Математический анализ

Харитонцев-Беглов Сергей

27 марта 2022 г.

Содержание

1. Интегральное исчисление функции одной переменной

1.1. Первообразная и неопределенный интеграл

***Определение* 1.1.** $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$. Функция $F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — первообразная функции f, если $F'(x) = f(x) \forall x \in \langle a, b\rangle$

Теорема 1.1. Непрерывная на промежутке функция имеет первообразную.

Доказательство. Позже. □

Замечание. $\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 & \text{если } x > 0 \\ 0 & \text{если } x = 0 \\ -1 & \text{если } x < 0 \end{cases}$. Не имеет первообразной.

Доказательство. От противного: пусть нашлась $F\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ и $F'(x) = sign(x)$.

Тогда воспользуемся теоремой Дарбу для F на отрезке $[0; 1]$.

Пусть $k = \frac{1}{2} \in (\operatorname{sign}(0), \operatorname{sign}(1))$. Значит $\exists c \in (0, 1)\colon F'(c) = k = \frac{1}{2}$. Противоречие. □

Теорема 1.2. $f, F\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ и F — первообразная для f. Тогда:

1. $F + C$ — первообразная для f.
2. Если $\Phi\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — первообразная для f, то $\Phi = F + C$.

Доказательство.

1. $(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x)$
2. $(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow (\Phi - F)' \equiv 0 \implies \Phi - F$ — константа.

□

***Определение* 1.2.** Неопределённый интеграл — множество всех первообразных.

$\int f(x)\, dx = \{F\colon F$ — первообразная f$\}$. Но мы будем записывать $\int f(x)\, dx = F(x) + C$

Табличка интегралов.

1. $\int 0\, dx = C$.
2. $\int x^p\, dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C$, при $p \neq -1$.
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
4. $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$, при $a > 0, a \neq 1$.
5. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$.
6. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$.

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$.

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C$.

12. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln|\frac{1+x}{1-x}| + C$.

Доказательство. Для 3. Если $x > 0$ $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$. Если $x < 0$ $\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C$, то есть $(\ln(-x))' = (\frac{1}{-x})(-x)' = \frac{-1}{x}$.

Для 11. $(\ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}|)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2\pm1}}(x + \sqrt{x^2 \pm 1})' = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2\pm1}}}{x+\sqrt{x^2}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2pm1}+x}{\sqrt{x^2\pm1}}}{\sqrt{x^2\pm1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2\pm1}}$

Для 13. $(\frac{1}{2}(\ln|1+x| - \ln|1-x|))' = \frac{1}{2}(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}) = \frac{1}{1-x^2}$ $\square$

Замечание. $A + B \coloneqq \{a + b \colon a \in A, b \in B\}$, $cA \coloneqq \{ca \colon a \in A\}$.

$\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx = \{F + C\} + \{G + \widetilde{C}\} = \{F + G + C\}$.

Теорема 1.3 (Арифметические действия с неопределенными интегралами)**.** Пусть $f, g \colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ имеют первообразные. Тогда:

1. $f + g$ имеет первообразную и $\int(f+g)\,dx = \int f\,dx + \int g\,dx$

2. αf имеет первообразную и $\int \alpha f\,dx = \alpha \int f\,dx$

Доказательство. Пусть F и G первообразные для f и g.

1. Тогда $F + G$ — первообразная для $f + g$. Тогда $\int(f+g) = F + G + C = \int f + \int g$.

2. Тогда αF — первообразная для $\alpha f \implies \int \alpha F = \alpha F + C = \alpha(F + \frac{C}{\alpha}) = \alpha \int f$.

$\square$

Следствие Линейность неопрделенного интеграла. $f, g \colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ имеют первообразную $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $|\alpha| + |\beta| \neq 0$. Тогда $\int(\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$.

Доказательство. Прямое следствие из теоремы выше. $\square$

Теорема 1.4 (Теорема о замене переменной в непопределенном интеграле)**.** $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}, \varphi : \langle c, d\rangle \to \langle a, b\rangle$, f имеет первообразную F. φ дифференцируемая. Тогда $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C$.

Доказательство. Надо проверить, что $F(\varphi(t))$ — первообразная для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi(t)..$$

$\square$

Следствие. $\int f(\alpha x + \beta)\,dx = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x + \beta) + C$

Доказательство. $\int \alpha f(\alpha x + \beta dx) = F(\alpha x + \beta) + C$. И делим обе части на α. $\square$

Теорема 1.5 (Форумла интегрирования по частям). $f, g\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, дифференцируемые, $f'g$ имеет первообразную.

Тогда fg' имеет первообразную и $\int fg' = fg - \int f'g$

Доказательство. H — первообразная для $f'g$. Тогда $H' = f'g$.

Надо доказать, что $fg - H$ — первообразная для fg'.

$(fg - H)' = f'g + gh' - H' = f'g + fg' - f'g = fg'$. □

1.2. Определенный интеграл

Пусть $\mathcal{F}$ — совокупность (множество) ограниченных плоских фигур.

***Определение* 1.3.** Площадь: $\sigma\colon \mathcal{F} \to [0; +\infty)$, причём

1. $\sigma([a; b] \times [c, d]) = (b - a)(d - c)$
2. (Аддитивность). $\forall E_1, E_2 \in \mathcal{F}\colon E_1 \cap E_2 = \varnothing \Rightarrow \sigma(E_1 \cup E_2) = \sigma(E_1) + \sigma(E_2)$

Свойство Монотонность площади. $\forall E, \widetilde{E}\colon E \subset \widetilde{E} \Rightarrow \sigma(E) \leqslant \sigma(\widetilde{E})$.

Доказательство. $E = \widetilde{E} \cup (\widetilde{E} \setminus E) \Rightarrow \sigma(\widetilde{E}) = \sigma(E) + \sigma(\widetilde{E} \setminus E)$. □

***Определение* 1.4.** Псевдоплощадь: $\sigma\colon \mathcal{F} \to [0; +\infty]$, причём

1. $\sigma([a; b] \times [c, d]) = (b - a)(d - c)$,
2. $\forall E, \widetilde{E} \in \mathcal{F}\colon E \subset \widetilde{E} \Rightarrow \sigma(E) \leqslant \sigma(\widetilde{E})$,
3. Разобьем E вертикальной или горизонтальной прямой, в том числе теми прямыми, которые правее или левее E. Тогда $E = E_- \cup E_+, E_- \cap E_+ = \varnothing$ и $\sigma(E) = \sigma(E_-) + \sigma(E_+)$.

Свойства. 1. Подмножество вертикального или горизонтального отрезка имеет нулевую площадь.

2. В определении E_- и E_+ не важно куда относить точки из l.

   Доказательство. Заметим, что $\sigma(E_- \cup (E \cap l)) = \sigma(E_- \setminus l) + \underbrace{\sigma(E \cap l)}_{=0} \Rightarrow$ вообще не имеет разницы куда относить точки из l. □

Пример.

1. $\sigma_1(E) = \inf\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} |P_k|\colon P_k \text{ — прямоугольник}, \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k \supset E\right\}$.
2. $\sigma_2(E) = \inf\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} |P_k|\colon P_k \text{ — прямоугольник}, \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k \supset E\right\}$.

Упражнение.

1. Доказать, что $\forall E \;\; \sigma_1(E) \geqslant \sigma_2(E)$.
2. $E = ([0, 1] \cap \mathbb{Q}) \times ([0, 1] \cap \mathbb{Q})$. Доказать, что $\sigma_1(E) = 1, \sigma_2(E) = 0$.

Теорема 1.6.

1. σ_1 — квазиплощадь.

2. Если E' — сдвиг E, то $\sigma_1(E) = \sigma_1(E')$.

Доказательство.

2. E' — сдвиг E на вектор v. Пусть P_k — покрытие $E \iff P'_k$ — покрытие E'. Знаем, что площади прямоугольников не меняются при сдвиге, а значит: $\sigma_1(E) = \inf\{\sum\limits_{k=1}^{n} |P_k|\} = \inf\{\sum |P'_k|\} = \sigma_1(E')$.

1. $\Rightarrow$ монотонность. Пусть есть $E \subset \widetilde{E}$. Тогда возьмем покрытие P_k для $\widetilde{E}$. $E \subset \widetilde{E} \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k$.

   А теперь заметим, что σ_1 — inf, и любое покрытие для $\widetilde{E}$ является покрытием и для E, т.е. все суммы из $\sigma_1(\widetilde{E})$ есть в $\sigma_1(E)$, а значит $\sigma_1(E) \leqslant \sigma_1(\widetilde{E})$ как инфинум по более широкому множеству.

1'. Докажем теперь аддитивность.

   «$\leqslant$». $\sigma_1(E) = \sigma_1(E_-)+\sigma_1(E_+)$. Пусть P_k — покрытие E_-, Q_j — покрытие E_+. $\bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k \cup \bigcup\limits_{j=1}^{m} Q_j \supset E_- \cup E_+ = E$. А значит $\sigma_1(E) \leqslant \inf\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} |P_k| + \sum\limits_{j=1}^{n} |Q_j|\right\} = \inf\{\sum |P_k|\} + \inf\{\sum |Q_j|\} = \sigma_1(E_-) + \sigma(E_+)$. Заметим, Что переход с разделением инфинумов возможен, так как P и Q выбираются независимо.

   «$\geqslant$». Пусть P_k — покрытие E. Тогда можно пересечь прямой (покрытие и само E) и разбить P_k на P_k^- и P_k^+, а тогда: $|P_k| = |P_k^-| + |P_k^+|$, $\sum |P_k| = \sum |P_k^-| + \sum |P_k^+|$. $\sum |P_k^-| \geqslant \sigma_1(E_-), \sum |P_k^+| \geqslant \sigma_1(E^+) \Rightarrow \sum |P_k| \geqslant \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+)$ для любого покрытия P_k, а значит и $\sigma_1(E) \geqslant \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+)$

   Таким образом $\sigma_1(E) = \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+)$

1''. Проверим, что сама площадь прямоугольника не сломалась: $\sigma_1([a,b] \times [c,d]) = (b-a)(d-c)$. Заметим, что $\sigma_1(P) \leqslant |P|$, т.к. прямоугольник можно покрыть им самим.

   Тогда посмотрим на P_k. Проведем прямые содержащие все стороны прямоугольников из покрытия (и P). Заметим, что такими прямыми каждый прямоугольник разбивается на подпрямоугольники, сумма площадей которых равна площади исходного прямоугольника. Тогда заметим, что и площадь P это сумма «кусочков из нарезки» P, и некоторые части разбиения встречаются в P_k несколько раз. А значит выкинув все лишнее мы как раз получим $|P|$, а значит $\sigma_1(P) \geqslant |P|$. Таким образом $\sigma_1(P) = |P|$

$\square$

***Определение* 1.5.** Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Тогда $f_+, f_- : [a,b] \to [0; +\inf)$. Причем $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$, $f_- = \max\{-f(x), 0\}$. f_+ — положительная составляющая, а f_- — отрицательная составляющая.

Свойства. 1. $f = f_+ - f_-$.

2. $|f| = f_+ + f_-$

3. $f_+ = \frac{f+|f|}{2}$, $f_- = \frac{|f|-f}{2}$.

4. Если $f \in C([a,b])$, то $f_\pm \in C([a,b])$.

***Определение* 1.6.** Пусть $f\colon [a,b] \to [0;+\infty)$.

Тогда подграфик $P_f([a;b]) \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b], 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$. Подграфик может быть взят и от какого-то подотрезка области определения функции!

***Определение* 1.7.** Пусть $f \in C([a,b])$. Зафиксируем произвольную квазиплощадь σ. Тогда Определённый интеграл: $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^b f(x)dx = \sigma(P_{f_+}([a;b])) - \sigma(P_{f_-}([a;b]))$.

Определение корректно, поскольку, раз функция непрерывна, то и составляющие непрерывны на отрезке, значит ограничены, значит под σ ограниченные множества, на которых σ определена. А позже проверим, что результат не зависит и от выбора σ.

Свойства. 1. $\int\limits_a^a f = 0$.

2. $\int\limits_a^b c = c(b-a), c \geqslant 0$ (для отрицательных будет следовать из пунктов ниже)

   Доказательство. По графику очевидно :) □

3. $f \geqslant 0 \Rightarrow \int\limits_a^b = \sigma(P_f)$.

4. $\int\limits_a^b (-f) = -\int\limits_a^b f$.

   Доказательство. $(-f)_+ = \max\{-f,0\} = f_-$. $(-f)_- = \max\{f,0\} = f+$, откуда $\int_a^b(-f) = \sigma(P_{(-f)_+}) - \sigma(P_{(-f)_-}) = \sigma(P_{f_-}) - \sigma(P_{f_+}) = -\int_a^b f$ □

5. $f \geqslant 0 \wedge \int\limits_a^b = 0 \wedge a < b \Rightarrow f = 0$.

   Доказательство. От противного. $\exists c \in [a,b] : f(c) > 0$. Тогда, возьмем $\varepsilon \coloneqq \frac{f(c)}{2}, \delta$ из определения непрерывности в точке c. Если $x \in (c-\delta, c+\delta)$, то $f(x) \in (f(c)-\varepsilon, f(c)+\varepsilon) = (\frac{f(c)}{2}; \frac{3f(c)}{2}) \Rightarrow f(x) \geqslant \frac{f(c)}{2}$ при $x \in (c-\delta; c+\delta) \Rightarrow P_f \supset [c-\frac{\delta}{2}; c+\frac{\delta}{2}] \times [0; \frac{f(c)}{2}] \Rightarrow \int\limits_a^b f = \sigma(P_f) \geqslant \delta \cdot \frac{f(c)}{2} > 0$, противоречие. □

1.3. Свойства интеграла

Теорема 1.7 (Аддитивность интеграла)**.** Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $c \in [a,b]$.

Тогда $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$.

Доказательство. $\int\limits_a^b f = \sigma(P_{f_+}([a,b])) - \sigma(P_{f_-}([a,b]))$. Разделим наш $[a,b]$ и соответствующие множества вертикальной прямой $x = c$. Тогда $\sigma(P_{f_+}[a,b]) - \sigma(P_{f_-}[a,b]) = \sigma_{P_{f_+}[a,c]} + \sigma_{P_{f_+}[c,b]} - \sigma(P_{f_-}[a,c]) - \sigma(P_{f_-}[c,b]) = \int_a^c f + \int_c^b f$ □

Теорема 1.8 (Монотонность интеграла)**.** Пусть $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ и $\forall x \in [a,b]\colon f(x) \leqslant g(x)$.

Тогда $\int\limits_a^b f \leqslant \int\limits_a^b g$.

Доказательство. $f_+ = \max\{f, 0\} \leqslant \max\{g, 0\} = g_+ \Rightarrow P_{f_+} \subset P_{g_+} \Rightarrow \sigma(P_{f_+}) \leqslant \sigma(P_{g_+})$.

$f_- = \max\{-f, 0\} \geqslant \max\{-g, 0\} = g_- \Rightarrow P_{f_-} \supset P_{g_-} \Rightarrow \sigma(P_{f_-}) \geqslant \sigma(P_{g_-})$. □

Следствие. 1. $|\int\limits_a^b f| \leqslant \int\limits_a^b |f|$

2. $(b-a)\min\limits_{x\in[a,b]} f(x) \leqslant \int\limits_a^b f \leqslant (b-a)\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Доказательство. 1. $-|f| \leqslant f \leqslant |f| \Rightarrow \int\limits_a^b -|f| \leqslant \int\limits_a^b f \leqslant \int\limits_a^b |f| \Rightarrow |\int\limits_a^b f| \leqslant \int\limits_a^b |f|$

2. $m \coloneqq \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M \coloneqq \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. $m \leqslant f(x) \leqslant M \Rightarrow \int\limits_a^b m \leqslant \int\limits_a^b f \leqslant \int\limits_a^b M$.

□

Теорема 1.9 (Интегральная теорема о среднем)**.** Пусть $f \in C([a,b])$.

Тогда $\exists c \in (a,b)\colon \int\limits_a^b f = (b-a)f(c)$.

Доказательство. $m \coloneqq \min f = f(p), M \coloneqq \max f = f(q)$ (по теореме Вейерштрасса). Тогда $f(p) \leqslant \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f \leqslant f(q) \xRightarrow{\text{т. Б-К}} \exists c \in (p,q)$или $(q,p)\colon f(c) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f$. □

***Определение* 1.8.** $I_f \coloneqq \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f$ — среднее значение f на отрезке $[a,b]$.

***Определение* 1.9.** $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Интеграл с переменным верхним пределом $\Phi(x) \coloneqq \int\limits_a^x f$, где $x \in [a,b]$.

***Определение* 1.10.** $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Интеграл с переменным нижним пределом $\Psi(x) \coloneqq \int\limits_x^b f$, где $x \in [a,b]$.

Замечание. $\Phi(x) + \Psi(x) = \int\limits_a^b f$.

Теорема 1.10 (Теорема Барроу)**.** Пусть $f \in C([a,b])$. Тогда $\Phi'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$. То есть Φ — первообразная функции f.

Доказательство. Надо доказать, что $\lim\limits_{y\to x} \frac{\Phi(y)-\Phi(x)}{y-x} = f(x)$. Проверим для предела справа (слева аналогично, но, возможно, с чуть другим порядком точек).

Тогда $\Phi(y) - \Phi(x) = \int\limits_a^y f - \int\limits_a^x f = \int\limits_x^y f$.

Тогда $\frac{\Phi(y)-\Phi(x)}{y-x} = \frac{1}{y-x}\int\limits_x^y f = f(c)$ для некоторого $c \in (x,y)$ по интегральной теореме о среднем.

Проверяем определение по Гейне. Берем $y_n > x$ и $y_n \to x$. Тогда $\frac{\Phi(y_n)-\Phi(x)}{y_n-x} = f(c_n)$, где $c_n \in (x, y_n)$, $x < c_n < y_n \to x \Rightarrow c_n \to x \Rightarrow$ в силу непрерывности f $f(c_n) \to f(x)$. □

Следствие. $\Psi'(x) = -f(x) \quad \forall x \in [a,b]$.

Доказательство. $\Psi(x) = \int\limits_a^b f - \Phi(x) = C - \Phi(x) \Rightarrow \Psi' = (C - \Phi(x))' = -\Phi'(x) = -f(x)$. □

Теорема 1.11. Непрерывная на промежутке функция имеет первообразную.

Доказательство. $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$.

Возьмём $c \in (a,b)$ Рассмотрим $F(x) := \begin{cases} \int\limits_c^x f & \text{при } x \geqslant c \\ -\int\limits_x^c f & \text{при } x \leqslant c \end{cases}$.

Утверждаем, что $F(x)$ — первообразная $f(x)$. Если $x > c$, то $F'(x) = f(x)$. Если $x < c$, то $F'(x) = -(-f(x)) = f(x)$ Если $x = c$, то, так как производные слева и справа считаются правильно и равны, то и в этой точке производная есть $f(x)$. □

Теорема 1.12 (Формула Ньютона-Лейбница)**.** $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ и F – её первообразная. Тогда $\int\limits_a^b f = F(b) - F(a)$.

Доказательство. $\Phi(x) = \int\limits_a^x f$ — первообразная и $F(x) = \Phi(x) + C$ (знаем, что две первообразные отличаются на константу)

Тогда $F(b) - F(a) = (\Phi(b) + C) - (\Phi(a) + C) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int\limits_a^b f$ □

И ровно в этот момент мы поняли, что от выбора псевдоплощади не зависим, поскольку первообразные от них не зависят (отсылка к первому билету/началу конспекта про псевдоплощади)

Определение* 1.11*. $F \,|_a^b := F(b) - F(a)$

Теорема 1.13 (Линейность интеграла)**.** $\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$.

Доказательство. F, G — первообразные для f, g.

Тогда $\alpha F + \beta G$ — первообразная для $\alpha f + \beta g$. Тогда воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b \alpha f + \beta g = (\alpha F + \beta G)|_a^b = \alpha F(b) + \beta G(b) - \alpha F(a) - \beta G(a) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

□

Теорема 1.14 (Формула интегрирования по частям)**.** Пусть $f, g \in C^1[a,b]$.

Тогда $\int\limits_a^b fg' = fg \,|_a^b - \int\limits_a^b f'g$.

Доказательство. Докажем при помощи формулы Ньютона-Лейбница. Пусть H — первообразная $f'g$. Тогда $fg - H$ — первообразная для fg'.

Проверим данный факт: $(fg-H)' = f'g + fg' - f'g = fg'$. А значит нам можно воспользоваться формулой Ньютона-Лейбница.

$\int\limits_a^b fg' = (fg - H)\mid_a^b = fg\mid_a^b - H\mid_a^b = fg\mid_a^b - \int_a^b f'g.$ □

Замечание Соглашение. Если $a > b$, то $\int\limits_a^b f := -\int\limits_b^a f$.

Мотивация: Если F — первообразная, то $\int\limits_a^b f = F\mid_a^b$.

Теорема 1.15 (Формула замены переменной)**.** Пусть $f \in C[a,b]$, $\varphi\colon [c,d] \to [a,b]$, $\varphi \in C^1[c,d]$, $p, q \in [c,d]$.

Тогда $\int\limits_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int\limits_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)\mathrm{d}x$.

Доказательство. Пусть F — первообразная f. Тогда $\int\limits_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)\mathrm{d}x = F\mid_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} = F\circ\varphi\mid_p^q$. Заметим, что $F\circ\varphi$ — первообразная для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

Проверим это: $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

Тогда: $\int\limits_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)\mathrm{d}x = F\circ\varphi|_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} = \int\limits_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$ □

Пример.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2t}{1+\sin^4 t}\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Произведем замену $\varphi(t) = \sin^2 t$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $\varphi'(t) = 2\sin t\cos t = \sin 2t$, $\varphi(0) = 0, \varphi(\frac{\pi}{2}) = 1$:

$$(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi'(t)}{1+(\varphi(t))^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(\frac{\pi}{2})} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\mid_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

1.4. Приложения формулы интегрирования по частям

Пример. $W_n := \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\mathrm{d}t = (1)$ Докажем этот момент:

Положим $x = \frac{\pi}{2} - t =: \varphi(t)$, $\varphi'(t) = -1$, $\sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos t$.

Тогда $(1) = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\varphi(t)\cdot\varphi(t)\mathrm{d}t = -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x$

Частные случаи $W_0 = \frac{\pi}{2}$, $W_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x = -\cos\mid_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

Общее решение: $W_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x\cdot(\cos x)'\mathrm{d}x =$. Воспользовались тем, что $\sin x = -(\cos x)'$, $f'(x) = (n-1)\sin^{n-2} x\cdot\cos x$.

Тогда получаем:

$$W_n = -\left(\underbrace{\sin^{n-1}x\cdot\cos x\,|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(n-1)\sin^{n-2}x\,\underbrace{\cos^2 x}_{=1-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x\right) =$$

$$= (n-1)\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\mathrm{d}x - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x\right) = (n-1)(W_{n-2}-W_n).$$

Посчитаем для четных: $W_{2n} = \frac{2n-1}{2n}\cdot W_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}W_{2n-4} = \ldots = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}$, где $k!!$ — произведение натуральных чисел $\leqslant k$ той же четности, что и k .

Для нечетных: $W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}W_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}W_{2n-3} = \ldots = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}W_1 = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$

Теорема 1.16 (Формула Валлиса)**.**

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Доказательство. $\sin^n x \geqslant \sin^{n+1}x$ на $[0,\frac{\pi}{2}]$. Тогда $W_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x \geqslant \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}x\mathrm{d}x = W_{n+1}$.

Заметим, что $W_{2n+2}\leqslant W_{2n+1}\leqslant W_{2n} \iff \frac{\pi}{2}\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\leqslant\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\leqslant\frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$. Поделим на $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$:

$$\frac{\pi}{2}\frac{2n+1}{2n+2}\leqslant\frac{((2n)!!)^2}{(2n+1)((2n-1)!!)^2}\leqslant\frac{\pi}{2}\implies\lim\left(\frac{(2n)!!}{\sqrt{(2n+1)}(2n-1)!!}\right)^2 = \frac{\pi}{2}.$$

Последний переход — по двум милиционерам, т.к. при $n\to+\infty$ $\frac{2n+1}{2n+2}\to 1$ □

Следствие.

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}\sim\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Доказательство. Заметим, что $(2n)! = (2n)!!\cdot(2n-1)!!$, а $(2n)!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n) = 2^n\cdot n!$. Тогда подставим в Сшку:

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{\frac{(2n)!!}{2^n}\frac{(2n)!!}{2^n}} = 4^n\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

При этом из Валлиса, заметим, что $\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\sim\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2n+1}\sim\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2n} = \sqrt{\pi n}$. А значит все сойдется. □

Теорема 1.17 (Формула Тейлора (с остатком в интегральной форме))**.** Пусть $f\in C^{n+1}[a,b]$, $x,x_0\in[a,b]$. Тогда:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

Доказательство. Индукция по n:

- База. $n=0$, $f(x) = f(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x}f'(t)\mathrm{d}t = f(x_0) + f\,|_{x_0}^{x}$

- Переход. $n \to n+1$.
- Доказательство. $f(x) = T_n(x) + \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} \underbrace{(x-t)^n}_{g'} \underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{f} \mathrm{d}t$. Проинтегрируем интеграл по частям. $g(t) = -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}$.

  Подставим: $\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t = -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \cdot f^{(n+1)}(t)\ \Big|_{t=x_0}^{t=x} + \int_{x_0}^{x} \frac{1}{n+1}(x-t)^{n+1} \cdot f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t = \underbrace{\dfrac{1}{n+1}(x-x_0)^{n+1} f^{(n+1)}(x_0)}_{\text{новый член Тейлора!}} + \int_{x_0}^{x} \frac{1}{n+1}(x-t)^{n+1} \cdot f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t$

  Вспомнив, что у нас там ещё был $\frac{1}{n!}$ перед исходным интегралом заметим, что мы действительно получили новый член суммы и новый интеграл с $\frac{1}{(n+1)!}$, что доказывает индукционный переход.

$\square$

Пример.

$$H_j \coloneqq \frac{1}{j!}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^j \cos x \mathrm{d}x. \tag{2}$$

Свойство 1. $0 < H_j \leqslant \frac{1}{j!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2j} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \mathrm{d}x = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2j}}{j!}$.

Свойство 2. $\forall c > 0\colon c^j \cdot H_j \xrightarrow{j\to\infty} 0$. $0 < c^j H_j \leqslant \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2j} \cdot c^j}{j!} = \frac{\left(\frac{\pi^2}{4}c\right)^j}{j!} \to 0$.
Свойство 3. $H_0 = 1$, $H_1 = 2$ (*упражнение*).
Свойство 4. $H_j = (4j-2)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}$, при $j \geqslant 2$.

Доказательство.

$$j!H_j = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^j (\sin x)'\mathrm{d}x \tag{3}$$

Заметим, что $\left(\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^j\right)' = j\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^{j-1} \cdot (-2x)$. Тогда:

$$(3) = \underbrace{\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^j \sin x\ \Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}}}_{=0} + 2j\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^{j-1} x \underbrace{\sin x}_{=(-\cos x)'} \mathrm{d}x =$$

$$= 2j\left(\underbrace{\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^{j-1} \cdot x \cdot (-\cos x)\ \Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^{j-2} x^2 \cos x \mathrm{d}x\right)$$

$$= 2j\left((j-1)!H_{j-1} - 2(j-1)\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot (j-2)!H_{j-2} + 2(j-1)(j-1)!H_{j-1}\right).$$

Откуда с легкостью получаем $j!H_j = 2j!H_{j-1} - \pi^2 j!H_{j-2} + 4(j-1)j!H_{j-1} \iff H_j = (4j-2)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}$.
Свойство 5. Существует многочлен P_n с целыми коэффициентами степени $\leqslant n$, такой что $H_j = P_j(\pi^2)$.

Доказательство. $P_0 \equiv 1, P_1 \equiv 2, P_n(x) = (4n-2)P_{n-1}(x) - xP_{n-2}(x)$. □

□

Теорема 1.18 (Ламберта, доказательство: Эрмит)**.** Числа π и π^2 иррациональные.

Доказательство. От противного. Пусть π^2 — рационально. Тогда пусть $\pi^2 = \frac{m}{n}$. Тогда $H_j = P_j(\frac{m}{n}) = \frac{\text{целое число}}{n^j} > 0$.
$n^j H_j =$ целое число $> 0 \Rightarrow n^j H_j \xrightarrow{j \to +\inf} 0$, но $n^j H_j \geqslant 1$. □

Отступление. Равномерная непрерывность

***Определение* 1.12.** $f: E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна на E, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in E\colon |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

***Определение* 1.13.** f непрерывна во всех точках из E:
$\forall x \in E \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in E\colon |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Пример. $\sin x$ и $\cos x$ равномерно непрерывны на $\mathbb{R}$.

$|\sin x - \sin y| \leqslant |x-y| \Rightarrow \delta = \varepsilon$ подходит. $|\cos x - \cos y| \leqslant |x-y|$.

Пример. $f(x) = x^2$ не является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$. Рассмотрим $\varepsilon = 1$, никакое $\delta > 0$ не подходит. x и $x + \frac{\delta}{2}$. $f(x+\frac{\delta}{2}) - f(x) = (x+\frac{\delta}{2})^2 - x^2 = \ldots = \delta x + \frac{\delta^2}{4} > \delta x$. При $x = \frac{1}{\delta}$ противоречие.

Теорема 1.19 (Теорема Кантора)**.** Пусть $f \in C[a,b]$, тогда f равномерно непрерывна на $[a,b]$.

Доказательство. Берем $\varepsilon > 0$ и предположим, что $\delta = \frac{1}{n}$ не подходит, то есть $\exists x_n, y_n \in [a,b]\colon |x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ и по теореме Больцано-Вейерштрасса у последовательности x_n есть сходящаяся последовательность $x_{n_k} \to c$, то есть $\lim x_{n_k} = c \in [a,b]$.

$\underbrace{x_{n_k} - \dfrac{1}{n_k}}_{\to c} < y_{n_k} < \underbrace{x_{n_k} + \dfrac{1}{n_k}}_{\to c} \implies \lim y_{n_k} = c$. Но f непрерывна в точке $c \implies f(x_{n_k}) = f(c) = \lim f(y_{n_k}) \implies \lim(f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})) = 0$, но $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geqslant \varepsilon$. □

Замечание. Для интервала или полуинтервала неверно. $f(x) = \frac{1}{x}$ на $(0;1]$. Докажем, что нет равномерной непрерывностью на $(0;1]$.

Пусть $\varepsilon = 1$ и $\delta > 0$. Пусть $0 < x < \delta$, $y = \frac{x}{2}$, $|x-y| = \frac{x}{2} < \delta$. Тогда $f(y) - f(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} > 1$.

***Определение* 1.14.** Пусть $f\colon E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Тогда $\omega_f(\delta) \coloneqq \sup\{|f(x) - f(y)| \mid \forall x, y \in E, |x-y| \leqslant \delta\}$ — модуль непрерывности f.

Свойства.
1. $\omega_f(0) = 0$,
2. $|f(x) - f(y)| \leqslant \omega_f(|x-y|)$.
3. $\omega_f \uparrow$.
4. Если f — липшицева функция с константой L, то $\omega_f(\delta) \leqslant L\delta$.

   В частности, если $|f'(x)| \leqslant L \quad \forall x \in \langle a, b\rangle$.
5. f равномерно непрерывна на $E \iff \omega_f$ непрерывна в нуле $\iff \lim\limits_{\delta \to 0+} \omega_f(\delta) = 0$.

   Доказательство.
   - $1 \to 2$. $\forall \varepsilon > 0 \exists \gamma > 0 \forall x, y \in E\colon |x-y| < \gamma \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Возьмем $\delta < \gamma$. Тогда $|x-y| \leqslant \delta \implies |x-y| < \gamma \implies |f(x)-f(y)| < \varepsilon \implies \sup \leqslant \varepsilon$. Тогда с одной стороны $\omega_f \geqslant 0$, а с другой ограничена ε. Следовательно предел ω_f равен 0.
   - $2 \to 1$. Из $\lim\limits_{\delta \to 0+} \omega_f(\delta) = 0$. Возьмем $\delta > 0$ для $\omega_f(\delta) < \varepsilon$: $|f(x) - f(y)| \leqslant \omega_f(\delta) < \varepsilon$ $\forall \varepsilon$, $\forall x, y \in E\colon |x-y| \leqslant \delta$.

   □

6. $f \in C[a,b] \iff \omega_f$ непрерывен в нуле $\iff \lim \omega_f(\delta) = 0$.

Доказательство. Для функции на отрезке равномерная непрерывность $\iff$ непрерывность. $\square$

Продолжение главы 1

1.5. Интегральные суммы

***Определение* 1.15.** Пусть есть $[a,b]$. Тогда дробление (разбиение, пунктир) отрезка: набор точек: $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.

***Определение* 1.16.** Ранг дробления: $\max\limits_{k=1,2,\ldots,n}(x_k - x_{k-1}) =: |\tau|$, $\tau = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$

***Определение* 1.17.** Оснащение дробления — набор точек $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, такой что $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

***Определение* 1.18.** Интегральная сумма (сумма Римана) $S(f,\tau,\xi) :== \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$,

По факту просто сумма прямоугольников под графиком рисунок принял ислам очень жаль.

Теорема 1.20 (Теорема об интегральных суммах)**.** Пусть $f \in C[a,b]$,

тогда $|\int\limits_a^b -S(f,\tau,\xi)| \leqslant (b-a)\omega_f(|\tau|)$.

Доказательство.

$$\Delta := \int\limits_a^b f - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(\xi_k)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} (f(t) - f(\xi_k))\mathrm{d}t.$$

$$|\Delta| \leqslant \sum | \int \ldots | \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t) - f(\xi_k)|\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\omega_f(|\tau|) = (b-a)\omega_f(|\tau|).$$

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t) - f(\xi_k)|\mathrm{d}t \leqslant \int_{x_{k-1}}^{x_k} \omega_f(|\tau|)\mathrm{d}t = (x_k - x_{k-1})\omega_f(|\tau|)..$$

□

Следствие. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall$ дробления ранга $\leqslant \delta$ $\forall$ оснащения $|\int\limits_a^b -S(f,\tau,\xi)| < \varepsilon$

Следствие. Если τ_n последовательность дроблений, ранг которых $\to 0$, то $S(f,\tau_n,\xi_n) \to \int\limits_a^b f$.

Пример. $S_p(n) := 1^p + 2^p + \ldots + n^p$. Посчитаем $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_p(n)}{n^{p+1}}$.

Возьмем $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad f(t) = t^p$ $\frac{S_p(n)}{n^{p+1}} = \frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^p = S(f,\tau,\xi)$, где $x_k = \xi_k = \frac{k}{n}$.

Тогда $\lim \frac{S_p(n)}{n^{p+1}} = \int\limits_0^1 t^p\mathrm{d}t = \frac{t^{p+1}}{p+1} |_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{p+1}$

***Определение* 1.19.** Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, тогда f интегрируема по Риману, если $\exists I \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall$ дробление ранги $< \delta \forall$ его оснащение $|S(f, \tau, \xi) - I| < \varepsilon$.

I — интеграл по Риману $\int\limits_a^b f$.

Лемма. $f \in C^2[\alpha, \beta]$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t - \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}(\beta - \alpha) = -\frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f''(t)(t-\alpha)(\beta - t)\mathrm{d}t.$$

Доказательство. Пусть $\gamma \coloneqq \frac{\alpha+\beta}{2}$. Тогда:

$$\int\limits_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t = \int\limits_\alpha^\beta f(t)(t-\gamma)'\mathrm{d}t = f(t)(t-\gamma)\mid_{t=\alpha}^{t=\beta} - \int\limits_\alpha^\beta f'(t)(t-\gamma)\mathrm{d}t.$$

Заметим, что $f(t)(t-\gamma)\mid_{t=\alpha}^{t=\beta} = f(\beta)(\beta - \gamma) - f(\alpha)(\alpha - \gamma) = \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta - \alpha)$. Продолжим:

$$\text{левая часть} = -\int_\alpha^\beta f'(t)(t-\gamma)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f'(t)((t-\alpha)(\beta-t))'\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{2}f'(t)(t-\alpha)(\beta-t)\mid_{t=\alpha}^{t=\beta} - \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f''(t)(t-\alpha)(\beta-t)\mathrm{d}t.$$

Переход к $((t-\alpha)(\beta-t))'$:

$$((t-\alpha)(\beta-t))' = (-t^2 - (\alpha+\beta)t - \alpha\beta)' = -2t + (\alpha+\beta) = -2(t-\gamma).$$

□

Замечание. Бла-бла-бла.

Теорема 1.21 (Оценка погрешности в формуле трапеций)**.** Пусть $f \in C^2[a, b]$.

Тогда :

$$\left|\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1})\right| \leqslant \frac{|\tau|^2}{8}\int\limits_a^b |f''|$$

Доказательство. $\Delta \coloneqq \int\limits_a^b - \sum \ldots = \sum\limits_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} - \sum\limits_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1})$

$$|\Delta| \leqslant \sum_{k=1}^n |\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f\mathrm{d}t - \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1})| = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(t)(t - x_{k-1})(x_k - t)\mathrm{d}t\right|. \quad (4)$$

Тогда вспомним, что $(t - x_{k-1})(x_k - t) \leqslant \left(\frac{x_k - x_{k-1}}{2}\right)^2 \leqslant \frac{|\tau|^2}{4} \implies (4) \leqslant \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |f''(t)| \cdot \frac{|\tau|^2}{4}\mathrm{d}t = \frac{|\tau|^2}{8}\sum \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |f''| = \frac{|\tau|^2}{8} \cdot \int\limits_a^b |f''|$ □

Замечание. Пусть разбиение на n равных отрезков $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n} = |\tau|$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} = \frac{b-a}{n}(f\frac{x_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + \frac{f(x_n)}{2})..$$

Замечание. Возьмем разбиение на равные отрезки и $\xi_k = x_k$:

$$S(f, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$

Теорема 1.22 (формула Эйлера-Маклорена)**.** Пусть $f \in C^2[m, n]$, тогда

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \frac{f(m) + f(n)}{2} + \int_m^n f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_m^n f''(t)\{t\}(1 - \{t\})\mathrm{d}t.$$

Доказательство. Подставим $\alpha = k$ и $\beta = k + 1$ в лемму:

$$\int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t = \frac{f(k) + f(k+1)}{2} - \frac{1}{2}\int_k^{k+1} f''(t)(t - k)(k + 1 - t)\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{f(k) + f(k+1)}{2} - \frac{1}{2}\int_k^{k+1} f''(t)\{t\}(1 - \{t\})\mathrm{d}t.$$

Дальше суммируем по k от m до $n - 1$:

$$\int_m^n f(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=m}^{n-1} \frac{f(k) + f(k+1)}{2} - \frac{1}{2}\int_m^n f''(t)\{t\}(1 - \{t\})\mathrm{d}t.$$

Заметим, что $\sum\limits_{k=m}^{n-1} \frac{f(k)+f(k+1)}{2} = \frac{f(m)+f(n)}{2} + \sum_{k=m+1}^{n-1} f(k)$. И тогда:

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \frac{f(m) + f(n)}{2} + \int_m^n f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_m^n f''(t)\{t\}(1 - \{t\})\mathrm{d}t.$$

□

Пример. $S_p(n) = 1^p + 2^p + \ldots + n^p$, $f(t) = t^p$, $m = 1$, $f''(t) = p(p-1)t^{p-2}$.

$S_p(n) = \frac{1+n^p}{2} + \int\limits_1^n t^p\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int\limits_1^n p(p-1)t^{p-2}\{t\}(1 - \{t\})\mathrm{d}t$.

При $p \in (-1, 1)$ $\int_1^n t^p\mathrm{d}t = \frac{t^{p+1}}{p+1} |_1^n = \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1} = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \mathcal{O}(1)$.

$$\int_1^n t^{p-2} \underbrace{\{t\}(1 - \{t\})}_{\leqslant \frac{1}{4}} \mathrm{dt} \leqslant \frac{1}{4}\int_1^n t^{p-2}\mathrm{d}t = \frac{1}{4} \cdot \frac{t^{p-1}}{p-1} |_1^n = \frac{1}{4} \cdot \frac{n^{p-1} - 1}{p-1} = \mathcal{O}(1)..$$

То есть $S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \mathcal{O}(1)$.

При $p > 1$ $S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \mathcal{O}(n^{p-1})$.

Пример. $H_n \coloneqq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$. $m = 1, f(t) = \frac{1}{t}, f''(t) = \frac{2}{t^3}$.

$$H_n = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} + \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} + \frac{1}{2}\int_1^n \frac{2}{t^3}\{t\}(1 - \{t\})\mathrm{d}t$$

Откуда получаем ($a_n \coloneqq \int\limits_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^3}$):

$$H_n = \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + a_n.$$

Заметим, что $a_{n+1} = a_n + \int\limits_n^{n+1} \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^3}\mathrm{d}t > a_n$. То есть $a_n \uparrow$. Причем $a_b \leqslant \int\limits_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = -\frac{1}{2^2} \mid_1^n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} < \frac{1}{2}$.
А значит a_n имеет предел, а значит $a_n = a + o(1)$.
Вывод: $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$, где $\gamma \approx 0.5772156649$ — постоянная Эйлера.

Замечание. $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$.

Пример Формула Стирлинга. $m = 1, f(t) = \ln t, f''(t) = -\frac{1}{t^2}$.

$$\ln n! = \sum_{k=1}^n \ln k = \underbrace{\frac{\ln 1 + \ln n}{2}}_{=\frac{1}{2}\ln n} + \underbrace{\int_1^n \ln t \mathrm{d}t}_{=t\ln t - t|_1^n = n\ln n - n + 1} - \underbrace{\frac{1}{2}\int_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^2}\mathrm{d}t}_{\coloneqq b_n}.$$

Посмотрим на b_n:

$$b_n \leqslant \frac{1}{2}\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{1}{2}(-\frac{1}{t}) \mid_1^n = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n}) < \frac{1}{2} \implies b_n = b + o(1)..$$

А значит $\ln n! = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + (1-b) + o(1)$. $n! = n^n e^{-n}\sqrt{n}e^{1-b}e^{o(1)} \sim n^n e^{-n}\sqrt{n}C$.

Вспомним (из следствия формулы Валлиса): $\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$. А еще знаем, что $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2n}C}{(n^n e^{-n}\sqrt{n}C)^2} = \frac{4^n\sqrt{2}}{\sqrt{n}C}$.

Тогда получаем, что $\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \sim \frac{4^n\sqrt{2}}{\sqrt{n}C} \implies C \sim \frac{4^n\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{\pi n}}{4^n} = \sqrt{2\pi}$.

Итоговый результат:

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$
$$\ln n! = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln(2\pi n) + o(1).$$

Замечание. $\ln n! = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln(2\pi n) + \mathcal{O}(\frac{1}{n})$.

1.6. Несобственные интегралы

***Определение* 1.20.** Пусть $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ и $f \in C[a,b)$.

Тогда определим $\int\limits_a^{\to b} f \coloneqq \lim\limits_{B\to b-} \int\limits_a^B f$.

Если $-\infty \leqslant a < b < +\infty, f \in C(a,b]$, тогда $\int\limits_{\to a}^b f \coloneqq \lim\limits_{A\to a+} \int\limits_A^b f$.

Замечание. Если $b < +\infty$ и $f \in C[a,b]$, то определение не дает ничего нового:

$$\int_a^b f = \lim_{B\to b} f$$
$$\left|\int_a^b f - \int_a^B f\right| \leqslant M(b-B) \to 0.$$

Пример. 1. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \lim\limits_{y\to+\infty} \int\limits_a^y \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \lim\limits_{\substack{y\to+\infty \\ \text{при } p\neq 1}} -\frac{1}{(p-1)x^{p-1}} \Big|_{x=1}^{x=y} = \frac{1}{p-1} - \lim\limits_{y\to+\infty} \frac{1}{(p-1)y^{p-1}} = \frac{1}{p-1}$ при $p > 1$, при $p < 1$ получаем $+\infty$, а при $p = 1$ $\lim\limits_{y\to+\infty} \ln x \Big|_1^y = \lim\limits_{y\to+\infty} \ln y = +\infty$

2. $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \lim\limits_{y\to 0+} \int\limits_y^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \lim\limits_{y\to 0+} -\frac{1}{(p-1)x^{p-1}} \Big|_{x=y}^{x=1} = -\frac{1}{p-1} + \lim\limits_{y\to 0+} = \frac{y^{1-p}}{p-1} = \frac{1}{1-p}$ при $p < 1$, при $p > 1$ получаем $+\infty$, а вот при $p = 1$ $\lim\limits_{y\to 0+} \ln x \Big|_y^1 = \lim\limits_{y\to 0+} -\ln y = +\infty$.

То есть, при $p < 1$ $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \frac{1}{1-p}$,

при $p \geqslant 1$ $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = +\infty$.

Замечание. Если $f \in C[a,b)$ и F его первообразная, то $\int\limits_a^b f = \lim\limits_{B\to b-} F(B) - F(a)$.

Если $f \in C[a,b)$ и F его первообразная, то $\int\limits_a^b f = F(b) - \lim\limits_{A\to a+} F(A)$.

Доказательство. Очевидно по формуле Ньютона-Лейбница. $\square$

***Определение* 1.21.** $F \Big|_a^b := \lim\limits_{B\to b-} F(B) - F(a)$.

***Определение* 1.22.** $\int\limits_a^{\to b} f$ сходится, если $\lim B$ его определении существует и конечен.

Теорема 1.23 (Критерий Коши)**.** Пусть $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, $f \in C[a,b)$.

Тогда $\int\limits_a^b f$ сходится $\iff \forall\varepsilon\exists c \in (a,b)\colon \forall A, B \in (c,b)$ $\left|\int\limits_A^B f\right| < \varepsilon$.

Замечание. 1. Если $b = +\infty$ это означает, что $\forall\varepsilon\exists c > a \forall A, B > c\colon \left|\int\limits_A^B f\right| < \varepsilon$.

2. Если $b < +\infty$ это означает, что $\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \forall A, B \in (b-\delta; b)\colon \left|\int\limits_A^B f\right| < \varepsilon$.

Доказательство. Для $b < +\infty$.

- "$\Rightarrow$" $\int\limits_a^b f$ сходится $\implies \exists$ конечный $\lim\limits_{B\to b-} \int\limits_a^B f =: g(B)$.

  $\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \begin{array}{ll} \forall B \in (b-\delta, b) & |g(B) - I| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall A \in (b-\delta, b) & |g(A) - I| < \frac{\varepsilon}{2} \end{array} \implies |g(B) - g(A)| \leqslant |g(B) - I| + |I - g(A)| < \varepsilon$

- "$\Leftarrow$" $\int\limits_a^B f =: g(B)$.

  $\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \forall A, B \in (b-\delta, b) : |g(B) - g(A)| < \varepsilon$ это условие из критерия Коши для $\lim\limits_{B\to b-} g(B)$.

$\square$

Замечание. Если существует $A_n, B_n \in [a,b)\colon \lim A_n = \lim B_n = b\colon \int\limits_{A_n}^{B_n} f \not\to 0$, то $\int\limits_a^b f$ расходится.

Доказательство. Возьмем A_{n_k} и B_{n_k}: $|\int\limits_{A_{n_k}}^{B_{n_k}} f| \to C > 0 \implies |\int\limits_{A_{n_k}}^{B_{n_k}} f| > \frac{C}{2}$ при больших k. Но это противоречит критерию Коши. $\square$

Свойства несобственных интегралов.

1. Аддитивность. Пусть $f \in C[a,b)$, $c \in (a,b)$. Если $\int\limits_a^b f$ сходятся, то $\int\limits_a^b f$ сходятся и $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$.

2. Если $\int\limits_a^b f$ сходится, то $\lim\limits_{c \to b-} \int\limits_c^b f = 0$

3. Линейность $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $\int\limits_a^b f$ и $\int\limits_a^b g$ сходятся. Тогда $\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g)$ сходится и $\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$.

4. Монотонность. Пусть $\int\limits_a^b f$ и $\int\limits_a^b g$ существует в $\overline{R}$ и $f \leqslant g$ на $[a,b)$. Тогда $\int\limits_a^b f \leqslant \int\limits_a^b g$.

5. Интегрирование по частям. $f, g \in C^1[a;b) \implies \int\limits_a^b fg' = fg\,|_a^b - \int\limits_a^b f'g$.

6. Замена переменных. $\varphi\colon [\alpha,\beta) \to [a,b)$, $\varphi \in C^1[\alpha,\beta)$ и $\exists \lim\limits_{\gamma \to \beta-} \varphi(\gamma) =: \varphi(\beta-)$ и $f \in C[a,b)$.

   Тогда $\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f(x)\mathrm{d}x$. «Если существует один из $\int$, то существует второй и они равны»

Доказательство.

1. $\int\limits_a^b f = \lim\limits_{B \to b-} F(B) - F(a) \implies \lim_{B \to b-} F(B)$ существует и конечный $\implies \int\limits_c^b = \lim\limits_{B \to b-} F(b) - F(c)$ — сходится.

   $\int\limits_a^b = \lim F(B) - F(a) = \lim F(B) - F(c) + F(c) - F(a) = \int\limits_c^b f + \int_a^c f$.

2. $\int\limits_c^b f = \int\limits_a^b f - \int\limits_a^c f \to \int\limits_a^b f - \int\limits_a^b f = 0$

3. $\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g) = \lim\limits_{B \to b-} \int\limits_a^B (\alpha f + \beta g) = \lim\limits_{B \to b-} (\alpha \int\limits_a^B f + \beta \int\limits_a^B g) = \alpha \lim\limits_{B \to b-} \int\limits_a^B f + \beta \lim\limits_{B \to b-} \int\limits_a^B g = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$.

4. $\int\limits_a^B f \leqslant \int\limits_a^B g$ (монотонность интеграла), а дальше предельный переход.

5. $a < B < b$. $\int\limits_a^B fg' = fg\,|_a^B - \int_a^B f'g$ и переход к пределу.

6. $F(y) \coloneqq \int\limits_{\varphi(\alpha)}^y f(x)\mathrm{d}x$, $\Phi(\gamma) \coloneqq \int_\alpha^\gamma f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$. Знаем, что $F(\varphi(\gamma)) = \Phi(\gamma)$ при $\alpha < \gamma < \beta$.

Пусть существует правый $\int$, то есть $\exists \lim\limits_{y\to\varphi\beta-} F(y)$. Возьмем $\gamma_n \nearrow \beta \implies \varphi(\gamma_n) \to \varphi(\beta-) \implies \Phi(\gamma_n) = F(\varphi(\gamma_n)) \to \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f(x)\mathrm{d}x$. При этом $\Phi(\gamma_n) \to \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$.

Пусть существует левый $\int$, то есть $\exists \lim\limits_{\gamma\to\beta-} \Phi(\gamma)$. Докажем, что $\exists$ правый $\int$. При $\varphi(\beta-) < b$ нечего доказывать.

Пусть $\varphi(\beta-) = b$. Тогда возьмем $b_n \nearrow b$. Можно считать, что $b_n \in [\varphi(\alpha), b)$. Тогда $\exists \gamma_n \in [\alpha, \beta)\colon \varphi(\gamma_n) = b_n$. Докажем, что $\gamma_n \to \beta$. Пусть это не так. Тогда найдется $\gamma_{n_k} \to \widetilde{\beta} < \beta \implies \varphi(\gamma_{n_k}) \to \varphi(\widetilde{\beta}) < b$ по непрерывности в $\widetilde{\beta}$. Противоречие.

Итак, $\gamma_n \to \beta$, $F(b_n) = F(\varphi(\gamma_n)) = \Phi(\gamma_n) \to \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$.

$\square$

Замечание ко второму свойству.

1. Если $\int\limits_a^b f$ сходится, а $\int\limits_a^b g$ расхоидится, то $\int\limits_a^b (f+g)$ расходится. Доказательство от противного, путь интеграл сходится, то $g = (f+g) - f \implies \int\limits_a^b g$ сходится.
2. Если $\int\limits_a^b f$ и $\int\limits_a^b g$ расходятся, то $\int\limits_a^b (f+g)$ может сходиться. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ и $\int\limits_1^{+\infty} -\frac{\mathrm{d}x}{x}$ расходятся.

Замечание к шестому свойству. $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Сделаем замену $x = b - \frac{1}{t} = \varphi(t)$, $\varphi'(t) = \frac{1}{t^2}, \varphi(\alpha) = a, \alpha = \frac{1}{b-a}$.

Тогда $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f(b - \frac{1}{t})\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$.

***Определение* 1.23.** Пусть f непрерывен на (a, b) за исключением точек $c_1 < c_2 < \ldots < c_n$.

$\int\limits_a^b f$ сходится, если сходятся интегралы по все маленьким отрезкам (содержащих только одну выколотую точку).

Несобственные интегралы от неотрицательных функций

Теорема 1.24. Пусть $f \in C[a, b)$ и $f \geqslant 0$.

Тогда $\int\limits_a^b f$ сходится $\iff F(y) := \int\limits_a^y f$ ограничена сверху.

Доказательство. $f \geqslant 0 \implies F$ монотонно возрастает. $\int\limits_a^b f$ сходится $\iff \exists$ конечный $\lim\limits_{y\to b-} F(y) \iff F$ ограничена сверху. $\square$

Замечание. $f \in C[a; b), f \geqslant 0$. $\int\limits_a^b f$ расходящийся означает, что $\int\limits_a^b f = +\infty$.

Следствие Признак сравнения. $f, h \in C[a, b)$, $f, g \geqslant 0$ и $f \leqslant g$.

1. Если $\int\limits_a^b g$ сходится, то $\int\limits_a^b f$ сходится.

2. Если $\int\limits_a^b f$ расходится, то $\int\limits_a^b g$ расходится.

Доказательство. $F(y) \coloneqq \int\limits_a^y f$ и $G(y) \coloneqq \int\limits_a^y g$.

1. Пусть $\int\limits_a^b g$ сходящийся $\implies$ $G(y)$ ограничена, но $F(y) \leqslant G(y)$ $\implies$ $F(y)$ ограничена $\implies \int\limits_a^b f$ сходящаяся.

2. От противного.

$\square$

Замечание. 1. Неравенство $f \leqslant g$ нужно лишь для аргументов близких к b.

2. Неравенство $f \leqslant g$ можно заменить на $f = \mathcal{O}(g)$.

   $f = \mathcal{O}(g) \implies f \leqslant cg$. $\int\limits_a^b g$ сходящийся $\implies \int\limits_a^b cg$ сходящийся $\implies \int\limits_a^b f$ – сходящийся.

3. Если $f = \mathcal{O}(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}})$ для $\varepsilon > 0$, то $\int\limits_a^{+\infty} f$ — сходящийся.

   $g(x) = \frac{1}{x^{1+\varepsilon}}$ и можно считать, что $a \geqslant 1$ $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ — сходящийся.

Следствие. $f, g \in C[a, b)$, $f, g \geqslant 0$ и $f(x) \sim g(x), x \to b-$. Тогда $\int\limits_a^b f$ и $\int\limits_a^b g$ ведут себя одинаково (либо оба сходятся, либо оба расходятся).

Доказательство. $f \sim g \implies f = \varphi \cdot g$, где $\varphi(x) \xrightarrow{x \to b-} 1 \implies$ в окрестности b $\frac{1}{2} \leqslant \varphi \leqslant 2 \implies f \leqslant 2g \wedge g \leqslant 2f$ в окрестности $b \implies$ из сходимости интеграла g следует сходимость $f \wedge$ наоборот. $\square$

***Определение* 1.24.** $f \in C[a, b)$. $\int\limits_a^b f$ абсолютно сходится, если $\int\limits_a^b |f|$ сходится.

Теорема 1.25. $\int_a^b f$ сходится абсолютно $\int\limits_a^b f$ сходится.

Доказательство. $f = f_+ - f_-$, $|f| = f_+ + f_-$. $|f| \geqslant f_\pm \geqslant 0$. Если $\int\limits_a^b f$ сходится абсолютно $\implies \int\limits_a^b$ сходится $\int\limits_a^b f_\pm$ сходится $\implies \int\limits_a^b f = \int\limits_a^b f_+ - \int\limits_a^b f_-$ сходящийся. $\square$

Теорема 1.26 (Признак Дирихле)**.** $f, g \in C[a, +\infty)$. Если

1. f имеет ограниченную на $[a, +\infty]$ первообразную, то есть $\left|\int\limits_a^y f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant K \quad \forall y$.

2. g монотонна.

3. $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$

, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ сходится.

Доказательство. Только для случая $g \in C^1[a;+\infty)$.

Надо доказать, что $\exists$ конечный $\lim\limits_{y\to+\infty} \int\limits_a^y f(x)g(x)\mathrm{d}x$, $F(y) \coloneqq \int\limits_a^y f(x)\mathrm{d}x$.

$$\int\limits_a^y f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^y F'(x)g(x)\mathrm{d}x = F(x)g(x)\mid_a^y - \int_a^y F(x)g'(x)\mathrm{d}x = F(y)g(y) - \int_a^y F(x)g'(x)\mathrm{d}x$$

$\lim\limits_{y\to+\infty} F(y)g(y) = 0$ — произведение бесконечно малой и ограниченной функции.

$\int\limits_a^y F(x)g'(x)\mathrm{d}x$ имеет конечный lim, то есть $\int\limits_a^{+\infty} F(x)g'(x)\mathrm{d}x$ сходится.

Докажем, что он абсолютно сходится. $\int\limits_a^{+\infty} |F(x)||g'(x)|\mathrm{d}x$, $|F(x)||g'(x)| \leqslant K|g'(x)| = Kg'(x)$. $\int_a^{+\infty} g'(x)\mathrm{d}x = g\mid_a^{+\infty} = \lim\limits_{y\to+\infty} g(y) - g(a) = -g(a) \implies$ сходящийся. $\square$

Теорема 1.27 (Признае Абеля)**.** $f, g \in C[a, +\infty]$, Если

1. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)$dx сходится,

2. g монотонна,

3. g ограничена

Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ сходится.

Доказательство. $2) + 3) \implies \exists l \in \mathbb{R} \coloneqq \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

Пусть $\widetilde{g}(x) \coloneqq g(x) - l \implies \lim\limits_{x\to+\infty} \widetilde{g}(x) = 0$ и $\widetilde{g}$ монотонна.

Пусть $F(x) \coloneqq \int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t$. $1) \iff$ существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

Тогда f и $\widetilde{g}$ удовлетворяют условиям признака Дирихле $\implies \int\limits_a^{+\infty} f(x)\widetilde{g}(x)\mathrm{d}x$ — сходится. Тогда:

$$\int\limits_a^{+\infty} = \int\limits_a^{+\infty} f(\widetilde{g} + l) = \int\limits_a^{+\infty} f\widetilde{g} + l\int\limits_a^{+\infty} f.$$

Где $\int\limits_a^{+\infty} f\widetilde{g}$ сходится по доказанному, а $\int\limits_a^{+\infty} f$ — по условию. $\square$

Утверждение 1.28. f — периодическая функция с периодом T. Тогда $\int\limits_a^{a+T} f = \int\limits_b^{b+T} f$

Доказательство. Картинка:

Добавить картинку. Альтернатива: посмотреть доски Храброва/пнуть меня.

$$\int\limits_a^{a+kT} f = \int_{b-(k-1)T}^{a+T} f. \int\limits_{a+kT}^{b+T} f = \int\limits_{a+T}^{b-(k-1)T} f \qquad \square$$

Следствие. $f, g \in C[a; +\infty)$, f — периодическая с периодом T, g монотонная и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ расходится.

Тогда $\int\limits_a^{+\infty} fg$ сходится $\iff \int\limits_a^{a+T} f = 0$.

Доказательство. $\Leftarrow$. $F(x) = \int\limits_a^x f$ — периодична с периодом T: $F(x+T) = \int\limits_a^{x+T} f = \int\limits_a^x f + \int\limits_x^{x+T} f = F(x)$. F — непрерывна и периодична $\implies$ ограничена $\implies \int\limits_a^{+\infty} fg$ сходится по признаку Дирихле.

$\Rightarrow$. Пусть $\int\limits_a^{a+T} f =: K \neq 0$. $\widetilde{f}(x) =: f(x) - \frac{K}{T}$ — периодична с периодом T. Тогда $\int\limits_a^{a+T} \widetilde{f} = \int\limits_a^{a+T} (f - \frac{K}{T}) = K - T \cdot \frac{K}{T} = 0 \implies \int\limits_a^{+\infty} \widetilde{f}g$ сходится.

Тогда $\int\limits_a^{+\infty} fg = \int\limits_a^{+\infty} (\widetilde{f} + \frac{K}{T})g = \int\limits_a^{+\infty} \widetilde{f}g + \frac{K}{T}\int\limits_a^{+\infty} g \implies \int\limits_a^{+\infty} fg$ расходится как сумма сходящегося и расходящегося. $\square$

Пример. Рассмотрим $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$.

1. $p > 1$ интеграл сходится абсолютно: $|\sin x| \leqslant 1 \implies \left|\frac{\sin x}{x^p}\right| \leqslant \frac{1}{x^p}$, а значит $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ сходящийся.
2. $0 < p \leqslant 1$ интеграл сходящийся, но не абсолютно. $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ — расходится, $\frac{1}{x^p} \searrow 0$. $g(x) := \frac{1}{x^p}, f(x) = \sin x$. $\int\limits_0^{2\pi} \sin x\mathrm{d}x = 0 \implies \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$ сходящийся.

   Если взять $f(x) = |\sin x|$, то интеграл по периоду равен 4. Значит исходный интеграл расходится.
3. $p \leqslant 0$ интеграл расходится.

   $a_n := \frac{\pi}{6} + 2\pi n, b_n := \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$. Тогда $\int\limits_{a_n}^{b_n} \frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{a_n}^{b_n} \frac{\mathrm{d}x}{x^p} \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{a_n}^{b_n} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{\pi}{3}$.

2. Анализ в метрических пространствах

2.1. Метрические и нормированные пространства

***Определение* 2.1.** Метрика (расстояние) $\rho\colon X \times X \to [0; +\infty)$, если выполняются следующие условия:

1. $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$,
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
3. (неравенство треугольника) $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

***Определение* 2.2.** Метрическое пространство — пара (X, ρ).

Пример. Дискретная метрика (метрика Лентяя) $\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$

Пример. На $\mathbb{R}$: $\rho(x, y) = |x - y|$.

Пример. На $\mathbb{R}^d$: $\rho(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{d} (x_k - y_k)^2}$. Неравенство треугольника здесь — неравенство Минковского.

Пример. $C[a, b]$. $\rho(f, g) = \int\limits_a^b |f - g|$.

Неравенство треугольника:

$$\rho(f, h) = \int\limits_a^b |f - h| \leqslant \int_a^b (|f - g| + |g - h|) = \rho(f, g) + \rho(g, h)..$$

Пример. Манхэтеннская метрика: $\mathbb{R}^2$ $\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 + y_2|$.

Пример. Французская железнодорожная метрика. $\mathbb{R}^2$. Есть точка P (Париж), тогда $\rho(A, B) = AB$, если A, B, P на одной прямой, иначе $\rho(A, B) = |AP| + |PB|$.

***Определение* 2.3.** (X, ρ) — метрическое пространство. $B_r(x) \coloneqq \{y \in X \mid \rho(x, y) < r\}$ — открытый шар радиуса r с центром в точке x.

***Определение* 2.4.** (X, ρ) — метрическое пространство. $\overline{B}_r(x) \coloneqq \{y \in X \mid \rho(x, y) \leqslant r\}$ — закрытый шар радиуса r с центром в точке x.

Свойства. 1. $B_{r_1}(a) \cap B_(r_2)(a) = B_{\min\{r_1, r_2\}}(a)$.

2. $x \neq y \implies \exists r > 0\colon B_r(x) \cap B_r(y) = \varnothing \wedge \overline{B}_r(x) \cap \overline{B}_r(y) = \varnothing$.

Доказательство. 1. $x \in B_{r_1}(a) \cap B_{r_2}(a) \iff \begin{cases} \rho(x, a) < r_1 \\ \rho(x, a) < r_2 \end{cases} \iff \rho(x, a) < \min\{r_1, r_2\} \implies x \in B_{\min\{r_1, r_2\}}(a)$.

2. $r \coloneqq \frac{1}{3}\rho(x, y) > 0$. Пусть $\overline{B}_r(x) \cap \overline{B}_r(y) \neq \varnothing$.
   Тогда $\exists z \in \overline{B}_r(x) \cap \overline{B}_r(y) \implies \rho(x, z) \leqslant r \wedge \rho(y, z) \leqslant \rho \implies \rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y) \leqslant 2r = \frac{2}{3}\rho(x, y)$.

$\square$

Определение 2.5. $A \subset X$. A — открытое множество, если $\forall a \in A \exists B_r(a) \subset A$ $(r > 0)$.

Теорема 2.1 (О свойствах открытых множеств)**.**

1. $\varnothing, X$ — открытые.
2. Объединение любого числа открытых множеств — открытое.
3. Пересечение конечного числа открытых множеств — открытое.
4. $B_r(a)$ — открытое.

Доказательство.

2. A_α — открытые, $\alpha \in I$. $B =: \bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$. Берем $b \in B \implies b \in A_\beta$ для некоторого β. Но A_β — открытое $\implies \exists r > 0 \quad B_r(b) \subset A_\beta \subset B$.
3. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — открытые. $B \coloneqq \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$. Берем $b \in B \implies b \in A_k \forall k = 1, 2, \ldots, n$. Но A_k — открытое $\exists r_k > 0 B_{r_k} \subset A_k$. $\forall k \implies B_r(b) \subset \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k = B$.
   $r \coloneqq \min\{r_1, \ldots, r_n\} > 0 \implies B_r(b) \subset B_{r_k}(b) \subset A_k \quad \forall \implies B_r(b) \subset \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k = B$.
4. Картинка :($\rho(a, x) < R$, $r \coloneqq R = \rho(a, x) > 0$. Докажем, что $B_r(x) \subset B_R(a)$. Возьмем $y \in B_r(x)$, то есть $\rho(x, y) < r \implies \rho(y, a) \leqslant \rho(y, x) + \rho(x, a) < r + \rho(x, a) = R \implies y \in B_R(a)$.

$\square$

Замечание. Существенна конечность. $\mathbb{R}$. $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n}, 1) = [0, 1)$.

Определение 2.6. $A \subset X$, $a \in A$. a — внутренняя точка множества A, если $\exists r > 0 \colon B_r(a) \subset A$.

Замечание. A — открытое $\iff$ все его точки внутренние.

Определение 2.7. Внутренность множества $\operatorname{Int} a \coloneqq \{a \in A \mid a \text{ — внутренняя точка}\}$.

Пример. $A = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Тогда $\operatorname{Int} A = (0, 1)$.

Свойства внутренности.

1. $\operatorname{Int} A \subset A$.
2. $\operatorname{Int} A$ — $\bigcup$ всех открытых множеств, которые содержатся в A.
3. $\operatorname{Int} A$ — открытое множество.
4. A — открытое $\iff A = \operatorname{Int} A$.
5. Если $A \subset B$, то $\operatorname{Int} A \subset \operatorname{Int} B$.
6. $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$
7. $\operatorname{Int}(\operatorname{Int} A) = \operatorname{Int} A$.

Доказательство. $B \coloneqq \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha, A_\alpha \subset A$ открытые.

$B \subset \operatorname{Int} A$. Берем $b \in B \implies \exists \beta \in I \colon B \in A_\beta$ — открытое $\implies \exists r > 0 \colon B_r(b) \subset A_\beta \subset A \implies b$ — внутренняя точка $A \implies b \in \operatorname{Int} A$.

$\operatorname{Int} A \subset B$. Берем $b \in \operatorname{Int} A \implies \exists r > 0 B_r(b) \subset A$, но $B_r(b)$ — открытое множество $\implies$ оно участвует в объединении $\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha \implies B_r(b) \subset B \implies b \in B$.

Докажем пункт 4. $\Rightarrow$: пункт 3. $\Leftarrow$ всего его точки внутренние $\implies A = \operatorname{Int} A$. Пункт 6. $\subset$: $A \cap B \subset A, \subset B \implies \operatorname{Int}(A \cap B) \subset \operatorname{Int} A \wedge \operatorname{Int}(A \cap B) \subset \operatorname{Int} B$.

$\supset$. Пусть $x \in \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B \implies \begin{cases} \exists r_1 > 0 & B_{r_1}(x) \subset A \\ \exists r_2 > 0 & B_{r_2}(x) \subset B \end{cases} \implies$ если $r = \min\{r_1, r_2\} \implies B_r(x) \subset A \wedge B_r(x) \subset B \implies B_r(x) \subset A \cap B \implies x \in \operatorname{Int}(A \cap B)$.

Пункт 7. $B \coloneqq \operatorname{Int} A$ — открытое $\implies B = \int B$. □

***Определение* 2.8.** $A \subset X$. A — замкнутое, если $X \setminus A$ — открытое.

Теорема 2.2 (о свойствах замкнутых множеств)**.**

1. $\varnothing, X$ — замкнуты.
2. Пересечение любого числа замкнутых множеств — замкнуто.
3. Объединение конечного числа замкнутых множеств — замкнуто.
4. $\overline{B}_R(a)$ — замкнуто.

Доказательство.

2. A_α — замкнуты $\implies X \setminus A_\alpha$ — открытые $\implies \bigcup\limits_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha$ — открыто $\implies X \setminus \setminus \bigcup\limits_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ — замкнутое.

4. $X \in \overline{B}_r(a)$ — открытое. Берем $x \notin \overline{B}_R(a)$. Возьмем $r \coloneqq \rho(a, x) - R > 0$. Покажем, что $B_r(x) \subset x \setminus \overline{B_R}(a)$.

   От противного. Пусть $B_r(x) \cap \overline{B}_R(a) \neq \varnothing$. Берем $y \in B_r(x) \cap \overline{B}_R(a) \implies \rho(x, y) < r \wedge \rho(a, y) \leqslant R \implies \rho(a, x) \leqslant \rho(a, y) + \rho(y, x) < R + r = \rho(a, x)$. Противоречие.

□

Замечание. В 3 важна конечность. $\mathbb{R}$. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{n}, 1] = (0, 1]$ — не является замкнутой.

***Определение* 2.9.** Замыкание множества $\operatorname{Cl} A$ — пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A.

Теорема 2.3. $X \setminus \operatorname{Cl} A = \operatorname{Int}(X \setminus A)$ и $X \setminus \operatorname{Int} A = \operatorname{Cl}(X \setminus A)$.

Доказательство. $\operatorname{Int}(X \setminus A) = \bigcup B_\alpha$. B_α — открытые, $B_\alpha \subset X \setminus A \iff X \setminus B_\alpha$ — замкнутое. $X \setminus B_\alpha \supset A$.

$\bigcap (X \setminus B_\alpha) = \operatorname{Cl} A \implies X \setminus \bigcap (X \setminus B_\alpha) = X \setminus \operatorname{Cl} A \iff \bigcup (B_\alpha) = \operatorname{Int}(X \setminus A)$. □

Следствие. $\operatorname{Int} A = X \setminus Cl(x \setminus A)$ и $\operatorname{Cl} A = X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A)$.

Свойства.

1. $\operatorname{Cl} A \supset A$.
2. $\operatorname{Cl} A$ — замкнутое множество.
3. A — замкнуто $\iff A = \operatorname{Cl} A$.

Доказательство. $\Leftarrow$ — пункт 2. $\Rightarrow$ A — замкнутое $\Rightarrow$ оно участвует в пересечении из определения $\implies \operatorname{Cl} A \subset A \implies \operatorname{Cl} A = A$. □

4. $A \subset B \implies \operatorname{Cl} A \subset \operatorname{Cl} B$.

   Доказательство. $X \setminus A \supset X \setminus B \implies \operatorname{Int}(X \setminus A) \supset \operatorname{Int}(C \setminus B) \implies X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A) \subset X \setminus \int(X \setminus B)$ □

5. $\operatorname{Cl}(A \cup B) = \operatorname{Cl} A \cup B$.

6. $\operatorname{Cl}(\operatorname{Cl} A) = \operatorname{Cl} A$.

   Доказательство. $B \coloneqq \operatorname{Cl} A$ — замкнуто $\implies \operatorname{Cl} B = B$. □

Упражнение. $\operatorname{Cl}\operatorname{Int}\operatorname{Cl}\operatorname{Int}\ldots A$. Какое наибольшее количество различных множеств может получиться.

Теорема 2.4. $x \in \operatorname{Cl} A \iff \forall r > 0 \quad B_r(x) \cap A \neq \varnothing$.

Доказательство. $x \notin \operatorname{Cl} A \iff \exists r > 0 B_r(x) \cap A = \varnothing$. Что означает, что $x \notin A$? Это значит, что $x \in X \setminus \operatorname{Cl} A = \operatorname{Int}(X \setminus A) \iff x \in \operatorname{Int}(X \setminus A) \iff x$ — внутренняя точка $X \setminus A \iff \exists r > 0\colon B_r(x) \cap A = \varnothing \iff \exists r > 0\colon B_r(x) \subset X \setminus A$. □

Следствие. U — открытое, $U \cap A = \varnothing \implies U \cap \operatorname{Cl} A = \varnothing$.

Доказательство. Возьмем $x \in U \implies \exists r > 0 : B_r(x) \subset U \implies B_r(x) \cap A = \varnothing \implies x \notin \operatorname{Cl} A \implies U \cap \operatorname{Cl} A = \varnothing$. □

***Определение* 2.10.** Окрестностью точки x будем называть шар $B_r(x)$ для некоторого $r > 0$. Обозначать будем U_x

***Определение* 2.11.** Проколотой окрестностью точки x — $B_r(x) \setminus \{x\}$. $\dot{U}_x$.

***Определение* 2.12.** x — предельная точка множества A, если $\forall \dot{U}_x\colon \dot{U}_x \cap A \neq \varnothing$.

Обозначим через A' — множество предельных точек для A.

Свойства.

1. $\operatorname{Cl} A = A \cup A'$.

   Доказательство. $x \in \operatorname{Cl} A \iff \forall U_x \cap A \neq \varnothing \iff \left[\begin{array}{l} x \in A \\ \forall \dot{U}_x \cap A \neq \varnothing \iff x \in A' \end{array}\right.$ □

2. $A \subset B \implies A' \subset B'$. Очевидно.

3. A — замкнуто $\iff A \supset A'$.

   Доказательство. A — замкнуто $\iff = \operatorname{Cl} A \iff A = A \cup A' \iff A \supset A'$. □

4. $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

   Доказательство. Докажем "$\subset$". Возьмем $x \in (A \cup B)'\colon x \notin A' \implies \exists \dot{U}_x\colon \dot{U}_x \cap A = \varnothing$, но $\dot{U}_x \cap (A \cup B) \neq \varnothing \implies \dot{U}_x \cap B \neq \varnothing \implies x \in B'$.

   Докажем "$\supset$". $A \cup B \supset A \implies (A \cup B)' \supset A'$. Провернем тот же фокус для B, получим $(A \cup B)' \supset A' \cup B'$. □

Теорема 2.5. $x \in A' \iff \forall r > 0$ $B_r(x)$ содержит бесконечное количество точек из A.

Доказательство. Докажем "$\Leftarrow$". $B_r(x) \cap A$ содержит бесконечное количество точек $\implies \dot{B}_r(x) \cap A$ содержит бесконечное число точек $\implies \dot{B}_r(x) \cap A \neq \varnothing \Rightarrow x \in A'$.

"$\Rightarrow$". Возьмем радиус r. Тогда $\dot{B}_r(x) \cap A \neq \varnothing \implies \exists x_1 \in A : 0 < \rho(x, x_1) < r$. Возьмем $r = \rho(x, x_1)$ $\dot{B}_r(x) \cap A \neq \varnothing \implies \exists x_2 \in A \colon 0 < \rho(x, x_2) < \rho(x, x_1)$. Тогда можно взять $r = \rho(x, x_2)$, и так далее.

В итоге получили, что $r > \rho(x, x_1) > \rho(x, x_2) > \rho(x, x_3) > \ldots > 0 \implies$ все x_n различны. $\square$

Следствие. Конечно множество не имеет предельных точек.

Доказательство. Предположим конечная точка существует $\iff \exists r > 0 \colon B_r(x) \cap A$ содержит бесконечное количество точек. Но это невозможно, так как в A конечное число точек. $\square$

***Определение* 2.13.** (X, ρ) — метрическое пространство $Y \subset X$.

Тогда $(Y, \rho\mid_{Y \times Y})$ — подпространство метрического пространства (X, ρ).

Пример. $(\mathbb{R}, |x - y|)$. $Y = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

$B_1(1) = (0, 1], B_2(0) = [0, 1]$. $B_r^Y(a) = Y \cap B_r^X(a)$.

Теорема 2.6 (об открытых и замкнутых множества в пространстве и подпространстве)**.** (X, ρ) — метрическое пространство, (Y, ρ) — его подпространство, $A \subset Y$. Тогда

1. A — открыто в $Y \iff \exists G$ — открытое в $X \colon A = G \cap Y$.
2. A — замкнуто в $Y \iff \exists F$ — замкнутое в $X \colon A = F \cap Y$.

Доказательство.

1. "$\Rightarrow$" A — открыто в $Y \implies \forall x \in A \exists r_x > 0 \colon B_{r_x}^Y(x) \subset A \implies A = \bigcup\limits_{x \in A} B_{r_x}^Y(x)$.

   То есть наше множество будет объединением большего числа шариков (возможно бесконечного). Найдем теперь G: $G := \bigcup\limits_{x \in A} B_{r_x}^X(x)$ — открыто. Посмотрим теперь на $G \cap Y = \bigcup\limits_{x \in A} (B_{r_x}^X(x) \cap Y) = \bigcup\limits_{x \in A} B_{r_x}^Y(x) = A$.

   В обратную сторону. Пусть $A = G \cap Y$, где G открыто в X. Возьмем $x \in G \cap Y$. G — открыто в $X \implies \forall x \in G \cap Y \exists r > 0 \colon B_r^X(x) \subset G \implies B_r^X(x) \cap Y \subset G \cap Y = A \implies B_r^Y(x) \subset A \implies x$ — внутренняя точка $A \implies A$ — открыто в Y.

2. A — замкнуто в $Y \iff Y \setminus A$ — открыто в $Y \iff \exists G$ — открытое в X, такое что $Y \setminus A = Y \cap G \iff A = Y \setminus (Y \cap G) = Y \cap (X \setminus G) \iff \exists G$ — открытое в X, такое что $A = Y \cap (X \setminus G) \iff \exists F$ — замкнуто в X, такое что $A = Y \cap F$.

$\square$

Пример. $(\mathbb{R}, |x - y|)$. $Y = [0, 3)$. $[0, 1)$ — открыто в $[0, 3)$: $[0, 1) = [0, 3) \cap (-1, -1)$. $[2, 3)$ — замкнуто в $[0, 3)$: $[2, 3) = [0, 3) \cap [2, 3]$.

***Определение* 2.14.** X — векторное пространство над $\mathbb{R}$.

$||.|| \colon X \to \mathbb{R}$ — норма, если

1. $||x|| \geqslant 0 \quad \forall x \in X$ и $||x|| = 0 \iff x = \overrightarrow{0}$.

2. $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x|| \quad \forall x \in X \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

3. (неравенство треугольник)

Пример. 1. $|x| \in \mathbb{R}$,

2. $||x||_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_d|$ в $\mathbb{R}^d$.

3. $||x||_\infty = \max\limits_{k=1,2,\ldots,d} |x_k|$. $||x+y||_\infty = \max\{|x_k| + |y_k|\} \leqslant \max\{|x_k|\} + \max\{|y_k|\} = ||x||_\infty + ||y||_\infty$

4. $||x||_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$.

5. $||x||_p = \left(\sum\limits_{k=1}^{d} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ в $\mathbb{R}^d$ при $p \geqslant 1$. Неравенство треугольника — неравенство Минковского.

6. $C[a,b]$. $||f|| = \max\limits_{t \in [a,b]} |f(t)|$.

***Определение* 2.15.** X векторное пространство над $\mathbb{R}$. $\langle .,. \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ скалярное произведение, если

1. $\langle x, x \rangle \geqslant 0$ и $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = \overrightarrow{0}$.

2. $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

3. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.

4. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

Пример. 1. $\mathbb{R}^d$. $\langle x, y \rangle = \sum x_i y_i$.

2. Возьмем $w_1, \ldots, w_d > 0$. Тогда $\langle x, y \rangle = \sum w_i x_i y_i$.

3. $C[a,b]$. $\langle f, g \rangle = \int\limits_a^b f(x) g(x) \mathrm{d}x$.

Свойства. 1. Неравенство Коши-Буняковского. $\langle x, y \rangle^2 \leqslant \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$.

Доказательство. $f(t) \coloneqq \langle x + ty, x + ty \rangle \geqslant 0$. $f(t) = \langle x, x \rangle > +t\langle x, y \rangle + t\langle x, y \rangle + t^2 \langle y, y \rangle = t^2 \langle y, y \rangle + 2t \langle x, y \rangle + \langle x, y \rangle$ — квадратный трехчлен (если $\langle y, y \rangle = 0 \implies y = 0 \implies$ везде нули). Тогда $0 \geqslant D = (\langle x, y \rangle)^2 - 4 \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle = 4(\langle x, y \rangle^2 - \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle)$. Потому что иначе есть значения меньше нуля. □

2. $||x|| \coloneqq \sqrt{\langle x, x \rangle}$ — норма.

Доказательство. $||\lambda x|| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x, \rangle} = |\lambda| \cdot ||x||$.

Неравенство треугольника: $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$. Возведем в квадрат, получим $\langle x+y, x+y \rangle \leqslant \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2\sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle}$, но теперь вспомним, что $\langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2 \langle x, y \rangle$. А, сократив общие слагаемые, получим доказанное неравенство Коши-Буняковского. □

3. $\rho(x, y) = \|x - y\|$ — метрика.

Доказательство. $\rho(x, y) \geqslant 0$. $\rho(x, y) = 0 \iff \|x - y\| = 0 \iff x - y = \overrightarrow{0} \iff x = y$.

$\rho(y, x) = \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = |-1| \|x - y\| = \rho(x, y)$.

$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$: $\|(x - y) + (y - z)\| = \|x - z\| \leqslant \|x - y\| + \|y - z\|$. □

4. $\|x-y\| \geqslant |\|x\| - \|y\||$.

   Доказательство. Надо доказать, что $-\|x-y\| \leqslant \|x\| - \|y\| \leqslant \|x-y\|$.
   $\|(y-x)+x\| = \|y\| \leqslant \|x\| + \|x-y\| = \|x\| + \|y-x\|$. □

5. Упражненение. Если норма порождается скалярным произведением $\iff$ $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$. Тождество параллелограмма.

***Определение* 2.16.** (X, ρ) — метрическое пространство. $x_1, x_2, \ldots \in X, a \in X$.

$\lim x_n = a$, если

1. Вне любого открытого шара с центром в точке a содержится лишь конечное число членов последовательности.

2. $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geqslant N \quad \rho(x_n, a) < \varepsilon \iff x_n \in B_\varepsilon(a)$.

***Определение* 2.17.** $A \subset X$.

Тогда A — ограничено, если оно содержится в некотором шаре.

Свойства. 1. $a = \lim x \iff \rho(x_n, a) \to 0$.

   Доказательство. $\forall \varepsilon > 0 \exists n > N \quad |\rho(x_n, a)| < \varepsilon$ — предел равен 0. □

2. Предел единственный.

   Доказательство. Пусть $\exists a = \lim x_n = b$. Тогда мы, что $B_r(a) \cap B_r(b) = \varnothing \implies \exists N_1, N_2, \forall n \geqslant \max\{N_1, N_2\} x_n \in B_r(a) \land x_n \in B_r(b)$. □

3. Если $a = \lim x_n, a = \lim y_n$. То для перемешанной последовательности x_n и y_n предел такой же.

4. $a = \lim x_n \implies$ для последовательности, в которой x_n взяты с конечной кратностью, то a будет пределом.

5. Если $a = \lim x_n$, то $\lim x_{n_k} = a$.

6. Последовательность имеет предел $\implies$ она ограничена

   Доказательство. $\varepsilon = 1 \exists N \forall n \geqslant N \rho(x_n, a) < 1$. Тогда $R = \max\{\rho(x_1, a), \ldots, \rho(x_{N-1}, a)\} + 1 \implies x_n \in B_R(a)$. □

7. Если $a = \lim x_n$, то последовательность, полученная из $\{x_n\}$ перестановкой членов имеет тот же предел.

8. a — предельная точка $A \iff \exists a \neq \{x_n\} \in A \colon \lim x_n = a$.

   Более того, x_n можно выбирать так, что $\rho(x_n, a)$ строго убывает.

   Доказательство. "⇒" Пусть $\lim x_n = a$. Возьмем $B_r(a) \implies \exists N \forall n \geqslant N x_n \in B_r(a) \implies x_n \dot{B_r}(a) \implies \dot{B_r}(a) \cap A \neq \varnothing \implies$ a — предельная точка.

   "⇐" Берем $r_1 = 1$. $\dot{B}_{r_1}(a) \cap A \neq \varnothing$. Берем оттуда точку, называем $x_1 \neq a$. $r_2 = \frac{\rho(x_1, a)}{2}$. $\dot{B}_{r_2}(a) \cap A \neq \varnothing$. Берем оттуда точку $x_3 \neq a$. $r_3 = \frac{\rho(x_2, a)}{2}$. И так далее.

   Получили: $x_n \neq a$ и $\rho(x_n, a) < \frac{\rho(x_{n-1}, a)}{2} < \rho(x_{n-1}, a)$. $\rho(x_n, a) < \frac{1}{2^n} \to 0 \implies x_n = a$. □

Теорема 2.7 (об арифметических действиях с пределами)**.** X — нормированное пространство, $x_n, y_n \in X$, $\lambda_n \in \mathbb{R}$. $\lim x_n = a, \lim y_n = b, \lim \lambda_n = \mu$. Тогда:

1. $\lim(x_n + y_n) = a + b$.
2. $\lim(x_n - y_n) = a - b$.
3. $\lim \lambda_n x_n = \mu a$.
4. $\lim\|x_n\| = \|a\|$.
5. Если в X есть скалярное произведение, то $\lim\langle x_n, t_n\rangle = \langle a, b\rangle$.

Доказательство. 1. $\rho(x_n + y_n, a + b) = \|(x_n + y_n - (a + b))\| = \|(x_n - a) + (y_n - b)\| \leqslant \|x_n - a\| + \|y_n - n\| = \rho(x_n, a) + \rho(y_n, b) \to 0$.

2. Аналогично.
3. $\rho(\lambda_n x_n, \mu a) = \|\lambda_n x_n - \mu a\| = \|\lambda_n x_n - \lambda_n a + \lambda_n a - \mu a\| \leqslant \|\lambda_n x_n - \lambda_n a\| + \|\lambda_n a - \mu a\| = |\lambda_n|\|x_n - a\| + |\lambda_n - \mu|\|a\| \to 0$, так как $|\lambda_n|$ — ограниченная, $\|x_n - a\| = \rho(x_n - a) \to 0$, $|\lambda_n - \mu| \to 0$, $\|a\|$ — константа.
4. $|\|x_n\| - \|a\|| \leqslant \|x_n - a\| = \rho(x_n, a) \to 0 \implies \lim\|x_n\| = \|a\|$
5. $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) = \frac{1}{4}(\langle x + y, x + y\rangle - \langle x - y, x - y\rangle)$. Тогда получаем $4\langle x_n, y_n\rangle = \|x_n + y_n\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 \to \|a + b\|^2 - \|a - b\|^2 = 4\langle a, b\rangle$.

□

***Определение* 2.18.** $\mathbb{R}^d$ — пространство с нормой $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_d^2}$.

***Определение* 2.19.** Покоординатная сходимость в R^d:
$x_n \in \mathbb{R}^d$. $x_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(d)}) \xrightarrow{\text{покоординатно}} a = (a^{(1)}, a^{()2}, \ldots)$.

Теорема 2.8. в $\mathbb{R}^d$ сходимость по метрике и покоординатная сходимость совпадает.

Доказательство. Метрика $\implies$ покоординатная. $\rho(x_n, a) \to 0 \implies 0 \leqslant (x_n^{(1)} - a^{(1)})^2 + \ldots + (x_n^{(d)} - a^{(d)}) = \rho(x_n, a)^2 \to 0 \implies \lim(x_n^{(k)} - a^{(k)})^2 = 0 \implies \lim x_n^{(k)} = a^{(k)} \implies$ покоординатная сходимость.

Покоординатная $\implies$ метрика. Пусть $|x_n^{(k)} - a^{(k)}| \to 0 \quad \forall k \implies (x_n^{(k)} - a^{(k)})^2 \to 0 \implies \sum\limits_{k=1}^{d}(x_n^{(k)} - a^{(k)})^2 \to 0$. А так как $(\ldots)^2 = \rho(x_n, a)^2 \implies \rho(x_n, a) \to 0$. □

***Определение* 2.20.** $x_n \in X$ — фундаментальная последовательность, если

$$\forall\varepsilon > 0 \exists N \forall m, n \geqslant N \colon \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Свойства. 1. Сходящаяся последовательность фундаментальна.

2. Фундаментальная последовательность ограничена.
3. Если у последовательности есть сходящаяся подпоследовательность, то последовательность имеет предел.

Доказательство. Упражнение! Утверждается, что так же, как и в пределах. □

***Определение* 2.21.** (x,ρ) — метрическое пространство — полное, если любая фундаментальная последовательность имеет предел.

Пример. $\mathbb{R}$:, $\rho(x,y)=|x-y|$ — полное.

Упражнение. (X,ρ) — полное метрическое пространство $X\supset Y$ замкнуто. Доказать, что (Y,ρ) — полное.

Упражнение. $(0,1)$ не полное. $x_n=\frac{1}{n}$ — фундаментальная, но $\lim\frac{1}{n}=0\notin(0;1)$.

Теорема 2.9. $\mathbb{R}^d$ — полное.

Доказательство. Пусть x_n — фундаментальная, то есть

$$\forall\varepsilon>0\exists N\forall m,n\geqslant N\colon \rho(x_n,x_m)=\sqrt{(x_n^{(1)}-x_m^{(1)})^2+\ldots+(x_n^{(d)}-x_m^{(d)})^2}<\varepsilon.$$

Но мы знаем, что $\rho(x_n,x_m)\geqslant|x_n^{(k)}-x_m^{(k)}|$. Тогда заметим, что $x_n^{(k)}$ — фундаментальная $\implies$ $\exists a^{(k)}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n^{(k)}$. Значит и x_n сходится к a покоординатно $\implies$ $\rho(x_n,a)\to0$ $\implies$ x_n сходится к a по метрике. □

2.2. Компактность

***Определение* 2.22.** $A, U_\alpha, \alpha\in I$.

Множества U_α — покрытие множества A, если $A\subset\bigcup\limits_{\alpha\in I}U_\alpha$.

***Определение* 2.23.** Открытое покрытие — покрытие открытыми множествами.

***Определение* 2.24.** (X,ρ) — метрическое пространство, $K\subset X$.

K — компакт, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

***Определение* 2.25.** То есть для любого покрытия можно выбрать $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in I: K\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}U_{\alpha_i})$

Теорема 2.10 (Теорема о свойствах компактных множеств)**.**

1. $K\subset Y\subset X$. Тогда K — компакт в (X,ρ) $\iff$ K — компакт в (Y,ρ).
2. K — компакт $\implies$ K замкнуто и ограничено.
3. Замкнутое подмножество компакта — компакта.

Доказательство.

1. $\Leftarrow$. Пусть G_α покрытие K множествами в X. Тогда $U_\alpha=G_\alpha\cap Y$ — открытыми в Y и $K\subset\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha=\bigcup_{\alpha\in I}=G_\alpha\cap Y=(\bigcup_{\alpha\in I}G_\alpha)\cap Y$.

   U_α — открытое покрытие в (U,ρ) $\implies$ можно выделить конечное подпокрытие $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, такое что $K\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}U_{\alpha_i}\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}G_{\alpha_i}$ — конечное подпокрытие G_α $\implies$ K компакт в (X,ρ).

   $\Rightarrow$. Воспользуемся тем же наблюдением: $U_\alpha=G_\alpha\cap Y$. Следовательно можно выбрать $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ в X и они же подойдут и в Y.

2. Ограниченность. Возьмем $a \in X$. Тогда $K \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n(a) = X$ — открытое покрытие K.

   Выделим конечное подпокрытие $K \subset \bigcup\limits_{n=1}^{N} B_n(a) \implies K \subset B_N(a) \implies K$ — ограничено.

   Замкнутость. Надо доказать, что $X \setminus K$ — открытое. Возьмем $a \in X \setminus K$ и докажем, что a лежит в $X \setminus K$ вместе с некоторым шариком.

   Пусть $U_x = B_{(\rho \frac{x,a}{2})}(x)$. Причем он не пересекается с $B_x = B_{\frac{\rho(x,a)}{2}}(a)$. Возьмем тогда $K \subset \bigcup_{x\in K} U_x$ — открытое покрытие. Выделим конечное подпокрытие $K \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{x_i}$, $r = \min\{\frac{\rho(x_i,a)}{2}\}$.

   Тогда $B_r(a) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} B_{x_i}$. $B_r(a) \cap \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{x_i} = \varnothing \implies B_r(a) \cap K = \varnothing \implies B_r(a) \subset X \setminus K \implies a$ — внутренняя $X \cap K$.

3. Пусть $\widetilde{K}$ — компакт, K — замкнуто и $K \subset \widetilde{K}$.

   Рассмотрим открытое покрытие K U_α. Тогда $\widetilde{K}$ покрыто $(X \subset K) \cup \bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha$ – открытое покрытие $\widetilde{K}$. Выделим конечное покрытие $X \cap K, U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}$. $K \subset X \setminus K \cup \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} \implies K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$ — открытое множество, а значит K — компакт.

□

Теорема 2.11. K_α — семейство компактов, такое что пересечение любого конечного числа из них непусто. Тогда $\bigcap_{\alpha\in I} K_\alpha \neq \varnothing$.

Следствие. $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \ldots$ непустые компакты. Тогда $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n \neq \varnothing$.

Доказательство. От противного. Пусть $\bigcap\limits_{\alpha\in I} K_\alpha = \varnothing$. Зафиксируем компакт $K_0 \implies K_0 \cap \bigcap\limits_{\alpha\in I} K_\alpha = \varnothing \implies K_0 \subset X \setminus \bigcap\limits_{\alpha\in I} K_\alpha = \bigcup_{\alpha\in I} X \setminus K_\alpha$ — открытое покрытие K_0. Выделим конечное подпокрытие $K_0 \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} X \setminus K_{\alpha_i} = X \setminus \bigcap\limits_{i=1}^{n} K_{\alpha_i} \implies K_0 \cap \bigcap\limits_{i=1}^{n} K_{\alpha_i} = \varnothing$.??! □

***Определение* 2.26.** K — секвенциально компактное множество, если из любой последовательности точек из K можно выделить подпоследовательность, которое сходится к какой-то точке из K.

Пример. $[a, b] \in \mathbb{R}$ секвенциально компактно.

$x_n \in [a; b] \xRightarrow{\text{Т. Б-В}} \exists$ подпоследовательность x_{n_k}, имеющая предел $\implies \lim x_{n_k} \in [a, b]$, так как неравенства сохраняются.

Теорема 2.12. Бесконечное подмножества компакта имеет предельную точку.

Доказательство. K — компакт. $A \subset K$. Пусть $A' = \varnothing$. Тогда A — замкнуто $\implies A$ — компакт и ни одна из его точек не является предельной $a \in A$ не предельная $\implies \exists r_a > 0$ $\dot{B}_{r_a}(a) \cap A = \varnothing \implies B_{r_a}(a) \cap A = \{a\}$. Рассмотрим открытое покрытие $A \subset \bigcup_{a\in A} B_{r_a}(a)$, но их этого покрытия нельзя убрать ни одного множества $\implies$ нет конечного подпокрытия $\implies$ противоречие. □

Следствие. Компактность $\implies$ секвенциальная компактность.

Доказательство. $x_1, x_2, \ldots \in K$. $D = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ — множество значений последовательности.

1. $|D| < +\infty \implies$ есть элемент, повторяющийся бесконечно много раз, оставим только его — это нужная подпоследовательность.

2. $|D| = +\infty \implies$ у D есть предельная точка.

   Пусть a — предельная точка $D \implies$ найдутся различные $y_1, y_2, \ldots \in D$, такие что $\lim y_n = a$.

   Но y_i — это какой-то x_{n_i} $\lim x_{n_i} = a$. Осталось переставить x_{n_i} так, что получится последовательность. Ну, а так как K — замкнуто, то $a \in K$.

$\square$

Лемма (Лемма Лебега)**.** K — секвенциальный компакт, $K \subset \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$ — открыток покрытие.

Тогда $\exists r > 0 \colon \forall x \in K \quad B_r(x)$ целиком покрывается каким-то U_α.

Доказательство. От противного. Тогда $r = \frac{1}{n}$ не подходит $\implies \exists x_n \in K \colon B_{\frac{1}{n}}(x_n)$ не содержится целиком ни в каком U_α.

Выберем подпоследовательность x_{n_k}, такую что $\lim x_{n_k} = a \in K$.

Тогда $a \in U_\beta$ для некоторого $\beta \in I \implies \exists B_\varepsilon(a) \subset U_\beta$. Возьмем $N_1 \colon \forall k \geqslant N_1 \quad \rho(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$. А еще можно взять $N_2 \colon \forall k \geqslant N_2 \quad \frac{1}{n_k} < \frac{\varepsilon}{2}$. А значит $B_{\frac{1}{n_k}} \subset B_\varepsilon(a) \subset U_\beta$ при $k \geqslant \max\{N_1, N_2\}$?!!

Докажем $B_{\frac{1}{n_k}} \subset B_\varepsilon(a)$: Если $x \in B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k})$ $\rho(x_{n_k}, x) < \frac{1}{n_k} < \frac{\varepsilon}{2} \land \rho(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2} \implies \rho(x, a) \leqslant \rho(x_{n_k}, x) + \rho(a, x_{n_k}) < \varepsilon$ $\square$

Теорема 2.13. Компактность = секвенциальная компактность.

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть $K \subset \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$ — открытое покрытие. Возьмем $r > 0$ из леммы Лебега. Рассмотрим открытое покрытие $K \subset \bigcup\limits_{x \in K} B_r(x)$.

Достаточно из него выделить конечное подпокрытие. Возьмем $x_1 \in K$. Если $B_r(x_1) \supset K$, то выбрали конечное покрытие. Иначе берем $x_2 \in K \setminus B_r(x_1)$. Если объединение шариков $\supset K$, то выбрали конечное подпокрытие. Иначе продолжаем процесс: $x_n \in K \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} B_r(x_i)$. Если процесс оборвался, то выделили конечное подпокрытие.

Если он не оборвался, то мы построили последовательность $x_1, x_2, \ldots$. Причем $x_n, x_k \geqslant r \forall n > k \implies \rho(x_i, x_j) \geqslant r \forall i \neq j$. Из такой последовательности не выбрать сходящуюся подпоследовательность, так как любая подпоследовательность не фундаментальная. $\square$

***Определение* 2.27.** $A \subset X$. (X, ρ) — метрическая пространство.

$E \subset A$, ε-сеть множества A, если $\forall a \in A \exists x \in E \colon \rho(x, a) < \varepsilon$.

Конечная ε-сеть — E — конечное множество.

То есть $\{x_1, x_2, .., x_n\} \subset A$ — ε-сеть, если $\forall a \in A \exists k \quad \rho(a, x_k) < \varepsilon$.

***Определение* 2.28.** A — вполне ограничено, если $\forall \varepsilon > 0 \exists$ конечная ε-сеть A.

Свойства. 1. Вполне ограниченность $\implies$ ограниченность.

Доказательство. $\varepsilon = 1$ и конечная 1-сеть $x_1, x_2, \ldots, x_n$. $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_r(x_k) \subseteq B_{r+1}(x_1)$, где $r = \max\limits_{i \neq j} \rho(x_i, x_j)$. $\square$

2. В $\mathbb{R}^d$ ограниченность $\implies$ вполне ограниченность.

Доказательство. $A \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченное. $A \subset B_R(O) \subset [-R, R]^d$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и возьмем $n \in \mathbb{N}$. $\rho(x_i, a) \leqslant 2n$ диагональ $= \sqrt{d}\frac{2R}{n} < \varepsilon$ при $n > \frac{\sqrt{d}2R}{\varepsilon}$ получается ε-сеть. □

Теорема 2.14 (Хаусдорфа)**.** 1. Компактное множество вполне ограничено.

2. Если (X, ρ) — полное метрическое пространство, то замкнуто вполне ограниченное подмножество X — компактно.

Доказательство. 1. Берем $\varepsilon > 0$ $K \subset \bigcup_{x \in K} B_\varepsilon(x)$ — открытое покрытие. Выделим конечное подпокрытие $\implies K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_\varepsilon(x_i) \implies x_1, \ldots, x_n$ — ε-сеть.

2. Проверим секвенциальную компактность. Берем $x_1, x_2, \ldots \in K$. Возьмем 1-сеть $K \subset \bigcup_{i=1}^{n_1} B_1(y_{1i})$.

   В каком-то шарике бесконечное число членов последовательности. Выкинем все, кроме них $x_{11}, x_{12}, x_{13}, \ldots$. Возьмем $\frac{1}{2}$-сеть. $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n_2} B_{\frac{1}{2}}(y_{2i})$. В каком-то шарике бесконечное число членов последовательности...

   На j-ом шаге $K \subset B_{\frac{1}{j}}(y_{ji})$. Пусть на каждом шаге выбирали шарик $B_{\frac{1}{i}}(z_i)$.

   В итоге получили:

$$\begin{array}{cccccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & \ldots & B_1(z_1) \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & \ldots & B_{\frac{1}{2}}(z_2) \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & \ldots & B_{\frac{1}{3}}(z_3) \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & \ldots & B_{\frac{1}{4}}(z_4) \end{array}$$

   Воспользуемся диагональным методом Кантора. Пусть $a_n \coloneqq x_{nn}$. Заметим, что a_n, a_{n+1}, a_{n+2} — последовательность $x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, \ldots \implies$ все лежат в $B_{\frac{1}{n}}(z_n) \implies \rho(a_i, a_j) \leqslant \rho(a_i, z_n) + \rho(a_j, z_n) < \frac{2}{n}$, при $i, j \geqslant n \implies a_i$ — фундаментальная $\implies$ у нее есть предел $\implies a = \lim a_n \in K$, так как K — замкнуто. Следовательно, K — секвенциально компактно.

□

Следствие Характеристика компактов в $\mathbb{R}^d$***.*** K — компакт $\iff$ K — замкнуто и ограничено.

Доказательство. $\Rightarrow$ верна всегда и доказано выше.

А вот $\Leftarrow$ верна не всегда. Поэтому докажем эту штуку для $\mathbb{R}^d$. Мы знаем, что $\mathbb{R}^d$ — полное. А еще мы знаем, что в $\mathbb{R}^d$ ограниченность $\implies$ вполне ограниченность, а значит понятно, что K — компакт. □

Упражнение. (K, ρ) — метрическое пространство, K — компакт. Доказать, что (K, ρ) — полное.

Следствие теорема Больцано-Вейерштрасса в $\mathbb{R}^d$***.*** Из любой ограниченной последовательности в $\mathbb{R}^d$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. $\{x_n\} \implies \exists R \quad x_n \in B_R(a) \subset \overline{B}_R(a)$ — замкнуто и ограниченно $\implies$ компактно $\implies$ секвенциально компактно $\implies x_n$ — последовательность точек секвенциального компакта $\implies$ у нее есть сходящаяся последовательность. □

2.3. Непрерывные отображения

***Определение* 2.29.** (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) — метрические пространства, $E \subset X$. $f : E \to Y$, a — предельная точка E, $b \in Y$.

$b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ означает, что

По Коши: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \colon \rho_x(x, a) < \delta \land a \neq x \in E \implies \rho_Y(f(x), b) < \varepsilon$.

В терминах окрестностей: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \colon f(\dot{B}_\delta(a) \cap E) \subset B_\varepsilon(b)$

По Гейне: $\forall$ последовательности $a \neq x_n \in E \colon \lim x_n = a \implies \lim f(x_n) = b$

Теорема 2.15. Все определения равносильны.

Доказательство. Упражнение (смотри доказательство для последовательностей). □

Теорема 2.16 (Критерий Коши)**.** $f \colon E \subset X \to Y$, Y — полное, a — предельная точка E. Тогда
$$\exists \lim_{x \to a} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in \dot{B}_\delta(a) \cap E \implies \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Доказательство. $\Rightarrow$. Упражнение: взять доказательство и заменить модуль на ρ.

$\Leftarrow$. Проверим определение по Гейне. Надо доказать, что $a \neq x_n \in E \land \lim x_n = a \implies \lim f(x_n)$ существует.

$f(x_n)$ — последовательность в Y — полное. Поэтому достаточно проверить, что $f(x_n)$ — фундаментальная последовательность. Возьмем $\varepsilon > 0$, по нему $\delta > 0$ из условия. По $\delta > 0$ берем N, такое что $\forall n \geqslant N : \rho_X(x_n, a) < \delta \implies x_n \in \dot{B}_\delta(a) \cap E$ при $n \geqslant N \implies \forall m, n \geqslant N :$ $\rho(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon f(x_n)$ фундаментальная $\implies f(x_n)$ имеет предел. □

Теорема 2.17 (об арифметических действиях с пределами)**.** $f, g \colon E \subset X \to Y$, Y — нормированное пространство, a — предельная точка E.
Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b, \lim\limits_{x \to a} g(x) = c \land \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда

1. $\lim\limits_{x \to a} \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha b + \beta c$.
2. Если $\lambda \colon E \to \mathbb{R}$, такое что $\lim\limits_{x \to a} \lambda(x) = \mu \in \mathbb{R}$, то $\lim\limits_{x \to a} \lambda(x) f(x) = \mu b$.
3. $\lim\limits_{x \to a} \|f(x)\| = \|b\|$
4. Если Y — пространство со скалярным произведением, то $\lim\limits_{x \to a} \langle f(x), g(x) \rangle = \langle b, c \rangle$.
5. Если $Y = \mathbb{R}$ и $c \neq 0$, то $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$.

Доказательство. Проверка по Гейне. Берем $x_n \to a$,, тогда $f(x_n) \to b, g(x_n) \to c$ и теорема про пределы последовательности. □

***Определение* 2.30.** (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) — метрические пространства, $E \subset X$, $a \in E$.
$f \colon E \to Y$, f непрерывна в точке a, если

1. a не предельная точка или a — предельная и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
2. По Коши. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E \colon \rho_X(x, a) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$.
3. С окрестностями. $\forall B_\varepsilon(f(a)) \exists B_\delta(a) \colon f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a))$.

4. По Гейне: $\forall x_n \in E\colon \lim x_n = a \implies \lim f(x_n) = f(a)$.

Доказательство. Упражнение! □

Теорема 2.18 (о непрерывности композиции)**.** $(X, \rho_X), (Y, \rho_Y), (Z, \rho_Z)$ — $D \subset X, E \subset Y, a \in D, f\colon D \to E, g\colon E \to Z$. Если f непрерывна в точке a, а g непрерывна в точке $f(a)$, то $g \circ f$ непрерывна в точке a.

Доказательство.

$$\left.\begin{array}{l}\forall B_\varepsilon(g(f(a)))\exists B_\delta(f(a))\colon g(B_\delta(f(a)) \cap E) \subset B_\varepsilon(g(f(a))) \\ \forall B_\delta(f(a))\exists B_\gamma(a)\colon f(B_\gamma(a) \cap D) \subset B_\delta(f(a)) \cap E\end{array}\right\}$$
$$\implies g(f(B_\gamma(a) \cap D)) \subset g(B_\delta(f(a)) \cap E) \subset B_\varepsilon(g(f(a))) \implies g \circ f \text{ непрерывна в точке } a$$

□

Теорема 2.19 (Характеристика непрерывности в терминах открытых множеств)**.** $f : X \to Y$. Тогда

f непрерывна во всех точках $\iff \forall U$ — открытого в Y: $f^{-1}(U) \coloneqq \{x \in X \mid f(x) \in U\}$ — открыто в X.

Доказательство. $\Rightarrow$. Берем $a \in f^{-1}(U) \implies f(a) \in U$ – открыто $\implies \exists \varepsilon > 0 \quad B_\varepsilon(f(a)) \subset U$.

f непрерывно в точке $a \implies \exists \delta > 0\colon f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a)) \subset U \implies B_\delta(a) \subset f{-}1^(U) \implies a$ — внутренняя точка $f^{-1}(U) \implies f^{-1}(U)$ — открыто.

$\Leftarrow$. $U \coloneqq B_\varepsilon(f(a))$ — открыто $\implies f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$ — открыто и $a \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(a))) \implies \exists \delta > 0 \quad B_\delta(a) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(a))) \implies f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a)) \implies f$ непрерывна в точке a. □

Теорема 2.20 (Непрерывный образ компакта — компакт)**.** $(X, \rho_X), (Y, \rho_Y)$ — метрические пространства, $K \subset X$, K — компакт.

$f : K \to Y$ непрерывна во всех точка. Тогда $f(K)$ — компакт.

Доказательство. Рассмотрим открытое покрытие $f(K) \subset \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$ — открытые $\implies K \subset f^{-1}(\bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha \in I} f^{-1}(U_\alpha)$ по непрерывности f $f^{-1}(U_\alpha)$ — открыто $\implies$ это открытое покрытие K, но K — компакт $\implies$ выбираем конечное подпокрытие $K \bigcup\limits_{j=1}^{n} f^{-1}(U_{\alpha_j}) = f^{-1}(\bigcup\limits_{j=1}^{n} U_{\alpha_j}) \implies f(K) \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} U_{\alpha_j}$. Нашли конечное подпокрытие $\implies f(K)$ — компакт. □

***Определение* 2.31.** $f : E \subset X \to Y$ — ограниченное отображение, если $f(E)$ — ограниченное множество.

Следствие. Непрерывный образ компакта замкнут и ограничен.

Доказательство. Знаем, что непрерывный образ компакта — компакт. А следовательно, образ замкнут и ограниченю □

Следствие. Если K — компакт и f непрерывна на K, то f — ограниченное отображение.

Следствие Теорема Вейерштрасса. $f\colon K \to \mathbb{R}$, K — компакт, f непрерывна на K.

Тогда $\exists a, b \in K : f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b) \quad \forall x \in K$.

Доказательство. $f(K)$ — ограниченное множество в $\mathbb{R} \implies B \coloneqq \sup\limits_{x \to K} f(x) \in \mathbb{R} \implies \exists x_n \in K \colon \lim f(x_m) = N$. При этом $x_n \in K$ — секвенциальный компакт $\implies$ существует сходящаяся подпоследовательность x_{n_k}.

Тогда $\lim x_{n_k} =: b \in K \implies \lim f(x_{n_k}) = f(b) \implies f(b) = \sup\limits_{x \to K} f(x) = B \implies f(x) \leqslant f(b) \quad \forall x \in K$. □

Теорема 2.21. $f : X \to Y$ непрерывна во всех точках, биекция и X — компакт. Тогда f^{-1} непрерывна во всех точках.

Доказательство. Проверяем непрерывность f^{-1} в терминах открытых множеств. Надо для f^{-1} проверить , что прообраз открытого — открыт, то есть для f проверить, что образ открытого открыт.

U — открыто в $X \implies X \setminus U$ — замкнуто $\subset X$ — компакт $\implies X \setminus U$ — компакт $\implies f(X \setminus U) = Y \setminus f(U)$ — компакт $\implies Y \setminus f(U)$ — замкнуто $\implies f(U)$ — открыто. □

***Определение* 2.32.** $f : E \subset X \to Y$ равномерно непрерывна, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in E : \rho_X(x, y) < \delta \implies \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Теорема 2.22 (Теорема Кантора)**.** $f \colon K \to Y$ непрерывна, K — компакт. Тогда f равномерно непрерывна.

Доказательство. Берем $x \in K$, f непрерывна в точке $x \implies \exists r_x > 0 \colon f(B_{r_x}(x)) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(x))$.

Тогда $K \subset \bigcup\limits_{x \to K} B_{r_x}(x)$ — открытое покрытие K. Возьмем $\delta > 0$ из леммы Лебега, то есть $\forall x \in K B_\delta(x)$ целиком попал в какой-то элемент покрытия.

Проверим, что это $\delta > 0$ подходит в определение равномерной непрерывности.

$x, y \in K \rho_X(x, y) < \delta \implies y \in B_\delta(x) \implies \exists a \in K : B_\delta(x) \subset B_{r_x}(a) \implies x, y \in B_{r_a}(a) \implies f(x), f(y) \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(a)) \implies \rho_Y(f(x), f(a)) < \frac{\varepsilon}{2} \wedge \rho_Y(f(y), f(a)) < \frac{\varepsilon}{2} \implies \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ □

***Определение* 2.33.** X — векторное пространство и $\|.\|$ и $|||.|||$ — норм в X. Нормы эквиваленты, если $\exists C_1, C_2 > 0$:

$$C_1\|x\| \leqslant |||x||| \leqslant C_2\|x\| \quad \forall x \in X.$$

Замечание.
1. Это отношение эквивалентности. (упражнение)
2. Пределы последовательности для эквивалентных норм совпадают. Док-во: Пусть $\lim x_n = a$ по норме $||.||$, т.е. $\lim ||x_n - a|| = 0$. А $0 \leqslant |||x_n - a||| \leqslant C_2||x_n - a|| \to 0$, значит $\lim x_n = a$ и по норме $|||.|||$.
3. Непрерывность отображений для эквивалентных норм совпадают (записываем по Гейне, а для последовательностей мы всё знаем).

Теорема 2.23. В $\mathbb{R}^d$ все нормы эквивалентны.

Доказательство. $\|x\|\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_d^2}$. Достаточно доказать, что остальные норма эквиваленты.

Пусть $p(x)$ — другая норма в $\mathbb{R}^d$. e_k — вектор с нулями и единицей на k-ой позиции.

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_d) = \sum\limits_{k=1}^{d} x_k e_k$. $p(x - y) = p(\sum\limits_{k=1}^{d}(x_k - y_k)e_k) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{d} p((x_k - y_k)e_k) = \sum\limits_{k=1}^{d} |x_k - y_k| p(e_k) \leqslant$ (Коши-Буняковский) $\left(\sum\limits_{k=1}^{d}(x_k - y_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum\limits_{k=1}^{d} p(e_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum\limits_{k=1}^{d} p(e_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} \|x - y\| \implies$

$p(x) \leqslant \left(\sum\limits_{k=1}^{d} p(e_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} \|x\|$.

$S \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^d : x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_d^2 = 1\}$ — компакт $\implies \exists a \in S : 0 < p(a) \leqslant p(x) \quad \forall x \in S$.

$p(x) = p(\frac{x}{\|x\|} \cdot \|x\|) = \|x\| p(\frac{x}{\|x\|}) \geqslant \|x\| p(a)$.

Тогда $p(a)\|x\| \leqslant p(x) \leqslant M\|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$. □

2.4. Длина кривой

***Определение* 2.34.** (X, ρ) — метрическое пространство. ($\mathbb{R}^d$ — ключевой случай).

$\gamma : [a, b] \to X$ непрерывное — путь.

$\gamma(a)$ — начало пути, $\gamma(b)$ — конец пути. $\gamma([a, b])$ носитель пути.

Замкнутый путь $\gamma(a) = \gamma(b)$. Простой (самонепересекающийся) путь: $\gamma(u) \neq \gamma(v) \quad \forall u, v \in [a, b]$. Возможно, за исключением равенства $\gamma(a) = \gamma(b)$.

***Определение* 2.35.** Эквивалентные пути: $\gamma_1 : [a, b] \in X$, $\gamma_2 : [c, d] \to X$. Если $\exists u : [a, b] \to [c, d]$, u — непрерывна, u — строго монотонно возрастает, $u(a) = c, u(b) = d$, такой, что $\gamma_1 = \gamma \circ u$.

***Определение* 2.36.** Класс эквивалентных путей — кривая.

Конкретный представитель класса — параметризация кривой.

***Определение* 2.37.** $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$. r-гладкий путь, если $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_d \end{pmatrix}$, $\gamma_j : [a, b] \to \mathbb{R}$ — r-гладкие функции, то есть $\gamma_j \in C^r[a, b]$.

Кривая гладкая, если у нее есть гладкая параметризация. Если r опущено, то $r = 1$.

***Определение* 2.38.** Длина пути $l(\gamma) = \sup \sum\limits_{k=1}^{n} \rho(\gamma(t_k), \gamma(t_{k-1}))$, где t_k — дробление отрезка.

Замечание. Длины эквивалентных путей равны.

Свойства. 1. $l(\gamma) \geqslant \rho(\gamma(a), \gamma(b))$. Можно просто взять дробление состоящее из двух точек.

2. $l(\gamma) \geqslant$ длина вписанной в нее ломаной.

Теорема 2.24. Пусть есть $\gamma : [a, b] \to X$. $c \in [a, b]$.

$l(\gamma) = l(\gamma\big|_{[a,c]}) + l(\gamma\big|_{[c,b]})$.

Обозначим куски за γ_1, γ_2.

Доказательство. Нам нужно доказать какое-то равенство, поэтому докажем два неравенства!

- $\geqslant$. Давайте вписывать ломанные. Впишем какую-то ломанную в γ_1 и еще какую-то в γ_2. Пусть получились дробления $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = u_0 < \ldots < u_m = b$ — получилось дробление $[a, b]$.

  Тогда посчитаем сумму: $\sum\limits_{k=1}^{n} \rho(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)) + \sum\limits_{k=1}^{n} \rho(\gamma(u_{k-1}), \gamma(u_k)) \leqslant l(\gamma)$. Заменим первое слагаемое на sup: $\sup \ldots + \sum\limits_{k=1}^{n} \rho(\gamma(u_{k-1}), u_k) \leqslant l(\gamma)$. А этот sup — длина γ_1. Встает вопрос почему можно переходить. Мы знаем, что все числа меньше, то и супремум меньше, поэтому переход корректный. Дальше заменяем правый sup. В итоге получаем $l(\gamma_1) + l(\gamma_2) \leqslant l(\gamma)$.

- Возьмем дробление γ t_i. Посмотрим на сумму $S = \sum\limits_{j=1}^{n} \rho(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j))$.

  Возьмем дробление t_i и добавим в него точку c. Получаем:

$$S \leqslant \sum_{j=1}^{k} \rho(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j)) + \rho(\gamma(t_k), \gamma(c)) + \rho(\gamma(c), \gamma(t_{k+1})) + \sum_{j=k+2}^{n} \rho(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j))$$

  А теперь увидим, что первые два слагаемых $\leqslant l(\gamma_1)$, а вторые два $\leqslant l(\gamma_2)$.

□

Теорема 2.25. $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^d$ — гладкий путь. $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_d \end{pmatrix}$. Тогда:

$$l(\gamma) = \int\limits_a^b \|\gamma'(t)\| \mathrm{d}t$$

Лемма. $\Delta \subset [a,b]$ — отрезок, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^d$. $m_\Delta^{(i)} \coloneqq \min\limits_{t\in\Delta} |\delta_i'(t)|, M_\Delta^{(i)} \coloneqq \max\limits_{t\in\Delta} |\delta_i'(t)|$, $m_\Delta \coloneqq \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{d} (m_\Delta^{(i)})^2}, M_\Delta \coloneqq \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{d} (M_\Delta^{(i)})^2}$

Тогда $m_\Delta l(\Delta) \leqslant l(\gamma\Big|_\Delta) \leqslant M_\Delta l(\Delta)$.

Доказательство. Впишем в $\gamma\Big|_\Delta$ ломаную. Пусть a_k — длина k-го звена.

По теореме Лагранжа: $\gamma_i(t_k) - \gamma_i(t_{k-1}) = \underbrace{\gamma_i'(\xi_{ik})(t_k - t_{k-1})}_{\leqslant m_\Delta^{(i)}(t_k - t_{k-1})} \leqslant M_\Delta^{(i)}(t_k - t_{k-1})$

Тогда $m_\Delta(t_k - t_{k-1}) \leqslant a_k \leqslant M_\Delta(t_k - t_{k-1})$. Просуммируя все такие неравенства получим исходное. □

Доказательство теоремы.

$$m_k(x_k - x_{k-1}) \leqslant l(\gamma\Big|_{[x_{k-1},x_k]}) \leqslant M_k(x_k - x_{k-1})$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \leqslant l(\gamma) \leqslant \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})$$

$$m_k(x_k - x_{k-1}) \leqslant \int \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \ldots + \gamma_d'(t)^2} \mathrm{d}t \leqslant M_k(x_k - x_{k-1})$$

Докажем, что □(штука с M_k) минус ◯ стремится к нулю. По факту хотим доказать, что $\sum\limits_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \to 0$.

$$M_k - m_k = \sqrt{\sum_{i=1}^{d}(M^{(i)}_{[x_{k-1},x_k]})^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^{d}(m^{(i)}_{[x_{k-1},x_k]})^2} \leqslant (\text{Минковский})\sqrt{\sum_{i=1}^{d}(M^{(i)}_{[x_{k-1},x_k]} - m^{(i)}_{[x_{k-1},x_k]})^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{d}(M^{(i)}_{[x_{k-1},x_k]} - m^{(i)}_{[x_{k-1},x_k]}) = \sum_{i=1}^{d}(\gamma_i(\xi_k) - \gamma_i(\eta_k)) \leqslant \sum_{l=1}^{d}\omega_k(|\tau|)$$

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \leqslant \sum_{i=1}^{d}\omega_k(|\tau|) \cdot \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})$$

□

Следствие. 1. $\|\gamma'\| \leqslant C \implies l(\gamma) \leqslant C(b-a)$

2. Длина графика функции $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ $l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\mathrm{d}x$.

3. Длина в полярных координатах. $r\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$. Тогда $l = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\mathrm{d}\varphi$.

Доказательство. 2. $\gamma(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}, \gamma_1'(x) = 1, \gamma_2'(x) = f'(x)$, а дальше применить функцию.

3. $\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} r(\varphi)\cos\varphi \\ r(\varphi)\sin\varphi \end{pmatrix}$

□

Определение 2.39. A — связное множество, если $\forall$ покрытие $A \subset U \cup V, U \cap V = \varnothing \implies$ либо $A \subset U$, либо $A \subset V$, где U, V — открытые.

Пример. 1. $[a,b]$ — связное множество в $\mathbb{R}$.

2. $\mathbb{Q}$ — несвязное множество в $\mathbb{R}$. Пример $\mathbb{Q} \subset (-\infty; \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$.

Теорема 2.26. Непрерывный образ связного множества — связное множество.

Доказательство. A — связное, $f : A \subset X \to Y$ непрерывное. $f(a) \subset U \cup V$ — открытые в Y и $U \cap V = \varnothing$. $A \subset f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$. $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \varnothing$. A — связное $\implies A \subset f^{-1}(U)$ или $A \subset f^{-1}(V) \implies f(A) \subset U$ или $f(a) \subset V \implies f(A)$ — связно. □

Следствие Теорема Больцано-Коши. Пусть A — связное, $a, b \in A$. $f\colon A \to \mathbb{R}$ непрерывная.

Тогда f принимает все промежуточные значения, лежащие между $f(a)$ и $f(b)$.

Доказательство. От противного. Пусть $f(a) < C < f(b)$ и C — не значение. Тогда $f(A) \subset (-\infty, C) \cup (C, +\infty)$. Заметим, что данные множества открытые и не пересекаются. Тогда получили противоречие со связностью $f(A)$. □

Теорема 2.27. $\langle a,b\rangle$ — связное подмножество $\mathbb{R}$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$.

Доказательство. От противного. Пусть $\langle a,b\rangle \subset U \cap V$, $U \cap V = \varnothing$.

Пусть $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R} = f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \langle a,b\rangle \cap U \neq \varnothing \\ 1 & x \in \langle a,b\rangle \cap V \neq \varnothing \end{cases}$ — непрерывная функция. Её прообраз: $\varnothing, \langle a,b\rangle, \langle a,b\rangle \cap U, \langle a,b\rangle \cap V$ — открытые в $\langle a,b\rangle$ множества, но значения $\frac{1}{2}$ не принимаются. □

***Определение* 2.40.** A — линейно связно, если $\forall u, v \in A \exists \gamma \colon [a,b] \to A \colon \gamma(a) = u, \gamma(b) = v$.

Теорема 2.28. Линейно связное множество связно.

Доказательство. A — линейно связно, пусть оно не связно $\implies A \subset U \cup V \quad U \cap V = \varnothing$. $A \cap U \neq \varnothing$ и $A \cap V \neq \varnothing$.

Возьмем $u \in A \cap U, v \in A \cap V$ и соединим их путем γ. $\gamma[a,b]$ — связное (как образ отрезка), $\gamma[a,b] \subset A \subset U \cup V \implies \gamma[a,b] \subset U$ или $\gamma[a,b] \subset V$. Противоречие. □

***Определение* 2.41.** Область — открытое, линейно связное множество.

Замечание. Если A открыто, то A — связно $\iff A$ — линейно связное.

2.5. Линейные операторы

***Определение* 2.42.** X, Y — векторные пространства,

$A \colon X \to Y$ — линейный оператор, если $\forall x, y \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$.

Свойства.

1. $A 0_X = 0_Y$. Доказательство: $\alpha = 0, \beta = 0$.
2. $A(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k A(x_k)$. Доказательство: индукция.

***Определение* 2.43.** A, B — линейный оператор: $X \to Y$.

$(A+B)(x) \coloneqq A(x) + B(x)$.

$(\lambda A)(x) = \lambda A(x)$.

То есть получили векторное пространство линейных операторов.

***Определение* 2.44.** $A \colon X \to Y, B \colon Y \to Z$ — линейные операторы $B \circ A \colon X \to Z$. $(B \circ A)(x) \coloneqq B(A(x))$.

Замечание. Это линейный оператор.

***Определение* 2.45.** Обратный оператор: $A \colon X \to Y$, $B \colon Y \to X$ обратный к A, если $A \circ B = Id_Y$ и $B \circ A = Id_x$.

Свойства.

1. Если обратный оператор $\exists$, то он единственный.
2. $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$.
3. $A \colon X \to X$ — обратимые операторы образуют группу по операции композиция.

Доказательство.

1. $B \circ A = Id_X \implies$ A — инъекция. Если $A(x) = A(y) \implies x = B(A(x)) = B(A(y)) = y$.

   $A \circ B = Id_Y \implies A$ — суръекция. $A(B(y)) = y$.

   Пусть B, C — обратные к A. $B(A(x)) = B \circ A(x) = x = C \circ A(x) = C(A(x))$.
2. $((\frac{1}{\lambda} A^{-1}) \circ (\lambda A))(x) = \frac{1}{\lambda} A^{-1}(\lambda A(x)) = x$.

□

Пример. $X = \mathbb{R}^n, Y = R^m$. Можно рассматривать линейные операторы как матрицы бла-бла-бла.

***Определение* 2.46.** $A\colon R^n \to R^m$. Возьмем базисный вектор e_k — везде, кроме k-ой позиции нули.

Пусть $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$. Тогда $Ax = A(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k A_{x_k}$.

То есть получили набор столбцов. Из которого можно получить матрицу.

***Определение* 2.47.** X и Y — нормированные пространства. $A\colon X \to Y$ — линейный оператор.

$\|A\| \coloneqq \sup\limits_{\|x\|_X \leqslant 1} \|A_x\|_Y$.

Оператор ограниченный, если его норма конечна.

Замечание. Ограниченные оператор $\neq$ ограниченное отображение.

Линейное отображение + ограниченность $\implies = 0$.

Доказательство. Пусть $Ax \neq 0$, тогда $A(\lambda x) = \lambda Ax$, а это уже не ограничено. □

Свойства.

1. $\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$
2. $\|\lambda A\| = \|\lambda\|\|A\|$.
3. $\|A\| = 0 \iff A \equiv 0$.

Доказательство.

1. $\|(A+B)x\|_Y = \|Ax + Bx\|_Y \leqslant \|Ax\|_Y + \|Bx\|_T \iff \sup\limits_{\|x\|_x \leqslant 1} \|(A+B)x\| = \|A + B\| \leqslant \sup\limits_{\|x\|_x \leqslant 1} \|Ax\|_Y + \sup\limits_{\|x\|_x \leqslant 1} \|Bx\|_Y$.
2. $\|\lambda Ax\| = |\lambda| \cdot \|Ax\|$. $\sup\limits_{\|x\|_x \leqslant 1} \|\lambda Ax\| = |\lambda| \sup\limits_{\|x\|_x \leqslant 1} \|Ax\| = |\lambda|\|A\|$.
3. $\Rightarrow \|A\| = 0 \implies \|Ax\| = 0 \implies Ax = 0 \implies Ax = A(\frac{x}{\|x\|} \cdot \|x\|) = \|x\| A(\frac{x}{\|x\|}) = 0$.

□

Теорема 2.29. $A\colon X \to Y$ — линейный оператор. Тогда

$\|A\| = \sup\limits_{\|x\|_x \leqslant 1} \|Ax\|_Y = \sup\limits_{\|x\|_x = 1} \|Ax\|_Y = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_x} = \inf\{c > 0 \mid \|A_x\|_Y \leqslant C\|x\|_X\}$.

Доказательство. Обозначим за N_i i-ый элемент этой цепочки.

$N_1 \geqslant N_2$ и $N_1 \leqslant N_3$, так как $N_2, N_3 \subset N_1$.

$N_3 \geqslant N_4$. $\frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \frac{1}{\|x\|}\|Ax\|_Y = \|A\frac{x}{\|x\|}\|_X \leqslant N_3$.

$N_4 = N_5$. $N_5 = \inf\{c > 0 \mid \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} < c\}$

Теперь докажем, что $N_1 \leqslant N_2$. Пусть $\|x\| \leqslant 1 \implies \|(1-\varepsilon)x\| \leqslant 1 \implies \|A((1-\varepsilon)x)\| \leqslant N_2$. Воспользуемся линейностью A: вытащим $(1-\varepsilon)$ за скобку. После этого устремим ε к 0. Тогда $\|Ax\| \leqslant N_2 \implies N_1 = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| \leqslant 1$.

Теперь докажем, что $N_1 \leqslant N_4$. $\|x\| \leqslant 1$. Тогда $y \coloneqq \frac{x}{\|x\|}$, $\|y\| = 1 \implies \|A_y\| \leqslant N_4 \implies \|Ax\| \leqslant \frac{1}{\|x\ |\cdot\|Ax\|} = \|A(\frac{x}{\|x\|})\| \leqslant N_4 \implies N_1 = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| \leqslant N_4$. □

Теорема 2.30. $A\colon X \to Y$ — линейный оператор. Следующие условия равносильны:

1. A — ограниченный оператор.
2. A — непрерывна в нуле.

3. A — непрерывна во всех точках.

4. A — равномерно непрерывна.

Доказательство. $4 \implies 3 \implies 2$ — очевидно.

$1 \implies 4$ $\|Ax - Ay\|_Y = \|A(x-y)\|_Y \leqslant \|A\| \cdot \|x-y\|_X$. Если $\|x-y\|_X < \frac{\varepsilon}{\|A\|}$, то $\|Ax - Ay\| < \varepsilon$.

$2 \implies 1$. Возьмем $\varepsilon = 1$ и $\delta > 0$ из определения непрерывности. $\forall x \in X\colon \|x\| < \delta \implies \|Ax\| < 1$.

Пусть $\|y\| < 1$. Тогда $\|\delta y\| < \delta \implies \|A(\delta y)\| < 1 \implies \|Ay\| < \frac{1}{\delta} \implies \sum\limits_{\|y\|<1} \|Ay\| \leqslant \frac{1}{\delta}$. □

Следствие. 1. $\|Ax\|_Y \leqslant \|A\|\|x\|_X \quad \forall x \in X$.

2. $\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$.

Доказательство. 2. $\|A(Bx)\| \leqslant \|A\| \cdot \|Bx\| \leqslant \|A\|\|B\|\|x\|$.

$\|AB\| = \inf\{c > 0 \mid \|A(Bx)\| \leqslant C\|x\|\} \implies \|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$.

1. а где

□

Теорема 2.31. $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Тогда $\|A\|^2 \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} a_{jk}^2$. В частности, все такие операторы ограничены.

Доказательство. $\|Ax\|^2 = \sum\limits_{j=1}^{m}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_{jk}x_k\right)^2 \leqslant$ (Коши-Буняковский) $\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{k=1}^{n} a_{jk}^2 \underbrace{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}_{=\|x\|^2}$. Следовательно, $\|Ax\| \leqslant \|x\|\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{jk}^2}$ / □

Замечание. В бесконечномерном случае бывают неограниченные операторы.

3. Ряды

3.1. Ряды в нормированных пространствах

***Определение* 3.1.** X — пространство с нормой, $x_n \in X$.

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ — ряд. Частичная сумма ряда $S_n \coloneqq \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$.

Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty}$, то он называется суммой ряда.

Ряд сходится, если у него есть сумма (и для $\mathbb{R}$ эта сумма конечна), иначе она бесконечна.

Теорема 3.1 (Необходимое условие сходимости)**.** Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_k$ — сходится, то $\lim x_n = 0$.

Доказательство. $S_n \coloneqq \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \to S \implies \underbrace{S_n - S_{n-1}}_{x_n} \to S - S = 0.$ □

Свойства. 1. Линейность. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n + \beta \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$.

2. Расстановка скобок. В ряду произвольным образом можно ставить скобки, то расстановка скобок дает тот же результат.

   Набросок доказательства: мы просто смотрим на предел подпоследовательности.

3. В $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}^n$ сходимость равносильна покоординатной сходимости.

Теорема 3.2 (Критерий Коши)**.** X — полное нормированное пространство.

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится $\iff \forall\varepsilon > 0 \exists N \forall m, n \geqslant N \colon \| \sum\limits_{k=m}^{n} x_j \| < \varepsilon$.

Доказательство. $S_n \coloneqq \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$. Последовательность S_n сходится $\iff$ S_n — фундаментальная $\iff \forall\varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N \colon \|S_n - S_m\| < \varepsilon \iff \| \sum\limits_{k=m+1}^{n} x_k \| < \varepsilon$. □

***Определение* 3.2.** Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится абсолютно, если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ сходится.

Замечание. В частности, в $\mathbb{R}$ абсолютная сходимость — сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$.

Теорема 3.3. X — полное нормированное пространство.

Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ абсолютно сходится, то он абсолютно сходится.

Доказательство. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ — сходится. Тогда $\forall\varepsilon > 0 \exists N \forall m, n \geqslant N \colon \sum\limits_{k=m+1}^{n} \|x_k\| < \varepsilon$. Воспользуемся свойством о том, что сумма норм не меньше, чем норма суммы. А значит получили $\forall\varepsilon > 0 \exists N \forall m, n \geqslant N \colon \| \sum\limits_{k=m+1}^{n} x_k \| < \varepsilon$, что является критерием Коши для исходной последовательности. □

Теорема 3.4. 1. X — нормированное пространство. Если $\lim x_n = 0$ и в каждой скобке $\leqslant M$ слагаемых то из сходимости ряда после расстановки скобок следует сходимость исходнного

2. $\mathbb{R}$. Если в каждой скобке все члены одного знака, то из сходимости ряда после расстановки скобок следует сходимость исходного.

Доказательство. $S_n \coloneqq \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ и $S_{n_k} \to S$.

1. Возьмем n: $n_k \leqslant n < n_{k+1}$. $S_n = S_{n_k} + x_{n_k} + x_{n_k+1} + x_{n_k+2} + \ldots + x_n$. $\|S_n - S\| \leqslant \|S_{n_k} - S\| + \|x_{n_k+1}\| + \ldots + \|x_n\|$. Мы знаем, что $S_{n_k} \to S \implies \exists K \forall k \geqslant K : \|S_{n_k} - S\| < \varepsilon$.

   $\lim x_j = 0 \implies \exists J \forall j \geqslant J \|x_j\| < \varepsilon$. Следовательно исходная сумма не более $(M+1)S$.

2. $n_k \leqslant n < n_{k+1}$. Пусть в этом блоке неотрицательные слагаемые. $S_n = S_{n_k} + x_{n_k+1} + x_{n_k+2} + \ldots + x_n \geqslant S_{n_k}$. А еще знаем, что $S_n = S_{n_{k+1}} - x_{n_{k+1}} - x_{n_{k+1}-1} - \ldots - x_{n+1} \leqslant S_{n_{k+1}}$. Откуда получаем, что $S_{n_k} \leqslant S_n \leqslant S_{n_{k+1}}$.

□

3.2. Знакопостоянные ряды

Теорема 3.5. Пусть $a_n \geqslant 0$.

Тогда сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ равносильная ограниченности последовательности $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

Доказательство. $S_1 \leqslant S_2 \leqslant \ldots$. Монотонная возрастающая последовательность имеет предел $\iff$ она ограничена. □

Теорема 3.6 (Признак сравнения)**.** Пусть $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$. Тогда

1. Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — сходится.

2. Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — расходится.

Доказательство. 1. $A_n \coloneqq \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} b_k = B_n$.

   $\sum b_n$ — сходится $\implies B_n$ — ограничена $\implies A_n$ ограничена $\implies \sum a_n$ сходится.

2. Отрицание 1.

□

Следствие. 1. Пусть $a_n, b_n \geqslant 0$. Если $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ — сходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — сходится.

2. Пусть $a_n, b_n \geqslant 0$, Если $a_n \sim b_n$, то ряды ведут себя одинаково.

Доказательство. 1. $a_n = \mathcal{O}(b_n) \implies 0 \leqslant a_n \leqslant Cb_n$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Cb_n = C\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ — сходится $\implies \sum a_n$ — сходится.

2. $a_n = b_n c_n$, где $\lim c_n = 1 \implies \frac{1}{2} \leqslant c_n \leqslant 2$ при $n \geqslant N$. Тогда $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ и $b_n = \mathcal{O}(a_n)$.

□

Теорема 3.7 (Признак Коши)**.** Пусть $a_n \geqslant 0$.

1. Если $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1$, то ряд сходится.
2. $\sqrt[n]{a_n} > 1$, то ряд расходится.
3. Пусть $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} =: q^*$. Если $q^* > 1$, то ряд расходится, если $q^* < 1$, то ряд сходится.

Замечание. Если $q^* = 1$, то ряд может сходиться, а может расходиться. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ — сходится, $\sqrt[n]{\frac{1}{n(n+1)}} \to 1$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ — расходится. $\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1$.

Доказательство.

1. $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1 \implies a_n \leqslant q^n$. По признаку сравнения с геометрической прогрессией $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ — сходится.
2. $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1 \implies a_n \not\to 0 \implies$ расходится.
3. Если $q^* > 1$. Найдется n_k : $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \to q^* > 1$ (по определению верхнего предела) $\implies$ начиная с некоторого номера $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} > 1 \implies a_{n_k} > 1 \implies a_n \not\exists$ и ряд расходится.

   Если $q^* < 1$, $q^* = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geqslant n} \sqrt[k]{a_k} \implies$ для больших n $\sup_{k\geqslant n} \sqrt[k]{a_k} < q < 1$. Но при этом $\sqrt[n]{a_n} \leqslant \sup\limits_{k\geqslant n} \sqrt[k]{a_k}$, а значит $\sqrt[n]{a_n} < q$ при больших $n \implies$ ряд сходится.

□

Теорема 3.8 (Признак Даламбера)**.** Пусть $a_n > 0$. Тогда

1. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant d < 1$, то ряд сходится.
2. Если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$, то ряд расходится.
3. Пусть $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = d^*$. Если $d^* < 1$, то ряд сходится. Если $d^* > 1$, то ряд расходится.

Замечание. С единицей все еще ничего непонятно. Смотри предыдущие примеры.

Доказательство.

1. $\frac{a_n}{a_1} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_2}{a_1} \leqslant d^{n-1}$. $a_n \leqslant d^{n-1} \cdot a_1$ и ряд мажорируется геометрической прогрессией $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot d^{n-1}$. Она сходится $\implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — сходится.
2. $a_{n+1} \geqslant a_n \implies a_n \geqslant a_1 > 0$ и $a_n \not\to 0 \implies$ ряд расходится.
3. Если $d^* > 1$. Тогда $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$ при $n \geqslant N \implies a_n \geqslant a_N > 0 \quad \forall n \geqslant N \implies a_n \not\to 0$ и ряд расходится.

   Если $d^* < 1$. Так как $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = d^* \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} < d$ при $n \geqslant N \implies$ ряд сходится по признаку 1.

□

Пример. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Даламбер. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{x^n}{n!} = \frac{x}{n+1} \to 0 < 1$. Ряд сходится.

Коши. $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x}{\sqrt[n]{n!}} \sim \frac{x}{\sqrt[n]{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}} = \frac{x}{ne^{-1} \sqrt[2n]{2\pi n}} \sim \frac{xe}{n} \to 0$.

Теорема 3.9. Пусть $a_n > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d^*$. Тогда $\lim \sqrt[n]{a_n} = d^*$.

Доказательство. $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = d^* \implies \lim \frac{\ln a_{n+1} - \ln a_n}{(n+1)-n} = \ln d^* \xRightarrow{\text{т. Штольца}} \lim \frac{\ln a_n}{n} = \ln d^* \implies \sqrt[n]{a_n} = d^*$. □

Теорема 3.10. Пусть f неотрицательная монотонная: $[1,+\infty) \to \mathbb{R}$. Тогда:

$$\left|\sum_{k=a}^{b} f(k) - \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \max\{f(a), f(b)\}.$$

Доказательство. Картинка :(

$\sum\limits_{k=a}^{b-1} f(k) \geqslant \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \sum\limits_{k=a+1}^{b} f(k)$.

TODO. □

Теорема 3.11 (интегральный признак сходимости ряда)**.** Пусть $f\colon [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ неотрицательная, монотонно убывающая.

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ и $\int\limits_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ ведут себя одинаково.

Доказательство. По предыдущей теореме $S_n :== \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) \geqslant \int\limits_1^n f(x)\mathrm{d}x \geqslant \sum\limits_{k=2}^{n} f(k) = S_n - f(1)$.

Если ряд сходится, то S_n — ограничена $\implies \int\limits_1^n f(x)\mathrm{d}x \implies F(x) = \lim\limits_1^x f$ — ограничена.

Если $\int$ сходится $\implies \int\limits_1^n f$ — ограничена $\implies S_n$ — ограничена $\implies$ ряд расходится. □

Пример.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p > 0$ (иначе члены ряда $\not\to 0$ и ряд расходится).

   $f(x) = \frac{1}{x^p}$. Монотонно убывает. $\sum \frac{1}{n^p}$ и $\int\limits_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ ведут себя одинаково: сходятся при $p > 1$.

2. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$. $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$ монотонно убывает. Поэтому $\int\limits_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$ и $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ ведут себя одинаково.

   Там можно посчитать интеграл.

Следствие.

1. Если $a_n > 0$ и $a_n = \mathcal{O}(\frac{1}{n^p})$ при $p > 1$.
2. Если $a_n > 0$ и $a_n \sim \frac{c}{n^p}$, то при $p > 1$ ряд $\sum a_n$ — сходится, а иначе расходится.