

1. Определения

Определение 1.1. Диофантовым уравнение называется уравнение, которое можно решить в \mathbb{Z} .

Определение 1.2. a делится на b ($a : b, b|a$), если $\exists c \in \mathbb{Z} : a = bc$.

Теорема 1.1 (О делении с остатком). $a, b \in \mathbb{Z}, \exists!(q, r) : \begin{cases} q, r \in \mathbb{Z} \\ a = b \cdot q + r \\ 0 \leq r < |b| \end{cases}$

Определение 1.3. Пусть $I \subset \mathbb{Z}$. I называется идеалом, если

$$\begin{cases} m, n \in I \Rightarrow m + n \in I \text{ (замкнутость по сложению)} \\ m \in I \Rightarrow \forall k \in \mathbb{Z} : k \cdot m \in I \text{ (замкнутость по умножению)} \\ I \neq \emptyset \end{cases}$$

Теорема 1.2. В \mathbb{Z} любой идеал главный.

Определение 1.4. Пусть $a, b \in \mathbb{Z}$. Тогда $d = \text{НОД}(a, b) = \gcd(a, b) = (a, b)$

Теорема 1.3. 1. $\forall a, b \exists d = (a, b)$

$$2. \exists x, y \in \mathbb{Z} : d = ax + by$$

$$3. ax + by = c \text{ имеет решение} \iff c : d.$$

Определение 1.5. a, b — взаимно просты, если $(a, b) = 1$, то есть $\langle a, b \rangle = \mathbb{Z}$

Лемма. $\begin{cases} ab : c \\ (a, c) = 1 \end{cases} \Rightarrow b : c.$

Определение 1.6. $x \in \mathbb{Z}, x \neq \pm 1$, тогда x — простое число, если $x = x_1 x_2 \iff \begin{cases} x_1 = \pm 1 \\ x_2 = \pm 1 \end{cases} \forall x_1, x_2$

Свойство *. x — обладает свойством *, $\iff x \neq \pm 1 \wedge ab : x \Rightarrow \begin{cases} a : x \\ b : x \end{cases}$

Утверждение 1.4. p — простое $\iff p$ — обладает свойством *.

Теорема 1.5 (Основная теорема арифметики). Пусть $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$. Тогда n единственным образом с точностью до перестановки сомножителей, представимо в виде (p_i — простые, $p_i > 0$)

$$n = \varepsilon p_1 p_2 \dots p_k, \varepsilon = \pm 1 = \text{sign}(n).$$

Или, иными словами, существует единственное каноническое разложение:

$$n = \varepsilon p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}, \varepsilon = \pm 1 = \text{sign}(n), a_i > 0, p_1 < p_2 < \dots < p_k.$$

Определение 1.7. $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, p$ — простое, тогда степень вхождения ($V_p(n) = k$) p в $n = \max\{k \mid n : p^k\}$

В терминах разложения: $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$. $V_p(n) = a_i$, а если p нет в разложении, то $V_p(n) = 0$.

Определение 1.8. m — НОК (LCM, $[a, b]$), если $m : a, m : b$ и $\forall n : a \wedge n : b \Rightarrow n : m$

Определение 1.9. Группой называется пара $(G, *)$, где G — множество, а $*$: $G \times G \rightarrow G$ — бинарная операция, так что выполнены свойства:

1. $\forall a, b, c \in G : (a * b) * c = a * (b * c)$. Ассоциативность.
2. $\exists e \in G : \forall a \in G a * e = e * a = a$. Существование нейтрального элемента.
3. $\forall a \in G \exists a^{-1} : a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$. Существование обратного элемента.

Определение 1.10. Группа G называется абелевой, если $\forall x, y \in G : x * y = y * x$.

Определение 1.11. Кольцо — тройка $(R, +, \cdot)$ (R — множество, $+, \cdot : R \times R \rightarrow R$), такая что:

- 1–4. $(R, +)$ — абелева группа. Нейтральный элемент обозначается 0, обратный к a — $-a$.
5. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ и $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$. Дистрибутивность.

Определение 1.12. Кольцо R называется ассоциативным, если выполнено

$$6. a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

Определение 1.13. Кольцо R называется коммутативным, если

$$7. a \cdot b = b \cdot a$$

Определение 1.14. Кольцо R называется кольцом с 1, если

$$8. \exists 1 \in R : 1 \cdot a = a \cdot 1 = a$$

Определение 1.15. Коммутативное ассоциативное кольцо с 1 называется полем, если выполнены

$$9. \forall a \in R \setminus \{0\} \exists b \in R ab = 1 \wedge 1 \neq 0$$

Определение 1.16. Пусть $a, b \in \mathbb{Z}$, говорят, что a сравнимо с b по модулю n ($a \equiv b \pmod{n}$), если $(a - b) : n$. Эквивалентное определение: a и b имеют одинаковые остатки по модулю n .

Определение 1.17. Фактор множества по отношению \equiv обозначается $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Теорема 1.6. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Тогда класс $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$, где $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$ и $\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}$ — ассоциативное коммутативное кольцо с единицей.

Определение 1.18. Пусть R — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей. Тогда $\forall a \in R : a$ — делитель нуля $\Rightarrow \exists b \neq 0 : ab = 0$.

Лемма. $\forall a, b, c \in R : ab = ac \wedge a$ — не делитель нуля $\Rightarrow b = c$.

Лемма. $a \in R : a$ — обратим $\Rightarrow a$ — не делитель нуля.

Теорема 1.7. $\forall a \in \mathbb{Z} : \bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Тогда:

1. \bar{a} — обратим $\iff (a, n) = 1$
2. \bar{a} — делитель нуля $\iff (a, n) \neq 1$.

Следствие. n — простое $\Rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ — поле.

Определение 1.19. \forall ассоциативного кольца с 1 R : R — называется кольцом без делителей нуля (область целостности), если делитель нуля только 0. $ab = 0 \iff a = 0 \vee b = 0$.

Определение 1.20. Гомоморфизмом колец $f : R_1 \mapsto R_2$ называется такое отображение, что $\forall r_1, r_2 \in R_1 : f(r_1 + r_2) = f(r_1) + f(r_2), f(r_1 r_2) = f(r_1) \cdot f(r_2), f(1) = 1$.

Определение 1.21. Гомоморфизмом группы $f : G_1 \mapsto G_2$ называется такое отображение, что $\forall g_1, g_2 \in G_1 : f(g_1 g_2) = f(g_1) \cdot f(g_2)$.

Определение 1.22. R_1, R_2 — кольца. Рассмотрим $(R_1 \times R_2, +, \cdot) : (r_1, r_2) +_{R_1 \times R_2} (r'_1, r'_2) := (r_1 +_{R_1} r'_1, r_2 +_{R_2} r'_2)$, где $+_{R_1 \times R_2}, +_{R_1}, +_{R_2}$ — операции сложения для соответствующих множеств. То же самое для умножения. Тогда $R_1 \times R_2$ — тоже кольцо, т.к. соответствующие свойства операций унаследуются, что можно проверить самостоятельно. Но заметка: если R_1 и R_2 были областями целостности, то их произведение областью целостности почти никогда не будет.

Определение 1.23. Биективный гомоморфизм (групп, колец, ...) (называется изоморфизмом, \cong) если каждым a_i задано ровно одно b_j и наоборот.

Теорема 1.8 (Китайская теорема об остатках). Пусть $(m, n) = 1$, тогда $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Теорема 1.9 (КТО 2). $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n \in \mathbb{Z} \wedge (m_i, m_j) = 1 \Rightarrow \mathbb{Z}/m_1, m_2, \dots, m_n\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m_2\mathbb{Z} \dots$ — изоморфизм колец.

Теорема 1.10 (КТО без колец). $\forall m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z} : \forall i, j (m_i, m_j) = 1, \forall a_1, \dots, a_n \Rightarrow \exists x_0 \in \mathbb{Z} : x \equiv a_1 \pmod{m_1} \wedge \dots \wedge x \equiv a_n \pmod{m_n} \iff x \equiv x_0 \pmod{\prod_i m_i}$

Определение 1.24. Пусть C — группа ($a \in C$), тогда порядок элемента a : $\text{ord}(a) = \{\min k \in \mathbb{N} \mid a^k = 1\}$. А если такого k нет, то $\text{ord}(a) = \infty$

Лемма. Пусть G — группа ($a \in G$). $\langle a \rangle = \{a, a^2, \dots; a^{-1}, (a^{-1})^2, \dots, e\} = \{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Тогда $(\langle a \rangle, *)$ — группа.

Определение 1.25. $\langle a \rangle$ называется циклической группой, порожденной a . G — циклическая группа $\iff \exists a \in G : G \cong \langle a \rangle$

Теорема 1.11 (О классификации циклических групп). $\text{ord } a = \infty \Rightarrow \langle a \rangle \cong (\mathbb{Z}, +)$. $\text{ord } a = k \in \mathbb{N} \Rightarrow \langle a \rangle \cong (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, +)$

Теорема 1.12 (Теорема Лангранжа). Пусть G — группа. $\forall G$ — n -элементная группа, тогда $\forall a \in G : n : \text{ord } a$

Следствие. G — конечная группа ($a \in G$) $\Rightarrow a^{|G|} = e$

Утверждение 1.13. G — группа ($|G| = n$). G — циклическая $\iff \exists a \in G : \text{ord } a = n$. МТФ: $\bar{a}, \bar{a}^2, \dots$ — периодична с периодом $p - 1$. Утверждение: $\exists \bar{a} : p - 1$ — наименьший период этой последовательности.

Определение 1.26. R — ассоциативное кольцо, тогда $R^* = \{a \in R \mid \exists a^{-1}\}$ — группа обратимых элементов.

Определение 1.27. Рассмотрим $R = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Тогда $R^* = \{\bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid \exists \bar{b} : \bar{a}\bar{b} = 1\} = \{\bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid (a, n) = 1\}$. Тогда $|R^*| = \varphi(n)$ — функция Эйлера.

Теорема 1.14 (Теорема Эйлера). $\forall b \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* = b^{\varphi(n)} = 1$

Теорема 1.15 (Теорема Эйлера). $\forall a \in \mathbb{Z} : (a, n) = 1 \Rightarrow a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$

Теорема 1.16 (Теорема о первообразном корне). $p \in \mathbb{Z}$ — простое $\Rightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ — циклическая.

Определение 1.28. Подгруппа группы G — пара $(H, *)$, где $H \subset G$, $*$ — замкнуто относительно H . Обозначается \leq .

Определение 1.29. Подгруппа группы G порожденная множеством S ($S \subset G$) — наименьшая по включению подгруппа G , содержащая все элементы S .

$$\langle S \rangle = \bigcap_{H \leq G, S \subset H} H.$$

Теорема 1.17. $\forall S \subset G : \langle S \rangle = \{a_1^{\varepsilon_1} \dots a_k^{\varepsilon_k} \mid \forall i \in I a_i \in S \wedge \varepsilon_i = \pm 1\}$, т.е. все возможные произведения элементов из S и обратных к ним (элементы в произведении могут повторяться, k произвольное, не фиксировано)

Теорема 1.18. $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ — циклическая $\iff \begin{cases} n = p^k & p > 2 \text{ — простое} \\ n = 2p^k & \text{см. выше} \\ n = 2 \vee n = 4 \end{cases}.$

Утверждение 1.19. G_1, G_2, G — группы (конечные).

1. $G \cong G_1 \times G_2$. $(|G_1|, |G_2|) \neq 1 \Rightarrow G$ — не циклическая.
2. $(|G_1|, |G_2|) = 1$ и G_1, G_2 — циклическая $\Rightarrow G_1 \times G_2$ — циклическая. (КТО).

Теорема 1.20. $a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. Тогда $x^2 = a$ имеет решение $\iff a^{\frac{p-1}{2}} = 1$

Теорема 1.21. $\pi(n)$ — количество простых на $[1, n]$. Тогда $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi(n)}{\frac{n}{\ln n}} = 1$.

Следствие. Случайное число на $1, n$ — простое с вероятностью $\frac{1}{\ln n}$

Теорема 1.22 (Тест Люка). Пусть $b \in \mathbb{Z}$, такое что $b^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ и $b^{\frac{n-1}{p_i}} \not\equiv 1 \pmod{n}$. Тогда b — простое.

Определение 1.30. Если n — составное, но $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$, то a — свидетель простоты.