Математический анализ

Харитонцев-Беглов Сергей

8 сентября 2021 г.

Содержание

1. Введение.

1.1. Орг. моменты

- За основу начала была взята книжка "Виноградов, Громов «Курс по математическому анализу». Том 1". Но это было давно, как база, но смотреть туда можно.
- Зорич «Математический анализ».
- Фихтенгольц. Книжка устарела, написана старым языком, но там разобрано много примеров, поэтому можно смотреть просто темы.
- Курс на степике. (Часть вторая).

Для связи можно использовать почту `aikhrabrov@mail.ru`.

Система состоит из нескольких кусочков: 0.3·оценка за практику(АЗ, кр...)+0.35·Коллоквиум в неч ·Экзамен в четном модуле. Хвост образуется только в конце семестра.

Первый модуль — общие слова, последовательности, пределы последовательности, функции, непрерывность. Второй модуль — конец непрерывности, производная, начало интегралов.

1.2. Множества и отношения.

Обойдемся без формалистики — мы тут занимаемся прикладной математикой. Поэтому

***Определение* 1.1.** Множество — какой-то набор элементов. Для любого элемента можно сказать принадлежит множеству или нет.

Операция	определение	название
$\subset$	$\forall x: \ x \in A \Rightarrow x \in B$	— подмножество B
$=$	$A \subset B \wedge B \subset A$	A равно B
	$A \subset B \wedge A! = b$	A — собственное подмножество B

Способы задания множеств:

- Полное задание: $\{a, b, c\}$.
- Неполное: $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Но должно быть понятно как образована последовательно. Например $\{1, 5, \ldots, 22\}$ — непонятно
- Можно так же и бесконечные: $\{a_1, a_2, \ldots$
- Словесным описанием. Например, множество простых чисел.
- Формулой. Например, пусть задана функция $\Phi(x)$ — функция для всех чисел, которая возращает истину или ложь. Тогда можно взять множество $\{x: \ \Phi(x) = \text{истина}$.
  Но не всякая функция подходит, особенно если функция из реального мира. Например: «натуральное число может быть описано не более чем 20 словами русского языка». Не подходит оно по следующей причине: пусть наша функция подходит, то образуется множество $A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$. У каждого множества есть минимальный элемент, тогда минимальное невходящее число может быть описано как «первое число, которое нельзя описать не более чем 20 словами русского язык», что меньше 20 слов. Противоречие.

1.3. Операции с множествами.

Символ	Определение	Описание
$\cap$	$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$	Пересечение множеств
$\bigcap_{k=1}^{n} A_k$	$A = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$	Пересечение множества множеств
$\cup$	$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$	Объединение множеств
$\bigcup_{k=1}^{n} A_k$	$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$	Объединение множества множеств
$\setminus$	$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$	Разность множеств
$\times$	$A \times B = \{(x,\, y) \mid x \in A, y \in B\}$	Произведение множеств
$\triangle$	$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$	Симметрическая разность
$\varnothing$	$\forall x:\ x \notin \varnothing$	пустое множество
$\mathbb{N}$		Натуральные числа
$\mathbb{Z}$		целые числа
$\mathbb{Q}$	$\frac{a}{b}$, где $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$	рациональные числа
$\mathbb{R}$		действительные числа
2^X		множество всех подмножеств X

Важный момент: $1 \in \{1\}$, но $1 \notin \{\{1\}\}$

Правила де Моргана. Пусть есть $A_\alpha \subset X$

1. $X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} = \bigcap_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha$.
2. $X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} = \bigcup_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha$.

Доказательство: $X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : x \in X \wedge x \notin A_\alpha \ \forall \alpha \in I\} = \{x : \forall \alpha \in I X \setminus A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha$.

Теорема 1.1. $A \cap \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} A \cap B_\alpha$
$A \cup \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} A \cup B_\alpha$

Доказательство. TODO. □

***Определение* 1.2.** Упорядоченная пара $\langle x, y \rangle$. Важное свойство $\langle x, y \rangle = \langle x', \rangle \iff x = x' \wedge y = y'$

***Определение* 1.3.** Пусть даны множества $X_1, \ldots, X_n$, то упорядоченной $n-$ (кортеж) — $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, обладающее условием $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle = \langle y_1, \ldots, y_n \rangle \iff x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n$

***Определение* 1.4.** Отношение $R \subset X \times Y$. x и y находятся в отношении R, если их $\langle x, y \rangle \in R$.

***Определение* 1.5.** Область отношения $\delta_R = \mathrm{dom}_R = \{x \in X : \exists y \in Y : \langle x, y \rangle \in R$.

***Определение* 1.6.** Область значений $\rho_R = \mathrm{ran}_R = \{y \in Y : \exists x \in X : \langle x, y \rangle \in R$

***Определение* 1.7.** Обратное отношение $R^{-1} \subset Y \times X \;\; R^{-1} = \{\langle y, x \rangle\} \in R$.

***Определение* 1.8.** Композиция отношения. $R_1 \subset X \times Y, R_2 \subset Y \times Z : R_1 \circ R_2 \subset X \times Z$.
$R_1 \circ R_2 = \{\langle x, z \rangle \in X \times Z \mid \exists y \in Y : \langle x, y \rangle \in R_1 \wedge \langle y, z \rangle \in R_2\}$

Примеры отношений.

- Отношение равенства. $R = \{\langle x, x \rangle : x \in X\}$. Но это просто равенство.
- "$\geqslant$" ($X = \mathbb{R}$). $R = \{\langle x, y \rangle : x \geqslant y\}$
- "$>$" ($X = \mathbb{R}$). $R = \{\langle x, y \rangle : x > y\}$
  $\delta_> = 2, 3, 4 \ldots$
  $\rho_> = \mathbb{N}$
  $>^{-1} = <= \{\langle x, y \rangle : x < t\}$
  $> \circ >= \{\langle x, z \rangle \; x - z \geqslant 2\}$
- X — прямые на плоскости. "$\perp$": $R = \{\langle x, y \rangle : x \perp y\}$.
  $\delta_\perp = \rho_\perp = X$
  $\perp^{-1} = \perp$
  $\perp \circ \perp = \|$
- $\langle x, y \rangle \subset R$, когда x — отец y.
  $\delta_R = \{$Все, у кого есть сыновья$\}$.
  ρ_R — религиозный вопрос. См. Библию
  $R^{-1} =$ сын
  $R \circ R = \{$дед по отцовской линии$\}$

***Определение* 1.9.** Функция из X в Y — отношение ($\delta_f = X$), если:

$$\left.\begin{array}{l}\langle x, y \rangle \in f \\ \langle x, z \rangle \in f\end{array}\right\} \Rightarrow y = z.$$

Используется запись $y = f(y)$.

***Определение* 1.10.** Последовательность — функция у которой $\delta_f = \mathbb{N}$

***Определение* 1.11.** Отношение R называется рефлективным, если $\forall x : \langle x, x \rangle \in R$.

***Определение* 1.12.** Отношение R называется симметричным, если $\forall x, y \in X : \langle x, y \rangle \in R \Rightarrow \langle y, x \rangle \in R$

***Определение* 1.13.** Отношение R называется иррефлективным, если $\forall x \, \langle x, x \rangle \notin R$

***Определение* 1.14.** Отношение R называется антирефлексивным, если $\left.\begin{array}{l}\langle x, y \rangle \in R \\ \langle y, x \rangle \in R\end{array}\right\} \Rightarrow x = y$

***Определение* 1.15.** Отношение R называется транзитивным, если $\left.\begin{array}{l}\langle x, y \rangle \in R \\ \langle x, z \rangle \in R\end{array}\right\} \Rightarrow \langle x, z \rangle \in R$

***Определение* 1.16.** Отношение называется отношением эквивалентности, если отношение рефлективно, симметрично, транзитивно.

Пример. Равенство, сравнение по модулю $\mathbb{Z}$, $\|$, отношение подобия треугольников.

***Определение* 1.17.** Если выполняется рефлективность, антисимметричность и транзитивность, от данное отношение — отношение нестрогий частичного порядка.

Пример. $\geqslant$; $A \subset B$ на 2^X.

***Определение* 1.18.** Если выполняется иррефлективность и транзитивность, то данное отношение — отношение строгого частичного порядка.

Пример. $>$; A собственное подмножество B на 2^X.

Упражнение. Иррефлексивность + транзитивность $\Rightarrow$ антисимметрично.

Упражнение. R — нестрогий ч.п. $\Rightarrow R = \{\langle x, y\rangle \in R : \ x \neq y\}$ — строгий ч.п.

1.4. Вещественные числа

Есть две операции.

- $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
  - Коммутативность. $x + y = y + x$.
  - Ассоциативность. $(x + y) + z = x + (y + z)$
  - Существует ноль. $\exists 0 \in \mathbb{R} \ \ x + 0 = x$
  - Существует противоположный элемент. $\exists(-x) \in \mathbb{R} \ \ x + (-x) = 0$
- $\times : \mathbb{R} \times R \to \mathbb{R}$.
  - Коммутативность. $x \cdot y = y \cdot x$.
  - Ассоциативность. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
  - Существует единица. $\exists 0 \in \mathbb{R} \ \ x \cdot 1 = x$
  - Существует обратный элемент. $\exists x^{-1} \in \mathbb{R} \ \ x \cdot x^{-1} = 1$

Свойство дистрибутивности: $(x+y)\cdot z = x\cdot z+y\cdot z$. Структура с данными операциями называется полем.

Введем отношение $\leqslant$. Оно рефлексивно, антисимметрично и транизитивно, то есть нестрогий частичного порядка. Причем:

- $x < y \Rightarrow x + z < y + z$
- $0 \leqslant x \wedge 0 \leqslant y \Rightarrow 0 \leqslant x \cdot y$

Аксиома полноты. Если A и $B \subset \mathbb{R}$ и $\forall a \in A, b \in B : \ \ a \leqslant b$ и $A \neq \varnothing \wedge B \neq \varnothing$, тогда $\exists c \in \mathbb{R} \ a \leqslant c \leqslant b$.

Замечание. Множество рациональных не удовлетворяет аксиоме полноты. Например: $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$, $B = \{x \in Q \mid x > 0 \wedge x^2 > 2\}$. Единственная точка, между этими множествами — $\sqrt{2}$

Теорема 1.2 (Принцип Архимеда)**.** Пусть $x \in \mathbb{R} \wedge y > 0$. Тогда $\exists n \in \mathbb{N} : \ x < ny$

Доказательство. $A = \{u \in \mathbb{R} : \ \exists n \in \mathbb{N} : \ u < ny\}$. Пусть $A \neq! \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R} \setminus A \neq \varnothing$, $A \neq \varnothing$, т.к. $0 \in A$.
Возьмем $a \in A, b \in B$. $b < a \Rightarrow \exists n : \ a < ny \Rightarrow b < ny \Rightarrow$ `противоречие`.
По аксиоме полноты $\exists c \in \mathbb{R} : \ a \leqslant c \leqslant b \ \forall a \in A, \forall b \in B$.
Пусть $c \in A$. Тогда $c < ny \Rightarrow c < c+y < ny+y = (n+1)y \Rightarrow c < c+y \Rightarrow c+y \in A$. Противоречие.
Пусть $c \in B$. Рассмотрим $c-y < c \Rightarrow c-y \in A \Rightarrow \exists n : \ c-y < ny \Rightarrow c < ny+y = (n+1)y \Rightarrow c \in A$. Противоречие. $\square$