2, V_1 \cap V_2 = \varnothing$. И все ребра ведут из V_1 в V_2.

***Определение* 5.12.** Полный двудольный граф — двудольный граф со всеми возможными ребрами. $K_{n,m}$, если в одной доле n вершин, а в другой m.

***Определение* 5.13.** Граф «k-мерный куб» — Q_k, такой граф, что V — множество бинарных строк длины k. $E : e = uv \iff u$ и v отличаются в одном бите.

Замечание. Заметим, что данный граф двудольный: одна доля с четной суммой битов, другая — с нечетной.

***Определение* 5.14.** P_n — граф «путь». Просто простой путь. Ничего лишнего.

***Определение* 5.15.** C_n — граф «цикл». Простой путь, замкнутый в кольцо.

***Определение* 5.16.** Регулярный граф — граф, в котором степень всех вершин равны. R-регулярный граф — граф, в котором степени всех вершин равны R.

***Определение* 5.17.** Орграф (ориентированный граф) $D = (V, E, I)$, где $I : E \to V \times V$.

Теорема 5.2. $\sum\limits_{v \in V(G)} \operatorname{indeg}(v) = \sum\limits_{v \in V(G)} = \operatorname{outdeg}(v) = |E(D)|$

Доказательство. Очев. Реально очев. Входящих концов у рёбер суммарно столько же, сколько и исходящих. □

***Определение* 5.18.** Не помню, было ли тут что-нибудь. Если вам кажется, что мы пропустили какое-то определение — напишите пж.

***Определение* 5.19.** Ориентацией графа G называется граф G полученный ориентацией всех ребер графа G.

***Определение* 5.20.** Граф называется турниром, если он является ориентацией полного графа.

***Определение* 5.21.** Две вершины называются смежными, если есть ребро между ними.

***Определение* 5.22.** Матрица смежности — матрица размера V на V. $A_{i,j}$ показывает сколько ребер идет из i в j.

***Определение* 5.23.** Список смежности — список списков, где для каждой вершины храним выходящие из нее ребра.

5.2. Маршруты, пути, циклы. Связные графы

***Определение* 5.24.** Маршрут (walk) — набор вершин и ребер вида: $v_0, e_0, v_1, e_1, \ldots$, где v_i — вершины графа, e_i — ребра графа, причем $e_i = v_{i-1}v_i$

***Определение* 5.25.** Путь (trail) — маршрут без повторяющихся ребер.

***Определение* 5.26.** Простой путь (path) — Путь (сложный) без повтора вершин.

***Определение* 5.27.** Вершины x и $y \in V$ называются связанными, если существует путь, соединяющий x, y.

Замечание. Заметим, что свзяность — отношение эквивалентности. $x \to x$ — очев, $x \to y = y \to x$. $x \to y, y \to z$, тогда $x \to z = x \to y \cup y \to z$.

Тогда можно разбить на блоки — компоненты связности.

***Определение* 5.28.** Расстояние $d(x, y)$ — длина кратчайшего пути из x в y.

***Определение* 5.29.** Диаметр графа — это расстояние между двумя наиболее удаленными точками.

***Определение* 5.30.** $x \in V(G)$ эксцентриситет $\varepsilon(x) = \max_{y \in V(G)} d(x, y)$

***Определение* 5.31.** Радиус G : $r(G) = \min_{x \in V(G)} \varepsilon(x)$

***Определение* 5.32.** Замкнутый путь — путь, которого стартовая вершина равна конечной.

***Определение* 5.33.** Обхват — минимальная длина цикла в графе. Если в графе циклов нет, то равен бесконечности.

***Определение* 5.34** (Теорема Кенига(Kőnig))**.** Граф двудольный $\iff$ в нем нет циклов нечетной длины.

Доказательство.

- $\Rightarrow$. Предположим, что есть цикл нечетной длины. Каждое ребро — переход в другую долю. То есть в стартовую долю мы переходим через четное число ходов. Противоречие.

- $\Leftarrow$, нет простых нечетных циклов $\Rightarrow$ двудольный.

  Будем, считать, что G — связный. Возьмем вершину x. Поместим все вершины на нечетном расстоянии в правую долю, все остальные в левую.

  Неправильное решение: Рассмотрим случаи двух смежных вершин на нечетном + нечетном и четном + четном расстоянии. Проблема: путь может быть сложным, поэтому объединение может давать не простой цикл.

  Правильное решение: пойти читать конспект Омеля, нам очень лень рисовать или писать словами. Поэтому очень жаль:((НО! если вы сильный, то можете написать)

□

Проверка на двудольность: для каждой вершины кидаем смежную вершину в другую долю.

***Определение* 5.35.** Пусть x, y — вершины орграфа D, то они называются связанными, если существует путь из x в y и существует путь из y в x.

Замечание. Такая связанность — отношение эквивалентности. Блоки — компоненты сильной связности.

***Определение* 5.36.** Компоненты слабой связности — компоненты связности, если забыть про ориентацию.

Лемма. Пусть H_1, H_2 — компоненты сильной связности. Если существует ребро $H_1 \to H_2$, то ребра $H_2 \to H_1$ не существует.

Доказательство. Предположим, что ребро существует. Тогда получили одну компоненту сильной связности. Противоречие. □

Лемма. Я пропустил лемму. Видимо про то, что из компонент сильной связности можно сделать граф без циклов.

Доказательство. По предыдущей лемме — очев. □

***Определение* 5.37.** Топологическая сортировка — запись вершин в таком порядке, что все ребра идут слева направо.

Утверждение 5.3. Любой ациклический граф может быть топологически отсортирован.

Доказательство. Омель так сказал. □

Замечание. В графе может быть несколько топологических сортировок.

Следствие. В ациклическом графе есть вершина, из которой не выходит ребро.

5.3. Подграфы. Основные операции над графами

***Определение* 5.38.** Граф H называется подграфом графа G, если

1. $V(H) \subseteq V(G)$
2. $E(H) \subseteq E(G)$
3. $I_H : E(H) \to V(H) \times V(H)$
   $I_G : E(G) \to V(G) \times V(G)$
   I_H — сужение I_G.

***Определение* 5.39.** Операция удаления ребра — $G \setminus e_5$ или $G - e_5$. Просто удаляем ребро. Получаем $(G', V, E \setminus e_5)$.

***Определение* 5.40.** Операция удаления вершины. Удаляем вершину + все смежные вершины. $(GmV \setminus \{v\}, E \setminus \bigcap_{u \rightsquigarrow v} vu)$

Утверждение 5.4. Любой подграф получается удалением ребер и вершин.

Доказательство. Удалим ребра $E \setminus E'$, удалим вершины $V \setminus V'$. □

***Определение* 5.41.** Если подграф H графа G можно получить удалением из G только ребер, то H — остовный подграф.

***Определение* 5.42.** Если подграф H графа G можно получить только удалением вершин, то H — порожденный или индуцированный подграф. $V(H)$ — порождающее множество.

***Определение* 5.43.** Операция стягивания ребра. Есть ребро (u, v) удалим, u, v и добавим вершину w, причем w смежна с x, если x смежна с v или x смежна с u.

***Определение* 5.44.** Мост — ребро, при удалении которого число компонент связности увеличивается.

***Определение* 5.45.** Вершина v называется точкой сочленения, если при удалении данной вершины компонента связности распадается на 2 и более.

Утверждение 5.5. Вершина v в связном графе G является точкой сочленения тогда, и только тогда, когда существуют вершины x и y, что любой путь из x в y проходит через v.

Доказательство. Пусть v — точка сочленения. Пусть существует путь из x в y, не проходящий через v. Тогда после удаления v, из x в y все еще будет путь $\Rightarrow$ они в одной компоненты связности.

В обратную сторону. Удалим v, тогда из x больше нет пути в y. Значит компонента разбилась хотя бы на две компоненты. □

Утверждение 5.6. Ребро e является мостом $\iff$ e не принадлежит ни одному циклу.

Доказательство. Положим противное. e лежит в цикле.

Тогда есть v, u, которые разъединились после удаления ребра e. Значит все пути из v в u проходили через e. Но! Если удалить ребро, то все равно можно будет ходить по циклу, а значит противоречие.

В обратную сторону. Пусть $e = xy$. Если e — не мост, то есть путь из x в y не через ребро. Значит в целом есть цикл, в котором есть e. Противоречие. □

***Определение* 5.46.** Объединение, пересечение графов. Соответственно объединяем/пересекаем множества вершин/ребер.

***Определение* 5.47.** Симметрическая разность графов H_1 и H_2: $H = H_1 \triangle H_2$

Пусть $V(H) = V(H_1) = V(H_2)$, а $E(H) = E(H_1) \triangle E(H_2)$

Замечание. $G_n \triangle \overline{G_n} = K_n$.

5.4. Деревья

***Определение* 5.48.** Дерево — связный граф без циклов.

***Определение* 5.49.** Лес — граф без циклов. Или множество деревьев.

***Определение* 5.50.** Лист — вершина степени 1.

Лемма. У любого дерева T с $\geqslant 2$ вершинами как минимум 2 листа.

Доказательство. Рассмотрим самый длинный простой путь $v_1, v_2, \ldots, v_k$.

Предположим v_1 и v_k — не листья. Тогда есть какое-то ребро из v_1. Тогда есть еще какое-то ребро из v_1. Если оно ведет в наш путь, то у нас есть цикл. А если не в наш цикл, то в путь можно добавить вершину. Противоречие с выбором пути. □

Теорема 5.7. В любом дереве T на n вершинах ровно $n - 1$ ребро.

Доказательство.

- База. $n = 1$: 0 ребер. $n = 2$: 1 ребро.
- Переход. $n \to n + 1$.
- Доказательство. Возьмем любой лист. Удалим его (вместе с его ребро). У нас останется n вершин, а для них ответ уже известен.

□

Теорема 5.8. Любой простой связный граф G с $n - 1$ ребром является деревом.

Доказательство. Пусть нет циклов. Получили определение дерева.

Пусть цикл есть. Тогда удалим ребро e на цикле. Граф остался связным. И так далее пока есть циклы.

Теперь у нас граф без циклов с $m-k$ ребер. Тогда у нас дерево с n вершинами $m-k$ ребрами. Значит изначально у нас не дерево (много ребер). □

***Определение* 5.51.** Остовное дерево — подграф, содержащий все вершины, являющийся деревом.

Следствие.

1. в любом связном графе G как минимум $n - 1$ ребро ($n = |V(G)|$).
2. В любом графе G существует остовное дерево.

Доказательство. ???? □

Deep-First Search

Тут просто пример, ничего интересного, смотрите у Омеля.

Утверждение 5.9. Связный граф является деревом $\iff$ все ребра — мосты.

Доказательство. Мосты $\Rightarrow$ дерево. Пусть есть цикл, тогда есть ребро в цикле. Противоречие.

Обратно. В дереве есть не мост. Удалили ребро, остался путь, значит был цикл. Противоречие. □

Утверждение 5.10. Граф G является деревом $\iff$ для любых двух вершин существует единственный путь.

Доказательство. Пусть существует два пути. Тогда они будут иметь хотя бы две общие точки. Значит есть цикл.

В обратную сторону очевидно. □

Следствие. T — остовное дерево графа G, $e \in E(G)$, $e \notin E(T)$. Тогда $T \cup \{e\}$ содержит единственный цикл и цикл проходит через e.

Доказательство. Очев. □

Утверждение 5.11. T и T' — различные остовное деревья графа G. Тогда $T\ e \cup e'$ — остовное дерево. (e не лежит в T')

Доказательство. Рассмотрим две компоненты связности после удаления e. Тогда есть ребро e' из одной компоненты связности, так как две компоненты в T' связаны. □

***Определение* 5.52.** Корневное дерево — дерево, в котором мы выбрали какую-то вершину (корень).

***Определение* 5.53.** Корневой лес — объединение корневых деревьев.