

# Математический анализ

Харитонцев-Беглов Сергей

15 ноября 2021 г.

## Содержание

<b>1. Множества, отношения</b>	<b>1</b>
1.1 Орг. моменты . . . . .	1
1.2 Что такое множество . . . . .	1
1.3 Операции с множествами. . . . .	2
1.4 Вещественные числа . . . . .	4
1.5 Мат. индукции . . . . .	5
1.6 Наибольшие/наименьшие элементы . . . . .	5
1.7 Инфинум/Супремум . . . . .	6
<b>2. Последовательности</b>	<b>8</b>
2.1 Предел последовательности . . . . .	8
2.2 Бесконечно большие и бесконечно малые . . . . .	11
2.3 Экспонента . . . . .	14
2.4 Подпоследовательность . . . . .	17
2.5 Ряды . . . . .	20
<b>3. Предел и непрерывность</b>	<b>22</b>
3.1 Предел функции . . . . .	22
3.2 Непрерывные функции . . . . .	25
3.3 Элементарные функции . . . . .	30

# 1. Множества, отношения

## 1.1. Орг. моменты

- За основу начала была взята книжка "Виноградов, Громов «Курс по математическому анализу». Том 1". Но это было давно, как база, но смотреть туда можно.
- Зорич «Математический анализ».
- Фихтенгольц. Книжка устарела, написана старым языком, но там разобрано много примеров, поэтому можно смотреть просто темы.
- [Курс на степике](#). (Часть вторая).

Для связи можно использовать почту [aikhrabrov@mail.ru](mailto:aikhrabrov@mail.ru).

Система состоит из нескольких кусочков:  $0.3 \cdot \text{оценка за практику (АЗ, кр...)} + 0.35 \cdot \text{Коллоквиум в нечетном семестре} + 0.35 \cdot \text{Экзамен в четном модуле}$ . Хвост образуется только в конце семестра.

Первый модуль — общие слова, последовательности, пределы последовательности, функции, непрерывность. Второй модуль — конец непрерывности, производная, начало интегралов.

## 1.2. Что такое множество

Обойдемся без формалистики — мы тут занимаемся прикладной математикой. Поэтому

**Определение 1.1.** Множество — какой-то набор элементов. Для любого элемента можно сказать принадлежит множеству или нет.

Операция	определение	название
$A \subset B$	$\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$	$A$ — подмножество $B$
$A = B$	$A \subset B \wedge B \subset A$	$A$ равно $B$
$A \subsetneq B$	$A \subset B \wedge A \neq B$	$A$ — собственное подмножество $B$

Способы задания множеств:

- Полное задание:  $\{a, b, c\}$ .
- Неполное:  $a_1, a_2, \dots, a_k$ . Но должно быть понятно как образована последовательно. Например  $\{1, 5, \dots, 22\}$  — непонятно
- Можно так же и бесконечные:  $\{a_1, a_2, \dots\}$
- Словесным описанием. Например, множество простых чисел.
- Формулой. Например, пусть задана функция  $\Phi(x)$  — функция для всех чисел, которая возвращает истину или ложь. Тогда можно взять множество  $\{x : \Phi(x) = \text{истина}\}$ . Но не всякая функция подходит, особенно если функция из реального мира. Например: «натуральное число может быть описано не более чем 20 словами русского языка». Не подходит оно по следующей причине: пусть наша функция подходит, то образуется множество  $A = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ . У каждого множества есть минимальный элемент, тогда минимальное не входящее число может быть описано как «первое число, которое нельзя описать не более чем 20 словами русского языка», что меньше 20 слов. Противоречие.

### 1.3. Операции с множествами.

Символ	Определение	Описание
$\cap$	$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$	Пересечение множеств
$\bigcap_{k=1}^n A_k$	$A = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$	Пересечение множества множеств
$\cup$	$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$	Объединение множеств
$\bigcup_{k=1}^n A_k$	$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$	Объединение множества множеств
$\setminus$	$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$	Разность множеств
$\times$	$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$	Произведение множеств
$\triangle$	$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$	Симметрическая разность
$\emptyset$	$\forall x : x \notin \emptyset$	пустое множество
$\mathbb{N}$		Натуральные числа
$\mathbb{Z}$		целые числа
$\mathbb{Q}$	$\frac{a}{b}$ , где $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$	рациональные числа
$\mathbb{R}$		действительные числа
$2^X$		множество всех подмножеств $X$

Важный момент:  $1 \in \{1\}$ , но  $1 \notin \{\{1\}\}$

Правила де Моргана. Пусть есть  $A_\alpha \subset X$

$$1. X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha.$$

$$2. X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha.$$

**Доказательство:**  $X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : x \in X \wedge x \notin A_\alpha \forall \alpha \in I\} = \{x : \forall \alpha \in I X \setminus A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha\}.$

**Теорема 1.1.**  $A \cap \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} A \cap B_\alpha$

$$A \cup \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} A \cup B_\alpha$$

**Доказательство.** TODO. □

**Определение 1.2.** Упорядоченная пара  $\langle x, y \rangle$ . Важное свойство  $\langle x, y \rangle = \langle x', y' \rangle \iff x = x' \wedge y = y'$

**Определение 1.3.** Пусть даны множества  $X_1, \dots, X_n$ , то упорядоченной  $n$ - (кортеж) —  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ , обладающее условием  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle = \langle y_1, \dots, y_n \rangle \iff x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n$

**Определение 1.4.** Отношение  $R \subset X \times Y$ .  $x$  и  $y$  находятся в отношении  $R$ , если их  $\langle x, y \rangle \in R$ .

**Определение 1.5.** Область отношения  $\delta_R = \text{dom}_R = \{x \in X : \exists y \in Y : \langle x, y \rangle \in R\}$ .

**Определение 1.6.** Область значений  $\rho_R = \text{ran}_R = \{y \in Y : \exists x \in X : \langle x, y \rangle \in R\}$

**Определение 1.7.** Обратное отношение  $R^{-1} \subset Y \times X$   $R^{-1} = \{\langle y, x \rangle \in R\}$ .

**Определение 1.8.** Композиция отношения.  $R_1 \subset X \times Y, R_2 \subset Y \times Z : R_1 \circ R_2 \subset X \times Z$ .  
 $R_1 \circ R_2 = \{\langle x, z \rangle \in X \times Z \mid \exists y \in Y : \langle x, y \rangle \in R_1 \wedge \langle y, z \rangle \in R_2\}$

Примеры отношений.

- Отношение равенства.  $R = \{\langle x, x \rangle : x \in X\}$ . Но это просто равенство.

- " $\geq$ " ( $X = \mathbb{R}$ ).  $R = \{\langle x, y \rangle : x \geq y\}$

- " $>$ " ( $X = \mathbb{R}$ ).  $R = \{\langle x, y \rangle : x > y\}$

$\delta_{>} = 2, 3, 4 \dots$

$\rho_{>} = \mathbb{N}$

$>^{-1} = < = \{\langle x, y \rangle : x < y\}$

$> \circ > = \{\langle x, z \rangle : x - z \geq 2\}$

- $X$  — прямые на плоскости. " $\perp$ ":  $R = \{\langle x, y \rangle : x \perp y\}$ .

$\delta_{\perp} = \rho_{\perp} = X$

$\perp^{-1} = \perp$

$\perp \circ \perp = \parallel$

- $\langle x, y \rangle \in R$ , когда  $x$  — отец  $y$ .

$\delta_R = \{\text{Все, у кого есть сыновья}\}$ .

$\rho_R$  — религиозный вопрос. См. Библию

$R^{-1} = \text{сын}$

$R \circ R = \{\text{дед по отцовской линии}\}$

**Определение 1.9.** Функция из  $X$  в  $Y$  — отношение  $(\delta_f = X)$ , для которого верно:

$$\left. \begin{array}{l} \langle x, y \rangle \in f \\ \langle x, z \rangle \in f \end{array} \right\} \Rightarrow y = z.$$

Используется запись  $y = f(x)$ .

**Определение 1.10.** Последовательность — функция у которой  $\delta_f = \mathbb{N}$

**Определение 1.11.** Отношение  $R$  называется рефлексивным, если  $\forall x : \langle x, x \rangle \in R$ .

**Определение 1.12.** Отношение  $R$  называется симметричным, если  $\forall x, y \in X : \langle x, y \rangle \in R \Rightarrow \langle y, x \rangle \in R$

**Определение 1.13.** Отношение  $R$  называется иррефлексивным, если  $\forall x \langle x, x \rangle \notin R$

**Определение 1.14.** Отношение  $R$  называется антисимметричным, если  $\left. \begin{array}{l} \langle x, y \rangle \in R \\ \langle y, x \rangle \in R \end{array} \right\} \Rightarrow x = y$

**Определение 1.15.** Отношение  $R$  называется транзитивным, если  $\left. \begin{array}{l} \langle x, y \rangle \in R \\ \langle y, z \rangle \in R \end{array} \right\} \Rightarrow \langle x, z \rangle \in R$

**Определение 1.16.** Отношение называется отношением эквивалентности, если отношение рефлексивно, симметрично, транзитивно.

**Пример.** Равенство, сравнение по модулю  $\mathbb{Z}$ ,  $\parallel$ , отношение подобия треугольников.

**Определение 1.17.** Если выполняется рефлексивность, антисимметричность и транзитивность, от данное отношение — отношение нестрогого частичного порядка.

**Пример.**  $\geq$ ;  $A \subset B$  на  $2^X$ .

**Определение 1.18.** Если выполняется иррефлексивность и транзитивность, то данное отношение — отношение строгого частичного порядка.

**Пример.**  $>$ ;  $A$  собственное подмножество  $B$  на  $2^X$ .

**Упражнение.** Иррефлексивность + транзитивность  $\Rightarrow$  антисимметрично.

**Упражнение.**  $R$  — нестрогий ч.п.  $\Rightarrow R = \{\langle x, y \rangle \in R : x \neq y\}$  — строгий ч.п.

## 1.4. Вещественные числа

Есть две операции.

•  $+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

- Коммутативность.  $x + y = y + x$ .
- Ассоциативность.  $(x + y) + z = x + (y + z)$
- Существует ноль.  $\exists 0 \in \mathbb{R} \ x + 0 = x$
- Существует противоположный элемент.  $\exists (-x) \in \mathbb{R} \ x + (-x) = 0$

•  $\cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

- Коммутативность.  $x \cdot y = y \cdot x$ .
- Ассоциативность.  $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
- Существует единица.  $\exists 1 \in \mathbb{R} \ x \cdot 1 = x$
- Существует обратный элемент.  $\exists x^{-1} \in \mathbb{R} \ x \cdot x^{-1} = 1$

Свойство дистрибутивности:  $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ . Структура с данными операциями называется полем.

Введем отношение  $\leq$ . Оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно, то есть нестрогий частичного порядка. Причем:

- $x < y \Rightarrow x + z < y + z$
- $0 \leq x \wedge 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq x \cdot y$

**Аксиома полноты.** Если  $A$  и  $B \subset \mathbb{R}$  и  $\forall a \in A, b \in B : a \leq b$  и  $A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$ , тогда  $\exists c \in \mathbb{R} \ a \leq c \leq b$ .

**Замечание.** Множество рациональных не удовлетворяет аксиоме полноты. Например:  $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \wedge x^2 > 2\}$ . Единственная точка, между этими множествами —  $\sqrt{2}$

**Теорема 1.2 (Принцип Архимеда).** Пусть  $x \in \mathbb{R} \wedge y > 0$ . Тогда  $\exists n \in \mathbb{N} : x < ny$

**Доказательство.**  $A = \{u \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : u < ny\}$ . Пусть  $A \neq \mathbb{R}$ ,  $B = \mathbb{R} \setminus A \neq \emptyset$ ,  $A \neq \emptyset$ , т.к.  $0 \in A$ .

Возьмем  $a \in A, b \in B$ .  $b < a \Rightarrow \exists n : a < ny \Rightarrow b < ny \Rightarrow$  противоречие.

По аксиоме полноты  $\exists c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b \forall a \in A, \forall b \in B$ .

Пусть  $c \in A$ . Тогда  $c < ny \Rightarrow c < c + y < ny + y = (n+1)y \Rightarrow c < c + y \Rightarrow c + y \in A$ . Противоречие.

Пусть  $c \in B$ . Рассмотрим  $c - y < c \Rightarrow c - y \in A \Rightarrow \exists n : c - y < ny \Rightarrow c < ny + y = (n+1)y \Rightarrow c \in A$ . Противоречие.  $\square$

**Следствие.** Если  $\epsilon > 0$ , то  $\exists n \in \mathbb{N} \frac{1}{n} < \epsilon$

**Доказательство.**  $x = 1, y = \epsilon \Rightarrow ny = n\epsilon > x = 1 \iff \epsilon > \frac{1}{n}$   $\square$

## 1.5. Мат. индукции

Пусть  $P_n$  - последовательность утверждений. Тогда, если  $P_1$  — верное и из того, что  $P_n$  — верно следует, что  $P_{n+1}$  — верно. Тогда все  $P_n$  верны  $\forall n \in \mathbb{N}$

**Определение 1.19.** Пусть  $A \subset \mathbb{R}$ . Тогда  $A$  — ограничено сверху, если  $\exists c \in \mathbb{R} : \forall a \in A a \leq c$ . Такое  $c$  называется верхней границей.

**Определение 1.20.** Пусть  $A \subset \mathbb{R}$ . Тогда  $A$  — ограничено снизу, если  $\exists b \in \mathbb{R} : \forall a \in A a \geq b$ . Такое  $b$  называется нижней границей.

**Определение 1.21.** Пусть  $A \subset \mathbb{R}$ . Тогда  $A$  — ограничено, если оно ограничено сверху и снизу.

**Пример.**  $\mathbb{N}$  не ограничено сверху, но ограничено снизу.

**Доказательство.** Пусть  $\exists c \in \mathbb{R} : c \geq n \forall n \in \mathbb{N}$ . Тогда это противоречит принципу Архимеда при  $x = c, y = 1$ .

Для ограниченности снизу достаточно взять  $c = -1$ .  $\square$

## 1.6. Наибольшие/наименьшие элементы

**Теорема 1.3.** В непустом конечном множестве  $A$  есть наибольший и наименьший элементы.

**Доказательство.** Докажем по индукции:

- База.  $|A| = 1$ . Очевидно.
- Переход.  $n \rightarrow n + 1$ .
- Доказательство. Рассмотрим множество из  $n+1$  элемента  $\{x_1 \dots x_n, x_{n+1}\}$ . Выкинем из него последний элемент. Тогда по индукционному предположению у нас есть максимальный элемент  $x_k$ . Тогда рассмотрим два случая:

1.  $x_k \geq x_{n+1}$ . Тогда  $x_k$  — наибольший элемент множества  $\{x_1 \dots x_n, x_{n+1}\}$ .
2.  $x_k < x_{n+1}$ . Тогда по транзитивности  $x_{n+1}$  больше всех других элементов множества. Значит,  $x_{n+1}$  — наибольший элемент множества  $\{x_1 \dots x_n, x_{n+1}\}$ .

$\square$

**Теорема 1.4.** В непустом ограниченном сверху (снизу) множестве целых чисел есть наибольший (наименьший) элемент.

**Доказательство.** Пусть  $A \subset \mathbb{Z}$ .  $c$  — его верхняя граница.

Возьмем  $b \in A$  и рассмотрим  $B := \{x \in A \mid x \geq b\}$ . Заметим, что  $B$  содержит конечное число элементов, значит в нем есть наибольший элемент. Пусть это  $m \in B$ :  $\forall x \in B : x \leq m$ . Докажем, что  $m$  — наибольший элемент и в  $A$ .

Для этого заметим, что любой  $x \in A$  либо лежит в  $B$ , либо  $x < b$ , а по транзитивности  $x < b \leq m$ .  $\square$

**Определение 1.22.** Пусть  $x \in \mathbb{R}$ , тогда  $[x] = \lfloor x \rfloor$  — наименьшее целое число, не превосходящее  $x$ .

$$1. \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

Левое неравенство очевидно. Правое неравенство можно доказать от противного: пусть  $x \geq \lfloor x \rfloor + 1$ , тогда справа целое число большее  $\lfloor x \rfloor$ , но меньшее  $x$ . Противоречие.

$$2. x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

**Теорема 1.5.** Если  $x < y$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ), то

$$1. \exists r \in \mathbb{Q} : x < r < y.$$

$$2. \exists r \notin \mathbb{Q} : x < r < y$$

**Пункт 1.**  $\epsilon := y - x > 0$ .

Найдется  $n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \epsilon = y - x$ . Тогда  $m := \lfloor xn \rfloor + 1$ :  $r = \frac{m}{n}$  подходит.

$$\frac{m}{n} > x \iff \lfloor xn \rfloor + 1 = m > xn \text{ — свойство целой части. } \frac{m}{n} < y. \frac{m-1}{n} = \frac{\lfloor xn \rfloor}{n} \leq \frac{nx}{n} = x \Rightarrow \frac{m}{n} \leq x + \frac{1}{n} < x + \epsilon = x + y - x = y \quad \square$$

**Пункт 2.**  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ . Рассмотрим  $x - \sqrt{2} < y - \sqrt{2} \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q} : x - \sqrt{2} < r < y - \sqrt{2} \Rightarrow x < \underbrace{r + \sqrt{2}}_{r'} < y$ .

Почему  $r'$  иррационально? Иначе  $\sqrt{2} = r' - r \in \mathbb{Q}$ .  $\square$

## 1.7. Инфинум/Супремум

**Определение 1.23.**  $A \subset \mathbb{R}$  — непустое и ограниченное сверху. Тогда супремум — наименьшая из всех верхних границ  $A$ . Обозначается  $\sup A$ .

**Определение 1.24.**  $A \subset \mathbb{R}$  — непустое и ограниченное снизу. Тогда инфинум — наибольшая из всех нижних границ  $A$ . Обозначается  $\inf A$ .

**Пример.**  $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ .  $\sup A = 1$ .  $\inf A = 0$ .

**Теорема 1.6.** Пусть  $A \subset \mathbb{R}$  — непустое и ограниченное сверху. Тогда  $\sup A$  существует и единственен.

**Доказательство.** Существование: Пусть  $B$  — все верхние границы  $A$ . Во-первых  $B$  — не пусто, так как  $A$  ограничено сверху.

Тогда возьмем  $b \in B$ .  $b$  — верхняя граница для  $A$ , то есть  $\forall a \in A : a \leq b$ . Тогда по аксиоме полноты  $\exists c \in \mathbb{R} \forall a \in A, b \in B : a \leq c \leq b$ . Из левого неравенства получаем, что  $c$  — верхняя граница, то есть  $c \in B$ . Из второго неравенства получаем, что  $c$  — наименьший элемент  $B$ . Так и получается, что  $c = \sup A$ .

Единственность. Если  $c = \sup A$  и  $c' = \sup A$ , то  $c \leq c'$ , так как  $c$  — наименьший элемент  $B$ , но и  $c' \leq c$ , так как  $c'$  — наименьший элемент  $B$ . Значит  $c = c'$ . Противоречие.  $\square$

**Следствие.**  $A \subset B \subset \mathbb{R}$ ,  $B$  ограничено сверху,  $A$  — не пустое. Тогда  $\sup A \leq \sup B$ .

**Доказательство.** Если  $c$  — верхняя граница  $B$ , то  $c$  — верхняя граница для  $A$ . Заметим, что все верхние границы  $A \supset B$ . Тогда все понятно.  $\square$

**Теорема 1.7.** Пусть  $A \subset \mathbb{R}$  — непустое и ограниченное снизу. Тогда  $\inf A$  существует и единственен.

**Упражнение.** Доказательство.

**Следствие.**  $A \subset B \subset \mathbb{R}$ ,  $B$  ограничено снизу,  $A$  — не пустое. Тогда  $\inf A \geq \inf B$ .

**Замечание.** Без аксиомы полноты теоремы существования не верны.  $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ . Любое рациональное число  $> \sqrt{2}$  — верхние границы. А вот  $\sup A$  нет.

**Теорема 1.8.** Пусть непустое  $A \in \mathbb{R}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \bullet \quad a = \inf A &\iff \begin{cases} a \leq x \quad \forall x \in A \\ \forall \epsilon > 0 \exists x \in A : x < a + \epsilon \end{cases} \\ \bullet \quad b = \sup A &\iff \begin{cases} a \geq x \quad \forall x \in A \\ \forall \epsilon > 0 \exists x \in A : x > a - \epsilon \end{cases} \end{aligned}$$

**Доказательство.** Рассмотрим два неравенства по отдельности:

1.  $b$  — верхняя граница.
2.  $b - \epsilon$  — не является верхней границей множества  $A$ . То есть  $\forall b' < b : b' — не является верхней границей.$

Все это в точности значит, что  $b = \sup A$ .  $\square$

**Теорема 1.9** (Теорема о вложенных отрезках). Пусть  $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots$ . Тогда  $\exists c \in \mathbb{R} : \forall n : c \in [a_n, b_n]$ .

**Доказательство.** Пусть  $A = \{a_1, a_2, \dots\}, B = \{b_1, b_2, \dots\}$ . Заметим, что так как отрезки вложены, то  $a_1 \leq a_2 \leq \dots$ , а  $b_1 \geq b_2 \geq \dots$ . Проверим, что  $a_i \leq b_j \forall i, j \in \mathbb{N}$ . Пусть  $i \leq j$ , тогда  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_i \leq \dots \leq a_j \leq b_j$ . Пусть  $i > j$ , тогда  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_j \geq \dots \geq b_i \geq a_i$ . Тогда по аксиоме полноты  $\exists c \in \mathbb{R} : a_i \leq c \leq b_j \forall i, j \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall n \forall a_n \leq c \leq b_n \Rightarrow c \in [a_n, b_n]$   $\square$

**Замечание.**  $\sqrt{2} = 1.41\dots$ . Тогда отрезке:  $[1, 2], [1.4, 1.5], [1.41, 1.42], \dots$ . Тогда единственная точка, лежащая во всех отрезках:  $\sqrt{2}$ .

**Замечание.** Для полуинтервалов, (интервалов) неверно:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (0, \frac{1}{n}) = \emptyset.$$

**Замечание.** Для лучей неверно.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [n, +\infty) = \emptyset.$$



## 2. Последовательности

### 2.1. Предел последовательности

**Определение 2.1.**  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

Способы задания последовательностей

1. Формулой.  $f_n := \frac{\sin n}{n^n}$
2. Рекуррентой:  $f_1 = 1, f_2 = 2, f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ .

Способы визуализации:

1. Можно ставить точки на прямой. Но если последовательность, например,  $a_n := \sin(\frac{n\pi}{2})$ , то получится кукож.
2. График. Считаем значения в натуральных точках.

**Определение 2.2.** Последовательность  $a_n$  ограничена сверху, если  $\exists C : \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq C$ .

**Определение 2.3.** Последовательность  $a_n$  ограничена снизу, если  $\exists C : \forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq C$ .

**Определение 2.4.** Последовательность  $a_n$  ограничена, если она ограничена и сверху, и снизу.

**Определение 2.5.** Последовательность  $a_n$  монотонно возрастает, если  $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$

**Определение 2.6.** Последовательность  $a_n$  строго монотонно возрастает, если  $a_1 < a_2 < \dots$

**Определение 2.7.** Последовательность  $a_n$  монотонно убывает, если  $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$

**Определение 2.8.** Последовательность  $a_n$  строго монотонно убывает, если  $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$

**Определение 2.9** (Нетрадиционное определение предела).  $l = \lim a_n \iff$  вне любого интервала, содержащего  $l$  находится конечное число членов последовательности.

**Замечание.** Мы можем смотреть только на симметричные относительно точки  $l$  интервалы. Если он не симметричен, то можно большую границу уменьшить. Так можно сделать, так как мы знаем, что вне меньшего конечное число точек, то и снаружи большего точно конечное число точек. Тогда наш интервал выглядит как  $(l - \varepsilon; l + \varepsilon)$

**Замечание.** Конечное число точек снаружи интервала  $\iff$  начиная с некоторого номера все попали в интервал, так как возьмем последнюю точку вне интервалов, и взяли её номер  $+ 1$ .

**Определение 2.10** (Традиционное определение предела).  $l = \lim a_n \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : |a_n - l| < \varepsilon$

1. Предел единственный. Пусть  $l$  и  $l'$  единственный. (*Картинка*). Рассмотрим интервал содержащий  $l$ , но не  $l'$ . Снаружи конечное число точек, теперь наоборот, там тоже конечное число точек. Тогда последовательность конечна.
2. Если из последовательности выкинуть какое-то число членов, то предел не изменится. Доказательство через картинку.

3. Если как-то переставить члены последовательности, то предел не изменится. Ну очевидно, что количество членов не изменилось, точки не поменяли своё местоположение.
4. Если члены последовательности записать с какой-то кратностью (конечной), то предел не изменится.
5. Если добавить к последовательности конечное число членов, то наличие/отсутствие предела и значение предела, если он существует, не поменяется. Доказательство по картинке.
6. Изменение конечного числа членов в последовательности не меняет предел.

**Пример.**  $\lim \frac{1}{n} = 0$ . Мы знаем, что найдется такой номер, что  $\frac{1}{n} < \beta$ , тогда при  $n \geq N$   $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \beta$

**Пример.**  $a_n = (-1)^n$  не имеет предела.

**Доказательство.** Посмотрим на картинку. Возьмем сначала точку не равную  $\pm 1$ . Тогда можно выбрать интервал, которые не содержит  $\pm 1$ . То есть интервал не содержит бесконечное число точек.

Для  $x = 1$  можно взять  $(0; 2)$ , для  $x = -1$  можно взять  $(-2; 0)$ . □

**Лемма.**  $\forall a, b, x_n, y_n, \varepsilon > 0 : a = \lim x_n \wedge b = \lim y_n \Rightarrow \exists N : \forall n \geq N : |x_n - a| < \varepsilon \wedge |y_n - b| < \varepsilon$

**Доказательство.** Запишем определения пределов:  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 \forall n \geq N_1 |x_n - a| < \varepsilon$  и  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_2 \forall n \geq N_2 |y_n - b| < \varepsilon$ . Тогда просто возьмем  $N = \max(N_1, N_2)$ . □

**Теорема 2.1** (Предельный переход в неравенствах).  $\forall x_n, y_n (x_i < y_i \forall i) a = \lim x_n \wedge b = \lim y_n \Rightarrow a \leq b$

**Доказательство.** Докажем от противного. Пусть  $a > b$ . Посмотрим картиночку. Пусть  $\varepsilon := \frac{a-b}{2}$ . По лемме  $\exists N : \forall n \geq N : |x_n - a| < \varepsilon \wedge |y_n - b| < \varepsilon$ . Заметим, что  $|x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow x_n > a - \varepsilon$ , а  $|y_n - b| < \varepsilon \Rightarrow y_n < b + \varepsilon \Rightarrow x_n > a - \varepsilon = b + \varepsilon > y_n$ . Противоречие. □

**Замечание.** Строгий знак может не сохраняться. Пример:  $x_n = -\frac{1}{n} < y_n = \frac{1}{n}$ , но предел и там, и там 0. Т.к.  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N : \frac{1}{n} = |y_n| = |x_n| < \varepsilon$

**Следствие.** Три пункта:

1.  $\forall n x_n \leq b \wedge \lim x_n = a \Rightarrow a \leq b$ .
2.  $\forall n a \leq y_n \wedge \lim y_n = b \Rightarrow a \leq b$ .
3.  $\forall n x_n \in [a; b] \wedge \lim x_n = l \Rightarrow l \in [a; b]$ .

**Доказательство.** Константу можно заменить на последовательность  $z_n = \text{const}$  □

**Теорема 2.2** (Теорема о двух милиционерах(теорема о сжатой последовательности)). Пусть  $\forall n : x_n \leq y_n \leq z_n \wedge \lim x_n = \lim z_n = l$ , тогда  $\lim y_n = l$ .

**Доказательство.** Возьмем  $\varepsilon > 0$ . По лемме:  $\exists N : \forall n \geq N : |x_n - l| < \varepsilon \wedge |z_n - l| < \varepsilon$ , откуда  $x_n > l - \varepsilon$  и  $z_n < l + \varepsilon$ . Тогда  $l - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < l + \varepsilon \Rightarrow l - \varepsilon < y_n < l + \varepsilon$ , то есть  $|y_n - l| < \varepsilon$ . □

**Следствие.** Если  $\forall n |y_n| \leq z_n \wedge \lim z_n = 0 \Rightarrow \lim y_n = 0$

**Доказательство.**  $x_n := -z_n$ . Тогда  $|y_n| \leq z_n \iff -z_n \leq y_n \leq z_n$ . Ну тогда и  $\lim y_n = 0$  □

**Теорема 2.3** (Теорема Вейерштрасса для монотонной последовательности). Три пункта:

1.  $\forall x_n x_n \uparrow \wedge x_n$  — ограничена сверху  $\Rightarrow \exists a = \lim x_n$ .
2.  $\forall x_n x_n \downarrow \wedge x_n$  — ограничена снизу  $\Rightarrow \exists a = \lim x_n$ .
3. Монотонная последовательность имеет предел  $\iff$  она ограничена.

*Пункт 1.*  $b := \sup\{x_1, x_2, \dots\}$  — существует, т.к.  $x_n$  — ограничено сверху. Теперь докажем, что  $\lim x_n = b$ , возьмем  $\varepsilon > 0$ .  $b$  — наименьшая верхняя граница  $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 b - \varepsilon$  — не верхняя граница. То есть  $\exists N : x_N > b - \varepsilon$ . Проверим, что такое  $N$  подходит: при  $n \geq N$   $b - \varepsilon < x_N < x_{N+1} < \dots x_n \leq b \leq b + \varepsilon \Rightarrow b - \varepsilon < x_n < b + \varepsilon$ .  $\square$

*Пункт 3.* Докажем отдельно в каждую сторону:

$\Leftarrow$  Если  $\uparrow$ , то пункт 1, иначе пункт 2.

$\Rightarrow$  Докажем это утверждение для любой последовательности.

Пусть  $\lim x_n = a$ . Возьмем  $\varepsilon = 1$ , тогда  $\exists N : \forall n > N : |x_n - a| < 1 \Rightarrow a - 1 < x_n < a + 1$ . Ну тогда верхняя граница  $\max\{a + 1, x_1, x_2, \dots, x_{N+1}\}$ , а нижняя  $\min\{a - 1, \dots\}$ .  $\square$

**Замечание.** В 1:  $\lim x_n = \sup\{x_1, x_2, \dots\}$ , во 2:  $\lim x_n = \inf\{x_1, x_2, \dots\}$ .

**Теорема 2.4** (О арифметических операциях с пределами).  $\forall x_n, y_n a = \lim x_n \wedge \lim y_n = b$ . Тогда:

1.  $x_n + y_n$  имеет предел и он равен  $a + b$
2.  $x_n - y_n$  имеет предел и он равен  $a - b$
3.  $x_n \cdot y_n$  имеет предел и он равен  $a \cdot b$
4.  $|x_n|$  имеет предел и он равен  $|a|$
5.  $\frac{x_n}{y_n}$  имеет предел, если  $b \neq 0 \wedge \forall n y_n \neq 0$  и он равен  $\frac{a}{b}$

**Доказательство.**

1. Возьмем  $\varepsilon > 0$  и найдем  $N$  из леммы для  $\frac{\varepsilon}{2}$ . Тогда  $\forall n \geq N : |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |(x_n + y_n) - (a + b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
2. Так же.
3. Поскольку  $\lim y_n = b$ , то  $y_n$  — ограничена, а значит  $\exists M : |y_n| \leq M$ . Рассмотрим  $|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - a y_n + a y_n - ab| \leq |x_n y_n - a y_n| + |a y_n - ab| = |y_n| |x_n - a| + |a| |y_n - b| \leq M |x_n - a| + |a| |y_n - b|$ .  $M |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \iff |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}$ . Значит  $\exists N_1$  при котором  $\forall n > N_1$  выполнено.  $|a| |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \iff |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|a|+1}$ . Тогда найдется  $N_2$ , такой что  $\forall n \geq N_2$  это выполнено. Такой что  $N = \max N_1, N_2$ .

4.  $||x| - |a|| \leq |x_n - a| \iff -|x_n - a| \leq |x_n| - |a| \leq |x_n - a|$ , а в правой части написано, что  $|x_n| = |(x_n - a) + a| \leq |x_n - a| + |a|$ . Понятно, что это выполняется при любых  $x_n, a$ .

Возьмем  $N$ , для которого  $\forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon$ . Тогда  $\forall n \geq N : ||x_n| - |a|| \leq |x_n - a| < \varepsilon$

5. Докажем, что  $\lim \frac{1}{y_n} = \frac{1}{b}$ . Возьмем  $|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}| = \frac{|y_n - b|}{|y_n||b|} \iff (1)$ . Посмотрим на картинку: возьмем  $\varepsilon = \frac{b}{2}$ . Получим интервал  $(\frac{b}{2}; \frac{3b}{2})$ . Тогда берем  $N_1 : \forall n \geq N |y_n - b| < |b|/2 \Rightarrow |y_n| > \frac{|b|}{2}$ . Тогда  $(1) \iff \frac{|y_n - b|}{\frac{|b|}{2}|b|} = \frac{2}{|b|^2} |y_n - b| < \varepsilon \iff |y_n - b| < \varepsilon \cdot \frac{|b|}{2}$ . Поэтому  $\exists N_2 : \forall n \geq N_2$  такой, что это выполняется. Ну тогда  $N = \max N_1, N_2$ .

□

**Следствие.** Если  $\lim x_n = a$ , то  $\lim cx_n = ca$ .

**Следствие.** Если  $\lim x_n = a \wedge \lim y_n = b$ , то  $\lim(cx_n + dy_n) = ca + db$

**Замечание.** Если  $\lim y_n = b \neq 0$ , то начиная с некоторого  $N$ ,  $y_n \neq 0$

**Пример.**  $\lim \frac{n^2 + 2n - 3}{4n^2 - 5n + 6} = \frac{1 + \frac{2}{n} - \frac{3}{n^2}}{4 - \frac{5}{n} + \frac{6}{n^2}} = \frac{\lim(1 + \frac{2}{n} - \frac{3}{n^2})}{4 - \frac{5}{n} + \frac{6}{n^2}} = \frac{1}{4}$

## 2.2. Бесконечно большие и бесконечно малые

**Определение 2.11.** Последовательность  $x_n$  называется бесконечно малой, если  $\lim x_n = 0$ .

**Утверждение 2.5.**  $\forall x_n, y_n : x_n$  — бесконечно мала последовательность  $\wedge y_n$  ограничена,  $x_n y_n$  — бесконечно малая последовательность.

**Доказательство.**  $y_n$  — ограничена  $\Rightarrow \exists M : \forall n : |y_n| \leq M$ . Возьмем  $\varepsilon > 0$  и подставим в определение  $\lim x_n = 0$ . Тогда найдется  $N : \forall n \geq N : |x_n| < \frac{\varepsilon}{M}$ . Следовательно  $x_n y_n \leq M |x_n| < M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon \Rightarrow \lim x_n y_n = 0$ . □

**Определение 2.12.**  $\lim x_n = +\infty$  означает то, что вне любого луча вида  $(E; +\infty)$  лежит лишь конечное число членов последовательности. Или:  $\forall E \exists N : \forall n \geq N x_n > E$ .

**Определение 2.13.**  $\lim x_n = -\infty$  означает то, что вне любого луча вида  $(-\infty, E)$  лежит лишь конечное число членов последовательности. Или:  $\forall E \exists N : \forall n \geq N x_n < E$ .

**Определение 2.14.**  $\lim x_n = \infty$  означает то, что в любом промежутке содержится конечное число членов последовательности. Или:  $\forall E \exists N \forall n \geq N |x_n| > E$ .

**Замечание.**  $\lim x_n = \infty \iff \lim |x_n| = +\infty$

**Замечание.**  $\lim x_n = +\infty$  (или  $-\infty$ )  $\Rightarrow \lim x_n = \infty$ . Но  $\nLeftarrow$ ! Пример  $x_n = (-1)^n \cdot n$ .

**Замечание.**  $\lim x_n = \infty \Rightarrow x_n$  — неограниченная последовательность. Но наоборот неверно. Пример:  $x_n = \begin{cases} n & n - \text{четно} \\ 0 & n - \text{нечетно} \end{cases}$ .

**Определение 2.15.**  $x_n$  называется бесконечно большой, если  $\lim x_n = \infty$ .

**Теорема 2.6.**  $\forall x_n : \forall n x_n \neq 0 \Rightarrow x_n$  — бесконечно малая  $\iff \frac{1}{x_n}$  — бесконечно большая.

**Доказательство.** Докажем в каждую сторону отдельно:

$\Rightarrow x_n$  — бесконечно малая  $\iff \lim x_n = 0$ . Возьмем  $E$  из определения бесконечно большой и  $\varepsilon = \frac{1}{E}$ , подставим в предел. Тогда  $\exists N : \forall n \geq N |x_n| < \varepsilon = \frac{1}{E} \Rightarrow |\frac{1}{x_n}| > E$ .

$\Leftarrow \frac{1}{x_n}$  — бесконечно большая  $\Rightarrow \lim \frac{1}{x_n} = \infty$ . Возьмем  $\varepsilon > 0$  из определения бесконечно малой и  $E = \frac{1}{\varepsilon}$  и подставим в  $\lim$ . Тогда  $\exists N, \forall n \geq N : |\frac{1}{x_n}| > E = \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |x_n| < \varepsilon$

□

**Определение 2.16.**  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \pm\infty$

**Теорема 2.7.** В  $\overline{\mathbb{R}}$  предел единственен.

**Доказательство.** Пусть  $\lim x_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$  и  $\lim x_n = b \in \overline{\mathbb{R}}$ . Если  $a, b \in \mathbb{R}$ , то знаем. Иначе рассмотрим случаи:

- $a = \pm\infty, b \in \mathbb{R}$ . Картинка.
- $a = +\infty, b = -\infty$ . Ну такого быть не может, смотри картинку.

□

**Теорема 2.8** (о стабилизации знака). Если  $\lim x_n = a \in \overline{\mathbb{R}} \wedge a \neq 0 \Rightarrow \exists N : \forall n \geq N$  все члены последовательности имеют тот же знак, что и  $a$ .

**Доказательство.** Несколько случаев:

- $a \in \mathbb{R}$ . Картинка. Начиная с некоторого номера все  $x_n \in (0; 2a)$  или  $x_n \in (2a; 0)$ .
- $a = +\infty$ . Картинка. Возьмем  $E = 0$ , начиная с некоторого номера все члены попали в этот луч.
- $a = -\infty$ . Аналогично.

□

**Теорема 2.9** (предельный переход в неравенстве  $\overline{\mathbb{R}}$ ).  $\forall n : x_n \leq y_n \wedge \lim x_n = a \in \overline{\mathbb{R}} \wedge \lim y_n = b \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow a \leq b$ .

**Доказательство.** Если  $a, b \in \mathbb{R}$ , то уже есть. Иначе предположим противное:

- $a = +\infty$  и  $b \in \mathbb{R}$ . Картинка...

□

**Теорема 2.10** (Теорема о двух миллионерах).

1.  $\forall x_n, y_n : x_n \leq y_n \wedge \lim x_n = +\infty \Rightarrow \lim y_n = +\infty$
2.  $\forall x_n, y_n : x_n \leq y_n \wedge \lim y_n = -\infty \Rightarrow \lim x_n = -\infty$

**Доказательство.**

1.  $\lim x_n = +\infty \Rightarrow \forall E : \exists N : \forall n \geq N x_n > E$ , но  $y_n \geq x_n > E$ .
2. Упражнение для читателя.

□

**Теорема 2.11** (О арифметических действиях с бесконечно большими).

1.  $\forall x_n, y_n \lim x_n = +\infty, y_n$  — ограничена снизу  $\Rightarrow \lim(x_n + y_n) = +\infty$
2.  $\forall x_n, y_n \lim x_n = -\infty, y_n$  — ограничена сверху  $\Rightarrow \lim(x_n + y_n) = -\infty$

3.  $\forall x_n, y_n \lim x_n = \infty, y_n - \text{ограничена} \Rightarrow \lim(x_n + y_n) = \infty$
4.  $\forall x_n, y_n \lim x_n = \pm\infty \wedge \exists C : \forall n : y_n \geq C > 0 \Rightarrow \lim(x_n y_n) = \pm\infty$
5.  $\forall x_n, y_n \lim x_n = \pm\infty \wedge \exists C : \forall n : y_n \leq C < 0 \Rightarrow \lim(x_n y_n) = \mp\infty$
6.  $\forall x_n, y_n \lim x_n = \infty \wedge \exists C : \forall n : |y_n| \geq C > 0 \Rightarrow \lim(x_n y_n) = \infty$
7.  $\forall x_n, y_n \lim x_n = a \neq 0 \wedge \lim y_n = 0 \Rightarrow \lim \frac{x_n}{y_n} = \infty$
8.  $\forall x_n - \text{ограничена}, y_n : \lim y_n = \infty \Rightarrow \lim \frac{x_n}{y_n} = 0$
9.  $\forall x_n, y_n - \text{ограничена} : \lim x_n = \infty \wedge y_n \neq 0 \Rightarrow \lim \frac{x_n}{y_n} = \infty$

**Доказательство.**

1.  $y_n - \text{ограничена снизу} \Rightarrow y_n \geq c$ . А так как  $\lim x_n = +\infty \Rightarrow \forall E \exists N : \forall n \geq N : x_n > E$ . Подставим  $E - c$  вместо  $E$ .  $\exists N \forall n \geq N x_n > E - c \Rightarrow x_n + y_n \geq E - c + y_n \geq E - c + c = E$ .
2. Упражнение.
3. Упражнение.
4.  $\lim x_n = +\infty \Rightarrow \forall E \exists N \forall n \geq N : x_n > E$ . Подставим  $\frac{E}{c}$  вместо  $E$ :  $x_n > \frac{E}{c} \Rightarrow x_n y_n \geq x_n c > \frac{E}{c} \cdot c = E$ .
5. Упражнение.
6. Упражнение.
7.  $\lim y_n = 0 \Rightarrow y_n - \text{бесконечно малое} \Rightarrow \frac{1}{y_n} - \text{бесконечно большая}$ . Поймем, что  $|x_n| \geq C > 0$  при больших  $n$ . Возьмем картинку и окрестность  $\frac{a}{2}$ . Заметим, что начиная с некоторого номера  $|x_n| \geq \frac{a}{2} > 0$ .
8.  $y_n - \text{бесконечно большая} \Rightarrow \frac{1}{y_n} - \text{бесконечно малая} \Rightarrow x_n \cdot \frac{1}{y_n} - \text{произведение ограниченное и бесконечно малой}$ .
9.  $x_n - \text{бесконечно большая} \Rightarrow \frac{1}{x_n} - \text{бесконечно малая} \Rightarrow y_n \cdot \frac{1}{x_n} - \text{бесконечно малая} \Rightarrow \frac{y_n}{x_n} - \text{бесконечно малая}$ .

□

**Арифметика с бесконечностями:**

1.  $\pm\infty + c = \pm\infty$
2.  $+\infty + \infty = +\infty$
3.  $-\infty + -\infty = -\infty$
4.  $\pm\infty \cdot c = \pm\infty$ , если  $c > 0$
5.  $\pm\infty \cdot c = \mp\infty$ , если  $c < 0$
6.  $+\infty \cdot +\infty = +\infty$   
 $-\infty \cdot -\infty = +\infty$   
 $+\infty \cdot -\infty = -\infty$

Запрещенные операции:

1.  $+\infty - +\infty$  или  $+\infty + -\infty$ . Может получиться беспредел, любое число, любая бесконечность.
2.  $+\infty \cdot 0$
3.  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ . Может получиться беспредел, любое число, бесконечность правильного знака.
4.  $\frac{0}{0}$  — любое число, любая бесконечность, отсутствие предела.

**Пример.**

- $x_n = n + a, y_n = n, x_n - y_n = a : \lim x_n = +\infty, \lim y_n = +\infty, \lim x_n - y_n = a$
- $x_n = 2n \rightarrow +\infty, y_n = n\infty + \infty, x_n - y_n = n \rightarrow +\infty$
- ясно.
- $x_n = n + (-1)^n \rightarrow +\infty, y_n = n \rightarrow +\infty, x_n - y_n = (-1)^n$  — нет предела.

**Упражнение.** Примеры к остальному.

### 2.3. Экспонента

**Теорема 2.12** (Неравенство Бернулли).  $\forall x \geq -1, n \in \mathbb{N} (1+x)^n \geq 1+nx$ . Равенство при  $x = 0 \vee n = 1$ .

**Доказательство.** Индукция:

- База  $n = 1$ :  $1+x \geq 1+x$ .
- Переход  $n \rightarrow n+1$ .
- Предположение:  $(1+x)^n \geq 1+nx$ .
- Заметим, что  $(1+x)^{n+1} = (1+x) \cdot (1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1+x+nx+nx^2 = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$ . Строгий знак при  $x \neq 0$ .

□

**Замечание.** На самом деле  $(1+x)^P \geq 1+Px$ , если  $x > -1$  и  $P \geq -1$  или  $P \leq 0$ . Иначе верно  $(1+x)^P \leq 1+Px$ .

**Теорема 2.13.** Пусть  $a \in \mathbb{R}$  и  $x_n := (1 + \frac{a}{n})^n$ . Тогда при  $n > -a$  монотонно возрастает и ограничена сверху.

**Доказательство.**  $\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{(1+\frac{a}{n})^n}{(1+\frac{a}{n+1})^{n+1}} = \frac{(n+a)^n}{n^n} \cdot \frac{(n-1)^{n-1}}{(n-1+a)^{n-1}} = \frac{n-1+a}{n-1} \left( \frac{(n+a)(n-1)}{n \cdot (n-1+a)} \right)^n = \frac{n-1+a}{n-1} \left( \frac{n^2+an-n-a}{n^2+an-n} \right)^n = \frac{n-1+a}{n-1} \left( 1 - \frac{a}{n(n-1+a)} \right)^n \geq \frac{n-1+a}{n-1} \left( 1 + n \cdot \frac{-a}{n(n-1+a)} \right) = \frac{n-1+a}{n-1} \cdot \frac{n-1+a-a}{n-1+a} = 1$

Убедимся в выполнении условий для неравенства Бернулли. Посмотрим на  $\frac{a}{n-1+a}$ . Если  $a > 0$ , то очевидно. Если  $a < 0$ , то  $n_1 > a$ , а значит дробь меньше нуля.

Ограниченность:  $y_n := (1 - \frac{a}{n})^n$  возрастает при  $n > a$ .  $x_n y_n = \left( (1 + \frac{a}{n}) (1 - \frac{a}{n}) \right)^n = \left( 1 - \frac{a^2}{n^2} \right)^n$ , что не больше 1. Тогда  $x_n \leq \frac{1}{y_n} \leq \frac{1}{y_{n-1}} \leq \dots \leq \frac{1}{y_{[a]+1}}$  □

**Следствие.**  $x_n := (1 + \frac{a}{n})^n$  имеет предел.

**Определение 2.17.**  $\exp a := \lim \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$   
 $e := \exp 1 = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.7182818284590$

**Следствие.** Последовательность  $z_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$  монотонно убывает и стремится к  $e$ .

**Доказательство.**  $\lim z_n = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e$ .  $\frac{1}{z_n} = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$  — строго монотонно возрастает.  $\square$

Свойства экспоненты:

1.  $\exp 0 = 1, \exp 1 = e$ .
2.  $\exp a > 0$
3.  $\exp a \geq 1 + a$ .  $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \geq 1 + n \frac{a}{n} = 1 + a$ , при  $n > -a$ . Далее совершим предельный переход.
4.  $\exp a \exp(-a) \leq 1$ .  $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{a^2}{n^2}\right)^n \leq 1$ . Далее предельный переход.
5.  $\forall a, b : a \leq b \Rightarrow \exp a \leq \exp b$ . Знаем, что  $1 + \frac{a}{n} \leq 1 + \frac{b}{n}$  и при больших  $n$  они положительны, тогда можно возвести в  $n$ -ую степень и совершить предельный переход.
6.  $\exp a < \frac{1}{1-a}$  при  $a \leq 1$ .  $\exp a \cdot \exp(-a) \leq 1 \Rightarrow \exp a \leq \frac{1}{\exp(-a)}$ . А  $\exp(-a) \geq 1 + (-a) = 1 - a$  (применили Бернулли). Тогда можно уменьшить знаменатель, тем самым увеличить дробь.
7.  $\forall n \in \mathbb{N} x_n < e < z_n$ . Знаем, что  $x_n \uparrow$ . Тогда возьмем  $k \geq n + 1 : x_n < x_{n+1} < x_k$ . Устремляем  $k \rightarrow \infty : x_n < x_{n+1} \leq e \iff x_n < e$ .  
 С другой стороны  $z_n \downarrow$ . Тогда по той же технике  $z_n > z_{n+1} \geq e \iff z_n \geq e$ .
8.  $2 < e < 3$ .  $2 = x_1, 3 = z_5$  или  $z_6$ .

**Замечание.**  $z_n - x_n = \frac{x_n}{n} \approx \frac{e}{n}$ .

**Лемма.**  $\forall a_n \lim a_n = a \Rightarrow y_n := \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n \rightarrow \exp a$ .

**Доказательство.** Пусть  $x_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$ ,  $A = 1 + \frac{a}{n}$ ,  $B = 1 + \frac{a_n}{n}$ . Тогда  $|x_n - y_n| = |A^n - B^n| = \underbrace{|A - B|}_{= \frac{|a - a_n|}{n}} \cdot |A^{n-1} + A^{n-2}B + \dots + B^{n-1}|$ .

Тогда  $\lim a_n = a \Rightarrow a_n$  — ограниченная последовательность ( $|a_n| \leq M$ ). Тогда  $|a_n| \leq M \Rightarrow A = 1 + \frac{a}{n} \leq 1 + \frac{M}{n}, B = 1 + \frac{a_n}{n} \leq 1 + \frac{M}{n}$ . Тогда исходное:  $\frac{|a - a_n|}{n} n \left(1 + \frac{M}{n}\right)^{n-1} \leq |a - a_n| \left(1 + \frac{M}{n}\right)^n \leq |a - a_n| \exp M \rightarrow 0$ . Что произошло:  $\left(1 + \frac{M}{n}\right)^n < \exp M$  при любом  $n$ , а  $|a - a_n| \rightarrow 0$ , получили в пределе  $0 \cdot \text{const} = 0$ .

То есть  $\lim x_n - y_n = 0 \Rightarrow \lim y_n = \lim x_n - \lim(x_n - y_n) = \exp a - 0 = \exp a$ .  $\square$

**Теорема 2.14.**  $\exp(a + b) = \exp a \cdot \exp b$ .

**Доказательство.**  $x_n := \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \rightarrow \exp a$ .  $y_n := \left(1 + \frac{b}{n}\right)^n \rightarrow \exp b$ . Тогда  $x_n y_n = \left(\left(1 + \frac{a}{n}\right)\left(1 + \frac{b}{n}\right)\right)^n = \left(1 + \frac{a+b+\frac{ab}{n}}{n}\right)^n \xrightarrow[a+b+\frac{ab}{n} \rightarrow a+b]{\text{Лемма}} \exp(a + b)$   $\square$

**Следствие.**

1.  $\forall t : |t| < 1 \Rightarrow \lim t^n = 0$
2.  $\forall t : |t| > 1 \Rightarrow \lim t^n = \infty$



**Доказательство.**

2. Пусть  $x = |t| - 1 > 0$ . Тогда  $|t^n| = |t|^n = (1+x)^n > 1+nx \rightarrow +\infty$
1. Если  $0 < |t| < 1$ , то  $|\frac{1}{t}| > 1$  и  $(\frac{1}{t})^n$  — бесконечно большая  $\Rightarrow t^n$  — бесконечно малая.

□

**Теорема 2.15.**  $\forall x_n > 0 \lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = a < 1 \Rightarrow \lim x_n = 0$ .

**Доказательство.** Картинка. Возьмем окрестность с правой границей  $b = \frac{a+1}{2}$ . Тогда начиная с некоторого номера  $m$  члены последовательности  $\frac{x_{n+1}}{x_n}$  попали в этот интервал. То есть  $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq b < 1$  при  $n \geq m$ .

$$\text{Пусть } n < m. x_n = x_m \cdot \frac{x_{m+1}}{x_m} \cdot \frac{x_{m+2}}{x_{m+1}} \cdot \dots \cdot \frac{x_n}{x_{n-1}} \leq x_m b^{n-m} \cdot x_m = \frac{x_m}{b^m} \cdot b^n \rightarrow \frac{x_m}{b^m} \lim b^n = 0.$$

□

**Следствие.**

1.  $\lim \frac{n^k}{a^n} = 0$  при  $a > 1$  и  $k \in \mathbb{N}$ .
2.  $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$ , при  $a \in \mathbb{R}$ .
3.  $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$ .

**Доказательство.**

1.  $x_n = \frac{n^k}{a^n} \cdot \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^k}{a^{n+1}} \cdot \frac{a^n}{n^k} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \cdot \frac{1}{a} \rightarrow \frac{1}{a} < 1$ .
2.  $x_n = \frac{a^n}{n!} \cdot \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1} \rightarrow 0$ .
3.  $x_n = \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n+1}{(n+1)^{n+1}} n^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e} < 1$ .

□

**Теорема 2.16** (Теорема Штольца). Пусть  $y_1 < y_2 < y_3 < \dots$  и  $\lim y_n = +\infty$ . Если  $\lim \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$ , то  $\lim \frac{x_n}{y_n} = l$ .

**Доказательство.** Ключевой случай:  $l = 0$ . Пусть  $a_n := \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$ . По условию  $\lim a_n = 0$ . Зафиксируем  $\varepsilon > 0$ . Тогда найдется номер  $m$ , такой, что при  $n \geq m \Rightarrow |a_n| < \varepsilon$ . Тогда  $|x_{n+1} - x_n| = |a_n|(y_{n+1} - y_n) < \varepsilon(y_{n+1} - y_n)$ .  $|x_n - x_m| \leq |x_n - x_{n-1}| + |x_{n-1} - x_{n-2}| + \dots + |x_{m+1} - x_m| < \varepsilon(y_n - y_{n-1}) + \varepsilon(y_{n-1} - y_{n-2}) + \dots + \varepsilon(y_{m+1} - y_m) = \varepsilon(y_n - y_m)$ .

Теперь посмотрим на  $|\frac{x_n}{y_n}| \leq \frac{|x_n - x_m| + |x_m|}{|y_n|} < \frac{\varepsilon(y_n - y_m)}{y_n} + \frac{|x_m|}{y_n} < \varepsilon \frac{y_n}{y_n} + \frac{|x_m|}{y_n} = \varepsilon + \frac{|x_m|}{y_n} < 2\varepsilon$ . Берем такой  $N : \forall n \geq N y_n \geq \frac{1}{\varepsilon} |x_m|$ . Если  $n > \max\{m, N\}$ , то  $|\frac{x_n}{y_n}| < 2\varepsilon$ . Тогда  $\lim \frac{x_n}{y_n} = 0$

Рассмотрим случай  $l \in \mathbb{R}$ . Рассмотрим  $\widetilde{x}_n := x_n - ly_n$ . Тогда  $\frac{(\widetilde{x}_{n+1} - \widetilde{x}_n) - (x_n - ly_n)}{y_{n+1} - y_n} = \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} - l \rightarrow 0$ , т.к.  $\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} \rightarrow l$ . Тогда, по случаю выше получаем что  $\frac{\widetilde{x}_n}{y_n} \rightarrow 0 \iff \frac{x_n}{y_n} - l \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow l$

Рассмотрим случай  $l = +\infty$ .  $\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} > 1$  при  $n \geq N \Rightarrow x_{n+1} - x_n > y_{n+1} - y_n > 0 \Rightarrow x_n \uparrow$ .

Из того, что для  $x_n - x_{n-1} > y_n - y_{n-1} \wedge \dots \wedge x_{N+1} - x_N > y_{N+1} - y_N \Rightarrow x_n - x_N > y_n - y_N \Rightarrow x_n > \underbrace{y_n}_{\rightarrow +\infty} + \underbrace{(x_N - y_N)}_{=const} \Rightarrow x_n \rightarrow +\infty$ . Тогда  $\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n} \rightarrow 0 \xrightarrow{\text{Случай 0}} \frac{y_n}{x_n} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow \infty \frac{x_n}{y_n} \rightarrow +\infty$ .

Случай  $l = -\infty$ .  $\widetilde{x}_n = -x_n$ .

□

**Пример.**  $S_n = 1^k + 2^k + \dots + n^k < n^k k = n^{k+1}$ . Можно еще взять половину: получим  $\leq \frac{n^{k+1}}{2^{k+1}}$

$$\text{Тогда } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^{k+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n - S_{n-1}}{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{n^{k+1} - (n^{k+1} - k \cdot n^k + \frac{k(k-1)}{2} n^{k-1} - \dots)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k - \dots n^{-1} + \dots n^{-2} + \dots} = \frac{1}{k}$$

**Замечание.** То же самое можно сказать, если  $y_n \downarrow -\infty$

**Теорема 2.17** (Теорема Штольца 2).  $\lim x_n = \lim y_n = 0 \wedge y_n > y_{n+1} > 0$ . Тогда  $\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = l \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim \frac{x_n}{y_n} = l$ .

**Доказательство.** Случай  $l = 0$ .  $a_k := \frac{x_{k+1} - x_k}{y_{k+1} - y_k}$ .  $\lim a_n = 0$ . Возьмем  $\varepsilon > 0$  и найдем  $m \geq N$  :  $|a_n| < \varepsilon$  при  $n \geq N$ . Тогда  $x_n - x_m = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + (x_{m+1} - x_m) = a_{n-1}(y_n - y_{n-1}) + a_{n-2}(y_{n-1} - y_{n-2}) + \dots + a_m(y_{m+1} - y_m)$ .

Тогда  $|x_n - x_m| \leq |a_{n-1}|(y_{n-1} - y_n) + \dots + |a_m|(y_m - y_{m-1}) < \varepsilon((y_{n-1} - y_n) + (y_{n-2} - y_{n-1}) + \dots + (y_m - y_{m-1})) = \varepsilon(y_m - y_n)$

$|x_n - x_m| < \varepsilon(y_m - y_n) \rightarrow \varepsilon y_m \Rightarrow |x_m| \leq \varepsilon y_m \Rightarrow \left| \frac{x_m}{y_m} \right| \leq \varepsilon$ . Получили определение предела!!!

Случай  $l \in \mathbb{R}$ . См. выше.

Случай  $l = +\infty$  нужна лишь монотонность.

Случай  $l = -\infty$ . □

## 2.4. Подпоследовательность

**Определение 2.18.** Последовательность: последовательность  $x_{n_i}$ , заданная как набор индексов  $n_i : 1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \dots$

Свойства.

1.  $n_k \geq k$ . Индукция.  $n_{k+1} > n_k \geq k$ .
2. Если последовательность предел в  $\overline{\mathbb{R}}$ , то подпоследовательность имеет тот же предел.
3. Две подпоследовательности  $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots$  и  $x_{m_1}, x_{m_2}, \dots$  в объединение дают всю последовательность и они имеют один и тот же предел  $l \in \overline{\mathbb{R}}$ , то  $\lim x_n = l$ . Доказательство по картинке.

**Теорема 2.18** (О стягивающихся отрезках). Пусть  $[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset [a_3; b_3] \supset \dots$  и  $\lim(b_n - a_n) = 0$ . Тогда  $\exists! c \in \mathbb{R}$  принадлежащая всем отрезкам и  $\lim a_n = \lim b_n = c$ .

**Доказательство.** Существование следует из теоремы о вложенных отрезках. Докажем единственность. Пусть  $c, d \in [a_n; b_n]$ . Тогда  $c - d \leq b_n - a_n \rightarrow 0 \Rightarrow c = d$ .

Проверим, что  $\lim a_n = c$ .  $|a_n - c|$  — длина подотрезка  $[a_n; b_n]$ , тогда  $|a_n - c| \leq b_n - a_n \rightarrow 0 \Rightarrow a_n - c \rightarrow 0 \Rightarrow \lim a_n = c$ . □

**Теорема 2.19** (Больцано-Вейерштрасса). Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность. То есть, если  $x_n$  — ограниченная последовательность, то существует  $x_{n_k}$  имеющая конечный предел.

**Доказательство.**  $a$  — нижняя граница,  $b$  — верхняя для  $x_n$ . То есть  $\forall n : x_n \in [a; b]$ . В какой-то половине отрезка бесконечное число членов (иначе в сумме конечное число членов). Назовем подходящую  $[a_1; b_1]$ . Теперь делю эту половинку пополам. В одной из половинок половинки бесконечное число членов. Получили процесс деления отрезков на кусочки.

Заметим, что  $[a; b] \supset [a_1; b_1] \supset \dots b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \rightarrow 0$ . Тогда  $\exists c \in \mathbb{R} : \lim a_n = \lim b_n = c$ . Берем  $[a_1; b_1]$ , там бесконечное число членов. Берем какой-то  $x_{n_1}$ . Берем  $[a_2; b_2]$ , там есть  $n_2 > n_1$ . Тогда получили возрастание индексов и  $x_{n_k} \in [a_k; b_k]$ .  $a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$ , то тогда по двум милиционерам  $\lim x_{n_k} = c$ .  $\square$

**Теорема 2.20.** Несколько пунктов:

1. Монотонная неограниченная последовательность стремится к  $\pm\infty$ .
2. Из неограниченной сверху последовательности можно выбрать подпоследовательность, стремящуюся к  $+\infty$ .
3. Из неограниченной снизу последовательности можно выбрать подпоследовательность, стремящуюся к  $-\infty$ .

**Доказательство.**

1. Пусть  $x_n$  монотонно возрастает. Докажем, что  $\lim x_n = +\infty$ .  $\forall E$ . Это не верхняя граница, значит найдется  $x_N > E \Rightarrow \exists n \geq N \Rightarrow E < x_N \leq x_{N+1} \leq \dots \leq x_n$ .
2. 1 — не верхняя граница  $\Rightarrow$  есть  $x_{n_1} > 1$ .  $2 + x_{n_1}$  — не верхняя граница  $\Rightarrow$  есть  $x_{n_k} > 2 + x_{n_k} + 2$ . И так далее ...Получилось, что  $x_{n_k} > k \rightarrow \infty \Rightarrow x_{n_k} \rightarrow +\infty$ . Далее переставим члены в порядке возрастания индексов.

$\square$

**Определение 2.19.**  $l$  — Частичный предел последовательности, если существует подпоследовательность, стремящаяся к  $l$ .

**Замечание.** Больцано-Вейерштрасса + 2/3 пункт предыдущей теоремы говорят о том, что частичный предел точно существует.

**Определение 2.20.** Пусть  $l \in \mathbb{R}$ . Тогда окрестность  $l$  — произвольный интервал  $(l - \varepsilon; l + \varepsilon)$ .

**Определение 2.21.** Окрестность  $+\infty$  — луч  $(E; +\infty)$ ,  $-\infty$  — луч  $(-\infty; E)$

**Теорема 2.21.**  $l \in \overline{\mathbb{R}}$  — частичный предел последовательности  $\iff$  в любой окрестности  $l$  содержится бесконечно много членов.

**Доказательство.**

- $\Rightarrow l$  — частичный предел  $\Rightarrow$  найдется подпоследовательность  $x_{n_k} \rightarrow l \Rightarrow$  вне любой окрестности  $l$  конечное число членов последовательности  $x_{n_k} \Rightarrow$  внутри бесконечное.
- $\Leftarrow$  Возьмем  $(l - 1; l + 1)$ . В ней бесконечное число членов. Возьмем любой  $x_{n_1}$ . Далее из  $(a - \frac{1}{2}; a + \frac{1}{2})$  возьмем  $x_{n_2}, n_2 > n_1$ . Повторим процесс:  $x_{n_k} \in (a - \frac{1}{k}; a + \frac{1}{k}), n_k > n_{k-1}$ . Тогда получили подпоследовательность, для которой верно:  $a - \frac{1}{k} < x_{n_k} < a + \frac{1}{k} \xrightarrow[2 \text{ мил.}]{\text{Th.}} x_{n_k} \rightarrow a \Rightarrow l$  — частичный предел.

$\square$

**Определение 2.22.**  $x_n$  — фундаментальная (сходящаяся в себе, последовательность Коши), если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n \geq N : |x_n - x_m| < \varepsilon$ .

**Свойство.** Сходящаяся последовательность фундаментальна.

**Доказательство.** Пусть предел  $l = \lim x_n$ . Берем  $\varepsilon > 0$ .  $\exists N \forall n \geq N |x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge |x_m - l| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |x_n - x_m| \leq |x_n - l| + |l - x_m| < \varepsilon$   $\square$

**Свойство.** Фундаментальная последовательность ограничена.

**Доказательство.** Берем  $\varepsilon = 1$ . Тогда  $\exists N \forall m, n \geq N : |x_n - x_m| < 1 \Rightarrow |x_n - x_N| < 1 \Rightarrow |x_n| < 1 + |x_N| \Rightarrow |x_n| \leq \max\{|x_1|, \dots, |x_{N-1}|, 1 + |x_N|\}$ .  $\square$

**Свойство.** Если фундаментальная последовательность содержит сходящуюся последовательность, то она сама сходящаяся.

**Доказательство.** Берем  $\varepsilon > 0$ .  $\exists N : \forall n, m \geq N |x_n - x_m| < \varepsilon$ .  $\exists K : \forall k \geq K |x_{n_k} - l| < \varepsilon$ . Возьмем  $n \geq N$  и рассмотрим  $|x_n - l| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - l| < 2\varepsilon$ , если  $k = \max\{N, K\}$ .  $\square$

**Теорема 2.22** (Критерий Коши). Последовательности фундаментальна  $\iff$  последовательность сходящаяся.

**Доказательство.**

- $\Leftarrow$ . Св-во 1.
- $\Rightarrow$  Фундаментальна  $\Rightarrow$  ограничена  $\Rightarrow$  существует сходящаяся подпоследовательность.  $\square$

**Пример.**  $x_n := \sum_{k=1}^n \frac{\sin k}{2^k}$ . Проверим фундаментальность. Пусть  $n > m$ .  $|x_n - x_m| = |\sum_{k=m+1}^n \frac{\sin k}{2^k}| \leq \sum_{k=m+1}^n \frac{|\sin k|}{2^k} \leq \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^m} < \varepsilon$ .

**Определение 2.23.**  $x_n$  — последовательность.  $y_n := \inf_{k \geq n} x_k, z_n := \sup_{k \geq n} x_k$ . Тогда верхний предел  $\overline{\lim} x_n = \lim z_n$ , а нижний предел  $\underline{\lim} x_n = \lim y_n$

**Теорема 2.23.**  $\exists \underline{\lim}$  и  $\overline{\lim}$ .  $\overline{\lim} \geq \underline{\lim}$ .

**Доказательство.**  $y_n \leq z_n \Rightarrow \underline{\lim} \leq \overline{\lim}$ .

Существование.  $y_n$  монотонно убывает.  $y_{n+1} = \inf\{x_{n+1}, \dots\} \geq \inf\{x_n, \dots\} = y_n$ . Тогда у нее есть предел. Аналогично  $z_n$  монотонно убывает.  $\square$

**Замечание.**  $\overline{\lim} = \inf z_n = \inf \sup_{k \geq n} x_n$ .

$$\underline{\lim} = \sup y_n = \sup \inf_{k \geq n} x_n.$$

**Теорема 2.24.**

1. Верхний предел — наибольший из всех частичных пределов.
2. Нижний предел — наименьший из всех частичных пределов.
3. Если  $\underline{\lim} = \overline{\lim}$ , то последовательность имеет предел и он равен  $\underline{\lim}$ .

**Доказательство.**

1. Пусть  $a = \overline{\lim} \in \mathbb{R}$ . Тогда  $a = \lim z_n$ , где  $z_n = \sup_{k \geq n} x_k$ . Мы знаем, что  $z_n \downarrow a$ . Значит, что  $z_1 \geq a = \sup x_n \Rightarrow n_1 : x_{n_1} > a - 1$ . Тогда знаем, что  $z_{n_1+1} = \sup_{k \geq n_1+1} x_k \geq a \Rightarrow \exists n_2 > n_1 : x_{n_2} > a - \frac{1}{3}$ . И так далее.

Тогда получили  $n_1 < n_2 < \dots$  и  $z_{n_k} > x_{n_k} > a - \frac{1}{k} \Rightarrow x_{n_k} \rightarrow a$ . Так как  $z_{n_k} \rightarrow a$ .

Пусть  $a = -\infty$ , значит  $z_n \downarrow -\infty$ , тогда  $x_n \leq z_n \rightarrow -\infty \Rightarrow x_n \rightarrow -\infty$ .

Пусть  $a = +\infty$ , значит  $\forall n : z_n = +\infty \Rightarrow$  последовательность  $x_n$  не ограничена сверху. Тогда выберем подпоследовательность, стремящаяся к  $+\infty$ .

Поняли, что  $a$  — частичный предел. Докажем, что он максимальный. Возьмем  $x_{n_k} \rightarrow b$ . Тогда  $x_{n_k} \leq z_{n_k} \wedge x_{n_k} \rightarrow b \wedge z_{n_k} \rightarrow a \Rightarrow b \leq a$ .

2. Упражнение.

3.  $y_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, \dots\} \leq x_n \leq \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\} = x_n$ . Тогда два милиционера.

□

**Теорема 2.25.**

$$\begin{aligned} 1. a = \lim x_n &\iff \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N : x_n > a - \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \forall N \exists n \geq N : x_n < a + \varepsilon \end{cases} \\ 2. b = \overline{\lim} x_n &\iff \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N : x_n < b + \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \forall N \exists n \geq N : x_n > b - \varepsilon \end{cases} \end{aligned}$$

**Доказательство.** Будем доказывать второй пункт.  $z_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$

- $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N x_n < b + \varepsilon \xLeftrightarrow[\text{def } z_n]{\text{def sup}} \forall \varepsilon > 0 \exists N : z_N < b + \varepsilon$ . Там достаточно этого по определению  $z_n$  и  $\sup$ .
- $\forall \varepsilon > 0 \forall N \exists n \geq N x_n > b - \varepsilon \iff \varepsilon > 0 \forall N z_N > b - \varepsilon$ .
- Так как  $z_n \downarrow \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N : z_n \leq b + \varepsilon$ . Поэтому  $\forall N \in \mathbb{N} : z_N \geq b - \varepsilon \wedge z_N \leq b + \varepsilon$ , то  $z_n \rightarrow b$ .

□

**Теорема 2.26.**  $\forall x_n, y_n : x_n \leq y_n \Rightarrow \lim x_n \leq \lim y_n \wedge \overline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} y_n$ .

**Доказательство.** Раскрываем определения, получаем  $\inf\{\dots\} \leq \inf\{\dots\}$ .

□

**Замечание.** Арифметики нет. Пример:  $x_n = (-1)^n, y_n = (-1)^{n+1}$ .

## 2.5. Ряды

**Определение 2.24.**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim \sum_{k=1}^n a_k$ , если  $\lim$  существует, и  $\in \overline{\mathbb{R}}$ .

**Определение 2.25.** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  — сходится, если его сумма конечна, иначе ряд расходится.

**Пример.**  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n q^k = \lim \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \frac{1}{1-q} + \frac{\lim q^n}{q-1}$ .

Если  $|q| < 1$ , то  $\lim q^n = 0$  и  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$  ряд сходится.

Если  $q > 1$ , то  $\lim q^n = +\infty$  и  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty$  ряд расходится.

Если  $q \leq -1$ , то  $\lim q^n$  не существует и  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$  расходится.

**Пример.**  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \cdot S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1$ .

**Пример.** Гармонический ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ .  $H_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ . Поймем, что  $\lim H_n = +\infty$ .

Разобьем на блоки:  $1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{> 2 \cdot \frac{1}{4}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \dots > 1 + \frac{n}{2} \rightarrow +\infty$

Свойства:

1. Если ряд сходил, то сумма определена однозначно.
2. Добавление/выкидывание из ряда конечного числа членов не влияет на сходимость (но может влиять на сумму).
3. Расстановка скобок:  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + \dots \rightarrow (a_1 + a_2) + a_3 + (a_4 + a_5 + a_6) + (a_7 + a_8) + a_9 + a_{10} + \dots$ . Взятие в скобки означает, что мы заменяем скобки на посчитанную сумму. Но это не меняет его сумму.

**Замечание.** Ряд  $1-1+1-1+\dots$  можно сгруппировать двумя способами:  $(1-1)+(1-1)+\dots = 0$  и  $1+(-1+1)+(-1+1)+\dots = 1$ , так что надо сначала проверить сходимость.

4.  $\forall a_n, b_n \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  — сходится и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  — сходится  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$  — сходится, причем  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ .
5.  $\forall a_n \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  — сходится  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

**Доказательство.**  $A_n := \sum_{k=1}^n a_k \wedge B_n := \sum_{k=1}^n b_k \Rightarrow S_n := \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k = A_n + B_n$   $\square$

## 3. Предел и непрерывность

### 3.1. Предел функции

**Определение 3.1.**  $a \in \mathbb{R}$ , тогда  $U_a$  — окрестность точки  $a \Leftarrow U_a = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ .

**Определение 3.2.**  $\dot{U}_a = U_a \setminus \{a\}$  — выколотая окрестность.

**Определение 3.3.**  $E \subset \mathbb{R}$  а — предельная точка  $E$ , если любая  $\dot{U}_a$  пересекается с  $E$ .

**Теорема 3.1.** Следующие условия равносильны:

1.  $a$  — предельная точка  $E$ .
2. В любой  $U_a$  содержится бесконечное кол-во точек из  $E$ .
3.  $\exists \{a_n\} : \forall n : a_n \in E \wedge a_n \rightarrow a$ . Более того, можно выбрать последовательность  $x_n \in E$  так, что  $|x_n - a| \downarrow 0$ .

**Доказательство.**

- $2 \Rightarrow 1$ .  $U_a \cap E$  содержит бесконечное число точек  $\Rightarrow$  хотя бы одна из них не  $a$  и тогда  $\dot{U}_a \cap E \neq \emptyset$ .
- $3 \Rightarrow 2$ . Берем  $x_n \neq a \in E : \lim x_n = a$ . Возьмем  $U_a = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ .  $\exists N : \forall n \geq N x_n \in (x_n) \in U_a$ .
- $1 \Rightarrow 3$ . Возьмем  $\varepsilon_1 = 1 : (a - 1; a + 1)$  содержит точку из  $E \setminus \{a\}$ . Назовем такую точку  $x_1$ . Возьмем  $\varepsilon_2 = \min\{\frac{1}{2}, |x_1 - a|\} > 0 : (a - \varepsilon_2; a + \varepsilon_2)$  содержит точку из  $E \setminus \{a\}$ . Назовем её  $x_2$ . Возьмем  $\varepsilon_3 = \min\{\frac{1}{3}, |x_2 - a|\} > 0$  (заметим, что  $|x_2 - a| < \varepsilon_2 < |x_1 - a|$ ). Тогда  $(a - \varepsilon_3, a + \varepsilon_3)$  содержит точку из  $E \setminus \{a\}$ .  
Получили  $|x_1 - a| > |x_2 - a| > \dots$  причем  $|x_k - a| < \varepsilon_k = \min\{\frac{1}{k}, |x_{k-1} - a|\} \leq \frac{1}{k} \rightarrow 0 \Rightarrow x_k - a \rightarrow 0 \Rightarrow x_k \rightarrow a$ .

□

**Определение 3.4.** Пусть  $a$  — предельная точка  $E$ .  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда  $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , если

1. По Коши.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ .
2. Окрестности.  $\forall U_A \exists U_a : f(\dot{U}_a \cap E) \subset U_A$ .
3. По Гейне. Для любой последовательности  $a \neq x_n \in E : \lim x_n = a \Rightarrow f(x_n) = A$ .

**Равносильность 1. и 2.**  $\forall U_a \exists U_a : f(\dot{U}_a \cap E) \subset U_A$ .

$$\forall U_a \iff \forall \varepsilon > 0 : U_A = (A - \varepsilon, A + \varepsilon).$$

$$\exists U_a \iff \exists \delta > 0 : U_a = (a - \delta, a + \delta).$$

$$x \in \dot{U}_a \cap E \iff x \in E \wedge x \in \dot{U}_a \iff 0 < |x - a| < \delta.$$

$$f(\dots) \in U_A \iff |f(x) - A| < \varepsilon.$$

□

**Свойство.** Определение предела — локальное свойство. То есть, если  $f$  и  $g$  совпадают в  $\dot{V}_a$ , то либо оба предела не существуют, либо существуют и равны.

**Доказательство.**  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ .  $\forall U_A \exists U_a : f(\dot{U}_a \cap E) \subset U_A$ . Возьмем  $U_a \cap V_a$ . Тогда все совпадает.  $\square$

**Свойство.** Значение  $f$  в точке  $a$  не участвует в определении.

**Свойство.** В определении по Гейне. Если для любой последовательности  $x_n \in E : x_n \rightarrow a$   $\lim f(x_n)$  существует, то все эти пределы равны.

**Доказательство.** Пусть  $x_n \in E, x_n \rightarrow a$  и  $\lim f(x_n) = A$  и  $y_n \rightarrow a$  и  $\lim f(y_n) = B$ .

Рассмотрим  $z_n := x_1, y_1, x_2, y_2, \dots \Rightarrow z_n \rightarrow a \Rightarrow \lim f(z_n) =: C$ . Но  $\{f(x_n)\}$  — подпоследовательность  $\{f(z_n)\} \Rightarrow \lim f(x_n) = \lim f(z_n) = C$ . То же самое для  $y_n$ .  $\square$

**Теорема 3.2.** Определение по Коши и по Гейне равносильны.

**Доказательство.**

- $C \Rightarrow H$ .  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ . Пусть  $x_n \in E : \lim x_n = a$ . Проверим, что  $\lim f(x_n) = A$ . Возьмем  $\varepsilon > 0$ , берем соответствующий  $\delta$  из определения. Найдется  $N : \forall n \geq N : 0 \leq \underbrace{|x_n - a|}_{\text{предел последовательности}} < \delta \Rightarrow |f(x_n) - A| < \varepsilon$ .
- $H \Rightarrow C$ . От противного: нашелся  $\varepsilon > 0$  для которого ни одна  $\delta > 0$  не подходит. Возьмем  $\delta = \frac{1}{n}$ . Она не подходит, то есть  $\exists x \in E : 0 < |x - a| < \delta$ , но  $|f(x) - A| \geq \varepsilon$ . Получили  $x_n$ . Посмотрим на последовательность:  $x_n \neq a \in E, |x_n - a| < \frac{1}{n} \Rightarrow \lim x_n = a \Rightarrow \lim f(x_n) = A \Rightarrow |f(x_n) - A| < \varepsilon$ . Противоречие.

$\square$

Свойства пределов:

1. Предел единственный.
2. Если существует  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ , то  $f$  локально ограничена, то есть существует  $U_a$ ,  $f$  в  $U_a$  ограничена.
3. (Стабилизация знака). Если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \neq 0$ , то существует такая окрестность  $U_a$ , что  $f(x)$  при  $x \in \dot{U}_a$  имеет тот же знак, что и  $A$ .

**Доказательство.**

1. Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  и  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$ . Возьмем  $\lim x_n \in E$ , такой, что  $x_n \rightarrow a$  (рассматриваем только предельные точки  $E$ ). Тогда  $\lim f(x_n) = A$  и  $\lim f(x_n) = B$ , но предел последовательности единственен  $\Rightarrow A = B$ .
2. Возьмем  $\varepsilon = 1$  в определении по Коши.  $\exists \delta > 0 \forall x \in E, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon = 1$ .  $U_a = (a - \delta, a + \delta)$ , тогда  $f$  ограничена на  $U_a \cap E$ .  $|f(x)| \leq |A| + |f(x) - A| < A + 1$ . Аккуратно рассмотрим еще про  $x = a$ .
3. Пусть  $A > 0$ . Возьмем  $\varepsilon = A$ .  $\exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \wedge x \in E \Rightarrow |f(x) - A| < A \iff 0 < f(x) < 2A$ . Берем  $U_a = (a - \delta, a + \delta)$  для нее значения  $> 0$ .

$\square$

**Теорема 3.3** (Теорема о арифметических действиях с пределами). Пусть  $a$  — предельная точка  $E$ ,  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$  и  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ . Тогда



1.  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$
2.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$
3.  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |A|$
4.  $B \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$

**Доказательство.** Проверим определение по Гейне. Берем последовательность  $a \neq x_n \in E : \lim x_n = a$ . Тогда  $\lim f(x_n) = A$  и  $\lim g(x_n) = B$ . Следовательно  $\lim (f(x_n) \pm g(x_n)) = A \pm B \Rightarrow \lim (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$ .

Второй и третий пункт доказывается ровно так же.

Но вот в четвертом пункте надо что-то сказать про  $g(x)$ . Если  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B \neq 0$ , то по теореме о стабилизации знака  $\exists \delta > 0 : a \neq x_n \in E \wedge |x - a| < \delta \Rightarrow g(x) \neq 0$ . Тогда для  $x \in (a - \delta; a + \delta) \cap E$  можно писать  $\frac{f(x)}{g(x)}$ .  $\square$

**Теорема 3.4** (О предельном переходе в неравенствах). Пусть  $a$  — предельная точка  $E$ ,  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$  и  $f(x) \leq g(x)$ . Если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  и  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ , то  $A \leq B$ .

**Доказательство.** Возьмем какую-то последовательность  $a \neq x_n \in E : \lim x_n = a$  (найдется, так как  $a$  — предельная точка  $E$ ). Тогда  $A = \lim f(x_n)$  и  $B = \lim g(x_n)$ .

Тогда знаем, что  $\forall n : f(x_n) \leq g(x_n) \xrightarrow[\text{для послед.}]{\text{пред. переход}} A \leq B$   $\square$

**Теорема 3.5** (О двух милиционерах). Пусть  $a$  — предельная точка  $E$ ,  $f, g, h : E \rightarrow \mathbb{R}$  и  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  при всех  $x \in E$ . Тогда,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) =: A \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$ .

**Доказательство.** Проверим определение по Гейне для  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$ . Берем любую последовательность  $a \neq x_n \in E : \lim x_n = a$ . Тогда  $\lim f(x_n) = A \wedge \lim h(x_n) = A \wedge f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n) \xrightarrow[\text{для послед.}]{\text{Th. о 2 мил.}} \lim g(x_n) = A$ .  $\square$

**Теорема 3.6** (Критерий Коши для предела функции).  $a$  — предельная точка  $E$ ,  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда существует конечный  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in E : \begin{matrix} |x - a| < \delta \\ |y - a| < \delta \end{matrix} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

**Доказательство.**

- $\Rightarrow$ . Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \begin{matrix} \forall a \neq x \in E : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall a \neq y \in E : |y - a| < \delta \Rightarrow |f(y) - A| < \frac{\varepsilon}{2} \end{matrix}$ .

Тогда, если сложить получим  $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - A| + |A - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

- $\Leftarrow$ . Докажем, что существует конечный  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  по Гейне. Берем последовательно  $a \neq x_n \in E : \lim x_n = a$ . Надо доказать, что  $\lim f(x_n)$  существует и конечен. Для этого проверим, что  $f(x_n)$  фундаментальная последовательность.

Возьмем  $\varepsilon > 0$  и соответствующую ему  $\delta > 0$ .  $\exists N : \forall n \geq N |x_n - a| < \delta$ . Берем  $m, n \geq N$   $\begin{matrix} |x_n - a| < \delta \\ |x_m - a| < \delta \end{matrix} \wedge a \neq x_n \in E \wedge a \neq x_m \in E \Rightarrow |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$ , т.е.  $f(x)$  — фундаментальная последовательность  $\Rightarrow$  существует конечный  $\lim f(x)$ .  $\square$

**Определение 3.5.**  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E_1 = (-\infty, a) \cap E$ . Пусть  $a$  - предельная точка  $E_1$ ,  $g := f$  на  $E_1$ .  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$ , то  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = A$  ( $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A$ ) — предел слева в точке  $A$ .

**Определение 3.6.**  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E_2 = (a, +\infty) \cap E$ . Пусть  $a$  - предельная точка  $E_2$ ,  $g := f$  на  $E_2$ .  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$ , то  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = A$  ( $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A$ ) — предел справа в точке  $A$ .

**Замечание.**  $A = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E : a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

**Замечание.**  $B = \lim_{x \rightarrow a+} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E : a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - B| < \varepsilon$

**Замечание.**  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x) =: A \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$

**Определение 3.7.**  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда  $f$  — монотонно возрастает  $\iff \forall x, y \in E : x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ . Далее бла-бла-бла.

**Теорема 3.7.**  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E_1 := (-\infty, a) \cap E$ ,  $a$  — предельная точка  $E_1$ . Тогда

1. Если  $f$  монотонно возрастает и ограничена сверху, то существует конечный предел  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ .
2. Если  $f$  монотонно убывает и ограничена снизу, то существует конечный предел  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ .

**Замечание.** На самом деле в 1  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \sup_{x \in E_1} f(x)$ , в 2  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \inf_{x \in E_1} f(x)$ .

**Доказательство.**

1.  $A := \sup_{x \in E_1} f(x)$ . Проверим, что  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = A$ . Возьмем  $\varepsilon > 0$ . Тогда  $A - \varepsilon$  не верхняя граница  $\{f(x) : x \in E_1\} \Rightarrow$  найдется  $x_0 \in E_1 : f(x_0) > A - \varepsilon$ .  $\delta := a - x_0 > 0$ . Проверим, что он подходит. Возьмем  $x \in E : a - \delta = x_0 < x < a \Rightarrow f(x_0) \leq A - \varepsilon < f(x) \leq A < A + \varepsilon \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ .

□

## 3.2. Непрерывные функции

**Определение 3.8.**  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  и  $a \in E$ .  $f$  непрерывна в точке  $a$ , если  $a$  — не предельная точка или  $a$  — предельная точка и  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

**Определение 3.9.** с  $\varepsilon - \delta$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

**Определение 3.10.** С окрестностями.  $\forall U_{f(a)} \exists U_a f(U_a \cap E) \subset U_{f(a)}$

**Определение 3.11.**  $\forall x_n \in E : \lim x_n = a \Rightarrow \lim f(x_n) = f(a)$ .

**Пример.**  $f(x) = c$  — непрерывна всегда.

**Пример.**  $f(x) = x$  — непрерывна всегда.

**Пример.**  $f(x) = [x]$ . Если  $a \notin \mathbb{Z} \lim_{x \rightarrow a} [x] = n = [a]$ . Иначе предела нет.

**Пример.**  $f(x) = |\{x\} - \frac{1}{2}|$ .

$a \notin \mathbb{Z}$  — очевидно.  $a = n \in \mathbb{Z} : \lim_{x \rightarrow n+} |\{x\} - \frac{1}{2}| = \lim_{x \rightarrow n+} |x - n - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2} = f(n)$ .  
 $\lim_{x \rightarrow n-} |\{x\} - \frac{1}{2}| = \lim_{x \rightarrow n-} |x - (n - 1) - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2} = f(n)$ .

Функция непрерывна!

**Теорема 3.8.**  $\exp x$  непрерывна во всех точках.

**Доказательство.**  $\lim_{x \rightarrow a} \exp x = \exp a$ . Пусть  $h := x - a \rightarrow 0$ .  $\lim_{h \rightarrow 0} \exp(a + h) = \exp a$ . Тогда надо доказать, что  $\lim_{h \rightarrow 0} \exp h = 1$ . Заметим, что  $1 + h \leq \exp h \leq \frac{1}{1-h}$ , при  $|h| \leq 1$ . Значит, по 2 милиционерам  $\exp h \rightarrow 1$ .  $\square$

**Теорема 3.9** (Теорема об арифметических действиях с непрерывными функциями).  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in E$ ,  $f, g$  непрерывны в  $a$ . Тогда:

1.  $f \pm g$  непрерывна в  $a$ .
2.  $f \cdot g$  непрерывна в  $a$ .
3.  $|f|$  непрерывна в  $a$ .
4. если  $g(a) \neq 0$ , то  $\frac{f}{g}$  непрерывна.

**Доказательство.** Если  $a$  не предельная, то очев. Иначе ссылаемся на арифм. действия с пределами.  $\square$

**Следствие.**

1. Многочлены непрерывны во всех точках.
2. Рациональные функции (т.е. отношение двух многочленов) непрерывны на всех области определения.

**Доказательство.**

1.  $f(x) = c, g(x) = x \Rightarrow cx^k$  — непрерывна  $\Rightarrow$  многочлены непрерывны.
2.  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  непрерывна в точке  $a$ , если  $Q(a) \neq 0$ .

$\square$

**Теорема 3.10** (О стабилизации знака).  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in E$ ,  $f$  — непрерывна в  $a$  и  $f(a) \neq 0$ . Тогда  $\exists U_a : \forall x \in U_a \cap E$  знак  $f(x)$  совпадает с  $f(a)$ .

**Доказательство.**

- Точка не предельная. Берем окрестность только из  $a$ .
- Иначе ссылаемся на соответствующую теорему из условия.

$\square$

**Теорема 3.11.** Пусть  $f, a$  такие же, как выше.  $g : D \rightarrow \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ,  $g$  — непрерывна в  $A$ ,  $D \supset f(E)$ , тогда  $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(A)$ .

**Доказательство.**  $g$  непрерывна в точке  $A \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in D |y - A| < \delta \Rightarrow |g(y) - g(A)| < \varepsilon$ .

Зафиксируем  $\varepsilon > 0$  и по нему возьмем  $\delta > 0$  и подставим его вместо  $\varepsilon$  в определение  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ .

$\forall \delta > 0 \exists \gamma > 0 \forall x \in E |x - a| < \gamma \Rightarrow |f(x) - A| < \delta$ . Подставим  $y = f(x)$ :  $|g(f(x)) - g(A)| < \varepsilon$ .  $\square$

**Следствие Непрерывность композиции.**  $f, a, g$  бла-бла-бла.  $g \circ f$  непрерывна в  $a$ .

**Доказательство.** Если  $a$  не предельная, то там неинтересно.

Если предельная, то предыдущая теорема.  $\square$

**Замечание.** Без непрерывности  $g$  неверно.  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ .  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$   $g(y) = \begin{cases} 0 & y = 0 \\ 1 & y \neq 0 \end{cases}$ .  
 $\lim_{y \rightarrow 0} g(y) = 1$ . Но  $\lim g(f(x))$  не существует.  $x_n = \frac{1}{\pi n}$ ,  $f(x_n) = 0$ .  $g(f(x_n)) = 0$ .  $y_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$   
 $f(y_0) = y_n \neq 0$ .

**Теорема 3.12.**  $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin x < x < \operatorname{tg} x$ .

**Следствие.**  $\forall x : |\sin x| \leq |x|$

**Доказательство.**

- $0 < x < \frac{\pi}{2}$  — уже было.
- $x > \frac{\pi}{2} \Rightarrow |\sin x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq |x|$ .
- При  $x < 0 \Rightarrow |x| = |-x|$  и  $|\sin x| = |\sin(-x)|$ .

□

**Следствие.**

1.  $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$
2.  $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$

**Доказательство.**  $|\sin x - \sin y| = 2 \left| \sin \frac{x-y}{2} \right| \left| \cos \frac{x+y}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x-y}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{x-y}{2} \right| \leq |x - y|$

Второй так же.

□

**Теорема 3.13.**  $\sin, \cos, \operatorname{tg}, \operatorname{ctg}$  — непрерывны.

**Доказательство.** А где пруф???

□

**Теорема 3.14** (Первый замечательный предел).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

**Доказательство.** Нам известно неравенство  $\sin x \leq x \leq \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ , при  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ .

Тогда  $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$  при  $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}$ .

Тогда применим двух милиционеров:  $\cos x \rightarrow 1$ ,  $1 \rightarrow 1$  при  $x \rightarrow 0$ , а значит  $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ .

□

**Теорема 3.15** (Теорема Вейерштрасса).

1. Непрерывная на отрезке функция ограничена.
2. Непрерывная на отрезке функция принимает наибольшее и наименьшее значение.

**Доказательство.** Введем обозначения:  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна во всех точках.

1. От противного. Число  $n$  не является верхней границей для  $|f|$ . Значит  $\exists x_n \in [a, b] : |f(x_n)| > n$ .

Применим теорему Больцано-Вейерштрасса. Выберем  $x_{n_k}$  имеющий предел  $c \in \mathbb{R}$ . Причем, так как  $a \leq x_{n_k} \leq b \Rightarrow a \leq c \leq b$ . А значит,  $f$  непрерывна в точке  $c$ , тогда  $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = |f(c)| \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} |f(x_{n_k})| = |f(c)|$ , но  $|f(x_{n_k})| > n_k \rightarrow +\infty$ . Получили противоречие.  $+\infty \neq c \in \mathbb{R}$ .

2. Будем доказывать максимум.  $M := \sup_{x \in [a, b]} f(x) \in \mathbb{R}$ . Пусть он не достигается, то есть  $f(x) < M \forall x \in [a, b]$ .

Тогда рассмотрим вспомогательную функцию  $g(x) := \frac{1}{M-f(x)}$  — непрерывна на  $[a, b] \Rightarrow g$  ограничена  $\Rightarrow g(x) \leq \widehat{M} \forall x \in [a, b]$ .

Тогда  $M - f(x) \geq \frac{1}{\widehat{M}} \Rightarrow M - \frac{1}{\widehat{M}} < M$ . Получили противоречие, так как  $M$  — супремум.

□

**Замечание.** Отрезок нельзя менять на интервал или полуинтервал.  $f(x) = \frac{1}{x}$  на  $(0, 1]$  — непрерывность есть, ограниченности нет.

**Замечание.** Непрерывность должна быть на всех точках.  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \in (0, 1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$  на  $[0, 1]$ . Ограниченности нет, непрерывность во всех точках, кроме одной.

**Теорема 3.16** (Теорема Больцано-Коши, теорема о промежуточных значениях).

1.  $f$  непрерывна на  $[a, b]$  и значения  $f(a)$  и  $f(b)$  разных знаков. Тогда  $\exists c \in (a, b): f(c) = 0$ .
2.  $f$  непрерывна на  $[a, b]$  и  $y$  лежит между  $f(a)$  и  $f(b)$ . Тогда  $\exists c \in (a, b): f(c) = y$

**Доказательство.**

1. Считаем, что  $f(a) < 0 \wedge f(b) > 0$ . Будем делить отрезок на части.  $a_0 := a, b_0 := b$ . Тогда:

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} [\frac{a_n+b_n}{2}, b_n] & \text{если } f(\frac{a_n+b_n}{2}) < 0 \\ [a_n, \frac{a_n+b_n}{2}] & \text{если } f(\frac{a_n+b_n}{2}) > 0 \end{cases}.$$

Тогда, если процесс не оборвался, получили  $[a, b] = [a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \subset [a_2, b_2] \supset \dots$  Сжимающиеся отрезки  $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \rightarrow 0$ . Тогда найдется  $c$ , лежащая во всех отрезках,

причем  $\lim a_n = \lim b_n = c$ . Функция непрерывна в  $c \Rightarrow \lim_{\substack{<0 \\ a_n}} f(a_n) = f(c) = \lim_{\substack{>0 \\ b_n}} f(b_n) \Rightarrow 0 \geq \lim f(a_n) = f(c) \lim f(b_n) \geq 0 \Rightarrow f(c) = 0$ .

2.  $g(x) := f(x) - y$ . Тогда  $g(a)$  и  $g(b)$  разных знаков  $\Rightarrow \exists c \in [a, b]: f(c) - y = g(c) = 0$

□

**Замечание.** Нужна непрерывность во всех точках.  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in [0, 1] \\ -1 & \text{при } x \in [-1; 0) \end{cases}$  непрерывна на  $[-1, 1]$ , за исключением 0.

**Замечание.** Бывают разрывные функции, удовлетворяющие теореме о промежуточных значениях.  $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{при } x \in (0; 1] \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$ . Если  $a, b \in [0, 1]$ , то на  $[a, b]$   $f$  принимает все значения между  $f(a)$  и  $f(b)$ . Случай  $0 < a < b$  — теорема Больцано-Коши. Случай  $a = 0 < b$  на  $(0, b)$  принимает все значения. Так как на  $[\frac{1}{2\pi(n+1)}; \frac{1}{2\pi n}] \sin \frac{1}{x}$  принимает все значения от  $-1$  до  $1$ .

**Теорема 3.17.** Непрерывный образ отрезка — отрезок. То есть  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывная  $\Rightarrow f([a, b])$  — отрезок.

**Доказательство.**  $m := \min_{x \in [a, b]} f(x)$   $M := \max_{x \in [a, b]} f(x)$ . По теореме Вейерштрасса  $\exists p, q \in [a, b] : m = f(p), M = f(q)$ . Рассмотрим отрезок с концами в  $p$  и  $q$  по теореме Больцано-Коши на  $(p, q)$  функция принимает все значения между  $f(p)$  и  $f(q)$ , то есть все значения из  $[m, M]$  достигаются  $\Rightarrow f([a, b]) = [m, M]$ .  $\square$

**Определение 3.12.**  $\langle a, b \rangle$  означает один из промежутков  $[a, b]; (a, b]; [a, b); (a, b)$ .

**Теорема 3.18.** Непрерывный образ промежутка — промежуток (но, возможно, промежуток другого типа.)

**Доказательство.**  $\langle a, b \rangle$  — промежуток.  $m := \inf_{x \in \langle a, b \rangle} f(x)$  (возможно  $-\infty$ ).  $M := \sup_{x \in \langle a, b \rangle} f(x)$ .

Тогда  $m \leq f(x) \leq M \forall x \in \langle a, b \rangle$ . Докажем, что  $f(\langle a, b \rangle) \supset (m; M)$ , но при этом  $f(\langle a, b \rangle) \subset [m, M]$ .

Возьмем  $y \in (m, M)$ , такой что  $m < y < M$ .

$m = \inf \Rightarrow y$  — не нижняя граница  $\Rightarrow \exists p \in \langle a, b \rangle : f(p) < y$ .  $M = \sup \Rightarrow y$  — не верхняя граница  $\Rightarrow \exists q \in \langle a, b \rangle : f(q) > y$ .

Применим теорему Больцано-Коши для отрезка с концами  $p$  и  $q \Rightarrow \exists c \in (p, q) \subset \langle a, b \rangle : f(c) = y$ .

Тогда  $(m, M) \subset f(\langle a, b \rangle) \subset [m, M] \Rightarrow f(\langle a, b \rangle)$  — промежуток.  $\square$

**Замечание.**  $f(x) = x^2$  на  $(-1, 1)$ , образ  $[0, 1)$ .

$f(x) = \sin x$  на  $(0, 2\pi)$ , образ  $[-1, 1]$ .

$f(x) = \frac{\sin \frac{1}{x}}{x}$  на  $(0, 1]$ , образ  $\mathbb{R}$ .

**Определение 3.13.** Пусть  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  и инъективна. Тогда  $g$  — обратная к  $f \iff g : f(\langle a, b \rangle) \rightarrow \langle a, b \rangle$  и  $f(g(y)) = y \wedge g(f(x)) = x$ .

$g$  обозначается как  $f^{-1}$ .

**Замечание.** Обратная функция существует, так как  $f$  — биекция между  $\langle a, b \rangle$  и  $f(\langle a, b \rangle)$ .

**Замечание.** График непрерывной функции симметричен относительно прямой  $y = x$ .

**Теорема 3.19.**  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна и строго монотонна.  $m := \inf_{x \in \langle a, b \rangle} f(x)$  (возможно  $-\infty$ ).  $M := \sup_{x \in \langle a, b \rangle} f(x)$ . Тогда:

1.  $f$  обратима и  $f^{-1} : \langle m, M \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$
2.  $f^{-1}$  строго монотонна.
3.  $f^{-1}$  непрерывна на  $\langle m, M \rangle$ .

**Доказательство.**

1. Строгая монотонность  $\Rightarrow f$  — инъекция  $\Rightarrow f$  — обратима.
2. Пусть  $f$  строго возрастает  $\Rightarrow f(x) < f(y) \iff x < y$ . Тогда  $x < y \Rightarrow f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$ .
3. Непрерывность. Возьмем  $y_0 \in \langle m, M \rangle$ . Докажем непрерывность в точке  $y_0$ .  $A := \sup_{y < y_0} f^{-1}(y) = \lim_{y \rightarrow y_0-} f^{-1}(y)$  (функция строго монотонная)  $\leq f^{-1}(y_0) \leq \lim_{y \rightarrow y_0+} f^{-1}(y) = \inf_{y > y_0} f^{-1}(y) =: B$ . Докажем, что  $A = B$ .  
Пусть  $A < B$ . Рассмотрим множество значений  $f^{-1} : (-\infty; A] \cup \{f^{-1}(y_0)\} \cup [B; +\infty) \supset f^{-1}(\langle m, M \rangle) = \langle a, b \rangle$ . Противоречие.

$\square$

### 3.3. Элементарные функции

#### Обратные тригонометрические функции.

- $\sin: \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$  непрерывна и строго возрастает. По теории у него есть обратная функция.
- $\arcsin: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  непрерывна и строго возрастает.
- $\cos: [0; \pi] \rightarrow [-1, 1]$  непрерывна и строго убывает.
- $\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$  непрерывна и строго убывает.
- $\operatorname{tg}: \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна и строго возрастает. По теории у него есть обратная функция.
- $\operatorname{arctg}: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  непрерывна и строго возрастает.
- $\operatorname{ctg}: (0; \pi) \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна и строго убывает.
- $\operatorname{arccctg}: \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$  непрерывна и строго убывает.

#### Логарифм.

$\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0; +\infty)$  непрерывна и строго возрастает. Обратная функция  $\ln: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна и строго возрастает.

**Свойства.** •  $\lim_{x \rightarrow 0+} \ln x = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
- $\ln(1+x) \leq x$ , при  $x > -1$ .
- $\ln(1+x) \geq 1 - \frac{1}{1+x}$ , при  $x > -1$ .

**Доказательство.** • Предел существует из монотонности, они такие, т.е. множество значений  $y \ln - \mathbb{R}$ .

- $\exp(u+v) = \exp u \cdot \exp v$ . Если  $\exp u = a, \exp v = b$ , то  $u = \ln a, v = \ln b$ , тогда  $\exp(u+v) = a \cdot b \Rightarrow \ln(ab) = u+v = \ln a + \ln b$
- $\exp u \geq 1+u \Rightarrow u = \ln(\exp u) \geq \ln(1+u)$
- $y := \ln(1+x). \exp y = 1+x \Rightarrow 1+x = \exp y \leq \frac{1}{1-y} \Rightarrow 1-y \leq \frac{1}{1+x}$ .

□

#### Теорема 3.20.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

**Доказательство.**  $\frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$ , при  $-1 < x < 1$ .

$$\text{При } x > 0: \underbrace{\frac{1}{1+x}}_{\rightarrow 1} \leq \frac{\ln(1+x)}{x} \leq 1.$$

$$\text{При } x < 0: 1 \leq \frac{\ln(1+x)}{x} \leq 1 + \frac{1}{1+x} \rightarrow 1$$

□

**Определение 3.14.**  $a^b := \exp(b \ln a)$ , при  $a > 0, b \in \mathbb{R}$

Если  $b \in \mathbb{N}$ :  $a^n = \exp(\underbrace{\ln a + \ln a + \dots + \ln a}_{n \text{ штук}}) = \exp(\ln a) \cdot \dots \cdot \exp(\ln a)$  — штук.

$$a^{-n} = \exp(-n \ln a) = \frac{1}{\exp(n \ln a)} = \frac{1}{a^n}.$$

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m. \exp(\frac{m}{n} \ln a) = \exp(m \frac{\ln a}{n}) = (\exp(\frac{\ln a}{n}))^m.$$

**Упражнение.** Доказать, что  $a^b = \lim a^{b_n}$ , где  $b_n \in \mathbb{Q}$  и  $b_n \rightarrow b$ .

**Следствие.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e \quad (2)$$

**Доказательство.** 1.  $(1+x)^{\frac{1}{x}} = \exp(\frac{1}{x} \ln(1+x))$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \exp(\frac{\ln(1+x)}{x}) = \exp(\lim \dots) = \exp 1 = e$$

2.  $y = \frac{1}{x}. (1+x)^{\frac{1}{x}} = (1 + \frac{1}{y})^y$ . При  $x \rightarrow 0+$   $y \rightarrow +\infty$ . При  $x \rightarrow 0-$   $y \rightarrow -\infty$

□