

# Алгоритмы

Харитонцев-Беглов Сергей

27 сентября 2021 г.

## Содержание

<b>1. Асимптотики и правила игры.</b>	<b>1</b>
1.1 Условия . . . . .	1
1.2 Асимптотика . . . . .	1
1.3 Умножение. Карацуба . . . . .	2
1.4 Мастер-Теорема . . . . .	3
<b>2. Линейные структуры данных. Стек</b>	<b>4</b>
2.1 Ликбез по плюсам . . . . .	4
2.2 Время . . . . .	4
2.3 Сумма на отрезке . . . . .	4
2.4 Массив и вектор . . . . .	4
2.5 Список . . . . .	5
2.6 Стек . . . . .	5
2.7 Очередь . . . . .	5
2.8 Дек . . . . .	5
2.9 Стек с минимумом . . . . .	5
2.10 Очередь с минимумом . . . . .	5
<b>3. Структуры данных два</b>	<b>6</b>
3.1 Амортизационные анализ . . . . .	6
3.2 Вектор. Реальное время работы. . . . .	6
3.3 $a^2 + b^2 = N$ двумя указателями . . . . .	6
<b>4. Структуры данных три</b>	<b>7</b>

# 1. Асимптотики и правила игры.

## 1.1. Условия

1 теория в неделю, 1 практика в неделю.

- Теор. часть.

Дедлайн: вторник, 23:59. Потом придут исправления, которые надо сдать до пятницы ( $\leq 23 : 59$ ). Сдача после дедлайна — понижение коэффициента. Два типа задач:

1. Обязательные,  $\Sigma = 10 - 15$
2. Дополнительные. «Overprice»

Домашки сдавать обязательно в  $\text{\LaTeX}$ , если вы не в группе А. Олемской. Дедлайны можно переносить, если вам тяжело/заболели, то можно попросить перенести дедлайн лично для вас. Но если делать так слишком часто, то это неоч :(.

- Контест. 3 три задач:

1. Must Have. Если не сдал — пиши-пропало.
2. Обязательные. Сумма маст хэвов и обязательных — 10-15 баллов.
3. Дополнительные. «Overprice»

Не стоит сначала обращать внимание на мелочи. Попробуйте вычленить основную идею. Уже когда поймете её, стоит пытаться найти интересные случаи.

Как понять что вы поняли алгоритм? Сесть и подумать: можете ли вы прямо сейчас сесть и написать код. Если не можете, то надо задавать вопрос. **Думайте, перед тем, как писать.**

Обучение — интерактивный процесс, старайтесь включаться, если вы переходите в режим зрителя, то становится плохо.

## 1.2. Асимптотика

Как выбрать процессор? У процессора есть несколько остальных характеристик (примеры в скобках): количество ядер (8 ядер), частота (3.3 GHz), набор инструкций, битность (32/64).

У нас все алгоритмы однопоточные, поэтому для нас важна только частота.

$+, -, * /$	1 операция
$a[i]$	1 операция
if	1 операция
$f(..)$	1 операция
if	1 операция

**TODO:** Схема

Время  $\rightarrow$  константа + асимптотика. Асимптотика, если просто, число операций, к которому стремится при увеличении количества входа.

Есть асимптотика используемого времени и памяти. Утверждается, что  $\text{Время} \geq \text{Память}$ , потому что на выделение памяти тоже время (причем 1 ячейка = 1 операция). Второй момент, время довольно безгранично, а память конечна.

**Определение 1.1.**  $f = \mathcal{O}(g(n))$ :  $\exists C > 0 : \exists N : \forall n \geq N : f(n) \leq C \cdot g(n)$

**Определение 1.2.**  $f = \Theta(g(n))$ :  $\exists C_1 > 0, C_2 > 0 : \exists N : \forall n \geq N : C_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq C_2 \cdot g(n)$

**Определение 1.3.**  $f = o(g(n))$ :  $\forall C > 0 : \exists N : \forall n \geq N : f(n) \leq C \cdot g(n)$

**Свойство.**  $f \pm o(f) = \Theta(f)$

**Доказательство.**  $\exists N : \forall n \geq N : o(f) \leq \frac{1}{2}f \Rightarrow \frac{1}{2}f \leq f + o(f) \leq \frac{3}{2}f$  □

**Свойство транзитивности  $\Theta$ .**  $\Theta(\Theta(f)) = \Theta(f)$

**Доказательство.** Внешняя и внутренняя  $\Theta$  зажата константами, а значит можно сказать, что константы внутренней равны внешней. □

**Лемма.**  $\forall P: P(n) = \Theta(n^{\deg P})$

**Доказательство. TODO:** Я не успел, смотри конспекты Сережи. □

### 1.3. Умножение. Карацуба

$735 = 7 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 5 = 7x^2 + 3x + 5$ , если  $x = 10$ . Пусть  $n = x^2 + x + 1$ , а  $m = 3x + 7$ . Тогда  $nm = (x^2 + x + 1)(3x + 7)$ . Дальше для умножения многочленов можно просто раскрыть скобочки. Если записать это в коде, то получим:

```
1 | for (i = 0; i < n; i++)
2 |     for (j = 0; j < m; j++)
3 |         c[i + j] += a[i] * b[j]
4 | //      x^{i+j}      x^i * x^j
```

Данный код работает за  $\mathcal{O}(n^2)$ . Долго человечество не могло решить задачу быстрее. Но Анатолий Карацуба придумал быстрее:

1.  $n = m = 2^k$

2. Разобьем  $A(x)$  и  $B(x)$  на две половины:  $A_1$  и  $A_2$ ,  $B_1$  и  $B_2$ .

$$A(x) \cdot B(x) = (A_1(x) + x^{\frac{n}{2}} \cdot A_2(x))(B_1(x) + x^{\frac{n}{2}} \cdot B_2(x)) = A_1B_1 + x^n \cdot A_2B_2 + x^{\frac{n}{2}} \cdot (A_1B_2 + A_2B_1).$$

**TODO:** схемы

Запишем время работы нашего алгоритма:  $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n$ , что равно (магия пока что)  $\Theta(n^2)$ . Но давайте напишем алгоритм, работающий за  $T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + n \approx n^{1.6}$ .

Для этого заметим, что  $A_1B_2A_2B_1 = (A_1 + A_2)(B_1 + B_2) - A_1B_1 - A_2B_2$ . Здесь сложение многочленов это операция соответственного суммирования коэффициентов перед степенями.

```
1 | Mul(A, B)
2 |   A -> A1 A2
3 |   B -> B1 B2
4 |   c = Mul(A2, B2)
5 |   d = Mul(A1, A2)
6 |   e = Mul(A1 + A2, B1 + B2)
7 |   ...
```

## 1.4. Мастер-Теорема

**Теорема 1.1** (Мастер-Теорема). Пусть  $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + n^c$ , где  $a > 0, b > 1, c \geq 0$ . Тогда:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}), & a > b^c. \\ \Theta(n^c), & a = b^c. \\ \Theta(n^c \log n), & a < b^c \end{cases}$$

**Пример.**  $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n^2 = n^2 + 2(\frac{n}{2})^2 + 4(\frac{n}{4})^2 + \dots = n^2(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots) = n^2 \cdot 2 = \Theta(n^2)$

**Доказательство.**  $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + n^c = n^c + a(\frac{n}{b})^c + a^2(\frac{n}{b^2})^c + \dots = n^c(1 + \frac{a}{b^c} + (\frac{a}{b^c})^2 + \dots)$ . Тогда рассмотрим случаи:

- $a < b^c \Rightarrow \Theta(n^c)$
- $a = b^c \Rightarrow \Theta(n^c \log n)$
- $a > b^c$ . Тогда под скобкой получается сумма вида  $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ . Заметим, что сумма равна  $\frac{(x^{k+1}-1)}{x-1}$ , где  $-1$  – константа,  $x-1$  – тоже. Тогда сумма равна  $\Theta(x^{k+1}) = \Theta(x^k)$ . Тогда получаем  $\Theta(n^c \cdot (\frac{n}{b^c})^{\log_b a}) = \Theta(n^{\log_b a})$

□

**Утверждение 1.2.**  $\forall a, b, c > 0: \log^a n < n^b < c^n$

**Доказательство.** Смотри в конспекте у Сережи.

□

## 2. Линейные структуры данных. Стек

### 2.1. Ликбез по плюсам

Мне было вломас, сорян-борян (я контекст закрывал).

### 2.2. Время

- `sqrt`, `pow`, `sin/cos`, `log` — медленные функции.
- `cin/cout` — довольно медленный ввод. Самый быстрый — `fread/fwrite`. Быстрый ввод-вывод реализован в `optimization.h`.
- Работа с памятью. `vector` и массивы работают за  $\pm$ одинаковое время (разница в 1% чувствуется при очень больших  $n$ , но это только если тупо создания). Проблема, если выделяется/освобождается большое количество маленьких векторов.
- Доступ к памяти. Кеш. Есть несколько уровней памяти: регистры, кеш L1, кеш L2, кеш L3, ОЗУ, HDD. Каждый уровень работает в 2–10 раз больше (HDD раз в 100). Поэтому стоит делать последовательный доступ к элементам, а не случайный. Все из-за подгрузки в кеш.
- Деление и взятие по модулю.
- Рекурсия. Вход в рекурсия не тривиальная операция: нужно переложить регистры, чето-еще чето-еще....

А теперь быстрые операции:

- Операции с `char`, `int`. Все работает из-за векторизации: процессор умеет складывает сразу несколько чисел, которые не пересекаются.

### 2.3. Сумма на отрезке

Дан массив, поступают запросы  $[l, r]$  — сумма на отрезке  $l, r$ . Запросов  $q$ . Решения:

1. Тупое решение  $\mathcal{O}(n \cdot q)$ .
2. Префиксные суммы. Насчитаем массив  $F[i]$  — сумма на префиксе длины  $i$ . Тогда запрос:  $F[r] - F[l]$ . Работает за  $\mathcal{O}(n + q)$ .

### 2.4. Массив и вектор

Массив — просто набор чисел, а вектор еще умеет динамически расширяться (добавляться в конец). Есть `init(n)`, `get(i)`, `set(i, x)`. Все работает за  $\mathcal{O}$ .

Простое решение: каждый раз выделять память. Работает за  $\Theta(n^2)$ .

Нормальное решение будем выделять  $2n$  операций. Теперь добавление в конец работает за  $\mathcal{O}(1)$ , если размер меньше, чем аллоцированный размер. Иначе переаллоцируем на  $2n$ . В среднем работает за  $\mathcal{O}(1)$ .

## 2.5. Список

Для каждого элемента списка хранится два указателя: голова (HEAD) и хвост (TAIL). Ну и у самого списка есть и то, и другое. Можно подцепить к началу и к концу. Удаление из начала из конца.

Можно добавлять после  $i$ ой позиции. Для этого его надо сначала найти.

## 2.6. Стек

Добавление в конец, убирание из конца. Реализация на массиве: просто поддерживаем конец.

## 2.7. Очередь

Добавление в конец, убирание из начала. Можно реализовать на односвязном списке. Можно на массиве, поддерживая два указателя: конец и начало.

## 2.8. Дек

Добавление в конец/начало, взять из начала/конца. Можно реализовать так же, как и вектор, просто теперь выделять не только в конце, но и перед. А можно просто двусвязный список. Преимущества массива: быстрота: кеш, меньше памяти. Преимущества списка: точная  $\mathcal{O}(1)$ .

## 2.9. Стек с минимумом

Просто теперь будет хранить не просто число  $x$ , но и  $(x, \min(x, \text{stack.head}()))$ .

## 2.10. Очередь с минимумом

Реализуем на двух стеках с минимумом: добавляем в первый список. Теперь если надо вытащить, то проверяем сначала второй стек, если он пустой, то сразу переложим весь первый стек во второй. То есть перевернем первый стек. Минимум — минимум на двух стеках. Каждый элемент переживет 4 операции: добавление в 1 стек, удаление из 1, добавление во 2 стек, удаление из второго стека. На каждый элемент  $\mathcal{O}(1)$  операций.

## 3. Структуры данных два

### 3.1. Амортизационные анализ

**Определение 3.1.** Пусть у нас программа разбита на кусочки. Тогда  $t_i$  — реальное время работы. Тогда пусть есть какая-то функция  $\phi$ . Амортизационное время работы  $a_i = t_i + \overbrace{\varphi_{i+1} - \varphi_i}^{\Delta\varphi}$

Среднее время работы программы:  $\frac{\sum t_i}{m} = \frac{\sum a_i}{m} - \frac{\Delta\varphi_i}{m} = \frac{\sum a_i}{m} - (\varphi_n - \varphi_0)$

**Теорема 3.1.**  $\frac{\sum t_i}{m} \leq \max a_i$ .

**Доказательство.** Очевидно. □

### 3.2. Вектор. Реальное время работы.

$t_i = 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ n$ . Тогда  $a_i = t_i + \varphi$ . Интересно рассмотреть функцию  $\varphi = -\text{size}$ . Тогда операция без удвоения  $a_i = n + (-n) = 0$ , а операция у удвоением  $a_i = 1 + 0 = 1$ . Тогда  $\max a_i = \mathcal{O}(1)$ . Еще есть добавочка, так как наша  $\varphi$  — плохая, тогда среднее время работы равно  $\max |a| + \frac{2m}{m}$

### 3.3. $a^2 + b^2 = N$ двумя указателями

Применим время работы к этой задаче. Хотим  $a_i = t_i + \Delta\varphi = \mathcal{O}(1)$ . В качестве функции  $\varphi$  можно выбрать  $B$ .  $\varphi \geq 0$ , но  $\phi_0 \neq 0$ . Ну тогда

$$\frac{\sum t_i}{m} \leq \max a_i + \frac{\max |\varphi|}{m} = \mathcal{O}(1).$$

Т.к.  $\max |\varphi| = m = \sqrt{N}$ , а  $\max a_i = \mathcal{O}(1)$ .

## 4. Структуры данных три

Нет :(