

Алгебры

Харитонцев-Беглов Сергей

2 ноября 2021 г.

Содержание

1. Теория чисел	1
1.1 НОД, делимость, линейные диофантовы уравнения	1
2. Продолжение теории чисел	4
2.1 Пара комментариев про предыдущую лекцию	4
2.2 Основная теорема арифметики	4
3. Кольца вычета и их друзья	7
3.1 Группы	7
3.2 Кольца	8
3.3 Построение кольца вычетов	8
3.4 Квадратное уравнение	10
3.5 Китайская теорема об остатках	10
3.6 Группы вычетов и криптографические протоколы	15
3.7 Алгоритм RSA	15
3.8 Генерация простых, тесты на простоту	16

1. Теория чисел

1.1. НОД, делимость, линейные диофантовы уравнения

Определение 1.1. Диофантовым уравнением называется уравнение, которое можно решить в \mathbb{Z} .

Рассмотрим линейное диофантово уравнение

$$ax + by = c$$

Если бы мы были в \mathbb{R} , то решение быстро бы нашлось: $y = \frac{c-ax}{b}$. Но в целых штуках такая штука не всегда будет решением, т.к. b не всегда делит $c - ax$.

Определение 1.2. a делится на b ($a : b, b|a$), если $\exists c \in \mathbb{Z} : a = bc$.

Простые свойства:

1. $\forall a : 1|a$.
2. $\forall a : a|0$.
3. $\forall a, b, c, k, l \in \mathbb{Z} : a : c \wedge b : c \Rightarrow (ka + lb) : c$.

Доказательство. $a, b : c \Rightarrow \exists d, e : \begin{cases} a = c \cdot d \\ b = c \cdot e \end{cases}$. Тогда $ka + lb = k \cdot cd + l \cdot ce = c \cdot (kd + le) \Rightarrow (ka + lb) : c$ □

$$4. \forall k \neq 0, k \in \mathbb{Z} : a : b \iff ak : bk.$$

$$5. a : b \iff a^2 : b^2.$$

$$6. a : b \Rightarrow \begin{cases} |a| \geq |b| \\ a = 0 \end{cases}.$$

$$7. a : b, b : c \Rightarrow a : c.$$

$$8. a : a.$$

$$9. a : b, b : a \Rightarrow a = \pm b.$$

Теорема 1.1 (О делении с остатком). $a, b \in \mathbb{Z}, \exists!(q, r) : \begin{cases} q, r \in \mathbb{Z} \\ a = b \cdot q + r \\ 0 \leq r < |b| \end{cases}$

Доказательство.

- Единственность. Пусть есть два результата: $a = b \cdot q_1 + r_1$ и $a = b \cdot q_2 + r_2$. Тогда приравняем:
 $b \cdot q_1 + r_1 = b \cdot q_2 + r_2 \iff b(q_1 - q_2) = r_2 - r_1 \xrightarrow[r_1 - r_2 < |b|]{r_1, r_2 \in [0; |b|-1]} r_2 - r_1 : b \xrightarrow{\text{Свойство 6}} r_2 - r_1 = 0 \iff r_1 = r_2 \Rightarrow b(q_1 - q_2) = 0 \iff q_1 = q_2$
- Существование. Здесь мы для конкретного b проверяем, что все a подходят.

I. $a \geq 0, b \geq 0$.

– База: $a = 0$. $0 = b \cdot 0 + 0$. $(0, 0)$ – подходит.

– Переход: $a \rightarrow a + 1$.

$a = b \cdot q + r$, где $0 \leq r < b$.

$a + 1 = b \cdot q + (r + 1)$.

* $r < b - 1$. Тогда $r + 1 < b \Rightarrow (q, r + 1)$ – подходит.

* $r = b - 1$. Тогда $a + 1 = b \cdot q + b = b \cdot (q + 1) \Rightarrow (q + 1, 0)$ – подходит.

II. $a < 0, b > 0$. $a < 0 \Rightarrow -a > 0$.

Из I: $\exists(q, r) : -a = b \cdot q + r$, где $0 \leq r < b$. Соответственно $a = -bq - r$.

– $r = 0$. $a = b \cdot q + 0 \Rightarrow (-q, 0)$ – подходит.

– $r > 0 \Rightarrow r \in [1; b - 1]$. $a = -bq - b + b - r = b \cdot (-q - 1) + b - r \Rightarrow (-q - 1, b - r)$ – подходит

III. $b < 0 \iff -b > 0$. $\exists q, r : a = (-b) \cdot q + r$, где $0 \leq r < |b|$, тогда $a = b(-q) + r \Rightarrow (-q, r)$ – подходит

□

Вернемся к диофантову уравнению $ax + by = c$, где a, b, c фиксированы, а x, y – переменные. Пусть только a, b – фиксированы. Тогда подумаем, когда же $ax + by = c$ имеет решения. Тогда решим задачу: описать $\{ax + by \mid x, y \in \mathbb{Z}\} =: \langle a, b \rangle$

Пример. $\langle 1, b \rangle = \mathbb{Z}$

Пример. $\langle 4, 6 \rangle =$ четные числа

Заметим:

$$1. \forall m, n \in \langle a, b \rangle : m + n \in \langle a, b \rangle$$

$$2. m \in \langle a, b \rangle \Rightarrow km \in \langle a, b \rangle \forall k$$

Определение 1.3. Пусть $I \subset \mathbb{Z}$. I называется идеалом, если

$$\begin{cases} m, n \in I \Rightarrow m + n \in I \text{ (замкнутость по сложению)} \\ m \in I \Rightarrow \forall k \in \mathbb{Z} : k \cdot m \in I \text{ (замкнутость по умножению)} \\ I \neq \emptyset \end{cases}$$

Пример. $\{0\}$ – идеал.

Пример. \mathbb{Z} – идеал (собственный).

Пример. $\langle a, b \rangle$ – идеал, порожденный a и b .

$\forall a \in \mathbb{Z} \langle a \rangle = \{ax \mid x \in \mathbb{Z}\}$ – главный идеал (порожденный a).

Пример. $\{0\} = \langle 0 \rangle, \mathbb{Z} = \langle 1 \rangle, \langle 4, 6 \rangle = \langle 2 \rangle$

Теорема 1.2. В \mathbb{Z} любой идеал главный.

Доказательство. $I = \{0\}$ – ок. Тогда пусть $I \neq \{0\}$. Пусть $a \in I \wedge a < 0 \Rightarrow -a = (-1)a \in I \wedge -a \in \mathbb{N}$. То есть $I \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$. Найдем наименьшее $r \in I \cap \mathbb{N}$. Проверим, что $I = \langle r \rangle$ (тогда I – главный). Надо проверить $\langle r \rangle \subset I \wedge I \subset \langle r \rangle$.

- $x \in \langle r \rangle$. То есть $x = r \cdot z$. Т.к. $r \in I$, то $r \cdot z \in I$ (по определению идеала), т.е. $\langle r \rangle \subset I$.
- Пусть $a \in I$. Поделим с остатком: $a = r \cdot q + r_1$, $0 \leq r_1 < r$, то есть $r_1 = a - r \cdot q = a + (-q) \cdot r$. Т.к. $r \in I \Rightarrow (-q) \cdot r \in I \wedge a \in I \Rightarrow a + (-q) \cdot r \in I$, т.е. $r_1 \in I$. Но! $0 \leq r_1 < r$, а r — минимальное натуральное из I . Тогда $r_1 = 0 \Rightarrow a = r \cdot q$, т.е. $a \in \langle r \rangle$, а значит $I \subset \langle r \rangle$.

□

Определение 1.4. Пусть $a, b \in \mathbb{Z}$. Тогда $d = \text{НОД}(a, b) = \gcd(a, b) = (a, b)$

Докажем единственность. $\begin{cases} a : d, b : d \\ a : d_1, b : d_1 \end{cases} \iff d : d_1$. Тогда $d : d_1 \wedge d_1 : d$, а значит $d = \pm d_1$.

Теорема 1.3. 1. $\forall a, b \exists d = (a, b)$

2. $\exists x, y \in \mathbb{Z} : d = ax + by$

3. $ax + by = c$ имеет решение $\iff c : d$.

Доказательство. Докажем каждый пункт отдельно:

- Рассмотрим $\langle a, b \rangle$ — идеал. Он главный по предыдущей теореме: $\exists d \langle a, b \rangle = \langle d \rangle$.

- $d \in \langle d \rangle = \langle a, b \rangle$. А значит $\exists x, y : d = ax + by$.
 $a = a \cdot 1 + b \cdot 0 \in \langle a, b \rangle = \langle d \rangle$, значит $a : d$. Аналогично $b : d$.

С другой стороны пусть $a : d, b : d$, тогда $d = \underbrace{ax}_{:d} + \underbrace{by}_{:d} : d$.

Пусть $\exists d_1 : a : d_1 \wedge a : d_1 \Rightarrow d = ax + by : d_1 \Rightarrow d$ — максимальный общий делитель.

- $ax + by = c$ имеет решение $\iff c \in \langle a, b \rangle = \langle d \rangle$. А $c \in \langle d \rangle \iff c : d$.

□

Определение 1.5. a, b — взаимно просты, если $(a, b) = 1$, то есть $\langle a, b \rangle = \mathbb{Z}$

Лемма. $\begin{cases} ab : c \\ (a, c) = 1 \end{cases} \Rightarrow b : c$.

Доказательство. По условию $ab : c$, значит $\exists x \in \mathbb{Z} : ab = c \cdot x$.

Так как $(a, c) = 1$, то $\exists y, z \in \mathbb{Z} : ay + cz = 1$. Тогда домножим все на b и получим $aby + czb = b$.

А значит $\begin{cases} aby : c \\ czb : c \end{cases} \Rightarrow b : c$

□

2. Продолжение теории чисел

2.1. Пара комментариев про предыдущую лекцию

1. Для любого набора $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ $\exists \gcd(a_1, \dots, a_n)$ и $\exists x_1, \dots, x_n : \text{НОД} = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n$.
НОД - такое d , что $\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \langle d \rangle$.
2. Алгоритм Евклида.
 - $(a, b) = (a, b - a)$, но и $b = a \cdot q + r$, тогда $(a, b) = (a, r)$.
 - Пусть $r = b \bmod a$, $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$. Сделаем последовательность $x_{n+1} = x_{n-1} \bmod x_n$. Тогда $(x_1, x_2) = (x_3, x_4) = \dots$. Заметим, что x_n — убывает.
 - Тогда существует такое x_n , что $(x_1, x_2) = (x_n, 0) = x_n$.

2.2. Основная теорема арифметики

Определение 2.1. $x \in \mathbb{Z}, x \neq \pm 1$, тогда x — простое число, если $x = x_1 x_2 \iff \begin{cases} x_1 = \pm 1 \\ x_2 = \pm 1 \end{cases} \forall x_1, x_2$

Свойство *. x — обладает свойством *, $\iff x \neq \pm 1 \wedge ab : x \Rightarrow \begin{cases} a : x \\ b : x \end{cases}$

Утверждение 2.1. p — простое $\iff p$ — обладает свойством *.

Доказательство.

- \Leftarrow Пусть $p = x_1 x_2$. Тогда $x_1 x_2 : p$ по *: $\begin{cases} x_1 : p \\ x_2 : p \end{cases}$. Пусть $x_1 = py$. $p = x_1 x_2 = pyx_2$. $1 = yx_2 \Rightarrow x_2 = \pm 1$. Получили определение простого числа.
- \Rightarrow . Пусть p — простое и $ab : p$. $d = (a, p)$, p — простое $\Rightarrow d = p \vee d = 1$.
 $d = p \Rightarrow a : p$. $d = 1 \wedge (a, p) = 1$, по лемме $ab : p \wedge (a, p) = 1 \Rightarrow b : p$.

□

Теорема 2.2 (Основная теорема арифметики). Пусть $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$. Тогда n единственным образом с точностью до перестановки сомножителей, представимо в виде (p_i — простые, $p_i > 0$)

$$n = \varepsilon p_1 p_2 \dots p_k, \varepsilon = \pm 1 = \text{sign}(n).$$

Или, иными словами, существует единственное каноническое разложение:

$$n = \varepsilon p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}, \varepsilon = \pm 1 = \text{sign}(n), a_i > 0, p_1 < p_2 < \dots < p_k.$$

Доказательство.

1. Существование. От противного. Пусть \exists нераскладываемое число. Рассмотрим минимальное такое число.
 - $x = 1$ — пустое произведение. Противоречие.

- $x = p$ — произведение из 1 члена. Противоречие.
- $x = x_1 x_2$, $x_1, x_2 \neq \pm 1 \Rightarrow x_1, x_2 < x \Rightarrow x_1, x_2$ — раскладываемые. Или $x_1 = p_1 p_2 \dots p_n$, $x_2 = q_1 q_2 \dots q_m \Rightarrow x = p_1 p_2 \dots p_n q_1 q_2 \dots q_m$.

2. Единственность. Пусть есть плохие числа. X — минимальное из них. $q_1 q_2 \dots q_n = X = p_1 p_2 \dots p_m$. Значит $p_1 p_2 \dots p_m : q_1 \Rightarrow p_1 : q_1 \vee p_2 \dots p_m : q_1$. Тогда $\exists p_i : q_1$. Тогда можно поделить на q_1 , но p_i — простое, тогда $p_i = q_1$. Рассмотрим $X' = \frac{X}{q_1}$. $q_2 q_3 \dots q_n = X' = p_1 p_2 \dots p_{i-1} p_{i+1} \dots p_m$. $X' < X$, значит разложения X' равны, а значит, т.к. $p_i = q_1$, то равны и исходные разложения. Получили противоречие.

□

Контр-примеры для О. Т. А:

1. Рассмотрим $2\mathbb{Z}$ — множество четных чисел. Теперь 6 — простое, как и все $(4k + 2)$.

Теперь как разложить на простые 60? $60 = 2 \cdot 30$, а также $60 = 6 \cdot 10$.

2. $\mathbb{Z} \cup \{\sqrt{5}\} = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Заметим, что $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}\{\sqrt{5}\}$

$$4 = 2 \cdot 2 = \overbrace{(\sqrt{5} - 1)}^{\text{простое}} \overbrace{(\sqrt{5} + 1)}^{\text{простое}}$$

Определение 2.2. $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, p$ — простое, тогда степень вхождения $(V_p(n) = k)$ p в n — $\max\{k \mid n : p^k\}$

В терминах разложения: $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$. $V_p(n) = a_i$, а если p нет в разложении, то $V_p(n) = 0$.

Свойства: $V_p(n)$

1. $V_p(xy) = V_p(x) + V_p(y)$
2. $V_p(x + y) \geq \min(V_p(x), V_p(y))$, а если $V_p(x) \neq V_p(y)$, то строгое равенство

Доказательство. $V_p(x) = a, V_p(y) = b$ и $x = p^a \cdot \tilde{x}, y = p^b \cdot \tilde{y}$.

Не умаляя общности: $a \geq b$. Тогда $x + y = p^a \tilde{x} + p^b \tilde{y} = p^b (p^{a-b} \tilde{x} + \tilde{y})$. Если $a > b$, то $\underbrace{p^{a-b} \tilde{x}}_{:p} + \tilde{y}$

не делится на p . А значит $V_p(x + y) = \min(V_p(x), V_p(y))$. В случае же равенства, получаем $p^b \cdot (\tilde{x} + \tilde{y})$, для которого уже $V_p(x + y) \geq \min(V_p(x), V_p(y))$ □

Еще следствия из О. Т. А.

1. $x : y \Rightarrow V_p(x) \geq V_p(y) \forall$ простого p
2. $x = p_1^{a_1} \dots p_n^{a_n}, y = p_1^{b_1} \dots p_n^{b_n} \Rightarrow (x, y) = p_1^{\min(a_1, b_1)} \dots p_n^{\min(a_n, b_n)}$
3. $x = z^k \iff \forall$ простого $p \ V_p(x) : k$
4. Количество натуральных делителей $x = \prod x_i^{a_i}$ равно $\tau(x) = \prod (a_i + 1)$

Доказательство. Делители X однозначно соотносятся с $\{(b_1, b_2, \dots, b_n) \mid 0 \leq b_i \leq a_i\}$ □

5. $\sigma(x)$ — сумма натуральных делителей x . Тогда $\sigma(x) = \frac{\prod (p_i^{a_i+1} - 1)}{\prod (p_i - 1)}$.

Доказательство. $\frac{\prod (p_i^{a_i+1}-1)}{\prod (p_i-1)} = \prod \frac{p_i^{a_i+1}-1}{p_i-1} = \prod (1+p_i+\dots+p_i^{a_i})$ = раскроем скобки. = сумма делителей. \square

6.

Определение 2.3. m — НОК (LCM, $[a, b]$), если $m : a, m : b$ и $\forall n \ n : a \wedge n : b \Rightarrow n : m$

$$[a, b] = \prod p_i^{\max(a_i, b_i)}$$

7. $a, b \in \mathbb{Z} \ (a, b) = 1 \ ab = c^k \Rightarrow \exists c_1, c_2 \ a = c_1^k, b = c_2^k$

3. Кольца вычета и их друзья

Рассмотрим $a^2 - b^2 = 15^{2021} \iff (a-b)(a+b) = 3^{2021} \cdot 5^{2021} \Rightarrow \begin{cases} a+b = 3^k \cdot 5^l \\ a-b = 3^{2021-k} \cdot 5^{2021-l} \end{cases} \Rightarrow$
 $a = \frac{3^k \cdot 5^l + 3^{2021-k} \cdot 5^{2021-l}}{2}.$

Уравнение $81a^2 - 169b^2 = 15^{2021}$ — тоже решается. А вот $a^2 - 2b^2 = 15^{2021} \iff (a - \sqrt{2}b)(a + \sqrt{2}b) = 3^{2021}5^{2021}$ уже не решается в целых числах. Если вылезать, то надо расписывать разложение $a + \sqrt{2}b$, "3", "5" и единственность разложения на множители.

Еще один пример: $a^2 + b^2 = 15^{2021}$. Посмотрим на остатки от деления на 4: $a^2, b^2 \pmod 4 \in \{0, 1\}$, $15^{2021} \pmod 4 = 3$. Но для этого нам нужно понимать что-то про кольцо вычетов по модулю.

3.1. Группы

Определение 3.1. Группой называется пара $(G, *)$, где G — множество, а $*$: $G \times G \rightarrow G$ — бинарная операция, так что выполнены свойства:

1. $\forall a, b, c \in G : (a * b) * c = a * (b * c)$. Ассоциативность.
2. $\exists e \in G : \forall a \in G a * e = e * a = a$. Существование нейтрального элемента.
3. $\forall a \in G \exists a^{-1} : a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$. Существование обратного элемента.

Несколько примеров:

1. $(\mathbb{Z}, +)$, $e = 0$, $a^{-1} = -a$.
2. $(\mathbb{Q} \setminus 0, \cdot)$, $e = 1$, $a^{-1} = \frac{1}{a}$.
3. $(2^M, \triangle)$, $e = \emptyset$, $A^{-1} = A$.

Определение 3.2. Группа G называется абелевой, если $\forall x, y \in G : x * y = y * x$.

Пример Главный пример группы. Пусть $G = S(M) = \{f : M \rightarrow M \mid f \text{ — биекция}\}$, операция — композиция функций

- Ассоциативность — упражнение.
- Нейтральный элемент — $f(x) = x$, тождественное отображение.
- f^{-1} = обратная функция. Она существует, так как f — биекция.

Получили группы по композиции.

Пример. $M = \{1, 2, 3\}$. $f_1, f_2 : M \rightarrow M$ — биекция. f_1 — меняет местами 1 и 2: $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 3$, f_2 переставляет по циклу: $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1$. $f_2 \circ f_1 : 1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 1$. $f_1 \circ f_2 : 1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 2$. Ну значит группа не абелева.

Докажем простейшие свойства групп:

1. $\exists!$ нейтральный элемент.

Доказательство: заметим, что $e_1 = e_1 * e_2 = e_2$

2. $\exists!$ обратный элемент.

Доказательство: пусть b, c — обратные к a . Тогда $(b * a) * c = e * c = c$, но при этом $b * (a * c) = b * e = b$. Значит $b = c$.

3. $a * b = a * c \iff b = c$

Доказательство: $a * b = a * c \iff (a^{-1} * a) * b = (a^{-1} * a) * c \iff e * b = e * c \iff b = c$

3.2. Кольца

Определение 3.3. Кольцо — тройка $(R, +, \cdot)$ (R — множество, $+, \cdot : R \times R \rightarrow R$), такая что:

1–4. $(R, +)$ — абелева группа. Нейтральный элемент обозначается 0 , обратный к a — $-a$.

5. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ и $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$. Дистрибутивность.

Определение 3.4. Кольцо R называется ассоциативным, если выполнено

6. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

Определение 3.5. Кольцо R называется коммутативным, если

7. $a \cdot b = b \cdot a$

Определение 3.6. Кольцо R называется кольцом с 1 , если

8. $\exists 1 \in R : 1 \cdot a = a \cdot 1 = a$

Пример. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ — коммутативное ассоциативное кольцо с 1 .

Определение 3.7. Коммутативное ассоциативное кольцо с 1 называется полем, если выполнена

9. $\forall a \in R \setminus \{0\} \exists b \in R \text{ } ab = 1 \wedge 1 \neq 0$

Пример. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ — поле, а вот $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ — не поле.

3.3. Построение кольца вычетов

Определение 3.8. Пусть $a, b \in \mathbb{Z}$, говорят, что a сравнимо с b по модулю n ($a \equiv b \pmod{n}$), если $(a - b) : n$. Эквивалентное определение: a и b имеют одинаковые остатки по модулю n .

Докажем, что сравнимость по модулю — отношение эквивалентности.

- $a \equiv a \pmod{n} \iff 0 : n$
- $(a - b) : n \iff (b - a) : n \Rightarrow a \equiv b \pmod{n} \iff b \equiv a \pmod{n}$.
- $(a - b) : n \wedge (b - c) : n \Rightarrow (a - b + b - c) : n \iff (a - c) : n$

Наблюдение. $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow \bar{a} = \{b \mid a \equiv b\} = \{a + kn \mid k \in \mathbb{Z}\}$. $\mathbb{Z} = \bar{0} \cup \bar{1} \dots$

Определение 3.9. Фактор множества по отношению \equiv обозначается $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Элементы $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ называются классами вычетов по модулю.

$$1. a \equiv b \pmod{n} \wedge c \equiv d \pmod{n} \iff a + c \equiv b + d \pmod{n} \wedge ac \equiv bd \pmod{n}.$$

$$\text{Доказательство } (a + c) - (b + d) = \underbrace{(a - b)}_{\vdots n} - \underbrace{(d - c)}_{\vdots n} \vdots n.$$

$$\text{Доказательство } ac - bd = ac - bc + bc - bd = c(a - b) + b(c - d) \vdots n.$$

Значит класс суммы и произведения зависит только от классов множителей и слагаемых.

Теорема 3.1. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Тогда класс $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$, где $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a + b} \wedge \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b}$ — ассоциативное коммутативное кольцо с единицей.

Доказательство. Все аксиомы — следствия из \mathbb{Z} . Докажем для примера $(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a + b + c} = \overline{a} + \overline{b + c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$. \square

Закон сокращения не очень работает в кольце вычетов по модулю: $2 \cdot 1 = 2 \cdot 4 \pmod{6}$, но $1 \not\equiv 4 \pmod{6}$.

Определение 3.10. Пусть R — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей. Тогда $\forall a \in R : a$ — делитель нуля $\Rightarrow \exists b \neq 0 : ab = 0$.

Пример. n — составное: $n = p_1 p_2$, n в $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $\overline{p_1 p_2} = \overline{n} = 0$. Значит p_1, p_2 — делители нуля.

Лемма. $\forall a, b, c \in R : ab = ac \wedge a$ — не делитель нуля $\Rightarrow b = c$.

Доказательство. $ab = ac : ab - ac = 0 \iff a(b - c) = 0$. a — не делитель нуля $\Rightarrow b - c = 0 \iff b = c$. \square

Лемма. $a \in R : a$ — обратим $\Rightarrow a$ — не делитель нуля.

Доказательство. Пусть $ab = 0 \Rightarrow a^{-1}(ab) = a^{-1} \cdot 0$; $(a^{-1}a)b = 0 \Rightarrow b = 0$. \square

Замечание. Обратное неверно: в \mathbb{Z} 2 — не делитель нуля, но $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

Теорема 3.2. $\forall a \in \mathbb{Z} : \overline{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Тогда:

1. \overline{a} — обратим $\iff (a, n) = 1$
2. \overline{a} — делитель нуля $\iff (a, n) \neq 1$.

Доказательство. \overline{a} — обратим $\iff \exists \overline{b} : \overline{a}\overline{b} = \overline{1} \iff \exists b : ab = 1 \pmod{n} \iff \exists b : ab - 1 \vdots n \iff \exists b, k : ab - 1 = nk \iff \exists b, k : ab - nk = 1 \iff (a, n) = 1$.

$(a, n) = 1 \Rightarrow \overline{a}$ — обратим \Rightarrow не делитель нуля.

$(a, n) = d > 1, a = dx$. Тогда $\overline{a} \cdot \overline{\frac{n}{d}} = \overline{dx} \overline{\frac{n}{d}} = \overline{nx} = 0$ и $\overline{\frac{n}{d}} \neq 0$. Значит $0 < |\frac{n}{d}| < n$. \square

Следствие. n — простое $\Rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ — поле.

Доказательство. Достаточно проверить существование обратного. $\overline{a} \neq \overline{0} \iff a \not\vdots n \iff (a, n) = 1 \iff a$ — обратим. \square

Определение 3.11. \forall ассоциативного кольца с 1 R : R — называется кольцом без делителей нуля (область целостности), если делитель нуля только 0. $ab = 0 \iff a = 0 \vee b = 0$.

Замечание. R — область $\Rightarrow ax_1 = ax_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ ($a \neq 0$).

Вернемся к диофантову уравнению $ax + by = c$, $(a, b) = 1$. Тогда $ax = c \pmod{b}$ и $by = c \pmod{a}$. Тогда $\overline{ax} = \overline{c}$ в $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \xrightarrow{(a, b)=1} \overline{x} = \overline{a}^{-1} \overline{c} \pmod{b}$. Тогда $x = x_0 + kb$.

3.4. Квадратное уравнение

Посмотрим на $x^2 + px + q = 0$ в $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Работает ли $x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$. Есть проблемки:

1. $p^2 - 4q$ — не квадрат в $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (нет решений).
2. $2 = 0$. Или $\nexists 2^{-1}$ (нельзя поделить на два).
3. n — не простое. Тогда из $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ не следует, что $x = x_1 \vee x = x_2$. Пример: $x^2 - 1 = 0 \pmod{8}$

3.5. Китайская теорема об остатках

Чтобы решать такие уравнения можно свести к простым модулям при помощи китайской теоремы об остатках.

Вопрос такой: как связаны $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$. Пусть $P_m : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, а $P_{mn} : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$, P_m, P_{mn} — гомоморфизмы соответствующих колец.

Определение 3.12. Гомоморфизмом колец $f : R_1 \mapsto R_2$ называется такое отображение, что $\forall r_1, r_2 \in R_1 : f(r_1 + r_2) = f(r_1) + f(r_2), f(r_1 r_2) = f(r_1) \cdot f(r_2), f(1) = 1$.

Определение 3.13. Гомоморфизмом группы $f : G_1 \mapsto G_2$ называется такое отображение, что $\forall g_1, g_2 \in G_1 : f(g_1 g_2) = f(g_1) \cdot f(g_2)$.

Замечание. f — гомоморфизм групп $G_1, G_2 \Rightarrow f(e_{G_1}) = e_{G_2}$. В частности f — гомоморфизм колец $R_1, R_2 \Rightarrow f(0_{R_1}) = 0_{R_2}$.

Доказательство. $f(e_{G_1}) = f(e_{G_1} \cdot e_{G_1}) = f(e_{G_1}) \cdot f(e_{G_1}); e_{G_2} \cdot f(e_{G_1}) = f(e_{G_1}) \cdot f(e_{G_1}); e_{G_2} = f(e_{G_1})$ \square

Существует такой гомоморфизм колец $P_{mn,m}$, что $P_{mn,m} \cdot P_{mn} = P_m$ (тут подразумевается композиция гомоморфизмов)

Доказательство. Предъявим такой гомоморфизм: $P_{mn,m}(\overline{a_{mn}}) = \overline{a_m}$. \square

Корректность. $\overline{a_{mn}} = \overline{b_{mn}} \iff a \equiv b \pmod{mn} \iff a - b : mn \Rightarrow a - b : m \Rightarrow \overline{a_m} = \overline{b_m}$ \square

Аналогично существует гомоморфизм $P_{mn,n}$. То есть $\overline{a_{mn}} \mapsto (\overline{a_m}, \overline{a_n})$ — отображение. То есть $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Отступление.

Определение 3.14. R_1, R_2 — кольца. Рассмотрим $(R_1 \times R_2, +, \cdot) : (r_1, r_2) +_{R_1 \times R_2} (r'_1, r'_2) := (r_1 +_{R_1} r'_1, r_2 +_{R_2} r'_2)$, где $+_{R_1 \times R_2}, +_{R_1}, +_{R_2}$ — операции сложения для соответствующих множеств. То же самое для умножения. Тогда $R_1 \times R_2$ — тоже кольцо, т.к. соответствующие свойства операций унаследуются, что можно проверить самостоятельно. Но заметка: если R_1 и R_2 были областями целостности, то их произведение областью целостности почти никогда не будет.

Итак мы построили гомоморфизм $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, назовём его $i_{m,n}$. Подумаем про его свойства. Во-первых заметим, что слева mn элементов, но и справа mn элементов!

Определение 3.15. Биактивный гомоморфизм (групп, колец, ...) (называется изоморфизмом, \cong) если каждым a_i задано ровно одно b_j и наоборот.

Теорема 3.3 (Китайская теорема об остатках). Пусть $(m, n) = 1$, тогда $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Доказательство.

1. $i_{m,n}$ — инъективно. Пусть $i_{m,n}(\overline{a_{m,n}}) = (\overline{a_m}, \overline{a_n})$, $i_{m,n}(\overline{b_{n,m}}) = (\overline{b_m}, \overline{b_n}) \Rightarrow a - b : m \wedge a - b : n \xrightarrow{(n,m)=1} a - b : mn$.
2. Раз $i_{m,n} : \mathbb{Z}/nm\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ инъективно и $|\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}| = |\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}|$, то $i_{m,n}$ — сюръективно, а значит и биективно.

□

Теорема 3.4 (КТО 2). $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n \in \mathbb{Z} \wedge (m_i, m_j) = 1 \Rightarrow \mathbb{Z}/m_1, m_2, \dots, m_n\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m_2\mathbb{Z} \dots$ — изоморфизм колец.

Теорема 3.5 (КТО без колец). $\forall m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z} : \forall i, j (m_i, m_j) = 1, \forall a_1, \dots, a_n \Rightarrow \exists x_0 \in \mathbb{Z} : x \equiv a_1 \pmod{m_1} \wedge \dots \wedge x \equiv a_n \pmod{m_n} \iff x \equiv x_0 \pmod{\prod_i m_i}$

То есть по факту мы хотим получить обратную функцию к $f_{m_1, m_2, \dots} : \overline{a_{m_1 m_2 m_3}} \mapsto (\overline{a_{m_1}}, \overline{a_{m_2}}, \overline{a_{m_3}})$. Пусть тогда $g = f^{-1}$. Заметим, что g — гомоморфизм колец. Раз g сохраняет операции, то $g(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = g(\overline{x}, 0, 0) + g(0, \overline{y}, 0) + g(0, 0, \overline{z}) = \overline{x}g(1, 0, 0) + \overline{y}g(0, 1, 0) + \overline{z}g(0, 0, 1)$.

$$\text{Пусть } x = g(1, 0, 0) \iff \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{m_1} \\ x \equiv 0 \pmod{m_2} \\ x \equiv 0 \pmod{m_3} \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{m_1} \\ x \equiv 0 \pmod{m_2 m_3} \end{cases}.$$

В группе $\forall a \neq e \forall x : ax \neq x$. Тогда посмотрим группу $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \supset \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Тогда для любого $n \in \mathbb{N} : n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p_1^{\alpha_1}\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/p_n^{\alpha_n}\mathbb{Z}$.

Пример. Для того, чтобы решить $b^2 = a$ надо решить $b_i^2 = a$ для все составляющих.

Определение 3.16. Пусть C — группа ($a \in C$), тогда порядок элемента a : $\text{ord}(a) = \{\min k \in \mathbb{N} \mid a^k = 1\}$. А если такого k нет, то $\text{ord}(a) = \infty$

Лемма. Пусть G — группа ($a \in G$). $\langle a \rangle = \{a, a^2, \dots; a^{-1}, (a^{-1})^2, \dots, e\} = \{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Тогда $(\langle a \rangle, *)$ — группа.

Доказательство. Проверим замкнутость относительно операций: 0-рной ($\{\} \rightarrow e$), унарной $a \rightarrow a^{-1}$, бинарной $(a, b) \rightarrow a * b$.

- $e = a^0 \in \langle a \rangle$
- $b \in \langle a \rangle. b = a^k \Rightarrow b^{-1} = a^{-k} \in \langle a \rangle$.
- $b, c \in \langle a \rangle. b = a^k, c = a^l \Rightarrow bc = a^{k+l} \in \langle a \rangle$.

□

Определение 3.17. $\langle a \rangle$ называется циклической группой, порожденной a . G — циклическая группа $\iff \exists a \in G : G \cong \langle a \rangle$

Теорема 3.6 (О классификации циклических групп). $\text{ord } a = \infty \Rightarrow \langle a \rangle \cong (\mathbb{Z}, +)$. $\text{ord } a = k \in \mathbb{N} \Rightarrow \langle a \rangle \cong (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, +)$

Доказательство. $f : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow \langle a \rangle$. То есть $k \mapsto a^k$. $f(k + l) = a^{k+l} = a^k \cdot a^l = f(k) + f(l)$, т.е. f — гомоморфизм. А ещё f — сюръекция по определению циклической группы.

Докажем инъективность. Пусть $a^k = a^l \iff a^{k-l} \cdot a^l = ea^l \iff a^{k-l} = e$. Но $\text{ord } a = \infty$! Значит $k - l = 0$.

Теперь $\text{ord } a \neq \infty$. Тогда построим $f : \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \rightarrow \langle a \rangle$, то есть $\overline{m}_k \mapsto a^m$.

Корректность: $\overline{m}_k = \overline{n}_k \Rightarrow (m - n) : k$. То есть $m = n + k \cdot l$. Значит $a^m = a^{n+k \cdot l} \iff a^m = a^n \cdot a^{kl} = a^n$.

Аналогично первому случаю доказывается, что f — гомоморфизм и сюръекция.

Инъективность: $f(\overline{m}) = f(\overline{n}) \iff a^m = a^n \iff a^{m-n} = e, m - n = qk + r, 0 \leq r < k$; $a^{qk+r} = e \iff (a^k)^q \cdot a^r = e \iff a^r = e$, но $r < k$, а k — наименьшая натуральная степень обращения элемента в единицу, а значит $r = 0$, т.е. $f(\overline{n}) = f(\overline{m}) \iff (m - n) : k$, т.е. мы имеем дело с одним классом эквивалентности. □

Простыми словами, если $\text{ord } a = \infty \Rightarrow$ в последовательности $\{a^i\}$ — элементы не повторяются. А если $\text{ord } a \neq \infty$, то элементы повторяются с периодом k , а внутри периода элементы не повторяются.

Теорема 3.7 (Теорема Лангранжа). Пусть G — группа. $\forall G$ — n -элементная группа, тогда $\forall a \in G : n : \text{ord } a$

Доказательство. Пусть $\text{ord } a = k$. Рассмотрим отображение $m_a(x) = ax$. $m_a G \rightarrow G$. Нарисуем граф отображений (вершины — элементы G , ребра (стрелки) — $x \rightarrow ax$). $x \rightarrow ax \rightarrow a^2x \rightarrow a^3x \rightarrow \dots \rightarrow a^{k-1}x \rightarrow a^kx = x$, так как для $\forall i, j < k : a^i x = a^j x \Rightarrow i = j$.

Значит все элементы G разбиваются на циклы длины k . Следовательно $n : k$. □

Следствие. G — конечная группа ($a \in G$) $\Rightarrow a^{|G|} = e$

Доказательство. $\text{ord } a = k$. $n = k \cdot l$ по теореме Лагранжа. Тогда $a^n = a^{k \cdot l} = (a^k)^l = e^l = e$ □

Пример. $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +)$. $\overline{a}^x = \underbrace{\overline{a} + \overline{a} + \overline{a} + \overline{a}}_{x \text{ раз}} = \overline{xa}$.

Пример. p — простое.

$G := (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$. $|G| = p - 1$. Тогда $a^{p-1} = 1$. Малая теорема Ферма.

На языке сравнений: $a \in \mathbb{Z}, a : p \Rightarrow a^{p-1} - 1 : p \iff a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Пример. $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +)$ — циклическая группа. А вот с G из предыдущего пункта — тоже, если p — простое. Но не очев.

Утверждение 3.8. G — группа ($|G| = n$). G — циклическая $\iff \exists a \in G : \text{ord } a = n$. МТФ: $\overline{a}, \overline{a}^2, \dots$ — периодична с периодом $p - 1$. Утверждение: $\exists \overline{a} : p - 1$ — наименьший период этой последовательности.

Замечание. Пусть G — группа, $|G| = p$ — простое. Тогда $G \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +)$. G — циклическая.

Доказательство. Возьмем $a \neq e$. Тогда $p : \text{ord}(a) \Rightarrow \text{ord}(a) = 1 \vee \text{ord}(a) = p \Rightarrow a = e \vee \langle a \rangle = G \Rightarrow G$ — циклическая $\Rightarrow G \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +)$. □

Определение 3.18. R — ассоциативное кольцо, тогда $R^* = \{a \in R | \exists a^{-1}\}$ — группа обратимых элементов.

Проверим, что R^* — группа.

- Проверим замкнутость. $a, b \in R^* \Rightarrow \exists a^{-1} \exists b^{-1} : (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

- $1 \in R^*$.
- $a \in R^* : \exists a^{-1} \Rightarrow \exists (a^{-1})^{-1} = a$, значит $a^{-1} \in R^*$.

Замечание. $a^n = 1 \Rightarrow a \in R^*$. Т.к. тут записано, что $a \cdot a^{n-1} = 1$ — то есть он обратим.

Определение 3.19. Рассмотрим $R = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Тогда $R^* = \{\bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid \exists \bar{b} : \bar{a}\bar{b} = 1\} = \{\bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid (a, n) = 1\}$. Тогда $|R^*| = \varphi(n)$ — функция Эйлера.

Теорема 3.9 (Теорема Эйлера). $\forall b \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* = b^{\varphi(n)} = 1$

Теорема 3.10 (Теорема Эйлера). $\forall a \in \mathbb{Z} : (a, n) = 1 \Rightarrow a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$

Эффективно вычислим $\varphi(n)$:

1. $n = p^k$, p — простое.

$$\varphi(n) = \{x \in \{1, \dots, p^k\} \mid (x, p^k) = 1\} = \{x \in \{1, \dots, p^k\} \mid x \not\equiv 0 \pmod{p}\} = p^k - |\{p, 2p, \dots, p^k\}| = p^k - p^{k-1}.$$

2. n — составное. $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$

По КТО:

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong (\mathbb{Z}/p_1^{\alpha_1}\mathbb{Z}) \times \dots \times (\mathbb{Z}/p_k^{\alpha_k}\mathbb{Z}).$$

. Тогда заметим, что

$$(\mathbb{Z}/p_1^{\alpha_1}\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/p_k^{\alpha_k}\mathbb{Z})^* = (\mathbb{Z}/p_1^{\alpha_1}\mathbb{Z})^* \times \dots \times (\mathbb{Z}/p_k^{\alpha_k}\mathbb{Z})^*.$$

Так как если (x_1, \dots, x_k) — обратим, то x_i — обратимы.

Из этого получаем, что

$$\varphi(n) = |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*| = |(\mathbb{Z}/p_1^{\alpha_1}\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/p_k^{\alpha_k}\mathbb{Z})^*| = \prod_{i=1}^k |(\mathbb{Z}/p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z})^*|.$$

Получили формулу из а). Применим её:

$$\varphi(n) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}) \dots (p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1}) = n \cdot (1 - \frac{1}{p_1}) \cdot \dots \cdot (1 - \frac{1}{p_k}).$$

Теорема 3.11 (Теорема о первообразном корне). $p \in \mathbb{Z}$ — простое $\Rightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ — циклическая.

Доказательство. В ноябре. □

Посмотрим на устройство $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. $\exists a \in \mathbb{Z} : \{\bar{a}, \bar{a}^2, \dots, \bar{a}^{p-1}\} = \{\bar{1}, \dots, \overline{p-1}\}$.

Тогда как устроены $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ в общем случае?

Отступление: группа, порожденная множеством.

Определение 3.20. Подгруппа группы G — пара $(H, *)$, где $H \subset G$, $*$ — замкнуто относительно H . Обозначается \leq .

Определение 3.21. Подгруппа группы G порожденная множеством S ($S \subset G$) — наименьшая по включению подгруппа G , содержащая все элементы S .

$$\langle S \rangle = \bigcap_{H \leq G, S \subset H} H.$$

Замечание. $\forall I \forall H_\alpha, \dots, H_\omega, \alpha, \dots, \omega \in I : H_i \leq G \Rightarrow \bigcap_{i \in I} H_i \leq G$

Доказательство. Рассмотрим $e (\forall i \in I H_i \text{ — группа} \Rightarrow e \in H_i) \Rightarrow e \in \bigcap_{i \in I} H_i$.

$\forall x \in \bigcap_{i \in I} (\forall i \in I x^{-1} \in H_i) \Rightarrow x^{-1} \in \bigcap_{i \in I} H_i \Rightarrow \bigcap_{i \in I} H_i \text{ — группа (ассоциативность гарантируется определением подгруппы).}$ \square

Теорема 3.12. $\forall S \subset G: \langle S \rangle = \{a_1^{\varepsilon_1} \dots a_k^{\varepsilon_k} \mid \forall i \in I a_i \in S \wedge \varepsilon_i = \pm 1\}$

Доказательство.

1. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_k \in S$. Тогда для любой $H \leq G$ $H \supseteq S$ верно:

(a) $a_i \in H$.

(b) $a_i^{\varepsilon_i} \in H$, так как H замкнута относительно $^{-1}$

(c) $a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \dots a_k^{\varepsilon_k} \in H$, так как H замкнуто относительно \cdot .

Значит $H \supset \langle S \rangle \Rightarrow \langle S \rangle \subseteq H$.

С другой стороны $H = \langle S \rangle \Rightarrow H \supset S \wedge H \leq G$. Следовательно:

$$\bigcap_{H \leq G, S \subset H} H = \langle S \rangle.$$

\square

Теорема 3.13. $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ — циклическая $\iff \begin{cases} n = p^k & p > 2 \text{ — простое} \\ n = 2p^k & \text{см. выше} \\ n = 2 \vee n = 4 \end{cases}$.

$n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$. Тогда $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* = (\mathbb{Z}/p_1^{\alpha_1}\mathbb{Z})^* \times \dots \times (\mathbb{Z}/p_k^{\alpha_k}\mathbb{Z})^*$.

Утверждение 3.14. G_1, G_2, G — группы (конечные).

1. $G \cong G_1 \times G_2$. $(|G_1|, |G_2|) \neq 1 \Rightarrow G$ — не циклическая.

2. $(|G_1|, |G_2|) = 1$ и G_1, G_2 — циклическая $\Rightarrow G_1 \times G_2$ — циклическая. (КТО).

Доказательство. Тогда $\forall a \in G_1, b \in G_2 a^{|G_1|} = e_{G_1} \wedge b^{|G_2|} = e_{G_2} \Rightarrow (a, b)^{\text{lcm}(|G_1|, |G_2|)} = (e, e) \Rightarrow \forall x \in G_1 \times G_2: \text{ord}(x) \leq \text{lcm}(|G_1|, |G_2|) < |G_1| \cdot |G_2| = |G_1 \times G_2| \Rightarrow G_1 \times G_2$ — не циклическая. \square

Замечание. $a^{\varphi(n)} = 1$. Точна ли оценка $\varphi(n)$? Если $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ — циклическая (например, n — простое). Тогда да. Иначе пусть $n = pq$, p, q — простые. Тогда по Эйлеру $a^{(q-1)(p-1)} = 1$, а на самом деле $a^{\frac{(q-1)(p-1)}{2}} = 1$.

Доказательство. $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$. Тогда $|(\mathbb{Z}/p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z})^*| = p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i-1} : 2$, кроме случая $p_i = 2, \alpha_i = 1$.

Поэтому, если $k > 2$ или $k = 2, p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2} \neq 2^1 \Rightarrow \text{gcd}$ у размеров групп не взаимно просты $\Rightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ — не циклическая.

Остались случаи $k = 1, n = p^a$ и $k = 2, n = 2 \cdot p^a$.

Случай $n = 2p^a, p \neq 2$. $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/p^a\mathbb{Z})^* = (\mathbb{Z}/p^a\mathbb{Z})^*$ — свели к случаю 1.

Пусть $n = p^a$. $p = 2, a = 1, 2$ — очев. $a > 2 \Rightarrow (\mathbb{Z}/2^a\mathbb{Z})^*$ — не циклическая. Пусть циклическая, тогда $(\mathbb{Z}/2^a\mathbb{Z})^* = \langle x \rangle, \text{ord } x = 2^{a-1}$. Тогда в $(\mathbb{Z}/2^a\mathbb{Z})^*: y^2 = 1 \iff \exists k(x^k)^2 = 1 \iff x^{2k} = 1$. $2k : 2^{a-1} \wedge k : 2^{a-2} \xrightarrow{x \in (0; 2^{a-1})} k = 0 \vee k = 2^{a-2}$. y^2 — имеет два решения. Но! $1^2 = (-1)^2 = (2^{a-1} \pm 1)^2 = 1$. 4 решения. Противоречие. \square

Теорема 3.15. $a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. Тогда $x^2 = a$ имеет решение $\iff a^{\frac{p-1}{2}} = 1$

Доказательство.

- \Rightarrow . $a = x^2 \Rightarrow a^{\frac{p-1}{2}} = (x^2)^{\frac{p-1}{2}} = x^{p-1} = 1$ (МТФ).
- \Leftarrow . $a^{\frac{p-1}{2}} = 1$. $\exists c : (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* = \langle c \rangle$. $\exists k : a = c^k$. Тогда $a^{\frac{p-1}{2}} = (c^k)^{\frac{p-1}{2}} \iff c^{\frac{k(p-1)}{2}} = 1$ Та как $\text{ord } \frac{k(p-1)}{2} : p-1$. Тогда $\frac{k}{2} \in \mathbb{Z}$, то есть $k = 2l$. $a = c^{2l} = (c^l)^2$.

□

3.6. Группы вычетов и криптографические протоколы

Главное отображение, которое нас интересует — $p_k : (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \rightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* : p_k(x) = x^k$.

Заметим, что если $(p-1, k) = 1 \Rightarrow p_k$ — биекция: $p_k^{-1}(x) = x^l$, где $l : kl = 1 \pmod{p-1}$. $x \rightarrow x^k \rightarrow (x^k)^l = x^{kl} = x^1 = x$. $x \rightarrow (x^l) \rightarrow (x^l)^k = x$.

А если $(p-1, k) \neq 1$, то p_k — не биекция. Если $p-1 = k \cdot s$ и g — первообразный корень, то $\text{ord } g = p-1$ и $(g^s)^k = 1$. Тогда $1^k = 1$ — не инъекция.

Классический протокол шифровки: протокол с закрытым ключом (ключ — способ шифровки / дешифровки).

Пусть Алиса(А) и Боб(В) хотят обмениваться информацией. Хотят придумать закрытый ключ путем пересылки сообщений.

Протокол Диффи-Хеллмана: А и В хотят сгенерировать закрытый ключ $m \in \mathbb{N}$.

1. Придумывают большое число p .
2. Придумывают a — первообразный корень по модулю p : $\text{ord}_p(a) = p-1$.
3. А: берет $x \in \mathbb{Z}$ (лучше $(x, p-1) = 1$) и посылает $a^x \pmod{p}$.
4. В: берет $y \in \mathbb{Z}$, $a^y \pmod{p}$
5. А вычисляет $(a^x)^y = a^{xy} \pmod{p}$.
6. В: вычисляет $(a^y)^x = a^{xy} \pmod{p}$.

Чтобы взломать надо найти x, y . Если есть x , то посчитать a^x просто, а вот наоборот — сложно.

Получили ключ a^{xy} .

3.7. Алгоритм RSA

RSA — Rivest, Shamir, Adleman.

RSA — шифрование с открытым ключом:

1. А: придумывает p, q — большие простые. Вычисляет $\varphi(pq) = (p-1)(q-1)$. $p, q, (p-1)(q-1)$ — закрытая часть ключа.
2. Выбирает $d : \in \mathbb{Z} (d, p-1) = (d, q-1) = 1$. p, q, d — закрытая часть.
3. Открытый ключ $n = pq$ и $e \in \mathbb{Z} : de \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)}$. Решение Л.Д.У.

4. В: хочет послать сообщение $(x \in \mathbb{Z}, (x, n) = 1)$ А: он посылает $x^e \pmod{n}$.
5. А: получает $y = x^e$ и вычисляет $y^d = (x^e)^d = x^{ed} = x^{k \cdot \varphi(n) + 1} = x \pmod{n}$.

Устойчивость: чтобы взломать, надо знать $(p-1)(q-1)$, то нам надо просто знать p, q . Но мы не умеем делать это быстро.

3.8. Генерация простых, тесты на простоту

Теорема 3.16. $\pi(n)$ — количество простых на $[1, n]$. Тогда $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi(n)}{\frac{n}{\ln n}} = 1$.

Следствие. Случайное число на $1, n$ — простое с вероятностью $\frac{1}{\ln n}$

Способ генерации: возьмем p_1, p_2, \dots, p_k — простые (небольшие). Попробуем $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_l^{a_l} + 1$, где a_i — произвольные степени. Получили Тест Люка.

Теорема 3.17 (Тест Люка). Пусть $b \in \mathbb{Z}$, такое что $b^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ и $b^{\frac{n-1}{p_i}} \not\equiv 1 \pmod{n}$. Тогда n — простое.

Доказательство. $b^{n-1} \equiv 1 \Rightarrow \text{ord}_n(\overline{b_n})$ — делитель $n-1$.

$b^{\frac{n-1}{p_i}} \not\equiv 1 \Rightarrow \text{ord}_n(\overline{b_n})$ — не делитель $\frac{n-1}{p_i}$ для любого $p_i \Rightarrow \text{ord}(\overline{b_n}) = n-1 \Rightarrow |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*| \geq n-1 \Rightarrow n$ — простое. \square

Замечание. n — простое, b — подходит $\iff b$ — первообразные корень. Их $\varphi(n-1)$. Пусть $\varphi(n-1) > \frac{n-1}{10}$, значит через k тестов будет вероятность проиграть $\left(\frac{9}{10}\right)^k$, что мало.

Замечание. Числа Люка — неоч для RSA: $n = pq, p, q$ — числа Люка. Такие числа с большой вероятностью факторизуются: Выбираем $a \in \mathbb{Z}$, дальше $a \rightarrow a^2 \rightarrow (a^2)^3 \rightarrow \dots$, то есть вычисляем $a^{k!} \pmod{n}$. Помним, что $p-1 = \prod p_i^{a_i}, q-1 = \prod p_i^{b_i}$.

Рассмотрим $K_p = \min\{a^{k!} \equiv 1 \pmod{p} \mid k \in \mathbb{N}\}$.

k_p, k_q — не велики. Действительно: $k_p : p-1 = \prod p_i^{a_i}$, а p_i — довольно маленькие.

Скорее всего $k_p \neq k_q$. Не умаляя общности считаем $k_p < k_q$, тогда $(a^{k_p!}, n) = p$.

Тест Ферма: $n \in \mathbb{N}, a \in [1, \dots, n-1]$. Если $a^{n-1} \not\equiv 1 \pmod{n}$, значит n — составное.

Определение 3.22. Если n — составное, но $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$, то a — свидетель простоты.

Если n — составное, то или свидетелей $\leq \frac{\varphi(n)}{2} \leq \frac{n-1}{2}$, или любое взаимно простое с a является свидетелем простоты. Свидетели образуют подгруппу, а значит либо это вся группа, либо там $\leq \frac{\varphi(n)}{2}$ элементов.

Пусть там меньше половины, тогда после k итераций вероятность проиграть $\frac{1}{2^k}$, что довольно хорошо.

Тест Рабина-Миллера. Пусть $n-1 = 2^s \cdot m$. Тогда, если n — простое, то $x^2 \equiv 1 \pmod{n} \Rightarrow x = \pm 1 \pmod{n}$. Тогда берем $a \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. Считает $a^m, (a^m)^2, \dots, (a^m)^{2^s}$. Так как n — простое \Rightarrow или $a^m = 1$, или есть -1 , а потом 1.

Условие Миллера-Рабина работает для $\forall a \in [1, \sqrt[n]{n}]$ или $\in [1, \log^2 n]$, если верим в гипотезу Римана.

Но Рабин заметил, что вероятность ошибиться для составного $\frac{\varphi(n)}{4}$