Математический анализ

Харитонцев-Беглов Сергей

9 февраля 2022 г.

Содержание

1. Интегральное исчисление функции одной переменной **1**

1.1 Первообразная и неопределенный интеграл . . . 1

1.2 Определенный интеграл . . . 3

1.3 Свойства интеграла . . . 5

1.4 Приложения формулы интегрирования по частям . . . 8

Отступление. Равномерная непрерывность **11**

Продолжение главы 1 **13**

1.5 Интегральные суммы . . . 13

1.6 Несобственные интегралы . . . 16

2. Анализ в метрических пространствах **23**

2.1 Метрические и нормированные пространства . . . 23

1. Интегральное исчисление функции одной переменной

1.1. Первообразная и неопределенный интеграл

***Определение* 1.1.** $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$. Функция $F : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ — первообразная функции f, если $F'(x) = f(x) \forall x \in \langle a, b \rangle$

Теорема 1.1. Непрерывная на промежутке функция имеет первообразную.

Доказательство. Позже. □

Замечание. $\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 & \text{если } x > 0 \\ 0 & \text{если } x = 0 \\ -1 & \text{если } x < 0 \end{cases}$. Не имеет первообразной.

Доказательство. От противного: пусть нашлась $F\colon \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ и $F'(x) = sign(x)$.

Тогда воспользуемся теоремой Дарбу для F на отрезке $[0; 1]$.

Пусть $k = \frac{1}{2} \in (\operatorname{sign}\,(0), \operatorname{sign}\,(1))$. Значит $\exists c \in (0, 1)\colon F'(c) = k = \frac{1}{2}$. Противоречие. □

Теорема 1.2. $f, F\colon \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ и F — первообразная для f. Тогда:

1. $F + C$ — первообразная для f.
2. Если $\Phi\colon \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ — первообразная для f, то $\Phi = F + C$.

Доказательство.

1. $(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x)$
2. $(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow (\Phi - F)' \equiv 0 \implies \Phi - F$ — константа.

□

***Определение* 1.2.** Неопределённый интеграл — множество всех первообразных.

$\int f(x)\,dx = \{F\colon F$ — первообразная f$\}$. Но мы будем записывать $\int f(x)\,dx = F(x) + C$

Табличка интегралов.

1. $\int 0\,dx = C$.
2. $\int x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C$, при $p \neq -1$.
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
4. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$, при $a > 0, a \neq 1$.
5. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$.
6. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$.

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.
10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$.
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C$.
12. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln|\frac{1+x}{1-x}| + C$.

Доказательство. Для 3. Если $x > 0$ $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$. Если $x < 0$ $\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C$, то есть $(\ln(-x))' = (\frac{1}{-x})(-x)' = \frac{-1}{x}$.

Для 11. $(\ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}|)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2 \pm 1}}(x + \sqrt{x^2 \pm 1})' = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm 1}}}{x + \sqrt{x^2}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2 pm 1} + x}{\sqrt{x^2 \pm 1}}}{\sqrt{x^2 \pm 1} + x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}$

Для 13. $(\frac{1}{2}(\ln|1+x| - \ln|1-x|))' = \frac{1}{2}(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}) = \frac{1}{1-x^2}$ □

Замечание. $A + B \coloneqq \{a + b \colon a \in A, b \in B\}$, $cA \coloneqq \{ca \colon a \in A\}$.

$\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx = \{F + C\} + \{G + \widetilde{C}\} = \{F + G + C\}$.

Теорема 1.3 (Арифметические действия с неопределенными интегралами)**.** Пусть $f, g \colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ имеют первообразные. Тогда:

1. $f + g$ имеет первообразную и $\int (f + g)\,dx = \int f\,dx + \int g\,dx$
2. αf имеет первообразную и $\int \alpha f\,dx = \alpha \int f\,dx$

Доказательство. Пусть F и G первообразные для f и g.

1. Тогда $F + G$ — первообразная для $f + g$. Тогда $\int (f + g) = F + G + C = \int f + \int g$.
2. Тогда αF — первообразная для $\alpha f \implies \int \alpha F = \alpha F + C = \alpha(F + \frac{C}{\alpha}) = \alpha \int f$.

□

Следствие Линейность неопрделенного интеграла. $f, g \colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ имеют первообразную $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $|\alpha| + |\beta| \neq 0$. Тогда $\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$.

Доказательство. Прямое следствие из теоремы выше. □

Теорема 1.4 (Теорема о замене переменной в непопределенном интеграле)**.** $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}, \varphi : \langle c, d\rangle \to \langle a, b\rangle$, f имеет первообразную F. φ дифференцируемая. Тогда $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C$.

Доказательство. Надо проверить, что $F(\varphi(t))$ — первообразная для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi(t)..$$

□

Следствие. $\int f(\alpha x + \beta)\,dx = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x + \beta) + C$

Доказательство. $\int \alpha f(\alpha x + \beta dx) = F(\alpha x + \beta) + C$. И делим обе части на α. □

Теорема 1.5 (Форумла интегрирования по частям). $f, g\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, дифференцируемые, $f'g$ имеет первообразную.

Тогда fg' имеет первообразную и $\int fg' = fg - \int f'g$

Доказательство. H — первообразная для $f'g$. Тогда $H' = f'g$.

Надо доказать, что $fg - H$ — первообразная для fg'.

$(fg - H)' = f'g + gh' - H' = f'g + fg' - f'g = fg'$. □

1.2. Определенный интеграл

Пусть $\mathcal{F}$ — совокупность (множество) ограниченных плоских фигур.

***Определение* 1.3.** $\sigma\colon \mathcal{F} \to [0; +\infty)$,

1. $\sigma([a;b] \times [c,d]) = (b-a)(d-c)$
2. (Аддитивность). $\forall E_1, E_2 \in \mathcal{F}\colon E_1 \cap E_2 = \varnothing \Rightarrow \sigma(E_1 \cup E_2) = \sigma(E_1) + \sigma(E_2)$

Свойство Монотонность площади. $\forall E, \widetilde{E}\colon E \subset \widetilde{E} \Rightarrow \sigma(E) \leqslant \sigma(\widetilde{E})$.

Доказательство. $E = \widetilde{E} \cup (\widetilde{E} \setminus E) \Rightarrow \sigma(\widetilde{E}) = \sigma(E) + \sigma(\widetilde{E} \setminus E)$. □

***Определение* 1.4.** $\sigma\colon \mathcal{F} \to [0; +\infty]$, причем

1. $\sigma([a;b] \times [c,d]) = (b-a)(d-c)$,
2. $\forall E, \widetilde{E} \in \mathcal{F}\colon E \subset \widetilde{E} \Rightarrow \sigma(E) \leqslant \sigma(\widetilde{E})$,
3. Разобьем E вертикальной или горизонтальной прямой, в том числе теми прямыми, которые правее или левее E. Тогда $E = E_- \cup E_+, E_- \cap E_+ = \varnothing$ и $\sigma(E) = \sigma(E_-) + \sigma(E_+)$.

Свойства. 1. Подмножество вертикальных или горизонтальных отрезков имеет нулевую площадь.

2. В определении E_- и E_+ не важно куда относить точки из l.

   Доказательство. Заметим, что $\sigma(E_- \cup (E \cap l)) = \sigma(E_- \setminus l) + \underbrace{\sigma(E \cap l)}_{=0} \Rightarrow$ вообще не имеет разницы куда относить точки из l. □

Пример.

1. $\sigma_1(E) = \inf\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} |P_k|\colon P_k \text{ — прямоугольник}, \bigcup\limits_{k=1}^{n} \supset E\right\}$.
2. $\sigma_2(E) = \inf\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} |P_k|\colon P_k \text{ — прямоугольник}, \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \supset E\right\}$.

Упражнение.

1. Доказать, что $\forall E \;\; \sigma_1(E) \geqslant \sigma_2(E)$.
2. $E = ([0,1] \cap \mathbb{Q}) \times ([0,1] \cap \mathbb{Q})$. Доказать, что $\sigma_1(E) = 1, \sigma_2(E) = 0$.

Теорема 1.6.

1. σ_1 — квазиплощадь.

2. Если E' — сдвиг E, то $\sigma_1(E) = \sigma_1(E')$.

Доказательство.

2. E' — сдвиг E на вектор v. Пусть P_k — покрытие $E \iff P'_k$ — покрытие E'. $\sigma_1(E) = \inf\{\sum\limits_{k=1}^{n} |P_k|\} = \inf\{\sum |P'_k|\} = \sigma_1(E')$.

1. $\Rightarrow$ монотонность. Пусть есть $E \subset \widetilde{E}$. Тогда возьмем покрытие P_k для $\widetilde{E}$. $E \subset \widetilde{E} \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k$.

   А теперь заметим, что σ_1 — inf, а значит $\sigma_1(E) \leqslant \sum |P_k| = \sigma_1(\widetilde{E})$.

1'. Докажем теперь аддитивность.

«$\leqslant$». $\sigma_1(E) = \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+)$. Пусть P_k — покрытие E_-, Q_j — покрытие E_+. $\bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k \cup \bigcup\limits_{j=1}^{m} Q_j \supset E_i \cup E_+ = E$. А значит $\sigma_1(E) \leqslant \inf \left\{ \sum\limits_{k=1}^{n} |P_k| + \sum\limits_{j=1}^{n} |Q_j| \right\} = \inf\{\sum |P_k|\} + \inf\{\sum |Q_j|\} = \sigma_1(E_-) + \sigma(E_+)$. Заметим, Что переход с разделением инфинумов возможен, так как P и Q выбираются независимо.

«$\geqslant$». Пусть P_k — покрытие E. Тогда можно разбить $|P_k| = |P_k^-| + |P_k^+|$. $\sum |P_k| = \sum |P_k^-| + \sum |P_k^+|$. Заметим, что сумму $\geqslant \sigma \Rightarrow \sum |P_k| \geqslant \sigma(E_1) + \sigma(E_2) \Rightarrow \sigma(E) \geqslant \sigma(E_1) + \sigma(E_2)$.

1”. Проверим, что сама площадь прямоугольника не сломалась: $\sigma_1([a,b] \times [c,d]) = (b-a)(d-c)$. Заметим, что $\sigma_1(P) \leqslant |P|$.

Тогда посмотрим на P_k. Проведем прямые содержащие все стороны прямоугольников из разбиения. Заметим, что получили разбиение с суммой равной $|P|$. Тогда заметим, что некоторые части разбиения встречаются в P_k несколько раз. А значит выкинув все лишнее мы как раз получим $|P|$, а значит $\sigma_1(P) \geqslant |P|$.

□

***Определение* 1.5.** Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Тогда $f_+, f_- : [a,b] \to [0; +\inf)$. Причем $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$, $f_- = \max\{-f(x), 0\}$.

Свойства. 1. $f = f_+ - f_-$.

2. $|f| = f_+ + f_-$

3. $f_+ = \frac{f+|f|}{2}$, $f_- = \frac{|f|-f}{2}$.

4. Если $f \in C([a,b])$, то $f_\pm \in C([a,b])$.

***Определение* 1.6.** Пусть $f \colon [a,b] \to [0; \inf]$.

Тогда, подграфик $P_f([a;b]) \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b], 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$.

***Определение* 1.7.** $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^b f(x)dx = \sigma(P_{f_+}([a;b])) - \sigma(P_{f_-}([a;b]))$.

Свойства. 1. $\int\limits_a^a f = 0$.

2. $\int\limits_a^b = c(b-a)$

   Доказательство. По графику очевидно :) $\square$

3. $f \geqslant 0 \Rightarrow \int\limits_a^b = \sigma(P_f)$.

4. $\int\limits_a^b (-f) = -\int\limits_a^b f$.

   Доказательство. $(-f)_+ = \max\{-f, 0\} = f_-$. $(-f)_- = \max\{f, 0\} = f+$. Откуда все и следует. $\square$

5. $f \geqslant 0 \land \int\limits_a^b = 0 \land a < b \Rightarrow f = 0$.

   Доказательство. От противного. $\exists c \in [a, b] : f(c) > 0$. Тогда, возьмем $\varepsilon \coloneqq \frac{f(c)}{2}, \delta$ из определения непрерывности в точке c. Если $x \in (c-\delta, c+\delta)$, то $f(x) \in (f(c)-\varepsilon, f(c)+\varepsilon) = (\frac{f(c)}{2}; \frac{3f(c)}{2}) \Rightarrow f(x) \geqslant \frac{f(c)}{2}$ при $x \in (c-\delta; c+\delta) \Rightarrow P_f \supset [c-\frac{\delta}{2}; c+\frac{\delta}{2}] \times [0; \frac{f(c)}{2}] \Rightarrow \int\limits_a^b f = \sigma(P_f) \geqslant \delta \cdot \frac{f(c)}{2} > 0$ $\square$

1.3. Свойства интеграла

Теорема 1.7 (Аддиктивность интеграла)**.** Пусть $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $c \in [a, b]$.

Тогда $\int\limits_a^b f = \sum\limits_a^c f + \sum\limits_c^b f$.

Доказательство. $\int\limits_a^b f = \sigma(P_{f_+}([a, b])) - \sigma(P_{f_-}([a, b]))$. Разделим наш $[a, b]$ вертикальной прямой $x = c$. Тогда можно воспользоваться свойством 3 из определения квазиплощади. $\square$

Теорема 1.8 (Монотонность интеграла)**.** Пусть $f, g \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ и $\forall x \in [a, b] \colon f(x) \leqslant g(x)$.

Тогда $\int\limits_a^b f \leqslant \int\limits_a^b g$.

Доказательство. $f_+ = \max\{f, 0\} \leqslant \max\{g, 0\} = g_+ \Rightarrow P_{f_+} \subset P_{g_+} \Rightarrow \sigma(P_{f_+}) \leqslant \sigma(P_{g_+})$.

$f_- = \max\{-f, 0\} \geqslant \max\{-g, 0\} = g_- \Rightarrow P_{f_-} \supset P_{g_-} \Rightarrow \sigma(P_{f_-}) \geqslant \sigma(P_{g_-})$. $\square$

Следствие.

1. $|\int\limits_a^b f| \leqslant \int\limits_a^b |f|$

2. $(b-a) \min\limits_{x \in [a,b]} f(x) \leqslant \int\limits_a^b f \leqslant (b-a) \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.

Доказательство.

1. $-|f| \leqslant f \leqslant |f| \Rightarrow \int\limits_a^b -|f| \leqslant \int\limits_a^b f \leqslant \int\limits_a^b |f| \Rightarrow |\int\limits_a^b f| \leqslant \int\limits_a^b |f|$

2. $m \coloneqq \min f(x)$, $M \coloneqq \max f(x)$. $m \leqslant f(x) \leqslant M \Rightarrow \int\limits_a^b m \leqslant \int\limits_a^b f \leqslant \int\limits_a^b M$.

$\square$

Теорема 1.9 (Интегральная теорема о среднем)**.** Пусть $f \in C([a,b])$.

Тогда $\exists c \in (a,b)\colon \int\limits_a^b f = (b-a)f(c)$.

Доказательство. $m \coloneqq \min f = f(p), M \coloneqq \max f = f(q)$ (по теореме Вейерштрасса). Тогда $f(p) \leqslant \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f \leqslant f(q) \xRightarrow{\text{т. Б-К}} \exists c\colon f(c) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f$. $\square$

***Определение* 1.8.** $I_f \coloneqq \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f$ — среднее значения f на отрезке $[a,b]$.

***Определение* 1.9.** $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Интеграл с переменным верхним пределом $\Phi(x) \coloneqq \int\limits_a^x f$, где $x \in [a,b]$.

***Определение* 1.10.** $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Интеграл с переменным нижним пределом $\Psi(x) \coloneqq \int\limits_x^b f$, где $x \in [a,b]$.

Замечание. $\Phi(x) + \Psi(x) = \int\limits_a^b f$.

Теорема 1.10 (Теорема Барроу)**.** Пусть $f \in C[a,b]$. Тогда $\Phi'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$. То есть Φ — первообразная функции f.

Доказательство. Надо доказать, что $\lim\limits_{y\to x} \frac{\Phi(y)-\Phi(x)}{y-x} = f(x)$. Проверим для предела справа.

Тогда $\Phi(y) - \Phi(x) = \int\limits_a^y f - \int\limits_a^x f = \int\limits_x^y f$.

Тогда $\frac{\Phi(y)-\Phi(x)}{y-x} = \frac{1}{y-x}\int\limits_x^y f = f(c)$ для некоторого $c \in (x,y)$.

Проверяем определение по Гейне. Берем $y_n > x$ и $y_n \to x$. Тогда $\frac{\Phi(y_n)-\Phi(x)}{y_n-x} = f(c_n)$, где $c_n \in (x, y_n)$, $x < c_n < y_n \to x \Rightarrow c_n \to x \Rightarrow f(c_n) \to f(x)$. $\square$

Следствие. $\Psi'(x) = -f(x) \quad \forall x \in [a,b]$.

Доказательство. $\Psi(x) = \int\limits_a^b f - \Phi(x) = C - \Phi(x) \Rightarrow \Psi' = (C - \Phi(x))' = -Phi'(x) = -f(x)$. $\square$

Теорема 1.11. Непрерывная на промежутке функция имеет первообразную.

Доказательство. $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$.

Рассмотрим $F(x) \coloneqq \begin{cases} \int\limits_c^x f & \text{при } x \geqslant c \\ -\int\limits_x^c f & \text{при } x \leqslant c \end{cases}$.

Если $x > c$, то $F'(x) = f(x)$. $\square$

Теорема 1.12 (Формула Ньютона-Лейбница)**.** $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ и F – её первообразная. Тогда $\int\limits_a^b f = F(b) - F(a)$.

Доказательство. $\Phi(x) = \int\limits_a^x f$ — первообразная и $F(x) = \Phi(x) + C$.

Тогда $F(b) - F(a) = (\Phi(b) + C) - (\Phi(a) + C) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int\limits_a^b f$ □

***Определение* 1.11.** $F\mid_a^b := F(b) - F(a)$

Теорема 1.13 (Линейность интеграла)**.** $\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$.

Доказательство. F, G — первообразные для f, g.

Тогда $\alpha F + \beta G$ — первообразная для $\alpha f + \beta g$. Тогда воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b \alpha f + \beta g = \alpha F + \beta G\mid_a^b = \alpha F(b) + \beta G(b) - \alpha F(a) - \beta G(a).$$

□

Теорема 1.14 (Формула интегрирования по частям)**.** Пусть $f, g \in C^1[a, b]$.

Тогда $\int\limits_a^b fg' = fg\mid_a^b - \int\limits_a^b f'g$.

Доказательство. Докажем при помощи формулы Ньютона-Лейбница. Пусть H — первообразная $f'g$. Тогда $fg - H$ — первообразная для fg'.

Проверим данный факт: $(fg - H)' = f'g + fg' - f'g = fg'$. А значит нам можно воспользоваться формулой Ньютона-Лейбница.

$\int\limits_a^b fg' = (fg - H)\mid_a^b = fg\mid_a^b - H\mid_a^b = fg\mid_a^b - \int_a^b f'g$. □

Замечание Соглашение. Если $a > b$, то $\int\limits_a^b f := -\int\limits_b^a f$.

Мотивация: Если F — первообразная, то $\int\limits_a^b f = F\mid_a^b$.

Теорема 1.15 (Формула замены переменной)**.** Пусть $f \in C[a, b]$, $\varphi\colon [c, d] \to [a, b]$, $\varphi \in C^1[c, d]$, $p, q \in [c, d]$.

Тогда $\int\limits_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int\limits_{\varphi p}^{\varphi q} f(x)\mathrm{d}x$.

Доказательство. Пусть F — первообразная f. Тогда $\int\limits_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)\mathrm{d}x = F\mid_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} = F_0\varphi\mid_p^q$, где $F_0\varphi$ — первообразная для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

Проверим данные факты: $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

Тогда интеграл равен $\int\limits_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$ □

Пример.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2t}{1+\sin^4 t}\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Произведем замену $\varphi(t) = \sin^2 t$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $\varphi'(t) = 2\sin t\cos t = \sin 2t$, $\varphi(0) = 0, \varphi(\frac{\pi}{2}) = 1$:

$$(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi'(t)}{1+(\varphi(t))^2} = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(\frac{\pi}{2})} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\,|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

1.4. Приложения формулы интегрирования по частям

Пример. $W_n \coloneqq \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\mathrm{dt} = (1)$

Где $x = \frac{\pi}{2} - t =: \varphi(t)$, $\varphi'(t) = -1$, $\sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos t$.

Тогда $(1) = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \varphi(t) \cdot \varphi(t)\mathrm{d}t = -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^n x\mathrm{d}x$

Частные случаи $W_0 = \frac{\pi}{2}$, $W_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x = -\cos|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

Общее решение: $W_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x\cdot(\cos x)'\mathrm{d}x =$. Воспользовались тем, что $\sin x = -(\cos x)'$, $f'(x) = (n-1)\sin^{n-2} x\cdot\cos x$.

Тогда получаем:

$$= -\left(\underbrace{\sin^{n-1} x\cdot\cos x\,|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2} x \underbrace{\cos^2 x}_{=1-\sin^2 x} \mathrm{d}x\right) =$$

$$= (n-1)\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\mathrm{d}x - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x\right) = (n-1)(W_{n-2} - W_n).$$

Посчитаем для четных: $W_{2n} = \frac{2n-1}{2n}\cdot W_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}W_{2n-4} = \ldots = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}$, где $k!!$ — произведение натуральных чисел той же четности, что и k и $\leqslant k$.

Для нечетных: $W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}W_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}W_{2n-3} = \ldots = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}W_1 = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$

Теорема 1.16 (Формула Валлиса)**.**

$$\lim_{n\to\inf} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Доказательство. $\sin^n x \geqslant \sin^{n+1} x$ на $[0, \frac{\pi}{2}]$. Тогда $W_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x \geqslant \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x\mathrm{d}x = W_{n+1}$.

Заметим, что $W_{2n+2} \leqslant W_{2n+1} \leqslant W_{2n} \iff \frac{\pi}{2}\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \leqslant \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leqslant \frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$. Поделим на $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$:

$$\frac{\pi}{2}\frac{2n+1}{2n+2} \leqslant \frac{((2n)!!)^2}{(2n+1)((2n-1)!!)^2} \leqslant \frac{\pi}{2} \implies \lim\left(\frac{(2n)!!}{\sqrt{(2n+1)}(2n-1)!!}\right)^2 = \frac{\pi}{2}.$$

□

Следствие.

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Доказательство. Заметим, что $(2n)! = (2n)!! \cdot (2n-1)!!$, а $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n) = 2^n \cdot n!$. Тогда подставим в Сшку:

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{\frac{(2n)!!}{2^n}\frac{(2n)!!}{2^n}} = 4^n \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

При этом из Валлиса, заметим, что $\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2n+1} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2n} = \sqrt{\pi n}$. А значит все сойдется. □

Теорема 1.17 (Формула Тейлора (с остатком в интегральной форме))**.** Пусть $f \in C^n[a,b]$, $x, x_0 \in [a,b]$. Тогда:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

Доказательство. Индукция по n:

- База. $n = 0$, $f(x) = f(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f'(t)\mathrm{d}t = f(x_0) + f\mid_{x_0}^{x}$
- Переход. $n \to n+1$.
- Доказательство. $f(x) = T_n(x) + \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} \underbrace{(x-t)^n}_{g'}\underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{f}\mathrm{d}t$. Проинтегрируем интеграл по частям. $g(t) = \frac{1}{n+1} - (x-t)^{n+1}$.

  Подставим: $\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t = -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \cdot f^{(n+1)}(t)\mid_{t=x_0}^{t=x} + \int_{x_0}^{x}\frac{1}{n+1}(x-t)^{n+1} \cdot f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t =$ $\underbrace{\dfrac{1}{n+1}(x-x_0)^{n+1}f^{(n+1)}(x_0)}_{\text{новый член Тейлора!}} + \int_{x_0}^{x}\frac{1}{n+1}(x-t)^{n+1} \cdot f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t$

□

Пример.

$$H_j \coloneqq \frac{1}{j!}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^j \cos x\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Свойство 1. $0 < H_j \leqslant \frac{1}{j}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2j}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2j}}{j!}$.

Свойство 2. $\forall c > 0\colon c^j \cdot H_j \xrightarrow{j\to\inf} 0$. $0 < c^j H_j \leqslant \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2j}\cdot c^j}{j!} = \frac{\left(\frac{\pi^2}{4}c\right)^j}{j!} \to 0$.
Свойство 3. $H_0 = 1$, $H_1 = 2$ (*упражнение*).
Свойство 4. $H_j = (4j-2)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}$, при $j \geqslant 2$.

Доказательство.

$$j!H_j = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^j (\sin x)' \mathrm{d}x \tag{3}$$

Заметим, что $\left(\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^j\right)' = j\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^{j-1} \cdot (-2x)$. Тогда:

$$(3) = \underbrace{\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^j \sin x \,\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}}}_{=0} + 2j\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^{j-1} x \underbrace{\sin x}_{=(-\cos x)'} \mathrm{d}x =$$

$$= 2j\left(\underbrace{\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^{j-1} \cdot x \cdot (-\cos x)\,\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int\limits_0^{\frac{n}{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^{j-2} x^2 \cos x \mathrm{d}x\right)$$

$$= 2j\left((j-1)!H_{j-1} - 2(j-1)\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot (j-2)!H_{j-2} + 2(j-1)(j-1)!H_{j-1}\right).$$

Откуда с легкостью получаем $j!H_j = 2j!H_{j-1} - \pi^2 j!H_{j-2} + 4(j-1)j!H_{j-1} \iff H_j = (4j-2)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}$.

Свойство 5. Существует многочлен P_n с целыми коэффициентами степени $\leqslant n$, такой что $H_j = P_j(\pi^2)$.

Доказательство. $P_0 \equiv 1, P_1 \equiv 2, P_n(x) = (4n-2)P_{n-1}(x) - xP_{n-2}(x)$. □

□

Теорема 1.18 (Ламберта, доказательство: Эрмит)**.** Числа π и π^2 иррациональные.

Доказательство. От противного. Пусть π^2 — рационально. Тогда пусть $\pi^2 = \frac{m}{n}$. Тогда $H_j = P_j(\frac{m}{n}) = \frac{\text{целое число}}{n^j} > 0$.

$n^j H_j =$ целое число $> 0 \Rightarrow n^j H_j \xrightarrow{j\to+\inf} 0$, но $n^j H_j \geqslant 1$. □

Отступление. Равномерная непрерывность

***Определение* 1.12.** $f: E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна на E, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in E\colon$ $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

***Определение* 1.13.** f непрерывна во всех точках из E:
$\forall x \in E \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in E\colon |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Пример. $\sin x$ и $\cos x$ равномерно непрерывны на $\mathbb{R}$.

$|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y| \Rightarrow \delta = \varepsilon$ подходит. $|\cos x - \cos y| \leqslant |x - y|$.

Пример. $f(x) = x^2$ не является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$. Рассмотрим $\varepsilon = 1$, никакое $\delta > 0$ не подходит. x и $x + \frac{\delta}{2}$. $f(x + \frac{\delta}{2}) - f(x) = (x + \frac{\delta}{2})^2 - x^2 = \ldots = \delta x + \frac{\delta^2}{4} > \delta x$. При $x = \frac{1}{\delta}$ противоречие.

Теорема 1.19 (Теорема Кантора)**.** Пусть $f \in C[a, b]$, тогда f равномерно непрерывна на $[a, b]$.

Доказательство. Берем $\varepsilon > 0$ и предположим, что $\delta = \frac{1}{n}$ не подходит, то есть $\exists x_n, y_n \in [a, b]\colon$ $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ и по теореме Больцано-Вейерштрасса у последовательности x_n есть сходящаяся последовательность $x_{n_k} \to c$, то есть $\lim x_{n_k} = c \in [a, b]$.

$\underbrace{x_{n_k} - \frac{1}{n_k}}_{\to c} < y_{n_k} < \underbrace{x_{n_k} + \frac{1}{n_k}}_{\to c} \implies \lim y_{n_k} = c$. Но f непрерывна в точке $c \implies f(x_{n_k}) = f(c) = \lim f(y_{n_k}) \implies \lim(f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})) = 0$, но $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geqslant \varepsilon$. □

Замечание. Для интервала или полуинтервала неверно. $f(x) = \frac{1}{x}$ на $(0; 1]$. Докажем, что нет равномерной непрерывностью на $(0; 1]$.

Пусть $\varepsilon = 1$ и $\delta > 0$. Пусть $0 < x < \delta$, $y = \frac{x}{2}$, $|x - y| = \frac{x}{2} < \delta$. Тогда $f(y) - f(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} > 1$.

***Определение* 1.14.** Пусть $f: E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Тогда $\omega_f(\delta) \coloneqq \sup\{|f(x) - f(y)| \mid \forall x, y \in E, |x - y| \leqslant \delta\}$ — модуль непрерывности f.

Свойства.

1. $\omega_f(0) = 0$,
2. $|f(x) - f(y)| \leqslant \omega_f(|x - y|)$.
3. $\omega_f \uparrow$.
4. Если f — липшицева функция с константой L, то $\omega_f(\delta) \leqslant L\delta$.
   В частности, если $|f'(x)| \leqslant L \quad \forall x \in \langle a, b\rangle$.
5. f равномерно непрерывна на $E \iff \omega_f$ непрерывна в нуле $\iff \lim\limits_{\delta \to 0+} \omega_f(\delta) = 0$.

Доказательство.
- $1 \to 2$. $\forall \varepsilon > 0 \gamma > 0 \forall x, y \in E\colon |x - y| < \gamma \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
  Возьмем $\delta < \gamma$. Тогда $|x - y| \leqslant \delta \implies |x - y| < \gamma \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon \implies \sup \leqslant \varepsilon$.
- $2 \to 1$. Из $\lim\limits_{\delta \to 0+} \omega_f(\delta) = 0$. Возьмем $\gamma > 0$: $|f(x) - f(y)| \leqslant \omega_f(\delta) < \varepsilon$ $\forall \delta\gamma$, $\forall x, y \in E$: $|x - y| \leqslant \delta$.

□

6. $f \in C[a,b] \iff \omega_f$ непрерывен в нуле $\iff \lim \omega_f(\delta) = 0$.

Доказательство. Для функции на отрезке равномерная непрерывность $\iff$ непрерывность. $\square$

Продолжение главы 1

1.5. Интегральные суммы

***Определение* 1.15.** Пусть есть $[a,b]$. Тогда дробление (разбиение, пунктир) отрезка: набор точек: $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.

***Определение* 1.16.** Ранг дробления: $\max\limits_{k=1,2,\ldots,n}(x_k - x_{k-1}) =: |\tau|$, $\tau = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$

***Определение* 1.17.** Оснащение дробления — набор точек $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, такой что $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

***Определение* 1.18.** Интегральная сумма (сумма Римана) $S(f,\tau,\xi) :== \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$,

По факту просто сумма прямоугольников под графиком рисунок принял ислам очень жаль.

Теорема 1.20 (Теорема об интегральных суммах)**.** Пусть $f \in C[a,b]$,

тогда $|\int\limits_a^b - S(f,\tau,\xi)| \leqslant (b-a)\omega_f(|\tau|)$.

Доказательство.

$$\Delta := \int\limits_a^b f - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(\xi_k)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}(f(t) - f(\xi_k))\mathrm{d}t.$$

$$|\Delta| \leqslant \sum|\int\ldots| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}|f(t) - f(\xi_k)|\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})\omega_f(|\tau|) = (b-a)\omega_f(|\tau|).$$

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k}|f(t) - f(\xi_k)|\mathrm{d}t \leqslant \int_{x_{k-1}}^{x_k}\omega_f(|\tau|)\mathrm{d}t = (x_k - x_{k-1})\omega_f(|\tau|)..$$

□

Следствие. $\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \forall$ дробления ранга $\leqslant \delta$ $\forall$ оснащения $|\int\limits_a^b - S(f,\tau,\xi) < \varepsilon|$

Следствие. Если τ_n последовательность дроблений, ранг которых $\to 0$, то $S(f,\tau_n,\xi_n) \to \int\limits_a^b f$.

Пример. $S_p(n) := 1^p + 2^p + \ldots + n^p$. Посчитаем $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_p(n)}{n^{p+1}}$.

Возьмем $fL[0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad f(t) = t^p$ $\frac{S_p(n)}{n^{p+1}} = \frac{1}{n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p = S(f,\tau,\xi)$, где $x_k = \xi_k = \frac{k}{n}$.

Тогда $\lim\frac{S_p(n)}{n^{p+1}} = \int\limits_0^1 t^p\mathrm{d}t = \frac{t^{p+1}}{p+1}\Big|_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{p+1}$

***Определение* 1.19.** Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, тогда f интегрируема по Риману, если $\exists I \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \forall$ дробление ранги $< \delta \forall$ его оснащение $|S(f,\tau,\xi) - I| < \varepsilon$.

I — интеграл по Риману $\int\limits_a^b f$.

Лемма. $f \in C^2[\alpha,\beta]$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t - \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta-\alpha) = -\frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f''(t)(t-\alpha)(\beta-t)\mathrm{d}t.$$

Доказательство. Пусть $\gamma \coloneqq \frac{\alpha+\beta}{2}$. Тогда:

$$\int\limits_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t = \int\limits_\alpha^\beta f(t)(t-\gamma)'\mathrm{d}t = f(t)(t-\gamma)\mid_{t=\alpha}^{t=\beta} - \int\limits_\alpha^\beta f'(t)(t-\gamma)\mathrm{d}t.$$

Заметим, что $f(t)(t-\gamma)\mid_{t=\alpha}^{t=\beta} = f(\beta)(\beta-\gamma) - f(\alpha)(\alpha-\gamma) = \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta-\alpha)$. Продолжим:

$$\begin{aligned}\text{левая часть} &= -\int_\alpha^\beta f'(t)(t-\gamma)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f'(t)((t-\alpha)(\beta-t))'\mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{2}f'(t)(t-\alpha)(\beta-t)\mid_{t=\alpha}^{t=\beta} - \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f''(t)(t-\alpha)(\beta-t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Переход к $((t-\alpha)(\beta-t))'$:

$$((t-\alpha)(\beta-t))' = (-t^2 - (\alpha+\beta)t - \alpha\beta)' = -2t + (\alpha+\beta) = -2(t-\gamma).$$

□

Замечание. Бла-бла-бла.

Теорема 1.21 (Оценка погрешности в формуле трапеций)**.** Пусть $f \in C^2[a,b]$.

Тогда :

$$\left|\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1})\right| \leqslant \frac{|\tau|^2}{8}\int\limits_a^b |f''|$$

Доказательство. $\Delta \coloneqq \int\limits_a^b - \sum \ldots = \sum\limits_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} - \sum\limits_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1})$

$$|\Delta| \leqslant \sum_{k=1}^n |\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} - \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1})| = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(t)(t-x_{k-1})(x_k-t)\mathrm{d}t\right|.$$

Тогда вспомним, что $(t-x_{k-1})(x_k-t) \leqslant \left(\frac{x_k-x_{k-1}}{2}\right)^2 \leqslant \frac{|\tau|^2}{4} \leqslant \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |f''(t)|\cdot\frac{|\tau|^2}{4}\mathrm{d}t = \frac{|\tau|^2}{8}\sum \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |f''| =$

$\frac{|\tau|^2}{8}\cdot\int\limits_a^b |f''|$ □

Замечание. Пусть разбиение на n равных отрезков $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n} = |\tau|$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} = \frac{b-a}{n}(f\frac{x_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + \frac{f(x_n)}{2})..$$

Замечание. Возьмем разбиение на равные отрезки и $\xi_k = x_k$:

$$S(f,\tau,\xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$

Теорема 1.22 (формула Эйлера-Маклорена)**.** Пусть $f \in C^2[m,n]$, тогда

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \frac{f(m)+f(n)}{2} + \int_m^n f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_m^n f''(t)\{t\}(1-\{t\})\mathrm{d}t.$$

Доказательство. Подставим $\alpha = k$ и $\beta = k+1$ в лемму:

$$\int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t = \frac{f(k)+f(k+1)}{2} - \frac{1}{2}\int_k^{k+1} f''(t)(t-k)(k+1-t)\mathrm{d}t = $$
$$= \frac{f(k)+f(k+1)}{2} - \frac{1}{2}\int_k^{k+1} f''(t)\{t\}(1-\{t\})\mathrm{d}t.$$

Дальше суммируем по k от m до $n-1$:

$$\int_m^n f(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=m}^{n-1}\frac{f(k)+f(k+1)}{2} - \frac{1}{2}\int_m^n f''(t)\{t\}(1-\{t\})\mathrm{d}t.$$

Заметим, что $\sum\limits_{k=m}^{n-1} \frac{f(k)+f(k+1)}{2} = \frac{f(m)+f(n)}{2} + \sum_{k=m+1}^{n-1} f(k)$. И тогда:

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \frac{f(m)+f(n)}{2} + \int_m^n f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_m^n f''(t)\{t\}(1-\{t\})\mathrm{d}t.$$

□

Пример. $S_p(n) = 1^p + 2^p + \ldots + n^p$, $f(t) = t^p$, $m = 1$, $f''(t) = p(p-1)t^{p-2}$.

$S_p(n) = \frac{1+n^p}{2} + \int\limits_1^n t^p\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int\limits_1^n p(p-1)t^{p-2}\{t\}(1-\{t\})\mathrm{d}t.$

При $p \in (-1,1)$ $\int_1^n t^p\mathrm{d}t = \frac{t^{p+1}}{p+1}\mid_1^n = \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1} = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \mathcal{O}(1)$.

$$\int_1^n t^{p-2}\underbrace{\{t\}(1-\{t\})}_{\leqslant\frac{1}{4}}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{4}\int_1^n t^{p-2}\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\cdot\frac{t^{p-1}}{p-1}\mid_1^n = \frac{1}{4}\cdot\frac{n^{p-1}-1}{p-1} = \mathcal{O}(1)..$$

То есть $S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \mathcal{O}(1)$.

При $p > 1$ $S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \mathcal{O}(n^{p-1})$.

Пример. $H_n \coloneqq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$. $m = 1, f(t) = \frac{1}{t}, f''(t) = \frac{2}{t^3}$.

$$H_n = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} + \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} + \frac{1}{2}\int_1^n \frac{2}{t^3}\{t\}(1-\{t\})\mathrm{d}t$$

Откуда получаем ($a_n \coloneqq \int\limits_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^3}$):

$$H_n = \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + a_n.$$

Заметим, что $a_{n+1} = a_n + \int\limits_n^{n+1} \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^3}\mathrm{d}t > a_n$. То есть $a_n \uparrow$. Причем $a_b \leqslant \int\limits_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = -\frac{1}{2^2} \mid_1^n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} < \frac{1}{2}$.
А значит a_n имеет предел, а значит $a_n = a + o(1)$.
Вывод: $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$, где $\gamma \approx 0.5772156649$ — постоянная Эйлера.

Замечание. $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$.

Пример Формула Стирлинга. $m = 1, f(t) = \ln t, f''(t) = -\frac{1}{t^2}$.

$$\ln n! = \sum_{k=1}^{n} \ln k = \underbrace{\frac{\ln 1 + \ln n}{2}}_{=\frac{1}{2}\ln n} + \underbrace{\int_1^n \ln t \mathrm{d}t}_{=t\ln t - t|_1^n = n\ln n - n + 1} - \underbrace{\frac{1}{2}\int_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^2}\mathrm{d}t}_{:=b_n}.$$

Посмотрим на b_n:

$$b_n \leqslant \frac{1}{2}\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{1}{2}(-\frac{1}{t}) \mid_1^n = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n}) < \frac{1}{2} \implies b_n = b + o(1)..$$

А значит $\ln n! = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + (1-b) + o(1)$. $n! = n^n e^{-n}\sqrt{n}e^{1-b}e^{o(1)} \sim n^n e^{-n}\sqrt{n}C$.

Вспомним (из следствия формулы Валлиса): $\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$. А еще знаем, что $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2n}C}{(n^n e^{-n}\sqrt{n}C)^2} = \frac{4^n\sqrt{2}}{\sqrt{n}C}$.

Тогда получаем, что $\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \sim \frac{4^n\sqrt{2}}{\sqrt{n}C} \implies C \sim \frac{4^n\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{\pi n}}{4^n} = \sqrt{2\pi}$.

Итоговый результат:

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$
$$\ln n! = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln(2\pi n) + o(1).$$

Замечание. $\ln n! = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln(2\pi n) + \mathcal{O}(\frac{1}{n})$.

1.6. Несобственные интегралы

***Определение* 1.20.** Пусть $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ и $f \in C[a, b)$.

Тогда определим $\int\limits_a^{\to b} f \coloneqq \lim\limits_{B\to b-} \int\limits_a^B f$.

Если $-\infty \leqslant a < b < +\infty, f \in C(a, b]$, тогда $\int\limits_{\to a}^{b} f \coloneqq \lim\limits_{A\to a+} \int\limits_A^b f$.

Замечание. Если $b < +\infty$ и $f \in C[a, b]$, то определение не дает ничего нового:

$$\int_a^b f = \lim_{B\to b} f$$
$$\left|\int_a^b f - \int_a^B f\right| \leqslant M(b - B) \to 0.$$

Пример. 1. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim\limits_{y\to+\infty} \int\limits_a^y \frac{dx}{x^p} = \lim\limits_{\substack{y\to+\infty \\ \text{при } p\neq 1}} -\frac{1}{(p-1)x^{p-1}} \Big|_{x=1}^{x=y} = \frac{1}{p-1} - \lim\limits_{y\to+\infty} \frac{1}{(p-1)y^{p-1}} = \frac{1}{p-1}$ при $p > 1$, при $p < 1$ получаем $+\infty$, а при $p = 1$ $\lim\limits_{y\to+\infty} \ln x \Big|_1^y = \lim\limits_{y\to+\infty} \ln y = +\infty$

2. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim\limits_{y\to 0+} \int\limits_y^1 \frac{dx}{x^p} = \lim\limits_{y\to 0+} -\frac{1}{(p-1)x^{p-1}} \Big|_{x=y}^{x=1} = -\frac{1}{p-1} + \lim\limits_{y\to 0+} = \frac{y^{1-p}}{p-1} = \frac{1}{1-p}$ при $p < 1$, при $p > 1$ получаем $+\infty$, а вот при $p = 1$ $\lim\limits_{y\to 0+} \ln x \Big|_y^1 = \lim\limits_{y\to 0+} -\ln y = +\infty$.

   То есть, при $p < 1$ $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}$,

   при $p \geqslant 1$ $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p} = +\infty$.

Замечание. Если $f \in C[a,b)$ и F его первообразная, то $\int\limits_a^b f = \lim\limits_{B\to b-} F(B) - F(a)$.

Если $f \in C[a,b)$ и F его первообразная, то $\int\limits_a^b f = F(b) - \lim\limits_{A\to a+} F(A)$.

Доказательство. Очевидно по формуле Ньютона-Лейбница. □

***Определение* 1.21.** $F \Big|_a^b := \lim\limits_{B\to b-} F(B) - F(a)$.

***Определение* 1.22.** $\int\limits_a^{\to b} f$ сходится, если $\lim B$ его определении существует и конечен.

Теорема 1.23 (Критерий Коши)**.** Пусть $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, $f \in C[a,b)$.

Тогда $\int\limits_a^b f$ сходится $\iff \forall\varepsilon\exists c \in (a,b)\colon \forall A, B \in (c,b)$ $\left|\int\limits_A^B f\right| < \varepsilon$.

Замечание. 1. Если $b = +\infty$ это означает, что $\forall\varepsilon\exists c > a\forall A, B > c\colon \left|\int\limits_A^B f\right| < \varepsilon$.

2. Если $b < +\infty$ это означает, что $\forall\varepsilon > 0\exists\delta > 0\forall A, B \in (b-\delta; b)\colon \left|\int\limits_A^B f\right| < \varepsilon$.

Доказательство. Для $b < +\infty$.

- "$\Rightarrow$" $\int\limits_a^b f$ сходится $\implies \exists$ конечный $\lim\limits_{B\to b-} \int\limits_a^B f =: g(B)$.

  $\forall\varepsilon > 0\exists\delta > 0$ $\begin{matrix} \forall B \in (b-\delta, b) & |g(B) - I| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall A \in (b-\delta, b) & |g(A) - I| < \frac{\varepsilon}{2} \end{matrix} \implies |g(B) - g(A)| \leqslant |g(B) - I| + |I - g(A)| < \varepsilon$

- "$\Leftarrow$" $\int\limits_a^B f =: g(B)$.

  $\forall\varepsilon > 0\exists\delta > 0\forall A, B \in (b-\delta, b) : |g(B) - g(A)| < \varepsilon$ это условие из критерия Коши для $\lim\limits_{B\to b-} g(B)$.

□

Замечание. Если существует $A_n, B_n \in [a,b)\colon \lim A_n = \lim B_n = b\colon \int\limits_{A_n}^{B_n} f \not\to 0$, то $\int\limits_a^b f$ расходится.

Доказательство. Возьмем A_{n_k} и $B_{n_k}\colon |\int\limits_{A_{n_k}}^{B_{n_k}} f| \to C > 0 \implies |\int\limits_{A_{n_k}}^{B_{n_k}} f| > \frac{C}{2}$ при больших k. Но это противоречит критерию Коши. □

Свойства несобственных интегралов. 1. Аддитивность. Пусть $f \in C[a,b)$, $c \in (a,b)$. Если $\int\limits_a^b f$ сходятся, то $\int\limits_a^b f$ сходятся и $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$.

2. Если $\int\limits_a^b f$ сходится, то $\lim\limits_{c\to b-} \int\limits_c^b f = 0$

3. Линейность $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $\int\limits_a^b f$ и $\int\limits_a^b g$ сходятся. Тогда $\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g)$ сходится и $\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$.

4. Монотонность. Пусть $\int\limits_a^b f$ и $\int\limits_a^b g$ существует в $\overline{R}$ и $f \leqslant g$ на $[a,b)$. Тогда $\int\limits_a^b f \leqslant \int\limits_a^b g$.

5. Интегрирование по частям. $f, g \in C^1[a;b) \implies \int\limits_a^b fg' = fg\,|_a^b - \int\limits_a^b f'g$.

6. Замена переменных. $\varphi\colon [\alpha,\beta) \to [a,b)$, $\varphi \in C^1[\alpha,\beta)$ и $\exists \lim\limits_{\gamma\to\beta-} \varphi(\gamma) =: \varphi(\beta-)$ и $f \in C[a,b)$.

   Тогда $\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f(x)\mathrm{d}x$. «Если существует один из $\int$, то существует второй и они равны»

Доказательство. 1. $\int\limits_a^b f = \lim\limits_{B\to b-} F(B) - F(a) \implies \lim_{B\to b-} F(B)$ существует и конечный $\implies \int\limits_c^b = \lim\limits_{B\to b-} F(b) - F(c)$ — сходится.

   $\int\limits_a^b = \lim F(B) - F(a) = \lim F(B) - F(c) + F(c) - F(a) = \int\limits_c^b f + \int_a^c f$.

2. $\int\limits_c^b f = \int\limits_a^b f - \int\limits_a^c f \to \int\limits_a^b f - \int\limits_a^b f = 0$

3. $\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g) = \lim\limits_{B\to b-} \int\limits_a^B (\alpha f + \beta g) = \lim\limits_{B\to b-} (\alpha \int\limits_a^B f + \beta \int\limits_a^B g) = \alpha \lim\limits_{B\to b-} \int\limits_a^B f + \beta \lim\limits_{B\to b-} \int\limits_a^B g = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$.

4. $\int\limits_a^B f \leqslant \int\limits_a^B g$ (монотонность интеграла), а дальше предельный переход.

5. $a < B < b$. $\int\limits_a^B fg' = fg\,|_a^B - \int_a^B f'g$ и переход к пределу.

6. $F(y) \coloneqq \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{y} f(x)\mathrm{d}x$, $\Phi(\gamma) \coloneqq \int_\alpha^\gamma f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$. Знаем, что $F(\varphi(\gamma)) = \Phi(\gamma)$ при $\alpha < \gamma < \beta$.

Пусть существует правый $\int$, то есть $\exists \lim\limits_{y\to\varphi\beta-} F(y)$. Возьмем $\gamma_n \nearrow \beta \implies \varphi(\gamma_n) \to \varphi(\beta-) \implies \Phi(\gamma_n) = F(\varphi(\gamma_n)) \to \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f(x)\mathrm{d}x$. При этом $\Phi(\gamma_n) \to \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$.

Пусть существует левый $\int$, то есть $\exists \lim\limits_{\gamma\to\beta-} \Phi(\gamma)$. Докажем, что $\exists$ правый $\int$. При $\varphi(\beta-) < b$ нечего доказывать.

Пусть $\varphi(\beta-) = b$. Тогда возьмем $b_n \nearrow b$. Можно считать, что $b_n \in [\varphi(\alpha), b)$. Тогда $\exists \gamma_n \in [\alpha,\beta)\colon \varphi(\gamma_n) = b_n$. Докажем, что $\gamma_n \to \beta$. Пусть это не так. Тогда найдется $\gamma_{n_k} \to \widetilde{\beta} < \beta \implies \varphi(\gamma_{n_k}) \to \varphi(\widetilde{\beta}) < b$ по непрерывности в $\widetilde{\beta}$. Противоречие.

Итак, $\gamma_n \to \beta$, $F(b_n) = F(\varphi(\gamma_n)) = \Phi(\gamma_n) \to \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$.

□

Замечание ко второму свойству.

1. Если $\int\limits_a^b f$ сходится, а $\int\limits_a^b g$ расхоидится, то $\int\limits_a^b (f+g)$ расходится. Доказательство от противного, путь интеграл сходится, то $g = (f+g) - f \implies \int\limits_a^b g$ сходится.
2. Если $\int\limits_a^b f$ и $\int\limits_a^b g$ расходятся, то $\int\limits_a^b (f+g)$ может сходиться. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ и $\int\limits_1^{+\infty} -\frac{\mathrm{d}x}{x}$ расходятся.

Замечание к шестому свойству. $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Сделаем замену $x = b - \frac{1}{t} = \varphi(t)$, $\varphi'(t) = \frac{1}{t^2}, \varphi(\alpha) = a, \alpha = \frac{1}{b-a}$.

Тогда $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f(b - \frac{1}{t})\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$.

***Определение* 1.23.** Пусть f непрерывен на (a,b) за исключением точек $c_1 < c_2 < \ldots < c_n$.

$\int\limits_a^b f$ сходится, если сходятся интегралы по все маленьким отрезкам (содержащих только одну выколотую точку).

Несобственные интегралы от неотрицательных функций

Теорема 1.24. Пусть $f \in C[a,b)$ и $f \geqslant 0$.

Тогда $\int\limits_a^b f$ сходится $\iff F(y) := \int\limits_a^y f$ ограничена сверху.

Доказательство. $f \geqslant 0 \implies F$ монотонно возрастает. $\int\limits_a^b f$ сходится $\iff \exists$ конечный $\lim\limits_{y\to b-} F(y) \iff F$ ограничена сверху. □

Замечание. $f \in C[a;b), f \geqslant 0$. $\int\limits_a^b f$ расходящийся означает, что $\int\limits_a^b f = +\infty$.

Следствие Признак сравнения. $f,h \in C[a,b)$, $f,g \geqslant 0$ и $f \leqslant g$.

1. Если $\int\limits_a^b g$ сходится, то $\int\limits_a^b f$ сходится.

2. Если $\int\limits_a^b f$ расходится, то $\int\limits_a^b g$ расходится.

Доказательство. $F(y) \coloneqq \int\limits_a^y f$ и $G(y) \coloneqq \int\limits_a^y g$.

1. Пусть $\int\limits_a^b g$ сходящийся $\implies$ $G(y)$ ограничена, но $F(y) \leqslant G(y)$ $\implies$ $F(y)$ ограничена $\implies \int\limits_a^b f$ сходящаяся.

2. От противного.

□

Замечание. 1. Неравенство $f \leqslant g$ нужно лишь для аргументов близких к b.

2. Неравенство $f \leqslant g$ можно заменить на $f = \mathcal{O}(g)$.

   $f = \mathcal{O}(g) \implies f \leqslant cg$. $\int\limits_a^b g$ сходящийся $\implies \int\limits_a^b cg$ сходящийся $\implies \int\limits_a^b f$ – сходящийся.

3. Если $f = \mathcal{O}(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}})$ для $\varepsilon > 0$, то $\int\limits_a^{+\infty} f$ — сходящийся.

   $g(x) = \frac{1}{x^{1+\varepsilon}}$ и можно считать, что $a \geqslant 1$ $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ — сходящийся.

Следствие. $f, g \in C[a, b)$, $f, g \geqslant 0$ и $f(x) \sim g(x), x \to b-$. Тогда $\int\limits_a^b f$ и $\int\limits_a^b g$ ведут себя одинаково (либо оба сходятся, либо оба расходятся).

Доказательство. $f \sim g \implies f = \varphi \cdot g$, где $\varphi(x) \xrightarrow{x \to b-} 1 \implies$ в окрестности b $\frac{1}{2} \leqslant \varphi \leqslant 2 \implies f \leqslant 2g \wedge g \leqslant 2f$ в окрестности $b \implies$ из сходимости интеграла g следует сходимость $f \wedge$ наоборот. □

***Определение* 1.24.** $f \in C[a, b)$. $\int\limits_a^b f$ абсолютно сходится, если $\int\limits_a^b |f|$ сходится.

Теорема 1.25. $\int_a^b f$ сходится абсолютно $\int\limits_a^b f$ сходится.

Доказательство. $f = f_+ - f_-$, $|f| = f_+ + f_-$. $|f| \geqslant f_\pm \geqslant 0$. Если $\int\limits_a^b f$ сходится абсолютно $\implies \int\limits_a^b$ сходится $\int\limits_a^b f_\pm$ сходится $\implies \int\limits_a^b f = \int\limits_a^b f_+ - \int\limits_a^b f_-$ сходящийся. □

Теорема 1.26 (Признак Дирихле)**.** $f, g \in C[a, +\infty)$. Если

1. f имеет ограниченную на $[a, +\infty]$ первообразную, то есть $\left|\int\limits_a^y f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant K \quad \forall y$.

2. g монотонна.

3. $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$

, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ сходится.

Доказательство. Только для случая $g \in C^1[a;+\infty)$.

Надо доказать, что $\exists$ конечный $\lim\limits_{y\to+\infty}\int\limits_a^y f(x)g(x)\mathrm{d}x$, $F(y) \coloneqq \int\limits_a^y f(x)\mathrm{d}x$.

$$\int\limits_a^y f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^y F'(x)g(x)\mathrm{d}x = F(x)g(x)\mid_a^y - \int_a^y F(x)g'(x)\mathrm{d}x = F(y)g(y) - \int_a^y F(x)g'(x)\mathrm{d}x$$

$\lim\limits_{y\to+\infty} F(y)g(y) = 0$ — произведение бесконечно малой и ограниченной функции.

$\int\limits_a^y F(x)g'(x)\mathrm{d}x$ имеет конечный lim, то есть $\int\limits_a^{+\infty} F(x)g'(x)\mathrm{d}x$ сходится.

Докажем, что он абсолютно сходится. $\int\limits_a^{+\infty} |F(x)||g'(x)|\mathrm{d}x$, $|F(x)||g'(x)| \leqslant K|g'(x)| = Kg'(x)$. $\int_a^{+\infty} g'(x)\mathrm{d}x = g\mid_a^{+\infty} = \lim\limits_{y\to+\infty} g(y) - g(a) = -g(a) \implies$ сходящийся. □

Теорема 1.27 (Признае Абеля)**.** $f, g \in C[a,+\infty]$, Если

1. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\mathrm{dx}$ сходится,

2. g монотонна,

3. g ограничена

Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ сходится.

Доказательство. $2)+3) \implies \exists l \in \mathbb{R} \coloneqq \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

Пусть $\widetilde{g}(x) \coloneqq g(x) - l \implies \lim\limits_{x\to+\infty}\widetilde{g}(x) = 0$ и $\widetilde{g}$ монотонна.

Пусть $F(x) \coloneqq \int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t$. $1) \iff$ существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

Тогда f и $\widetilde{g}$ удовлетворяют условиям признака Дирихле $\implies \int\limits_a^{+\infty} f(x)\widetilde{g}(x)\mathrm{d}x$ — сходится. Тогда:

$$\int\limits_a^{+\infty} = \int\limits_a^{+\infty} f(\widetilde{g}+l) = \int\limits_a^{+\infty} f\widetilde{g} + l\int\limits_a^{+\infty} f.$$

Где $\int\limits_a^{+\infty} f\widetilde{g}$ сходится по доказанному, а $\int\limits_a^{+\infty} f$ — по условию. □

Утверждение 1.28. f — периодическая функция с периодом T. Тогда $\int\limits_a^{a+T} f = \int\limits_b^{b+T} f$

Доказательство. Картинка:
Добавить картинку. Альтернатива: посмотреть доски Храброва/пнуть меня.

$$\int\limits_a^{a+kT} f = \int_{b-(k-1)T}^{a+T} f. \int\limits_{a+kT}^{b+T} f = \int\limits_{a+T}^{b-(k-1)T} f \qquad \square$$

Следствие. $f, g \in C[a;+\infty)$, f — периодическая с периодом T, g монотонная и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ расходится.

Тогда $\int\limits_a^{+\infty} fg$ сходится $\iff \int\limits_a^{a+T} f = 0$.

Доказательство. $\Leftarrow$. $F(x) = \int\limits_a^x f$ — периодична с периодом T: $F(x+T) = \int\limits_a^{x+T} f = \int\limits_a^x f + \int\limits_x^{x+T} f = F(x)$. F — непрерывна и периодична $\implies$ ограничена $\implies \int\limits_a^{+\infty} fg$ сходится по признаку Дирихле.

$\Rightarrow$. Пусть $\int\limits_a^{a+T} f =: K \neq 0$. $\widetilde{f}(x) =: f(x) - \frac{K}{T}$ — периодична с периодом T. Тогда $\int\limits_a^{a+T} \widetilde{f} = \int\limits_a^{a+T} (f - \frac{K}{T}) = K - T \cdot \frac{K}{T} = 0 \implies \int\limits_a^{+\infty} \widetilde{f}g$ сходится.

Тогда $\int\limits_a^{+\infty} fg = \int\limits_a^{+\infty} (\widetilde{f} + \frac{K}{T})g = \int\limits_a^{+\infty} \widetilde{f}g + \frac{K}{T} \int\limits_a^{+\infty} g \implies \int\limits_a^{+\infty} fg$ расходится как сумма сходящегося и расходящегося. $\square$

Пример. Рассмотрим $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$.

1. $p > 1$ интеграл сходится абсолютно: $|\sin x| \leqslant 1 \implies \left|\frac{\sin x}{x^p}\right| \leqslant \frac{1}{x^p}$, а значит $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ сходящийся.
2. $0 < p \leqslant 1$ интеграл сходящийся, но не абсолютно. $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ — расходится, $\frac{1}{x^p} \searrow 0$. $g(x) := \frac{1}{x^p}$, $f(x) = \sin x$. $\int\limits_0^{2\pi} \sin x\mathrm{d}x = 0 \implies \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$ сходящийся.

   Если взять $f(x) = |\sin x|$, то интеграл по периоду равен 4. Значит исходный интеграл расходится.
3. $p \leqslant 0$ интеграл расходится.

   $a_n := \frac{\pi}{6} + 2\pi n, b_n := \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$. Тогда $\int\limits_{a_n}^{b_n} \frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{2} \int\limits_{a_n}^{b_n} \frac{\mathrm{d}x}{x^p} \geqslant \frac{1}{2} \int\limits_{a_n}^{b_n} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{\pi}{3}$.

2. Анализ в метрических пространствах

2.1. Метрические и нормированные пространства

***Определение* 2.1.** Метрика (расстояние) $\rho\colon X \times X \to [0; +\infty)$, если выполняются следующие условия:

1. $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$,
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
3. (неравенство треугольника) $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

***Определение* 2.2.** Метрическое пространство — пара (X, ρ).

Пример. Дискретная метрика (метрика Лентяя) $\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$

Пример. На $\mathbb{R}$: $\rho(x, y) = |x - y|$.

Пример. На $\mathbb{R}^d$: $\rho(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{d} (x_k - y_k)^2}$. Неравенство треугольника здесь — неравенство Минковского.

Пример. $C[a, b]$. $\rho(f, g) = \int\limits_a^b |f - g|$.

Неравенство треугольника:

$$\rho(f, h) = \int\limits_a^b |f - h| \leqslant \int_a^b (|f - g| + |g - h|) = \rho(f, g) + \rho(g, h)..$$

Пример. Манхэтеннская метрика: $\mathbb{R}^2$ $\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 + y_2|$.

Пример. Французская железнодорожная метрика. $\mathbb{R}^2$. Есть точка P (Париж), тогда $\rho(A, B) = AB$, если A, B, P на одной прямой, иначе $\rho(A, B) = |AP| + |PB|$.

***Определение* 2.3.** (X, ρ) — метрическое пространство. $B_r(x) \coloneqq \{y \in X \mid \rho(x, y) < r\}$ — открытый шар радиуса r с центром в точке x.

***Определение* 2.4.** (X, ρ) — метрическое пространство. $\overline{B}_r(x) \coloneqq \{y \in X \mid \rho(x, y) \leqslant r\}$ — закрытый шар радиуса r с центром в точке x.

Свойства. 1. $B_{r_1}(a) \cap B_(r_2)(a) = B_{\min\{r_1, r_2\}}(a)$.

2. $x \neq y \implies \exists r > 0\colon B_r(x) \cap B_r(y) = \varnothing \land \overline{B}_r(x) \cap \overline{B}_r(y) = \varnothing$.

Доказательство. 1. $x \in B_{r_1}(a) \cap B_{r_2}(a) \iff \begin{cases} \rho(x, a) < r_1 \\ \rho(x, a) < r_2 \end{cases} \iff \rho(x, a) < \min\{r_1, r_2\} \implies x \in B_{\min\{r_1, r_2\}}(a)$.

2. $r \coloneqq \frac{1}{3}\rho(x,y) > 0$. Пусть $\overline{B}_r(x) \cap \overline{B}_r(y) \neq \varnothing$.
   Тогда $\exists z \in \overline{B}_r(x) \cap \overline{B}_r(y) \implies \rho(x,z) \leqslant r \wedge \rho(y,z) \leqslant \rho \implies \rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y) \leqslant 2r = \frac{2}{3}\rho(x,y)$.

□

***Определение* 2.5.** $A \subset X$. A — открытое множество, если $\forall a \in A \exists B_r(a) \subset A$ $(r > 0)$.

Теорема 2.1 (О свойствах открытых множеств). 1. $\varnothing, X$ — открытые.

2. Объединение любого числа открытых множеств — открытое.
3. Пересечение конечного числа открытых множеств — открытое.
4. $B_r(a)$ — открытое.

Доказательство. 2. A_α — открытые, $\alpha \in I$. $B =: \bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$. Берем $b \in B \implies b \in A_\beta$ для некоторого β. Но A_β — открытое $\implies \exists r > 0 \quad B_r(b) \subset A_\beta \subset B$.

3. $A_1, A_2, \dots, A_n$ — открытые. $B \coloneqq \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$. Берем $b \in B \implies b \in A_k \forall k = 1, 2, \dots, n$. Но A_k — открытое $\exists r_k > 0 B_{r_k} \subset A_k$. $\forall k \implies B_r(b) \subset \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k = B$.

   $r \coloneqq \min\{r_1, \dots, r_n\} > 0 \implies B_r(b) \subset B_{r_k}(b) \subset A_k \quad \forall \implies B_r(b) \subset \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k = B$.

4. Картинка :($\rho(a,x) < R$, $r \coloneqq R = \rho(a,x) > 0$. Докажем, что $B_r(x) \subset B_R(a)$. Возьмем $y \in B_r(x)$, то есть $\rho(x,y) < r \implies \rho(y,a) \leqslant \rho(y,x) + \rho(x,a) < r + \rho(x,a) = R \implies y \in B_R(a)$.

□

Замечание. Существенна конечность. $\mathbb{R}$. $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, 1) = [0, 1)$.

***Определение* 2.6.** $A \subset X$, $a \in A$. a — внутренняя точка множества A, если $\exists r > 0 \colon B_r(a) \subset A$.

Замечание. A — открытое $\iff$ все его точки внутренние.

***Определение* 2.7.** Внутренность множества $\operatorname{Int} a \coloneqq \{a \in A \mid a \text{ — внутренняя точка}\}$.

Пример. $A = [0,1] \subset \mathbb{R}$. Тогда $\operatorname{Int} A = (0,1)$.

Свойства внутренности. 1. $\operatorname{Int} A \subset A$.

2. $\operatorname{Int} A$ — $\bigcup$ всех открытых множеств, которые содержатся в A.
3. $\operatorname{Int} A$ — открытое множество.
4. A — открытое $\iff A = \operatorname{Int} A$.
5. Если $A \subset B$, то $\operatorname{Int} A \subset \operatorname{Int} B$.
6. $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$
7. $\operatorname{Int}(\operatorname{Int} A) = \operatorname{Int} A$.

Доказательство. $B \coloneqq \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha, A_\alpha \subset A$ открытые.

$B \subset \operatorname{Int} A$. Берем $b \in B \implies \exists \beta \in I\colon B \in A_\beta$ — открытое $\implies \exists r > 0\colon B_r(b) \subset A_\beta \subset A \implies b$ — внутренняя точка $A \implies b \in \operatorname{Int} A$.

$\operatorname{Int} A \subset B$. Берем $b \in \operatorname{Int} A \implies \exists r > 0 B_r(b) \subset A$, но $B_r(b)$ — открытое множество $\implies$ оно участвует в объединении $\bigcup\limits_\alpha A_\alpha \implies B_r(b) \subset B \implies b \in B$.

Докажем пункт 4. $\Rightarrow$: пункт 3. $\Leftarrow$ всего его точки внутренние $\implies A = \operatorname{Int} A$. Пункт 6. $\subset$: $A \cap B \subset A, \subset B \implies \operatorname{Int}(A\cap B) \subset \operatorname{Int} A \wedge \operatorname{Int}(A \cap B) \subset \operatorname{Int} B$.

$\supset$. Пусть $x \in \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B \implies \begin{cases} \exists r_1 > 0 & B_{r_1}(x) \subset A \\ \exists r_2 > 0 & B_{r_2}(x) \subset B \end{cases} \implies$ если $r = \min\{r_1, r_2\} \implies B_r(x) \subset A \wedge B_r(x) \subset B \implies B_r(x) \subset A \cap B \implies x \in \operatorname{Int}(A \cap B)$.

Пункт 7. $B \coloneqq \operatorname{Int} A$ — открытое $\implies B = \int B$. ☐

***Определение* 2.8.** $A \subset X$. A — замкнутое, если $X \setminus A$ — открытое.

Теорема 2.2 (о свойствах замкнутых множеств)**.** 1. $\varnothing, X$ — замкнуты.

2. Пересечение любого числа замкнутых множеств — замкнуто.
3. Объединение конечного числа замкнутых множеств — замкнуто.
4. $\overline{B}_R(a)$ — замкнуто.

Доказательство. 2. A_α — замкнуты $\implies X \setminus A_\alpha$ — открытые $\implies \bigcup\limits_{\alpha\in I} X \setminus A_\alpha$ — открыто $\implies X \setminus\setminus \bigcup\limits_{\alpha\in I}(X \setminus A_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ — замкнутое.

4. $X \in \overline{B}_r(a)$ — открытое. Берем $x \notin \overline{B}_R(a)$. Возьмем $r \coloneqq \rho(a,x) - R > 0$. Покажем, что $B_r(x) \subset x \setminus \overline{B_R}(a)$.

   От противного. Пусть $B_r(x) \cap \overline{B}_R(a) \neq \varnothing$. Берем $y \in B_r(x) \cap \overline{B}_R(a) \implies \rho(x,y) < r \wedge \rho(a,y) \leqslant R \implies \rho(a,x) \leqslant \rho(a,y) + \rho(y,x) < R + r = \rho(a,x)$. Противоречие.

☐

Замечание. В 3 важна конечность. $\mathbb{R}$. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{n}, 1] = (0,1]$ — не является замкнутой.

***Определение* 2.9.** Замыкание множества $\operatorname{Cl} A$ — пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A.

Теорема 2.3. $X \setminus \operatorname{Cl} A = \operatorname{Int}(X \setminus A)$ и $X \setminus \operatorname{Int} A = \operatorname{Cl}(X \setminus A)$.

Доказательство. $\operatorname{Int}(X \setminus A) = \bigcup B_\alpha$. B_α — открытые, $B_\alpha \subset X \setminus A \iff X \setminus B_\alpha$ — замкнутое. $X \setminus B_\alpha \supset A$.

$\bigcap(X \setminus B_\alpha) = \operatorname{Cl} A \implies X \setminus \bigcap(X \setminus B_\alpha) = X \setminus \operatorname{Cl} A \iff \bigcup(B_\alpha) = \operatorname{Int}(X \setminus A)$. ☐

Следствие. $\operatorname{Int} A = X \setminus Cl(x \setminus A)$ и $\operatorname{Cl} A = X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A)$.

Свойства. 1. $\operatorname{Cl} A \supset A$.

2. $\operatorname{Cl} A$ — замкнутое множество.
3. A — замкнуто $\iff A = \operatorname{Cl} A$.

Доказательство. $\Leftarrow$ — пункт 2. $\Rightarrow$ A — замкнутое $\Rightarrow$ оно участвует в пересечении из определения $\implies \operatorname{Cl} A \subset A \implies \operatorname{Cl} A = A$. $\square$

4. $A \subset B \implies \operatorname{Cl} A \subset \operatorname{Cl} B$.

   Доказательство. $X \setminus A \supset X \setminus B \implies \operatorname{Int}(X \setminus A) \supset \operatorname{Int}(C \setminus B) \implies X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A) \subset X \setminus \int(X \setminus B)$ $\square$

5. $\operatorname{Cl}(A \cup B) = \operatorname{Cl} A \cup B$.

6. $\operatorname{Cl}(\operatorname{Cl} A) = \operatorname{Cl} A$.

   Доказательство. $B \coloneqq \operatorname{Cl} A$ — замкнуто $\implies \operatorname{Cl} B = B$. $\square$

Упражнение. $\operatorname{Cl} \operatorname{Int} \operatorname{Cl} \operatorname{Int} \ldots A$. Какое наибольшее количество различных множеств может получиться.