

# Алгебры

Харитонцев-Беглов Сергей

29 декабря 2021 г.

## Содержание

<b>1. Теория чисел</b>	<b>1</b>
1.1 НОД, делимость, линейные диофантовы уравнения . . . . .	1
<b>2. Продолжение теории чисел</b>	<b>4</b>
2.1 Пара комментариев про предыдущую лекцию . . . . .	4
2.2 Основная теорема арифметики . . . . .	4
<b>3. Кольца вычетов и их друзья</b>	<b>7</b>
3.1 Группы . . . . .	7
3.2 Кольца . . . . .	8
3.3 Построение кольца вычетов . . . . .	8
3.4 Квадратное уравнение . . . . .	10
3.5 Китайская теорема об остатках . . . . .	10
3.6 Группы вычетов и криптографические протоколы . . . . .	15
3.7 Алгоритм RSA . . . . .	16
3.8 Генерация простых, тесты на простоту . . . . .	16
<b>4. Многочлены</b>	<b>18</b>
4.1 Интерполяция . . . . .	21
4.2 Закрываем долг . . . . .	22
<b>5. Евклидовы кольца</b>	<b>24</b>
<b>6. Производная</b>	<b>27</b>
6.1 Характеристика поля . . . . .	28
6.2 Формула Тейлора . . . . .	28
<b>7. Комплексные числа</b>	<b>30</b>
7.1 Геометрический смысл комплексных чисел . . . . .	30
7.2 О геометрических преобразованиях плоскости . . . . .	31

7.3	Извлечение корня . . . . .	33
7.4	Корни из 1 . . . . .	33
7.5	Дискретное преобразование Фурье . . . . .	34
7.6	Быстрое умножение многочленов . . . . .	34
7.7	TODO: название . . . . .	35
7.8	Гауссовы числа . . . . .	36

# 1. Теория чисел

## 1.1. НОД, делимость, линейные диофантовы уравнения

**Определение 1.1.** Диофантовым уравнением называется уравнение, которое можно решить в  $\mathbb{Z}$ .

Рассмотрим линейное диофантово уравнение

$$ax + by = c$$

Если бы мы были в  $\mathbb{R}$ , то решение быстро бы нашлось:  $y = \frac{c-ax}{b}$ . Но в целых штуках такая штука не всегда будет решением, т.к.  $b$  не всегда делит  $c - ax$ .

**Определение 1.2.**  $a$  делится на  $b$  ( $a : b, b|a$ ), если  $\exists c \in \mathbb{Z} : a = bc$ .

Простые свойства:

1.  $\forall a : a : 1$ .
2.  $\forall a : 0 : a$ .
3.  $\forall a, b, c, k, l \in \mathbb{Z} : a : c \wedge b : c \Rightarrow (ka + lb) : c$ .

**Доказательство.**  $a, b : c \Rightarrow \exists d, e : \begin{cases} a = c \cdot d \\ b = c \cdot e \end{cases}$ . Тогда  $ka + lb = k \cdot cd + l \cdot ce = c \cdot (kd + le) \Rightarrow (ka + lb) : c$  □

$$4. \forall k \neq 0, k \in \mathbb{Z} : a : b \iff ak : bk.$$

$$5. a : b \iff a^2 : b^2.$$

$$6. a : b \Rightarrow \begin{cases} |a| \geq |b| \\ a = 0 \end{cases}.$$

$$7. a : b, b : c \Rightarrow a : c.$$

$$8. a : a.$$

$$9. a : b, b : a \Rightarrow a = \pm b.$$

**Теорема 1.1** (О делении с остатком).  $a, b \in \mathbb{Z}, \exists!(q, r) : \begin{cases} q, r \in \mathbb{Z} \\ a = b \cdot q + r \\ 0 \leq r < |b| \end{cases}$

**Доказательство.**

- Единственность. Пусть есть два результата:  $a = b \cdot q_1 + r_1$  и  $a = b \cdot q_2 + r_2$ . Тогда приравняем:  $b \cdot q_1 + r_1 = b \cdot q_2 + r_2 \iff b(q_1 - q_2) = r_2 - r_1 \xrightarrow[r_1 - r_2 < |b|]{r_1, r_2 \in [0; |b|-1]} r_2 - r_1 : b \xrightarrow{\text{Свойство 6}} r_2 - r_1 = 0 \iff r_1 = r_2 \Rightarrow b(q_1 - q_2) = 0 \iff q_1 = q_2$
- Существование. Здесь мы для конкретного  $b$  проверяем, что все  $a$  подходят.

I.  $a \geq 0, b \geq 0$ .

– База:  $a = 0$ .  $0 = b \cdot 0 + 0$ .  $(0, 0)$  – подходит.

– Переход:  $a \rightarrow a + 1$ .

$a = b \cdot q + r$ , где  $0 \leq r < b$ .

$a + 1 = b \cdot q + (r + 1)$ .

\*  $r < b - 1$ . Тогда  $r + 1 < b \Rightarrow (q, r + 1)$  – подходит.

\*  $r = b - 1$ . Тогда  $a + 1 = b \cdot q + b = b \cdot (q + 1) \Rightarrow (q + 1, 0)$  – подходит.

II.  $a < 0, b > 0$ .  $a < 0 \Rightarrow -a > 0$ .

Из I:  $\exists(q, r) : -a = b \cdot q + r$ , где  $0 \leq r < b$ . Соответственно  $a = -bq - r$ .

–  $r = 0$ .  $a = b \cdot q + 0 \Rightarrow (-q, 0)$  – подходит.

–  $r > 0 \Rightarrow r \in [1; b - 1]$ .  $a = -bq - b + b - r = b \cdot (-q - 1) + b - r \Rightarrow (-q - 1, b - r)$  – подходит

III.  $b < 0 \iff -b > 0$ .  $\exists q, r : a = (-b) \cdot q + r$ , где  $0 \leq r < |b|$ , тогда  $a = b(-q) + r \Rightarrow (-q, r)$  – подходит

□

Вернемся к диофантову уравнению  $ax + by = c$ , где  $a, b, c$  фиксированы, а  $x, y$  – переменные. Пусть только  $a, b$  – фиксированы. Тогда подумаем, когда же  $ax + by = c$  имеет решения. Тогда решим задачу: описать  $\{ax + by \mid x, y \in \mathbb{Z}\} =: \langle a, b \rangle$

**Пример.**  $\langle 1, b \rangle = \mathbb{Z}$

**Пример.**  $\langle 4, 6 \rangle =$  четные числа

Заметим:

$$1. \forall m, n \in \langle a, b \rangle : m + n \in \langle a, b \rangle$$

$$2. m \in \langle a, b \rangle \Rightarrow km \in \langle a, b \rangle \forall k$$

**Определение 1.3.** Пусть  $I \subset \mathbb{Z}$ .  $I$  называется идеалом, если

$$\begin{cases} m, n \in I \Rightarrow m + n \in I \text{ (замкнутость по сложению)} \\ m \in I \Rightarrow \forall k \in \mathbb{Z} : k \cdot m \in I \text{ (замкнутость по умножению)} \\ I \neq \emptyset \end{cases}$$

**Пример.**  $\{0\}$  – идеал.

**Пример.**  $\mathbb{Z}$  – идеал (собственный).

**Пример.**  $\langle a, b \rangle$  – идеал, порожденный  $a$  и  $b$ .

$\forall a \in \mathbb{Z} \langle a \rangle = \{ax \mid x \in \mathbb{Z}\}$  – главный идеал (порожденный  $a$ ).

**Пример.**  $\{0\} = \langle 0 \rangle, \mathbb{Z} = \langle 1 \rangle, \langle 4, 6 \rangle = \langle 2 \rangle$

**Теорема 1.2.** В  $\mathbb{Z}$  любой идеал главный.

**Доказательство.**  $I = \{0\}$  – ок. Тогда пусть  $I \neq \{0\}$ . Пусть  $a \in I \wedge a < 0 \Rightarrow -a = (-1)a \in I \wedge -a \in \mathbb{N}$ . То есть  $I \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$ . Найдем наименьшее  $r \in I \cap \mathbb{N}$ . Проверим, что  $I = \langle r \rangle$  (тогда  $I$  – главный). Надо проверить  $\langle r \rangle \subset I \wedge I \subset \langle r \rangle$ .

- $x \in \langle r \rangle$ . То есть  $x = r \cdot z$ . Т.к.  $r \in I$ , то  $r \cdot z \in I$  (по определению идеала), т.е.  $\langle r \rangle \subset I$ .
- Пусть  $a \in I$ . Поделим с остатком:  $a = r \cdot q + r_1$ ,  $0 \leq r_1 < r$ , то есть  $r_1 = a - r \cdot q = a + (-q) \cdot r$ . Т.к.  $r \in I \Rightarrow (-q) \cdot r \in I \wedge a \in I \Rightarrow a + (-q) \cdot r \in I$ , т.е.  $r_1 \in I$ . Но!  $0 \leq r_1 < r$ , а  $r$  — минимальное натуральное из  $I$ . Тогда  $r_1 = 0 \Rightarrow a = r \cdot q$ , т.е.  $a \in \langle r \rangle$ , а значит  $I \subset \langle r \rangle$ .

□

**Определение 1.4.** Пусть  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Тогда  $d = \text{НОД}(a, b) = \gcd(a, b) = (a, b)$

Докажем единственность.  $\begin{cases} a : d, b : d \\ a : d_1, b : d_1 \end{cases} \iff d : d_1$ . Тогда  $d : d_1 \wedge d_1 : d$ , а значит  $d = \pm d_1$ .

**Теорема 1.3.** 1.  $\forall a, b \exists d = (a, b)$

2.  $\exists x, y \in \mathbb{Z} : d = ax + by$

3.  $ax + by = c$  имеет решение  $\iff c : d$ .

**Доказательство.** Докажем каждый пункт отдельно:

- Рассмотрим  $\langle a, b \rangle$  — идеал. Он главный по предыдущей теореме:  $\exists d \langle a, b \rangle = \langle d \rangle$ .

- $d \in \langle d \rangle = \langle a, b \rangle$ . А значит  $\exists x, y : d = ax + by$ .

$a = a \cdot 1 + b \cdot 0 \in \langle a, b \rangle = \langle d \rangle$ , значит  $a : d$ . Аналогично  $b : d$ .

С другой стороны пусть  $a : d, b : d$ , тогда  $d = \underbrace{ax}_{:d} + \underbrace{by}_{:d} : d$ .

Пусть  $\exists d_1 : a : d_1 \wedge a : d_1 \Rightarrow d = ax + by : d_1 \Rightarrow d$  — максимальный общий делитель.

- $ax + by = c$  имеет решение  $\iff c \in \langle a, b \rangle = \langle d \rangle$ . А  $c \in \langle d \rangle \iff c : d$ .

□

**Определение 1.5.**  $a, b$  — взаимно просты, если  $(a, b) = 1$ , то есть  $\langle a, b \rangle = \mathbb{Z}$

**Лемма.**  $\begin{cases} ab : c \\ (a, c) = 1 \end{cases} \Rightarrow b : c$ .

**Доказательство.** По условию  $ab : c$ , значит  $\exists x \in \mathbb{Z} : ab = c \cdot x$ .

Так как  $(a, c) = 1$ , то  $\exists y, z \in \mathbb{Z} : ay + cz = 1$ . Тогда домножим все на  $b$  и получим  $aby + czb = b$ .

А значит  $\begin{cases} aby : c \\ czb : c \end{cases} \Rightarrow b : c$

□

## 2. Продолжение теории чисел

### 2.1. Пара комментариев про предыдущую лекцию

1. Для любого набора  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$   $\exists \gcd(a_1, \dots, a_n)$  и  $\exists x_1, \dots, x_n : \text{НОД} = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n$ .  
НОД - такое  $d$ , что  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \langle d \rangle$ .
2. Алгоритм Евклида.
  - $(a, b) = (a, b - a)$ , но и  $b = a \cdot q + r$ , тогда  $(a, b) = (a, r)$ .
  - Пусть  $r = b \bmod a$ ,  $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ . Сделаем последовательность  $x_{n+1} = x_{n-1} \bmod x_n$ . Тогда  $(x_1, x_2) = (x_3, x_4) = \dots$ . Заметим, что  $x_n$  — убывает.
  - Тогда существует такое  $x_n$ , что  $(x_1, x_2) = (x_n, 0) = x_n$ .

### 2.2. Основная теорема арифметики

**Определение 2.1.**  $x \in \mathbb{Z}, x \neq \pm 1$ , тогда  $x$  — простое число, если  $x = x_1 x_2 \iff \begin{cases} x_1 = \pm 1 \\ x_2 = \pm 1 \end{cases} \forall x_1, x_2$

**Свойство \*.**  $x$  — обладает свойством \*,  $\iff x \neq \pm 1 \wedge ab : x \Rightarrow \begin{cases} a : x \\ b : x \end{cases}$

**Утверждение 2.1.**  $p$  — простое  $\iff p$  — обладает свойством \*.

**Доказательство.**

- $\Leftarrow$  Пусть  $p = x_1 x_2$ . Тогда  $x_1 x_2 : p$  по \*:  $\begin{cases} x_1 : p \\ x_2 : p \end{cases}$ . Пусть  $x_1 = py$ .  $p = x_1 x_2 = pyx_2$ .  $1 = yx_2 \Rightarrow x_2 = \pm 1$ . Получили определение простого числа.
- $\Rightarrow$ . Пусть  $p$  — простое и  $ab : p$ .  $d = (a, p)$ ,  $p$  — простое  $\Rightarrow d = p \vee d = 1$ .  
 $d = p \Rightarrow a : p$ .  $d = 1 \wedge (a, p) = 1$ , по лемме  $ab : p \wedge (a, p) = 1 \Rightarrow b : p$ .

□

**Теорема 2.2** (Основная теорема арифметики). Пусть  $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ . Тогда  $n$  единственным образом с точностью до перестановки сомножителей, представимо в виде ( $p_i$  — простые,  $p_i > 0$ )

$$n = \varepsilon p_1 p_2 \dots p_k, \varepsilon = \pm 1 = \text{sign}(n).$$

Или, иными словами, существует единственное каноническое разложение:

$$n = \varepsilon p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}, \varepsilon = \pm 1 = \text{sign}(n), a_i > 0, p_1 < p_2 < \dots < p_k.$$

**Доказательство.**

1. Существование. От противного. Пусть  $\exists$  нераскладываемое число. Рассмотрим минимальное такое число.
  - $x = 1$  — пустое произведение. Противоречие.

- $x = p$  — произведение из 1 члена. Противоречие.
- $x = x_1 x_2$ .  $x_1, x_2 \neq \pm 1 \Rightarrow x_1, x_2 < x \Rightarrow x_1, x_2$  — раскладываемые. Или  $x_1 = p_1 p_2 \dots p_n, x_2 = q_1 q_2 \dots q_m \Rightarrow x = p_1 p_2 \dots p_n q_1 q_2 \dots q_m$ .

2. Единственность. Пусть есть плохие числа.  $X$  — минимальное из них.  $q_1 q_2 \dots q_n = X = p_1 p_2 \dots p_m$ . Значит  $p_1 p_2 \dots p_m : q_1 \Rightarrow p_1 : q_1 \vee p_2 \dots p_m : q_1$ . Тогда  $\exists p_i : q_1$ . Тогда можно поделить на  $q_1$ , но  $p_i$  — простое, тогда  $p_i = q_1$ . Рассмотрим  $X' = \frac{X}{q_1}$ .  $q_2 q_3 \dots q_n = X' = p_1 p_2 \dots p_{i-1} p_{i+1} \dots p_m$ .  $X' < X$ , значит разложения  $X'$  равны, а значит, т.к.  $p_i = q_1$ , то равны и исходные разложения. Получили противоречие.

□

Контр-примеры для О. Т. А:

1. Рассмотрим  $2\mathbb{Z}$  — множество четных чисел. Теперь 6 — простое, как и все  $(4k + 2)$ .

Теперь как разложить на простые 60?  $60 = 2 \cdot 30$ , а также  $60 = 6 \cdot 10$ .

2.  $\mathbb{Z} \cup \{\sqrt{5}\} = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ . Заметим, что  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}\{\sqrt{5}\}$

$$4 = 2 \cdot 2 = \overbrace{(\sqrt{5} - 1)}^{\text{простое}} \overbrace{(\sqrt{5} + 1)}^{\text{простое}}$$

**Определение 2.2.**  $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, p$  — простое, тогда степень вхождения  $(V_p(n) = k)$   $p$  в  $n$  —  $\max\{k \mid n : p^k\}$

В терминах разложения:  $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ .  $V_p(n) = a_i$ , а если  $p$  нет в разложении, то  $V_p(n) = 0$ .

Свойства:  $V_p(n)$

1.  $V_p(xy) = V_p(x) + V_p(y)$
2.  $V_p(x + y) \geq \min(V_p(x), V_p(y))$ , а если  $V_p(x) \neq V_p(y)$ , то строгое равенство

**Доказательство.**  $V_p(x) = a, V_p(y) = b$  и  $x = p^a \cdot \tilde{x}, y = p^b \cdot \tilde{y}$ .

Не умаляя общности:  $a \geq b$ . Тогда  $x + y = p^a \tilde{x} + p^b \tilde{y} = p^b (p^{a-b} \tilde{x} + \tilde{y})$ . Если  $a > b$ , то  $\underbrace{p^{a-b} \tilde{x}}_{:p} + \tilde{y}$

не делится на  $p$ . А значит  $V_p(x + y) = \min(V_p(x), V_p(y))$ . В случае же равенства, получаем  $p^b \cdot (\tilde{x} + \tilde{y})$ , для которого уже  $V_p(x + y) \geq \min(V_p(x), V_p(y))$  □

Еще следствия из О. Т. А.

1.  $x : y \Rightarrow V_p(x) \geq V_p(y) \forall$  простого  $p$
2.  $x = p_1^{a_1} \dots p_n^{a_n}, y = p_1^{b_1} \dots p_n^{b_n} \Rightarrow (x, y) = p_1^{\min(a_1, b_1)} \dots p_n^{\min(a_n, b_n)}$
3.  $x = z^k \iff \forall$  простого  $p \ V_p(x) : k$
4. Количество натуральных делителей  $x = \prod x_i^{a_i}$  равно  $\tau(x) = \prod (a_i + 1)$

**Доказательство.** Делители  $X$  однозначно соотносятся с  $\{(b_1, b_2, \dots, b_n) \mid 0 \leq b_i \leq a_i\}$  □

5.  $\sigma(x)$  — сумма натуральных делителей  $x$ . Тогда  $\sigma(x) = \frac{\prod (p_i^{a_i+1} - 1)}{\prod (p_i - 1)}$ .

**Доказательство.**  $\frac{\prod (p_i^{a_i+1}-1)}{\prod (p_i-1)} = \prod \frac{p_i^{a_i+1}-1}{p_i-1} = \prod (1+p_i+\dots+p_i^{a_i})$  = раскроем скобки. = сумма делителей.  $\square$

6.

**Определение 2.3.**  $m$  — НОК (LCM,  $[a, b]$ ), если  $m : a, m : b$  и  $\forall n \ n : a \wedge n : b \Rightarrow n : m$

$$[a, b] = \prod p_i^{\max(a_i, b_i)}$$

7.  $a, b \in \mathbb{Z} \ (a, b) = 1 \ ab = c^k \Rightarrow \exists c_1, c_2 \ a = c_1^k, b = c_2^k$



### 3. Кольца вычетов и их друзья

Рассмотрим  $a^2 - b^2 = 15^{2021} \iff (a-b)(a+b) = 3^{2021} \cdot 5^{2021} \Rightarrow \begin{cases} a+b = 3^k \cdot 5^l \\ a-b = 3^{2021-k} \cdot 5^{2021-l} \end{cases} \Rightarrow$   
 $a = \frac{3^k \cdot 5^l + 3^{2021-k} \cdot 5^{2021-l}}{2}.$

Уравнение  $81a^2 - 169b^2 = 15^{2021}$  — тоже решается. А вот  $a^2 - 2b^2 = 15^{2021} \iff (a - \sqrt{2}b)(a + \sqrt{2}b) = 3^{2021}5^{2021}$  уже не решается в целых числах. Если вылезать, то надо расписывать разложение  $a + \sqrt{2}b$ , "3", "5" и единственность разложения на множители.

Еще один пример:  $a^2 + b^2 = 15^{2021}$ . Посмотрим на остатки от деления на 4:  $a^2, b^2 \pmod 4 \in \{0, 1\}$ ,  $15^{2021} \pmod 4 = 3$ . Но для этого нам нужно понимать что-то про кольцо вычетов по модулю.

#### 3.1. Группы

**Определение 3.1.** Группой называется пара  $(G, *)$ , где  $G$  — множество, а  $*$  :  $G \times G \rightarrow G$  — бинарная операция, так что выполнены свойства:

1.  $\forall a, b, c \in G : (a * b) * c = a * (b * c)$ . Ассоциативность.
2.  $\exists e \in G : \forall a \in G a * e = e * a = a$ . Существование нейтрального элемента.
3.  $\forall a \in G \exists a^{-1} : a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ . Существование обратного элемента.

Несколько примеров:

1.  $(\mathbb{Z}, +)$ ,  $e = 0$ ,  $a^{-1} = -a$ .
2.  $(\mathbb{Q} \setminus 0, \cdot)$ ,  $e = 1$ ,  $a^{-1} = \frac{1}{a}$ .
3.  $(2^M, \Delta)$ ,  $e = \emptyset$ ,  $A^{-1} = A$ .

**Определение 3.2.** Группа  $G$  называется абелевой, если  $\forall x, y \in G : x * y = y * x$ .

**Пример Главный пример группы.** Пусть  $G = S(M) = \{f : M \rightarrow M \mid f \text{ — биекция}\}$ , операция — композиция функций

- Ассоциативность — упражнение.
- Нейтральный элемент —  $f(x) = x$ , тождественное отображение.
- $f^{-1}$  = обратная функция. Она существует, так как  $f$  — биекция.

Получили группы по композиции.

**Пример.**  $M = \{1, 2, 3\}$ .  $f_1, f_2 : M \rightarrow M$  — биекция.  $f_1$  — меняет местами 1 и 2:  $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 3$ ,  $f_2$  переставляет по циклу:  $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1$ .  $f_2 \circ f_1 : 1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 1$ .  $f_1 \circ f_2 : 1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 2$ . Ну значит группа не абелева.

Докажем простейшие свойства групп:

1.  $\exists!$  нейтральный элемент.

**Доказательство:** заметим, что  $e_1 = e_1 * e_2 = e_2$

2.  $\exists!$  обратный элемент.

**Доказательство:** пусть  $b, c$  — обратные к  $a$ . Тогда  $(b * a) * c = e * c = c$ , но при этом  $b * (a * c) = b * e = b$ . Значит  $b = c$ .

3.  $a * b = a * c \iff b = c$

**Доказательство:**  $a * b = a * c \iff (a^{-1} * a) * b = (a^{-1} * a) * c \iff e * b = e * c \iff b = c$

### 3.2. Кольца

**Определение 3.3.** Кольцо — тройка  $(R, +, \cdot)$  ( $R$  — множество,  $+, \cdot : R \times R \rightarrow R$ ), такая что:

1–4.  $(R, +)$  — абелева группа. Нейтральный элемент обозначается  $0$ , обратный к  $a$  —  $-a$ .

5.  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$  и  $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ . Дистрибутивность.

**Определение 3.4.** Кольцо  $R$  называется ассоциативным, если выполнено

6.  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ .

**Определение 3.5.** Кольцо  $R$  называется коммутативным, если

7.  $a \cdot b = b \cdot a$

**Определение 3.6.** Кольцо  $R$  называется кольцом с  $1$ , если

8.  $\exists 1 \in R : 1 \cdot a = a \cdot 1 = a$

**Пример.**  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  — коммутативное ассоциативное кольцо с  $1$ .

**Определение 3.7.** Коммутативное ассоциативное кольцо с  $1$  называется полем, если выполнена

9.  $\forall a \in R \setminus \{0\} \exists b \in R \ ab = 1 \wedge 1 \neq 0$

**Пример.**  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  — поле, а вот  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  — не поле.

### 3.3. Построение кольца вычетов

**Определение 3.8.** Пусть  $a, b \in \mathbb{Z}$ , говорят, что  $a$  сравнимо с  $b$  по модулю  $n$  ( $a \equiv b \pmod{n}$ ), если  $(a - b) : n$ . Эквивалентное определение:  $a$  и  $b$  имеют одинаковые остатки по модулю  $n$ .

Докажем, что сравнимость по модулю — отношение эквивалентности.

- $a \equiv a \pmod{n} \iff 0 : n$
- $(a - b) : n \iff (b - a) : n \Rightarrow a \equiv b \pmod{n} \iff b \equiv a \pmod{n}$ .
- $(a - b) : n \wedge (b - c) : n \Rightarrow (a - b + b - c) : n \iff (a - c) : n$

Наблюдение.  $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow \bar{a} = \{b \mid a \equiv b\} = \{a + kn \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .  $\mathbb{Z} = \bar{0} \cup \bar{1} \dots$

**Определение 3.9.** Фактор множества по отношению  $\equiv$  обозначается  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Элементы  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  называются классами вычетов по модулю.

$$1. a \equiv b \pmod{n} \wedge c \equiv d \pmod{n} \iff a + c \equiv b + d \pmod{n} \wedge ac \equiv bd \pmod{n}.$$

$$\text{Доказательство } (a + c) - (b + d) = \underbrace{(a - b)}_{\vdots n} - \underbrace{(d - c)}_{\vdots n} \vdots n.$$

$$\text{Доказательство } ac - bd = ac - bc + bc - bd = c(a - b) + b(c - d) \vdots n.$$

Значит класс суммы и произведения зависит только от классов множителей и слагаемых.

**Теорема 3.1.** Пусть  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда класс  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ , где  $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a + b} \wedge \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b}$  — ассоциативное коммутативное кольцо с единицей.

**Доказательство.** Все аксиомы — следствия из  $\mathbb{Z}$ . Докажем для примера  $(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a + b + c} = \overline{a} + \overline{b + c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$ .  $\square$

Закон сокращения не очень работает в кольце вычетов по модулю:  $2 \cdot 1 = 2 \cdot 4 \pmod{6}$ , но  $1 \neq 4 \pmod{6}$ .

**Определение 3.10.** Пусть  $R$  — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей. Тогда  $\forall a \in R: a$  — делитель нуля  $\Rightarrow \exists b \neq 0: ab = 0$ .

**Пример.**  $n$  — составное:  $n = p_1 p_2$ ,  $n$  в  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$   $\overline{p_1 p_2} = \overline{n} = 0$ . Значит  $p_1, p_2$  — делители нуля.

**Лемма.**  $\forall a, b, c \in R: ab = ac \wedge a$  — не делитель нуля  $\Rightarrow b = c$ .

**Доказательство.**  $ab = ac: ab - ac = 0 \iff a(b - c) = 0$ .  $a$  — не делитель нуля  $\Rightarrow b - c = 0 \iff b = c$ .  $\square$

**Лемма.**  $a \in R: a$  — обратим  $\Rightarrow a$  — не делитель нуля.

**Доказательство.** Пусть  $ab = 0 \Rightarrow a^{-1}(ab) = a^{-1} \cdot 0; (a^{-1}a)b = 0 \Rightarrow b = 0$ .  $\square$

**Замечание.** Обратное неверно: в  $\mathbb{Z}$  2 — не делитель нуля, но  $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ .

**Теорема 3.2.**  $\forall a \in \mathbb{Z}: \overline{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Тогда:

1.  $\overline{a}$  — обратим  $\iff (a, n) = 1$
2.  $\overline{a}$  — делитель нуля  $\iff (a, n) \neq 1$ .

**Доказательство.**  $\overline{a}$  — обратим  $\iff \exists \overline{b}: \overline{a}\overline{b} = \overline{1} \iff \exists b: ab = 1 \pmod{n} \iff \exists b: ab - 1 \vdots n \iff \exists b, k: ab - 1 = nk \iff \exists b, k: ab - nk = 1 \iff (a, n) = 1$ .

$(a, n) = 1 \Rightarrow \overline{a}$  — обратим  $\Rightarrow$  не делитель нуля.

$(a, n) = d > 1, a = dx$ . Тогда  $\overline{a} \cdot \overline{\frac{n}{d}} = \overline{dx} \overline{\frac{n}{d}} = \overline{nx} = 0$  и  $\overline{\frac{n}{d}} \neq 0$ . Значит  $0 < |\frac{n}{d}| < n$ .  $\square$

**Следствие.**  $n$  — простое  $\Rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  — поле.

**Доказательство.** Достаточно проверить существование обратного.  $\overline{a} \neq \overline{0} \iff a \not\vdots n \iff (a, n) = 1 \iff a$  — обратим.  $\square$

**Определение 3.11.**  $\forall$  ассоциативного кольца с 1  $R: R$  — называется кольцом без делителей нуля (область целостности), если делитель нуля только 0.  $ab = 0 \iff a = 0 \vee b = 0$ .

**Замечание.**  $R$  — область  $\Rightarrow ax_1 = ax_2 \Rightarrow x_1 = x_2$  ( $a \neq 0$ ).

Вернемся к диофантову уравнению  $ax + by = c$ ,  $(a, b) = 1$ . Тогда  $ax = c \pmod{b}$  и  $by = c \pmod{a}$ . Тогда  $\overline{ax} = \overline{c}$  в  $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \xrightarrow{(a, b)=1} \overline{x} = \overline{a}^{-1}\overline{c} \pmod{b}$ . Тогда  $x = x_0 + kb$ .

### 3.4. Квадратное уравнение

Посмотрим на  $x^2 + px + q = 0$  в  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Работает ли  $x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ . Есть проблемки:

1.  $p^2 - 4q$  — не квадрат в  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  (нет решений).
2.  $2 = 0$ . Или  $\nexists 2^{-1}$  (нельзя поделить на два).
3.  $n$  — не простое. Тогда из  $(x - x_1)(x - x_2) = 0$  не следует, что  $x = x_1 \vee x = x_2$ . Пример:  $x^2 - 1 = 0 \pmod{8}$

### 3.5. Китайская теорема об остатках

Чтобы решать такие уравнения можно свести к простым модулям при помощи китайской теоремы об остатках.

Вопрос такой: как связаны  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ . Пусть  $P_m : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ , а  $P_{mn} : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ ,  $P_m, P_{mn}$  — гомоморфизмы соответствующих колец.

**Определение 3.12.** Гомоморфизмом колец  $f : R_1 \mapsto R_2$  называется такое отображение, что  $\forall r_1, r_2 \in R_1 : f(r_1 + r_2) = f(r_1) + f(r_2), f(r_1 r_2) = f(r_1) \cdot f(r_2), f(1) = 1$ .

**Определение 3.13.** Гомоморфизмом группы  $f : G_1 \mapsto G_2$  называется такое отображение, что  $\forall g_1, g_2 \in G_1 : f(g_1 g_2) = f(g_1) \cdot f(g_2)$ .

**Замечание.**  $f$  — гомоморфизм групп  $G_1, G_2 \Rightarrow f(e_{G_1}) = e_{G_2}$ . В частности  $f$  — гомоморфизм колец  $R_1, R_2 \Rightarrow f(0_{R_1}) = 0_{R_2}$ .

**Доказательство.**  $f(e_{G_1}) = f(e_{G_1} \cdot e_{G_1}) = f(e_{G_1}) \cdot f(e_{G_1}); e_{G_2} \cdot f(e_{G_1}) = f(e_{G_1}) \cdot f(e_{G_1}); e_{G_2} = f(e_{G_1})$   $\square$

Существует такой гомоморфизм колец  $P_{mn,m}$ , что  $P_{mn,m} \cdot P_{mn} = P_m$  (тут подразумевается композиция гомоморфизмов)

**Доказательство.** Предъявим такой гомоморфизм:  $P_{mn,m}(\overline{a_{mn}}) = \overline{a_m}$ .  $\square$

**Корректность.**  $\overline{a_{mn}} = \overline{b_{mn}} \iff a \equiv b \pmod{mn} \iff a - b : mn \Rightarrow a - b : m \Rightarrow \overline{a_m} = \overline{b_m}$   $\square$

Аналогично существует гомоморфизм  $P_{mn,n}$ . То есть  $\overline{a_{mn}} \mapsto (\overline{a_m}, \overline{a_n})$  — отображение. То есть  $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Отступление.

**Определение 3.14.**  $R_1, R_2$  — кольца. Рассмотрим  $(R_1 \times R_2, +, \cdot) : (r_1, r_2) +_{R_1 \times R_2} (r'_1, r'_2) := (r_1 +_{R_1} r'_1, r_2 +_{R_2} r'_2)$ , где  $+_{R_1 \times R_2}, +_{R_1}, +_{R_2}$  — операции сложения для соответствующих множеств. То же самое для умножения. Тогда  $R_1 \times R_2$  — тоже кольцо, т.к. соответствующие свойства операций унаследуются, что можно проверить самостоятельно. Но заметка: если  $R_1$  и  $R_2$  были областями целостности, то их произведение областью целостности почти никогда не будет.

Итак мы построили гомоморфизм  $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , назовём его  $i_{m,n}$ . Подумаем про его свойства. Во-первых заметим, что слева  $mn$  элементов, но и справа  $mn$  элементов!

**Определение 3.15.** Биактивный гомоморфизм (групп, колец, ...) (называется изоморфизмом,  $\cong$ ) если каждым  $a_i$  задано ровно одно  $b_j$  и наоборот.

**Теорема 3.3** (Китайская теорема об остатках). Пусть  $(m, n) = 1$ , тогда  $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

**Доказательство.**

1.  $i_{m,n}$  — инъективно. Пусть  $i_{m,n}(\overline{a_{m,n}}) = (\overline{a_m}, \overline{a_n})$ ,  $i_{m,n}(\overline{b_{n,m}}) = (\overline{b_m}, \overline{b_n}) \Rightarrow a - b : m \wedge a - b : n \xrightarrow{(n,m)=1} a - b : mn$ .
2. Раз  $i_{m,n} : \mathbb{Z}/nm\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  инъективно и  $|\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}| = |\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}|$ , то  $i_{m,n}$  — сюръективно, а значит и биективно.

□

**Теорема 3.4** (КТО 2).  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n \in \mathbb{Z} \wedge (m_i, m_j) = 1 \Rightarrow \mathbb{Z}/m_1, m_2, \dots, m_n\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m_2\mathbb{Z} \dots$  — изоморфизм колец.

**Теорема 3.5** (КТО без колец).  $\forall m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z} : \forall i, j (m_i, m_j) = 1, \forall a_1, \dots, a_n \Rightarrow \exists x_0 \in \mathbb{Z} : x \equiv a_1 \pmod{m_1} \wedge \dots \wedge x \equiv a_n \pmod{m_n} \iff x \equiv x_0 \pmod{\prod_i m_i}$

То есть по факту мы хотим получить обратную функцию к  $f_{m_1, m_2, \dots} : \overline{a_{m_1 m_2 m_3}} \mapsto (\overline{a_{m_1}}, \overline{a_{m_2}}, \overline{a_{m_3}})$ . Пусть тогда  $g = f^{-1}$ . Заметим, что  $g$  — гомоморфизм колец. Раз  $g$  сохраняет операции, то  $g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = g(\bar{x}, 0, 0) + g(0, \bar{y}, 0) + g(0, 0, \bar{z}) = \bar{x}g(1, 0, 0) + \bar{y}g(0, 1, 0) + \bar{z}g(0, 0, 1)$ .

$$\text{Пусть } x = g(1, 0, 0) \iff \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{m_1} \\ x \equiv 0 \pmod{m_2} \\ x \equiv 0 \pmod{m_3} \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{m_1} \\ x \equiv 0 \pmod{m_2 m_3} \end{cases}.$$

В группе  $\forall a \neq e \forall x : ax \neq x$ . Тогда посмотрим группу  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \supset \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ .

Тогда для любого  $n \in \mathbb{N} : n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p_1^{\alpha_1}\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/p_n^{\alpha_n}\mathbb{Z}$ .

**Пример.** Для того, чтобы решить  $b^2 = a$  надо решить  $b_i^2 = a$  для все составляющих.

**Определение 3.16.** Пусть  $C$  — группа ( $a \in C$ ), тогда порядок элемента  $a$ :  $\text{ord}(a) = \{\min k \in \mathbb{N} \mid a^k = 1\}$ . А если такого  $k$  нет, то  $\text{ord}(a) = \infty$

**Лемма.** Пусть  $G$  — группа ( $a \in G$ ).  $\langle a \rangle = \{a, a^2, \dots; a^{-1}, (a^{-1})^2, \dots, e\} = \{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ . Тогда  $(\langle a \rangle, *)$  — группа.

**Доказательство.** Проверим замкнутость относительно операций: 0-рной ( $\{\} \rightarrow e$ ), унарной  $a \rightarrow a^{-1}$ , бинарной  $(a, b) \rightarrow a * b$ .

- $e = a^0 \in \langle a \rangle$
- $b \in \langle a \rangle. b = a^k \Rightarrow b^{-1} = a^{-k} \in \langle a \rangle$ .
- $b, c \in \langle a \rangle. b = a^k, c = a^l \Rightarrow bc = a^{k+l} \in \langle a \rangle$ .

□

**Определение 3.17.**  $\langle a \rangle$  называется циклической группой, порожденной  $a$ .  $G$  — циклическая группа  $\iff \exists a \in G : G \cong \langle a \rangle$

**Теорема 3.6** (О классификации циклических групп).  $\text{ord } a = \infty \Rightarrow \langle a \rangle \cong (\mathbb{Z}, +)$ .  $\text{ord } a = k \in \mathbb{N} \Rightarrow \langle a \rangle \cong (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, +)$

**Доказательство.**  $f : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow \langle a \rangle$ . То есть  $k \mapsto a^k$ .  $f(k+l) = a^{k+l} = a^k \cdot a^l = f(k) + f(l)$ , т.е.  $f$  — гомоморфизм. А ещё  $f$  — сюръекция по определению циклической группы.

Докажем инъективность. Пусть  $a^k = a^l \iff a^{k-l} \cdot a^l = ea^l \iff a^{k-l} = e$ . Но  $\text{ord } a = \infty$ ! Значит  $k - l = 0$ .

Теперь  $\text{ord } a \neq \infty$ . Тогда построим  $f : \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \rightarrow \langle a \rangle$ , то есть  $\overline{m}_k \mapsto a^m$ .

Корректность:  $\overline{m}_k = \overline{n}_k \Rightarrow (m - n) : k$ . То есть  $m = n + k \cdot l$ . Значит  $a^m = a^{n+k \cdot l} \iff a^m = a^n \cdot a^{kl} = a^n$ .

Аналогично первому случаю доказывается, что  $f$  — гомоморфизм и сюръекция.

Инъективность:  $f(\overline{m}) = f(\overline{n}) \iff a^m = a^n \iff a^{m-n} = e, m - n = qk + r, 0 \leq r < k$ ;  $a^{qk+r} = e \iff (a^k)^q \cdot a^r = e \iff a^r = e$ , но  $r < k$ , а  $k$  — наименьшая натуральная степень обращения элемента в единицу, а значит  $r = 0$ , т.е.  $f(\overline{n}) = f(\overline{m}) \iff (m - n) : k$ , т.е. мы имеем дело с одним классом эквивалентности. □

Простыми словами, если  $\text{ord } a = \infty \Rightarrow$  в последовательности  $\{a^i\}$  — элементы не повторяются. А если  $\text{ord } a \neq \infty$ , то элементы повторяются с периодом  $k$ , а внутри периода элементы не повторяются.

**Теорема 3.7** (Теорема Лангранжа). Пусть  $G$  — группа.  $\forall G$  —  $n$ -элементная группа, тогда  $\forall a \in G : n : \text{ord } a$

**Доказательство.** Пусть  $\text{ord } a = k$ . Рассмотрим отображение  $m_a(x) = ax$ .  $m_a G \rightarrow G$ . Нарисуем граф отображений (вершины — элементы  $G$ , ребра (стрелки) —  $x \rightarrow ax$ ).  $x \rightarrow ax \rightarrow a^2x \rightarrow a^3x \rightarrow \dots \rightarrow a^{k-1}x \rightarrow a^kx = x$ , так как для  $\forall i, j < k : a^i x = a^j x \Rightarrow i = j$ .

Значит все элементы  $G$  разбиваются на циклы длины  $k$ . Следовательно  $n : k$ . □

**Следствие.**  $G$  — конечная группа ( $a \in G$ )  $\Rightarrow a^{|G|} = e$

**Доказательство.**  $\text{ord } a = k$ .  $n = k \cdot l$  по теореме Лагранжа. Тогда  $a^n = a^{k \cdot l} = (a^k)^l = e^l = e$  □

**Пример.**  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +)$ .  $\overline{a}^x = \underbrace{\overline{a} + \overline{a} + \overline{a} + \overline{a}}_{x \text{ раз}} = \overline{xa}$ .

**Пример.**  $p$  — простое.

$G := (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ .  $|G| = p - 1$ . Тогда  $a^{p-1} = 1$ . Малая теорема Ферма.

На языке сравнений:  $a \in \mathbb{Z}, a : p \Rightarrow a^{p-1} - 1 : p \iff a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ .

**Пример.**  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +)$  — циклическая группа. А вот с  $G$  из предыдущего пункта — тоже, если  $p$  — простое. Но не очев.

**Утверждение 3.8.**  $G$  — группа ( $|G| = n$ ).  $G$  — циклическая  $\iff \exists a \in G : \text{ord } a = n$ . МТФ:  $\overline{a}, \overline{a}^2, \dots$  — периодична с периодом  $p - 1$ . Утверждение:  $\exists \overline{a} : p - 1$  — наименьший период этой последовательности.

**Замечание.** Пусть  $G$  — группа,  $|G| = p$  — простое. Тогда  $G \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +)$ .  $G$  — циклическая.

**Доказательство.** Возьмем  $a \neq e$ . Тогда  $p : \text{ord}(a) \Rightarrow \text{ord}(a) = 1 \vee \text{ord}(a) = p \Rightarrow a = e \vee \langle a \rangle = G \Rightarrow G$  — циклическая  $\Rightarrow G \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +)$ . □

**Определение 3.18.**  $R$  — ассоциативное кольцо, тогда  $R^* = \{a \in R | \exists a^{-1}\}$  — группа обратимых элементов.

Проверим, что  $R^*$  — группа.

- Проверим замкнутость.  $a, b \in R^* \Rightarrow \exists a^{-1} \exists b^{-1} : (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ .

- $1 \in R^*$ .
- $a \in R^* : \exists a^{-1} \Rightarrow \exists (a^{-1})^{-1} = a$ , значит  $a^{-1} \in R^*$ .

**Замечание.**  $a^n = 1 \Rightarrow a \in R^*$ . Т.к. тут записано, что  $a \cdot a^{n-1} = 1$  — то есть он обратим.

**Определение 3.19.** Рассмотрим  $R = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Тогда  $R^* = \{\bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid \exists \bar{b} : \bar{a}\bar{b} = 1\} = \{\bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid (a, n) = 1\}$ . Тогда  $|R^*| = \varphi(n)$  — функция Эйлера.

**Теорема 3.9** (Теорема Эйлера).  $\forall b \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* = b^{\varphi(n)} = 1$

**Теорема 3.10** (Теорема Эйлера).  $\forall a \in \mathbb{Z} : (a, n) = 1 \Rightarrow a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$

Эффективно вычислим  $\varphi(n)$ :

1.  $n = p^k$ ,  $p$  — простое.

$$\varphi(n) = \{x \in \{1, \dots, p^k\} \mid (x, p^k) = 1\} = \{x \in \{1, \dots, p^k\} \mid x \not\vdots p\} = p^k - |\{p, 2p, \dots, p^k\}| = p^k - p^{k-1}.$$

2.  $n$  — составное.  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$

По КТО:

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong (\mathbb{Z}/p_1^{\alpha_1}\mathbb{Z}) \times \dots \times (\mathbb{Z}/p_k^{\alpha_k}\mathbb{Z}).$$

. Тогда заметим, что

$$(\mathbb{Z}/p_1^{\alpha_1}\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/p_k^{\alpha_k}\mathbb{Z})^* = (\mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z})^* \times \dots \times (\mathbb{Z}/p_k^{\alpha_k}\mathbb{Z})^*.$$

Так как если  $(x_1, \dots, x_k)$  — обратим, то  $x_i$  — обратимы.

Из этого получаем, что

$$\varphi(n) = |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*| = |(\mathbb{Z}/p_1^{\alpha_1}\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/p_k^{\alpha_k}\mathbb{Z})^*| = \prod_{i=1}^k |(\mathbb{Z}/p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z})^*|.$$

Получили формулу из а). Применим её:

$$\varphi(n) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}) \dots (p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1}) = n \cdot (1 - \frac{1}{p_1}) \cdot \dots \cdot (1 - \frac{1}{p_k}).$$

**Теорема 3.11** (Теорема о первообразном корне).  $p \in \mathbb{Z}$  — простое  $\Rightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$  — циклическая.

**Доказательство.** В ноябре. □

Посмотрим на устройство  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .  $\exists a \in \mathbb{Z} : \{\bar{a}, \bar{a}^2, \dots, \bar{a}^{p-1}\} = \{\bar{1}, \dots, \overline{p-1}\}$ .

Тогда как устроены  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$  в общем случае?

Отступление: группа, порожденная множеством.

**Определение 3.20.** Подгруппа группы  $G$  — пара  $(H, *)$ , где  $H \subset G$ ,  $*$  — замкнуто относительно  $H$ . Обозначается  $\leq$ .

**Определение 3.21.** Подгруппа группы  $G$  порожденная множеством  $S$  ( $S \subset G$ ) — наименьшая по включению подгруппа  $G$ , содержащая все элементы  $S$ .

$$\langle S \rangle = \bigcap_{H \leq G, S \subset H} H.$$

**Замечание.**  $\forall I \forall H_\alpha, \dots, H_\omega, \alpha, \dots, \omega \in I : H_i \leq G \Rightarrow \bigcap_{i \in I} H_i \leq G$

**Доказательство.** Рассмотрим  $e (\forall i \in I H_i \text{ — группа} \Rightarrow e \in H_i) \Rightarrow e \in \bigcap_{i \in I} H_i$ .

$\forall x \in \bigcap_{i \in I} (\forall i \in I x^{-1} \in H_i) \Rightarrow x^{-1} \in \bigcap_{i \in I} H_i \Rightarrow \bigcap_{i \in I} H_i \text{ — группа (ассоциативность гарантируется определением подгруппы).}$   $\square$

**Теорема 3.12.**  $\forall S \subset G : \langle S \rangle = \{a_1^{\varepsilon_1} \dots a_k^{\varepsilon_k} \mid \forall i \in I a_i \in S \wedge \varepsilon_i = \pm 1\}$ , т.е. все возможные произведения элементов из  $S$  и обратных к ним (элементы в произведении могут повторяться,  $k$  произвольное, не фиксировано)

**Доказательство.**

1. Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_k \in S$ . Тогда для любой  $H \leq G$   $H \supseteq S$  верно:

- (a)  $a_i \in H$ .
- (b)  $a_i^{\varepsilon_i} \in H$ , так как  $H$  замкнута относительно  $^{-1}$
- (c)  $a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \dots a_k^{\varepsilon_k} \in H$ , так как  $H$  замкнуто относительно  $\cdot$ .

Значит  $H \supset \langle S \rangle \Rightarrow \langle S \rangle \subseteq H$ .

С другой стороны, сама группа  $\langle S \rangle$ , которую мы описали в предыдущей теореме, является корректной подгруппой  $G$ , т.е.  $H = \langle S \rangle \Rightarrow H \supset S \wedge H \leq G$ . Следовательно:

$$\bigcap_{H \leq G, S \subset H} H = \langle S \rangle.$$

$\square$

**Теорема 3.13.**  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$  — циклическая  $\iff \begin{cases} n = p^k & p > 2 \text{ — простое} \\ n = 2p^k & \text{см. выше} \\ n = 2 \vee n = 4 \end{cases}$ .

$n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ . Тогда  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* = (\mathbb{Z}/p_1^{\alpha_1}\mathbb{Z})^* \times \dots \times (\mathbb{Z}/p_k^{\alpha_k}\mathbb{Z})^*$ .

**Утверждение 3.14.**  $G_1, G_2, G$  — группы (конечные).

- 1.  $G \cong G_1 \times G_2$ .  $(|G_1|, |G_2|) \neq 1 \Rightarrow G$  — не циклическая.
- 2.  $(|G_1|, |G_2|) = 1$  и  $G_1, G_2$  — циклическая  $\Rightarrow G_1 \times G_2$  — циклическая. (КТО).

**Доказательство.** Пусть  $(|G_1|, |G_2|) > 1$ . Тогда  $\forall a \in G_1, b \in G_2$   $a^{|G_1|} = e_{G_1} \wedge b^{|G_2|} = e_{G_2} \Rightarrow (a, b)^{\text{lcm}(|G_1|, |G_2|)} = (e, e) \Rightarrow \forall x \in G_1 \times G_2 : \text{ord}(x) \leq \text{lcm}(|G_1|, |G_2|) < |G_1| \cdot |G_2| = |G_1 \times G_2| \Rightarrow G_1 \times G_2$  — не циклическая.  $\square$

**Замечание.**  $a^{\varphi(n)} = 1$ . Точна ли оценка  $\varphi(n)$ ? Если  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$  — циклическая (например,  $n$  — простое). Тогда да. Иначе пусть  $n = pq$ ,  $p, q$  — простые. Тогда по Эйлеру  $a^{(q-1)(p-1)} = 1$ , а на самом деле  $a^{\frac{(q-1)(p-1)}{2}} = 1$ .

Теперь докажем теорему о том, в каких случаях мультипликативная группа вычетов циклическая.

**Доказательство.**  $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ . Тогда  $|(\mathbb{Z}/p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z})^*| = p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i-1} : 2$ , кроме случая  $p_i = 2, \alpha_i = 1$ .

Поэтому, если  $k > 2$  или  $k = 2$   $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2} \neq 2^1 \Rightarrow \text{gcd}$  у размеров групп не взаимно просты  $\Rightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$  — не циклическая.

Остались случаи  $k = 1, n = p^a$  и  $k = 2, n = 2 \cdot p^a$ .



Случай  $n = 2p^a, p \neq 2$ .  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/p^a\mathbb{Z})^* = (\mathbb{Z}/p^a\mathbb{Z})^*$  — свели к случаю 1.

Пусть  $n = p^a$ .  $p = 2, a = 1, 2$  — очев.  $a > 2 \Rightarrow (\mathbb{Z}/2^a\mathbb{Z})^*$  — не циклическая. Пусть циклическая, тогда  $(\mathbb{Z}/2^a\mathbb{Z})^* = \langle x \rangle$ ,  $\text{ord } x = 2^{a-1}$ . Тогда в  $(\mathbb{Z}/2^a\mathbb{Z})^*$ :  $y^2 = 1 \iff \exists k(x^k)^2 = 1 \iff x^{2k} = 1$ .  $2k : 2^{a-1} \wedge k : 2^{a-2} \xrightarrow{x \in (0; 2^{a-1})} k = 0 \vee k = 2^{a-2}$ .  $y^2$  — имеет два решения. Но!  $1^2 = (-1)^2 = (2^{a-1} \pm 1)^2 = 1$ . 4 решения. Противоречие.

Теперь, если  $p \neq 2$ , то группа будет циклической. А дальше на лекции произошёл кек следующего вида: доказать для случая  $n = p^1$  довольно тяжело, будет потом или вообще не будет, в общем хз, а доказательство для случая  $n = p^a$  выводится «позже..., это довольно элементарная выкладка..., выводится уже какими-то совсем такими ручными манипуляциями» из случая  $n = p$ , но как конкретно — сказано не было, какая досада.  $\square$

**Теорема 3.15.**  $a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ . Тогда  $x^2 = a$  имеет решение  $\iff a^{\frac{p-1}{2}} = 1$

**Доказательство.**

- $\Rightarrow$ .  $a = x^2 \Rightarrow a^{\frac{p-1}{2}} = (x^2)^{\frac{p-1}{2}} = x^{p-1} = 1$  (МТФ).
- $\Leftarrow$ .  $a^{\frac{p-1}{2}} = 1$ .  $\exists c : (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* = \langle c \rangle$ .  $\exists k : a = c^k$ . Тогда  $a^{\frac{p-1}{2}} = (c^k)^{\frac{p-1}{2}} \iff c^{\frac{k(p-1)}{2}} = 1$  Та как  $\text{ord } \frac{k(p-1)}{2} : p-1$ . Тогда  $\frac{k}{2} \in \mathbb{Z}$ , то есть  $k = 2l$ .  $a = c^{2l} = (c^l)^2$ .

$\square$

### 3.6. Группы вычетов и криптографические протоколы

Главное отображение, которое нас интересует —  $p_k : (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \rightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* : p_k(x) = x^k$ .

Заметим, что если  $(p-1, k) = 1 \Rightarrow p_k$  — биекция:  $p_k^{-1}(x) = x^l$ , где  $l : kl = 1 \pmod{p-1}$ .  $x \rightarrow x^k \rightarrow (x^k)^l = x^{kl} = x^1 = x$ .  $x \rightarrow (x^l) \rightarrow (x^l)^k = x$ .

А если  $(p-1, k) \neq 1$ , то  $p_k$  — не биекция. Если  $p-1 = k \cdot s$  и  $g$  — первообразный корень, то  $\text{ord } g = p-1$  и  $(g^s)^k = 1$ . Тогда  $1^k = 1$  — не инъекция, т.к. несколько элементов перешли в единицу.

Классический протокол шифровки: протокол с закрытым ключом (ключ — способ шифровки / дешифровки).

Пусть Алиса(А) и Боб(В) хотят обмениваться информацией. Хотят придумать закрытый ключ путем пересылки сообщений.

Протокол Диффи-Хеллмана: А и В хотят сгенерировать закрытый ключ  $m \in \mathbb{N}$ .

1. Придумывают большое число  $p$ , объявляется всем
2. Придумывают  $a$  — первообразный корень по модулю  $p$ :  $\text{ord}_p(a) = p-1$ , тоже объявляется всем
3. А: берет  $x \in \mathbb{Z}$  (лучше  $(x, p-1) = 1$ ) и посылает  $a^x \pmod{p}$ ,  $x$  остаётся в тайне
4. В: берет  $y \in \mathbb{Z}$ ,  $a^y \pmod{p}$ ,  $a^y$  отправляет,  $y$  остаётся в тайне
5. А вычисляет  $(a^x)^y = a^{xy} \pmod{p}$ .
6. В: вычисляет  $(a^y)^x = a^{xy} \pmod{p}$ .

Получили ключ  $a^{xy}$ .

Чтобы взломать надо найти  $x, y$ . Если есть  $x$ , то посчитать  $a^x$  просто, а вот наоборот — сложно, т.е. троллинг заключается в трудности вычисления дискретного логарифма (общая концепция — односторонние функции).

### 3.7. Алгоритм RSA

RSA — Rivest, Shamir, Adleman.

RSA — шифрование с открытым ключом:

1. А: придумывает  $p, q$  — большие простые. Вычисляет  $\varphi(pq) = (p-1)(q-1)$ .  $p, q, (p-1)(q-1)$  — закрытая часть ключа.
2. Выбирает  $d \in \mathbb{Z}$   $(d, p-1) = (d, q-1) = 1$ .  $p, q, d$  — закрытая часть.
3. Открытый ключ  $n = pq$  и  $e \in \mathbb{Z} : de \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)}$ . Решение Л.Д.У.
4. В: хочет послать сообщение  $(x \in \mathbb{Z}, (x, n) = 1)$  А: он посылает  $x^e \pmod{n}$ .
5. А: получает  $y = x^e$  и вычисляет  $y^d = (x^e)^d = x^{ed} = x^{k \cdot \varphi(n) + 1} = x \pmod{n}$ .

Устойчивость: чтобы взломать, надо знать  $(p-1)(q-1)$ , то нам надо просто знать  $p, q$ . Но мы не умеем делать это быстро.

### 3.8. Генерация простых, тесты на простоту

**Теорема 3.16.**  $\pi(n)$  — количество простых на  $[1, n]$ . Тогда  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi(n)}{\frac{n}{\ln n}} = 1$ .

**Следствие.** Случайное число на  $1, n$  — простое с вероятностью  $\frac{1}{\ln n}$

Способ генерации: возьмем  $p_1, p_2, \dots, p_k$  — простые (небольшие). Попробуем  $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k} + 1$ , где  $a_i$  — произвольные степени. Получили число Люка.

**Теорема 3.17** (Тест Люка). Пусть  $b \in \mathbb{Z}$ , такое что  $b^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$  и  $b^{\frac{n-1}{p_i}} \not\equiv 1 \pmod{n}$ . Тогда  $n$  — простое.

**Доказательство.**  $b^{n-1} \equiv 1 \Rightarrow \text{ord}_n(\overline{b_n})$  — делитель  $n-1$ .

$b^{\frac{n-1}{p_i}} \not\equiv 1 \Rightarrow \text{ord}_n(\overline{b_n})$  — не делитель  $\frac{n-1}{p_i}$  для любого  $p_i \Rightarrow \text{ord}(\overline{b_n}) = n-1 \Rightarrow |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*| \geq n-1 \Rightarrow n$  — простое.  $\square$

**Замечание.**  $n$  — простое,  $b$  — подходит  $\iff b$  — первообразный корень. Их  $\varphi(n-1)$ . Пусть  $\varphi(n-1) > \frac{n-1}{10}$ , значит через  $k$  тестов будет вероятность проиграть  $(\frac{9}{10})^k$ , что мало.

**Замечание.** Числа Люка — неоч для RSA:  $n = pq, p, q$  — числа Люка. Такие числа с большой вероятностью факторизуются: Выбираем  $a \in \mathbb{Z}$ , дальше  $a \rightarrow a^2 \rightarrow (a^2)^3 \rightarrow \dots$ , то есть вычисляем  $a^{k!} \pmod{n}$ . Помним, что  $p-1 = \prod p_i^{a_i}, q-1 = \prod p_i^{b_i}$ .

Рассмотрим  $K_p = \min\{a^{k!} \equiv 1 \pmod{p} \mid k \in \mathbb{N}\}$ .

$k_p, k_q$  — не велики. Действительно:  $k_p : p-1 = \prod p_i^{a_i}$ , а  $p_i$  — довольно маленькие.

Скорее всего  $k_p \neq k_q$ . Не умаляя общности считаем  $k_p < k_q$ , тогда  $(a^{k_p!}, n) = p$ .

Тест Ферма:  $n \in \mathbb{N}, a \in [1, \dots, n-1]$ . Если  $a^{n-1} \not\equiv 1 \pmod{n}$ , значит  $n$  — составное.

**Определение 3.22.** Если  $n$  — составное, но  $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ , то  $a$  — свидетель простоты.

Если  $n$  — составное, то или свидетелей  $\leq \frac{\varphi(n)}{2} \leq \frac{n-1}{2}$ , или любое взаимно простое с  $a$  является свидетелем простоты. Свидетели образуют подгруппу, а значит либо это вся группа, либо там  $\leq \frac{\varphi(n)}{2}$  элементов.

Пусть там меньше половины, тогда после  $k$  итераций вероятность проиграть  $\frac{1}{2^k}$ , что довольно хорошо.

Тест Рабина-Миллера. Пусть  $n - 1 = 2^s \cdot m$ . Тогда, если  $n$  — простое, то  $x^2 \equiv 1 \pmod{n} \Rightarrow x = \pm 1 \pmod{n}$ . Тогда берем  $a \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ . Считаю  $a^m, (a^m)^2, \dots, (a^m)^{2^{s-1}}$ . Так как  $n$  — простое  $\Rightarrow$  или  $a^m = 1$ , или есть  $-1$ , а потом  $1$ .

Условие Миллера-Рабина работает для  $\forall a \in [1.. \sqrt[7]{n}]$  или  $\in [1.. \log^2 n]$ , если верим в гипотезу Римана.

Но Рабин заметил, что вероятность ошибиться для составного  $\frac{\varphi(n)}{4}$

## 4. Многочлены

Теперь мы многочлены будем рассматривать как самостоятельные элементы, а не как функции, ведь сами многочлены можно складывать и умножать! Причем свойства умножения и сложения удовлетворяет требованием кольца! Получили **Кольцо многочленов над кольцом  $\mathbb{R}$** .

Но сначала рассмотрим немного другую штуку: **кольцо формальных степенных рядов** (отличие будет позже).

**Определение 4.1.** Пусть  $R$  — ассоциативное коммутативное кольцо. Тогда кольцо формальных степенных рядов  $R[[x]]$  — тройка  $(R^{\mathbb{Z}_{\geq 0}}, +, \cdot)$ .

$$+: (a_0, a_1, a_2, \dots) + (b_0, b_1, b_2, \dots) := (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots)$$

$$\cdot \text{ (Правило свертки): } (a_0, a_1, a_2, \dots) \cdot (b_0, b_1, b_2, \dots) = (a_0 b_0, a_0 b_1 + b_1 b_0, \dots), \text{ по факту: } (a_i) \cdot (b_i) = (c_i), c_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

Так же можно представлять  $(a_0, a_1, a_2, \dots) \iff a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ . То есть, если неформально, то правило свертки — обычное раскрытие скобок.

**Определение 4.2.**  $R^{\mathbb{Z}_{\geq 0}} = \{f : \mathbb{Z}_{\geq 0} \rightarrow R\} = \{(a_0, a_1, \dots) | a_i \in R\}$

**Теорема 4.1.**  $R[[x]]$  — ассоциативное, коммутативное кольцо. Причем, если  $R$  с единицей, то  $R[[x]]$  — кольцо с единицей.

**Доказательство.** Заметим, что все аксиомы доказываются супер просто, ведь сложение у нас просто по координатам. Тогда получили очевидность коммутативности и ассоциативности  $+$  (следует из коммутативности и ассоциативности  $R$ ). В качестве нуля берется  $0 = (0, 0, 0, \dots)$ . Обратный элемент —  $-(a_0, a_1, a_2, \dots) = (-a_0, -a_1, -a_2, \dots)$

Дистрибутивность — упражнение (из дистрибутивности  $R$ ).

Коммутативность произведения:  $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{l=0}^n a_l b_{n-l}$ , где  $k, l \geq 0 \wedge k + l = n$ . Тогда  $c_n = \sum_{l=0}^n a_{n-l} b_l = \sum_{l=0}^n b_l a_{n-l}$  — формула свертки для  $b \cdot a$ .

Если  $\exists 1_R$ , то  $(1_R, 0_R, 0_R, \dots)$  — нейтральный относительно  $\cdot$  в  $R[[x]]$  (упражнение).

Ассоциативность (упражнение на смирение духа):  $\forall f, g, h \in R[[x]] (f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$ . Введем много обозначений:  $f = (a_n), g = (b_n), h = (c_n), f \cdot g = (d_n), g \cdot h = (e_n), (f \cdot g) \cdot h = (k_n), f \cdot (g \cdot h) = (l_n)$

Хотим доказать, что  $k_n = l_n \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Тогда

$$k_n = \sum_{i=0}^n d_i c_{n-i} = \sum_{i=0}^n \left( \sum_{j=0}^i a_j b_{i-j} \right) c_{n-i}.$$

Воспользуемся дистрибутивностью:

$$k_n = \dots = \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq i}} a_j b_{i-j} c_{n-i}.$$

Определим  $s := i - j, t := n - i$ , тогда

$$k_n = \dots = \sum_{\substack{j, s, t \geq 0 \\ j + s + t = n}} a_j b_s c_t.$$

Аналогично для  $l_n$ :

$$l_n = \dots = \sum_{\substack{j, s, t \geq 0 \\ j + s + t = n}} a_j b_s c_t.$$

□

**Замечание.** Если  $R$  — не коммутативное кольцо, то стоит различать  $ax^2$ ,  $x^2a$ ,  $xa$ .

**Замечание.** Существует инъективный гомоморфизм колец  $i: R \rightarrow R[[x]]: a \rightarrow (a, 0, 0, 0, \dots)$ . Это можно проверить.

Тогда не умаляя общности считаем, что  $R$  содержится в  $R[[x]]$  (в качестве подкольца).

**Замечание.** Положим по определению  $x := (0, 1, 0, 0, 0, \dots)$ .

Тогда (упражнение на индукцию)  $x^n := (0, 0, \dots, \overbrace{1}^n, 0, 0, \dots)$  (1 стоит на  $n$ -ой позиции в нумерации с нуля)

Тогда, если  $f = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, 0)$  ( $a_i$  при  $i > n$  равно 0).

Тогда  $f = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$ .

**Замечание.**  $(a_0, a_1, a_2, \dots) \cdot \underbrace{(0, 1, 0, \dots)}_x = (0, a_0, a_1, \dots)$

**Следствие.**  $f \neq x \cdot f = (a_i) \wedge a_0 = 0 \Rightarrow 1 \nmid f$ .

**Теорема 4.2.**  $f = (a_i)$ .  $f \in R^*[[x]] \iff a_0 \in R^*$ . В частности:  $R$  — поле  $\Rightarrow f$  — обратим  $\iff f \nmid x$ .

**Доказательство.**

•  $\Rightarrow$ .  $(b_n)$  — обратный к  $(a_n)$ . Тогда,  $(a_0, a_1, \dots) \cdot (b_0, b_1, \dots) = (1, 0, 0, \dots)$ .

$1 = a_0 b_0 \Rightarrow a_0 \in R^*$ .

•  $\Leftarrow$ : будем вычислять последовательность  $(b_0, b_1, \dots)$ .  $a_0 \in R^*$ , тогда:

$a = a_0 b_0 \Rightarrow b_0 = a_0^{-1} = \frac{1}{a_0}$ .  $0 = a_0 b_1 + a_1 b_0 \Rightarrow \frac{-a_1 b_0}{a_0}$ . И так далее.

$0 = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$ .  $b_n = (-\sum_{i=1}^n a_i b_{n-i}) a_0^{-1}$ .

Построили метод построения  $b$ , причем все хорошо!

□

**Пример.**  $f = (1, 1, 1, 1, \dots) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ . Тогда  $\frac{1}{1+x+x^2+\dots} = 1 - x$ . Тогда  $1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$ .

**Теорема 4.3.**  $R[x] (\subset R[[x]]) = \{(a_0, a_1, \dots) \mid \exists N \forall n > N: a_n = 0\}$  — финитные последовательности, образуют подкольцо с единицей, называемое **кольцом многочленов** (вот и то самое отличие от формальных степенных рядов)).

**Доказательство.** Замкнутость по  $+$ :  $a_n = 0$  при  $n > N_1$  и  $b_n = 0$  при  $n > N_2$ . Тогда при  $n > \max(N_1, N_2)$   $a_n + b_n = 0$ .

Замкнутость по  $\cdot$ :  $a_n = 0, n > N_1$  и  $b_n = 0, n > N_2$ . Тогда при  $n > N_1 + N_2$ :  $c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j = 0$ . Так как при  $i + j = N > N_1 + N_2 \Rightarrow i > N_1 \vee j > N_2$ .

$1 \in K[x]$ !!! (что это значит и что хотел сказать автор — я не понял)

□

**Определение 4.3.**  $f \in K[x]$  степенью  $f$  называется  $\deg f = \{\max k : a_k \neq 0\}$ . Причем  $\deg 0 = -\infty$

**Свойства.**

1.  $\deg(f + g) \leq \max(\deg f, \deg g)$ . Причём  $\deg f \neq \deg g \rightarrow \deg(f + g) = \max(\deg f, \deg g)$ .
2.  $\deg(f \cdot g) \leq \deg f + \deg g$ , а если  $R$  — область целостности, то  $\deg(fg) = \deg f + \deg g$ .

**Следствие.**  $R$  — область целостности  $\Rightarrow R[x]$  — область целостности.

Теперь у нас  $K$  — поле.

**Теорема 4.4** (О делении с остатком).  $f, g \in K[x]$   $g \neq 0$ . Тогда  $\exists! q, r \in K[x] : f = g \cdot q + r, \deg r < \deg g$ .

**Доказательство.** Существование докажем индукцией по  $n = \deg(f)$ .

База: все  $n < \deg(g)$ , для них мы можем положить  $q = 0, r = f$ .

Переход:  $n \rightarrow n + 1, n + 1 \geq \deg(g)$ . Пусть  $\deg(g) = k$ . Тогда  $g = ax^k + g_1$ , причём  $a \neq 0$  и  $\deg(g_1) < k$ . Аналогично  $f = bx^{n+1} + f_1, \deg(f_1) < n + 1$ . Понизим степень  $f$  за счёт  $g$ : пусть  $f_2 = f - \frac{b}{a}x^{n+1-k}g = bx^{n+1} + f_1 - bx^{n+1} - \frac{b}{a}x^{n+1-k}g_1 = f_1 - \frac{b}{a}x^{n+1-k}g_1$ . Проверим понижение:  $\deg(f_2) \leq \max(\deg f_1 - \frac{b}{a}x^{n+1-k}g_1) \leq \max(n, n + 1 - k + k - 1) = n$ , что меньше  $\deg(f) = n + 1$ .

По индукционному предположению,  $f_2$  на  $g$  делить умеем: найдутся  $q_1, r$  такие, что  $f_2 = gq_1 + r, \deg(r) < \deg(g)$ . Тогда умеем делить и  $f$ :  $f = f_2 + \frac{b}{a}x^{n+1-k}g = g(q_1 + \frac{b}{a}x^{n+1-k} + r - \text{ровно то, что надо})$ . Существование доказали.

Докажем единственность (по сути, как в  $\mathbb{Z}$ ): пусть  $\exists f, g : f = gq + r$  и  $f = gq_1 + r_1, \deg(r), \deg(r_1) < \deg(g)$ . Приравняем правые части и перегруппируем:  $g(q - q_1) = r_1 - r$ . Если обе части равенства не равны 0 в  $K[x]$ , то  $\deg(g(q - q_1)) = \deg(g) + \deg(q - q_1) \geq \deg(g)$ , но  $\deg(r_1 - r) \leq \max(\deg(r), \deg(r_1)) < \deg(g)$ . Противоречие, поскольку  $g(q - q_1)$  и  $r_1 - r$  — один и тот же многочлен. Значит  $r_1 - r = 0$ , значит  $r = r_1, q = q_1$ , поскольку  $K[x]$  — область целостности.  $\square$

**Теорема 4.5.**  $R$  — коммутативное, ассоциативное кольцо  $a \in R$ . Тогда  $\exists$  гомоморфизм колец  $R[x] \rightarrow R : a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \mapsto a_0 + a_1 \cdot a + \dots + a_n a^n$  — гомоморфизм эвалюации.

С другой стороны  $f \in R[x]$  — полиномиальная функция.  $F_f : R \rightarrow R$   $a \mapsto \text{ev}_a(f)$ .

**Следствие.**  $f, g \xrightarrow[\text{Евклида}]{\text{Алгоритм}} h = (f, g)$   $h = u_1f + u_2g$ . А значит, у  $\gcd$  корнями будут общие корни  $f$  и  $g$ .

**Определение 4.4.**  $f \in R[x]$ .  $a \in R$  — корень  $f$ , если  $F_f(a) = 0$ .

**Теорема 4.6** (Безу).  $K$  — поле.  $f \in K[x]$ .  $a \in K$ .  $f = (x - a)g + r$  — деление с остатком.

1.  $r = f(a)$ .
2.  $r = 0 \iff f : (x - a)$  (тут  $r$  можно заменить на  $f(a)$ , сути не меняет)

**Доказательство.**  $f = (x - a) \cdot g + r, \deg r < \deg(x - a) = 1 \Rightarrow \deg r = 0 \vee \deg r = -\infty \iff r = c \in K$ .

$$F_f(a) = F_{x-a}(a)F_g(a) + F_r(a). f(a) = (a - a)g(a) + r \iff r = f(a). \quad \square$$

**Следствие.**  $\deg f = n, f \in K[x], f \neq 0 \Rightarrow$  существует не более  $n$  корней  $f$  в  $K$ .

**Доказательство.** По индукции по  $n$ .

- База  $n = 0$   $f = r \neq 0$  — 0 корней.

- Переход  $n \rightarrow n + 1$ :

$\deg f = n + 1$ . Нет корней  $\Rightarrow 0 \leq n + 1$ .

Существует  $a$  — корень.  $f = (x - a)\tilde{f}$ ,  $\deg \tilde{f} = n$ . У  $\tilde{f}$  не более  $n$  корней  $\Rightarrow$  у  $f$  не более  $n + 1$  корня.

С другой стороны  $b$  — корень  $f \Rightarrow f(b) = 0$ .  $(b - a)\tilde{f}(b) = 0 \xrightarrow{k-o.ц.} b - a = 0 \vee \tilde{f} = 0 \iff b = a \vee b$  — корень  $\tilde{f}$ . Таких не более  $n$ , а значит у  $f$  не более  $n + 1$  корня.

□

$f \in K[x]$ .  $f \rightsquigarrow F_f: K \rightarrow K$  — полиномиальная функция. Верно ли  $F_f = F_g \Rightarrow f = g$ ?

**Теорема 4.7** (Теорема о формальном и функциональном равенстве). Пусть  $K$  — поле,  $f, g \in K[x]$ ,  $|K| > \max(\deg f, \deg g)$ , например,  $K$  — бесконечно. Тогда  $F_f = F_g \Rightarrow f = g$ .

**Доказательство.**  $F_f = F_g \Rightarrow f(k) = g(k) \forall k \in K \Rightarrow (f - g)(k) = 0 \forall k \in K$ . По свойствам степени знаем, что  $\deg(f - g) \leq \max(\deg f, \deg g) < |K|$ , а значит  $(f - g)$ , многочлен степени меньше  $|K|$  имеет  $|K|$  корней, т.е. количество корней больше степени многочлена, а значит  $(f - g)$  — константный ноль, т.е.  $f = g$  □

**Замечание.** Для  $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$  из функционального равенства следует равенство формы ( $f = g$ )

**Замечание.**  $K = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ . Тогда у  $x^2 - 1 = 0$  есть 4 корня:  $\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}$ . И у  $x^2 - 2x = 0$  4 корня:  $\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}$ . Тогда, т.к. при всех  $x \in K$ , то  $(x^2 - 1)(x^2 - 2x) = 0$ ;  $x^4 + 2x = 2x^3 + x^2$  как функции. При этом  $\max(\deg) = 4 < 8$ , и как многочлены они не равны!

**Замечание.**  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ :  $x^p = x$ , т.е.  $x^{p-1} = 1$ . Всё нормально, т.к. у нас многочлен степени не меньше, чем мощность множества:  $p - 1 \not\leq |(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*| = p - 1$ . (На самом деле написанное — один из вариантов интерпретации исходного текста, который не сохранился. Если у вас есть какая-либо другая информация по данному пункту — сообщите кому-нибудь из нас)

**Замечание.** Рассмотрим  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x]$  — бесконечное кольцо.  $f \rightsquigarrow F_f: \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  — не более  $p^p$  отображений. Докажем:  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x]_{p-1} := \{f \mid \deg f \leq p - 1\}$ , а таких —  $p^p$

$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x]_{p-1} \Leftrightarrow \{\text{отображения } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}$ , а значит и таких отображений тоже не более чем  $p^p$ .

## 4.1. Интерполяция

**Определение 4.5.** Интерполяционная задача в поле  $K$  — набор данных  $x_1, x_2, \dots, x_n \in K$  ( $x_i \neq x_j$ ),  $y_1, y_2, \dots, y_n \in K$ .

Задача заключается в поиске  $f \in K[x]: f(x_i) = y_i \forall i \in 1..n$ .

$x_i$  — узлы интерполяции.

**Теорема 4.8.** В поле любая интерполяционная задача с  $n$  узлами имеет единственное решение  $f_0$  среди многочленов степени  $< n$ .

**Доказательство.**

- Единственность. Пусть  $f_0, f_1$  — два решения.  $\deg(f_i) < n$ .

$f_0(x_c) = y_c = f_1(x_c)$ . Тогда возьмем  $g := f_0 - f_1$ . Заметим, что у него  $n$  корней, но  $\deg g < n$ . Значит  $f_0 = f_1$

- **Существование:** рассмотрим задачу  $\chi_i : \chi_i(x_i) = 1, \chi_i(x_j) = 0$ , если  $i \neq j$ . Её решение:  $L_i = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$  — в числителе условие на 0, в знаменателе на 1. Тогда  $f_0 := y_1 L_1 + y_2 L_2 + \dots + y_n L_n$ . Тогда для  $\forall i: f_0(x_i) = y_1 L_1(x_i) + \dots$  во всех слагаемых, кроме  $y_i \cdot L_i(x_i)$  равно 0, а данное слагаемое равно  $y_i$ .  $\deg f_0 \leq \max(\deg(L_i)) = n - 1 < n$

□

**Определение 4.6.** Интерполяционный полином Лагранжа:

$$f_0 = \sum_i \frac{y_i \prod_{j \neq i} (x - x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}, \quad \deg f_0 < \max(\deg L_i) = n - 1$$

## 4.2. Закрываем долг

**Теорема 4.9.**  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$  — циклическая группа, то есть  $\exists a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}: \{a, a^2, \dots, a^{p-1}\} = \{\overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{p-1}\}$ , то есть  $\text{ord } a = p - 1$ ,  $a$  — первообразный корень.

**Лемма.** Пусть  $a \in G$  — группа,  $\text{ord } a = d$ . Тогда  $\text{ord}(a^k) = \frac{d}{(d,k)}$

**Доказательство.** Пусть  $l = \text{ord } a^k$ .

$$(a^k)^l = e \iff a^{kl} = e \iff kl : \text{ord}(a) = d. \text{ Тогда, если } k = (d, k) \cdot k' \text{ и } d = (d, k)d', \text{ то } (d, k) \cdot k' \cdot l : (d, k) \cdot d' \iff k' \cdot l : d' \xrightarrow{(k', d')=1} l : d' = \frac{d}{(d, k)}, \min l = \frac{d}{(d, k)}$$

□

**Лемма.**  $\forall n \in \mathbb{N} \sum_{d|n} \varphi(d) = n$

**Доказательство.** Пусть  $d_1, d_2, \dots, d_k$  — все натуральные делители  $n$ .  $n = |\{1, 2, \dots, n\}| =: |A|$ .

Хотим разбить множество  $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$ , причем  $A_i \cap A_j = \emptyset$  и  $|A_i| = \varphi(d_i)$ , этим мы докажем лемму.

$A_i = \{a \in A \mid (a, n) = \frac{n}{d_i}\}$ . Заметим,  $d_1, \dots, d_k$  — все делители  $n \Rightarrow \frac{n}{d_1}, \dots, \frac{n}{d_k}$  — все делители  $n$ . И понятно, что  $\forall a (a, n)$  — какой-то делитель  $n$ .

Поэтому  $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$   $A_i \cap A_j = \emptyset$ .

$$a \in A_i \iff (a, n) = \frac{n}{d_i}. \text{ Значит } a = \frac{n}{d_i} k, (\frac{n}{d_i} k, n) = \frac{n}{d_i} \iff (\frac{n}{d_i} k, \frac{n}{d_i} d_i) = \frac{n}{d_i} \iff (k, d_i) = 1.$$

$$\text{Тогда } |A_i| = |\{k \mid k \leq d_i \wedge (k, d_i) = 1\}| = \varphi(d_i).$$

□

**Лемма.** Количество элементов порядка  $d$  в  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$  равно либо 0, либо  $\varphi(d)$ .

**Доказательство.** Например,  $p - 1 \not\equiv d \Rightarrow$  кол-во равно 0.

Пусть  $\exists a : \text{ord } a = d$   $a^d = 1$ ,  $a, a^2, \dots, a^d = 1$  — различные элементы. Тогда  $\forall k = 1..d$   $(a^k)^d = (a^d)^k = 1$ , то есть это  $d$  решений  $x^d = 1$ . Других решений нет, так как  $x^d - 1$  имеет  $\leq d$  корней.

Пусть  $\text{ord } b = d \Rightarrow b^d = 1 \Rightarrow b = a^k$ ,  $k = 1..d$ . Тогда по предыдущей лемме  $\text{ord } a^k = \frac{d}{(d,k)} \Rightarrow (d, k) = 1$ .

Тогда  $(k, d) = 1 \Rightarrow \text{ord}(a^k) = d$ . То есть все элементы порядка  $d$  это  $\{a^k \mid 1 \leq k \leq d \wedge (k, d) = 1\}$ .

□

**Доказательство теоремы.**  $B_d \subset (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ , такие что  $B_d = \{x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \mid \text{ord } x = d\}$ .

Тогда получится, что  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* = B_{d_1} \cup \dots \cup B_{d_k}$ ,  $d_i$  — делители  $p - 1$ .

$p - 1 = |(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*| = \sum |B_{d_i}|$  по лемме 3 каждое слагаемое 0 или  $\varphi(d_i)$ , а по лемме 2  $p - 1 = \sum_{i=1}^k \varphi(d_i)$ . А значит в первой сумме каждое слагаемое  $\varphi(d_i)$ .



В том числе  $|B_{p-1}| = \varphi(p-1) \neq 0$ , то есть  $\exists$  элементы порядка  $p-1$ . □

**Замечание.**  $K$  — не область целостности  $\Rightarrow$  не выполняется ОТА для многочленов.

$$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}: x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = (x-3)(x+3)$$

## 5. Евклидовы кольца

**Определение 5.1.**  $A$  — область целостности, тогда  $A$  называется евклидовым, если  $\exists \varphi : A \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , такой что  $\forall a, b \in A, b \neq 0 \exists q, r : a = bq + r$ , причем  $\varphi(r) < \varphi(b) \vee r = 0$

**Пример.**  $\mathbb{Z}$  — евклидово.  $\varphi(x) = |x|$ .

**Пример.**  $K$  — поле.  $K[x] - \varphi(f) = \deg f$

**Пример.**  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$  — евклидово.  $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$  — неевклидово.

**Определение 5.2.**  $A$  — область главных идеалов, если  $A$  — кольцо без делителей нуля, в котором все идеалы главные.

**Теорема 5.1.** Любое евклидово кольцо — область главных идеалов.

**Доказательство.** Пусть  $I$  — идеал в  $A$ ,  $A$  — евклидово. Рассмотрим  $\varphi(I) = \{\varphi(x) \mid x \in I\} \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Значит в  $\varphi(I)$   $\exists$  минимальный элемент  $m$  в  $\varphi(I)$ .

Найдем  $a \in I$ , такое, что  $\varphi(a) = m$ .

Заметим, что  $\langle a \rangle \subset I$  — очевидно (любой идеал порожденный элементов идеала в нем лежит).

$I \subset \langle a \rangle$ : пусть  $b \in I, b = a \cdot q + r, \varphi(r) < \varphi(a)$ . При этом  $\varphi(a)$  — минимальный, значит  $r = 0$ , значит  $r = b - a \cdot q \iff a \cdot q = b \Rightarrow b \in I$ .  $\square$

Евклидово  $\Rightarrow$  ОГИ  $\Rightarrow$  ОТА.

**Замечание.** Пример не кольца главных идеалов.  $\mathbb{Z}[x] = A$  — не область главных идеалов. Рассмотрим  $I = \{f \mid f(0) : 2\}$  — не главный.  $I = \langle 2, x \rangle$ .

**Определение 5.3.**  $R$  — кольцо,  $a, b \in R$ ,  $a$  — ассоциирован с  $b$  ( $a \sim b$ ), если  $a : b \wedge b : a$ .

**Замечание.** Ассоциированность — отношение эквивалентности.

**Пример.**  $R = \mathbb{Z}$ , тогда  $a \sim b \iff a = \pm b$ .

**Лемма.**  $a \sim b \iff a = b \cdot \varepsilon$ , где  $\varepsilon \in A^*$ .

**Доказательство.**

- $\Rightarrow$ .  $a \sim b \Rightarrow a : b \wedge b : a \Rightarrow a = b\varepsilon \wedge b : b\varepsilon$ . Тогда  $b = (b\varepsilon) \cdot \varepsilon_1 = b(\varepsilon \cdot \varepsilon_1)$
- $\Leftarrow$ .  $a = b\varepsilon$ . То есть  $\exists \varepsilon_1 : \varepsilon\varepsilon_1 = 1 \Rightarrow a\varepsilon_1 = b\varepsilon\varepsilon_1 = b$ . А значит следует делимость.

$\square$

**Определение 5.4.**  $A$  — область.  $p \in A$ ,  $p$  — неприводимый, если

1.  $p \notin A^*$ .
2.  $p = p_1 \cdot p_2 \Rightarrow p_i \in A^* \wedge p_{3-i} \sim p$

**Теорема 5.2** (О. Т. А для произв. областей целостности).  $A$  — область целостности. Любой  $a \in A, a \neq 0$  раскладывается в произведение неприводимых множителей единственным образом, с точностью до перестановки множителей и ассоциативности:

$$p_1 p_2 \dots p_n = q_1 \dots q_m, \quad p_i, q_i \text{ — неприводимые.}$$

Следует, что  $n = m \exists$  перестановка  $i_1, i_2, \dots, i_n : p_k \sim q_{i_k}$ .

**Определение 5.5.** Кольца, для которых выполнена О.Т.А называется факториальными.

**Теорема 5.3.** Любая область главных идеалов — факториальна, в том числе любое евклидово кольцо факториально. А вот в обратную сторону не всегда верно.

**Доказательство.** Антипов так сказал! □

$K$  — поле.  $K[x]$  — евклидово (знаем)  $\Rightarrow$  ОГИ  $\Rightarrow$  факториально. Что значит  $f \sim g$  в  $K[x]$ ?

$$f \sim g \Rightarrow f = g\varepsilon \quad \varepsilon \in (K[x])^*$$

**Лемма.**  $(K[x])^* = K^* = K \setminus \{0\}$

**Доказательство.**  $a \in K^* \exists a^{-1} \in K^*. aa^{-1} = 1$  в  $K[x]$ .  $a \in K[x]^* f \in K[x]^* \Rightarrow f\tilde{f} = 1$ .  $\deg(f\tilde{f}) = \deg(f) + \deg(\tilde{f}) = 0$ . При этом  $\deg(f\tilde{f}) = \deg(f) + \deg(\tilde{f}) \Rightarrow \deg(f) = 0, f \in K^*$ .

$$\text{Значит } f \sim g \iff f = kg, k \in K^*. \quad \square$$

Итого: любой  $f \in K[x]$  раскладывается на неприводимые множители однозначно с точностью до перестановки множителей и вынесения констант.

**Следствие.**  $f, g \in K[x]$   $f$  и  $g$  имеют общие корни  $\Rightarrow (f, g) \neq 1$ . Все общие корни  $f$  и  $g$  делители  $(f, g)$

**Определение 5.6.**  $a, b \in A$  — область целостности.  $d$  — НОД  $(a, b)$  если

1.  $a : d$
2.  $b : d$
3.  $a : d_1, b : d_1 \Rightarrow d : d_1$ .

**Утверждение 5.4.** Если НОД существует, то он единственный с точностью до ассоциированности.

**Доказательство.**  $d \sim d_1, d$  — НОД  $(a, b)$ .  $a : d, b : d \Rightarrow a : d_1, b : d_1, d : d_1$ .  $a : d_2, b : d_2 \Rightarrow d : d_2, d_1 : d \Rightarrow d_1 : d_2$ .

А значит  $d_1$  — НОД  $(a, b)$ .

Обратно:  $d$  и  $d_1$  НОДЫ  $\Rightarrow a : d, b : d \Rightarrow d_1 : d$ , так как  $d_1$  — НОД. Тоже самое для  $d$ , получаем, что  $d \sim d_1$ . □

А сейчас начинается кусок с лекции 29 ноября.

**Утверждение 5.5.**  $R$  — ОГИ.  $\forall a, b \in R \exists d = (a, b)$  и  $\exists x, y \in R : d = ax + by$ .

**Доказательство.** Доказывается по аналогии с доказательством для целых чисел с самой первой лекции. □

**Утверждение 5.6.**  $ab : c \ (a, c) = 1 \Rightarrow b : c$ .

**Доказательство.** Смотри первую лекцию. □

**Определение 5.7.**  $p \in R$  — простой элемент ( $R$  — область целостности), если  $\forall a, b \in R ab : p \Rightarrow a : p \vee b : p$ .

**Определение 5.8.**  $p \in R$  неприводимый, если  $p = p_1 p_2 \Rightarrow p \sim p_1 \vee p \sim p_2$ .

**Утверждение 5.7.**  $R$  — Область целостности,  $a$  — простой  $\Rightarrow a$  — неприводимый.

**Доказательство.** Пусть  $a$  — простой.  $a = p_1 p_2$ . Тогда  $p_1 p_2 : a \Rightarrow p_1 : a \vee p_2 : a$ . Не умаляя общности  $p_1 : a \wedge a : p_1 \Rightarrow a \sim p_1$ .  $\square$

**Утверждение 5.8.**  $R$  — Область Главных Идеалов  $a$  — неприводим  $\Rightarrow a$  — простое.

**Доказательство.** Пусть  $R$  — ОГИ,  $a$  — неприводим. Пусть  $b \cdot c : a$ , рассмотрим  $d = (a, b)$ .  $a$  — неприводим,  $a : d \Rightarrow d \sim a \vee d \sim 1 (d \in R^*)$ . Если  $d \sim 1$ , то  $(a, b) = 1 \wedge bc : a \Rightarrow c : a$ . А если  $d \sim a$ , то  $b : d \Rightarrow b : a$   $\square$

**Доказательство. Основной Теоремы Арифметики для Областей Главных Идеалов**  
Единственность: пусть  $p_1 p_2 \dots p_k = q_1 \dots q_l$ , где  $p_i$  — неприводимое,  $q_i$  — неприводимое.

Будем доказывать как в целых числах:  $p_1(p_2 \dots p_k) : q_1 \Rightarrow p_1 : q_1 \vee p_2 \dots p_k : q_1 \Rightarrow p_1 : q_1 \vee p_2 : q_2 \dots$

$\exists i : p_i : q_1$ .  $p_i$  — неприводимое  $\Rightarrow q_1 \sim 1 \vee q_1 \sim p_i$ .  $q_1$  — необратимое, а значит первый вариант невозможен.

$q_1 = p_i \varepsilon, \varepsilon \in R^*$ .  $p_1 p_2 \dots p_i \dots p_k = p_i \varepsilon q_2 \dots q_l$ ,  $R$  — область целостности.

$p_1 p_2 \dots p_{i-1} p_{i+1} \dots = (\varepsilon q_2) \dots q_l$ . Аналогично  $\exists j \neq i : p_j \sim \varepsilon q_2 \sim q_2$

$p_j \varepsilon_2 q_2$  сократим. Получили однозначное соответствие.

Существование!

**Лемма.**  $R$  — ОГИ,  $x_1, x_2, \dots x_i \in R$ .  $\forall i x_i : x_{i+1}$ . Тогда существует  $N : \forall i > n x_i \sim x_{i+1}$ , то есть  $x_{i+1} = x_i \varepsilon_i, \varepsilon_i \in R^*$ .

**Доказательство.**  $a : b \iff \langle a \rangle \subset \langle b \rangle$ . Тогда  $\langle x_1 \rangle \subseteq \langle x_2 \rangle \subseteq \dots$

Рассмотрим  $I = \bigcup \langle x_i \rangle$ .

$I$  — идеал. Проверим сумму (домножение аналогично),  $a, b \in I \Rightarrow \exists m : a \in \langle x_m \rangle, n : b \in \langle x_n \rangle \Rightarrow a, b \in \langle x_{\max(n,m)} \rangle \Rightarrow a + b \in \langle x_{\max(n,m)} \rangle \Rightarrow a + b \in I$ .

$I$  — идеал  $R$  — ОГИ.  $\exists x : I = \langle x \rangle$ . При этом  $x \in \langle x_m \rangle$  для  $m > m_0$ .

$\forall m > m_0 : x : x_m \wedge x_m : x$ , так как  $x_m \in I$ , а  $\langle x \rangle = I$ . Тогда  $x_m \sim x \sim x_n \forall m, n > m_0 : x_m \sim x_n$   $\square$

**Следствие.**  $\forall x \in R, x \notin R^*, \exists p$  — неприводимый:  $x : p$ .

**Доказательство.** Пусть не так:

1.  $x$  — не неприводимый  $\Rightarrow x = x_1 x_2, x_i \notin R^*, x_1$  — приводимый.
2.  $x_2 = x_3 \cdot x_4, x_3, x_4 \notin R^*$ . Тогда получается  $x : x_2 : x_3 : \dots$  никакие два элемента не ассоциированы. Этого не может быть по лемме.

Окончание доказательства:  $x \in R, x \neq 0$ .  $x = p_1 x_1, p_1$  неприводимо,  $x_1 = p_2 x_2 \dots x : x_1 : x_2 : \dots$  — получили цепочку. По доказанной лемме данная цепочка бесконечной быть не может, а значит  $\exists i : x_i \in R^* \Rightarrow x = p_1 p_2 \dots p_k \cdot \varepsilon$ , ура, разложили.  $\square$

$\square$

## 6. Производная

**Определение 6.1.** Определение в кавычках.  $f \in K[x]$ ,  $K$  — кольцо.  $f'(x) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$  в точке  $y = x$ .

**Пример.**  $f = x^n$   $(x^n)' = \frac{x^n - y^n}{x - y} = \frac{(x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + y^{n-1})}{x-y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + y^{n-1} = x^{n-1} + x^{n-1} + \dots = nx^{n-1}$

**Определение 6.2.**  $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ .

**Доказательство.** По определению получаем  $f' = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1$ .  $\square$

**Свойства.** 1.  $(f+g)' = f' + g'$

2.  $(kf)' = kf'$ ,  $k \in K$

3.  $(fg)' = f'g + fg'$

**Замечание.**  $D: K[x] \rightarrow K[x]$ ,  $D(f) = f'$

Любой  $D: A \rightarrow A$  удовлетворяющий свойствам 1-3 называется оператором дифференцирования.

В случае  $K[x] = A$  "обычное" дифференцирование — единственное.

*Проверка свойств.*

1. по вычислительным определениям — упражнение.

2. по определению 1.

3. Как в матане  $(fg)'(x) = \frac{(fg)(x) - (fg)(y)}{x-y} = \frac{f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)}{x-y} = f(x)\frac{g(x)-g(y)}{x-y} + g(y)\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f(x)g'(x) + g(y)f'(x)$

$\square$

**Теорема 6.1.** Пусть  $f: (x-a)^k \wedge f \not\equiv (x-a)^{k+1}$  и  $k \neq 0$  в  $K$  ( $f \in K[x]$ ,  $K$  — поле).

Тогда  $f': (x-a)^{k-1}$ ,  $f' \not\equiv (x-a)^k$ .

**Определение 6.3.** Такое  $k$  называется кратностью корня  $a$  в  $f$ .

Тогда  $k \neq 0$ : кратность уменьшается на 1 при дифференцировании.  $k = 0$ , кратность уменьшается не более, чем на 1.

**Пример.**  $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ,  $f = x^p$ ,  $0$  — корень кратности  $p$ .  $f' = px^{p-1} = 0$ ,  $0$  — корень бесконечной кратности.

**Доказательство.**  $f = (x-a)^k \cdot g$   $g \not\equiv (x-a)$   $\Rightarrow f' = ((x-a)^k g)' = ((x-a)^k)' \cdot g + (x-a)^k g' = k(x-a)^{k-1} \cdot g + (x-a)^k \cdot g' = (x-a)^{k-1}(kg + (x-a)g') \div (x-a)^{k-1}$ .

Если  $k \neq 0 \Rightarrow (x-a)g' \div x-a$ .  $g \not\equiv x-a \Rightarrow k \cdot g \not\equiv x-a \Rightarrow kg + (x-a)g' \not\equiv x-a \Rightarrow f' \not\equiv (x-a)^k$ .  $\square$

**Лемма.**

$$\begin{aligned}
 ((x-a)^k)' &= k(x-a)^{k-1} \\
 (x-a)^k &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x^i (-a)^{k-i} \\
 k(x-a)^{k-1} &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} k x^i (-a)^{k-1-i} \\
 \left( \binom{k}{i} x^i (-a)^{k-i} \right)' &= i x^{i-1} \binom{k}{i} (-a)^{k-i} = \\
 &= i x^{i-1} \binom{k}{i} (-a)^{k-1-i+1} = \binom{k-1}{i-1} k x^{i-1} (-1)^{(k-1)-(i-1)}
 \end{aligned}$$

Получили, что  $i$ -ое слагаемое в первой сумме —  $i$ -ое слагаемое во 2-ой сумме.

**Утверждение 6.2.**  $f \in K[x]$ ,  $\deg f = n$ ,  $a \in K$ . Тогда  $\exists c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ , такой что  $f = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n$ .

**Доказательство.**  $x-a=t, x=t+a$ . Далее раскрыть скобки ...Хотя хуй знает я банан)  $\square$

## 6.1. Характеристика поля

$K$  — поле,  $1 \in K$

Рассмотрим последовательность  $1, 1+1, 1+1+1, \dots$

**Определение 6.4.** Есть два варианта: все элементы последовательности попарно различны или последовательность периодична с периодом  $C$ , где  $C = \text{ord}(1)$  относительно  $+$ . Тогда  $C$  — характеристика поля. ( $C = \text{char } K$ )

Если  $\text{ord } 1 = \infty$ ,  $\text{char } K = 0$ . Тогда  $\underbrace{1+1+\dots+1}_n = 0$  в  $K \iff n : \text{char } K$ .

**Лемма.**  $\text{char } K$  — ноль или простое число.

**Доказательство.** Пусть  $\text{char } K = m \cdot n$ ,  $m, n > 1$ .  $\underbrace{1+\dots+1}_{mn} = 0 = \underbrace{(1+\dots+1)}_m + \dots + \underbrace{(1+\dots+1)}_m$ .

Получили  $(1+1+1+\dots+1)(1+1+1+\dots+1) = 0$ , где в одной скобке  $m$  единиц, а в другой —  $n$ . Тогда, поскольку в поле нет делителей нуля,  $m = 0 \vee n = 0$ . Противоречие с минимальностью.  $\square$

**Следствие.**  $\text{char } K = 0 \Rightarrow K$  содержит копию  $\mathbb{Q}$ .

$\text{char } K = p \Rightarrow K$  содержит копию  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .

## 6.2. Формула Тейлора

$D((x-a)^k) = k(x-a)^{k-1}$ , тогда определим  $D^2(f) = D(D(f))$ ,  $D^{(l)}(f) = D(D^{(l-1)}(f))$

Известно, что  $D(kf) = kD(f)$ ,  $k \in K$ . Тогда  $D^{(2)}((x-a)^k) = D(k(x-a)^{k-1}) = k(k-1)(x-a)^{k-2}$ . Тогда в  $l$ -ой производной:  $k(k-1)(k-2)\dots(k-l+1)(x-a)^{k-l}$ , если  $l \leq k$ . При  $l > k$  получаем 0.

Вычислим значение  $l$ -ой производной в точке  $a$  —  $D^{(l)}f(a) = D^{(l)}\left(\sum a_k(x-a)^k\right)(a) = \sum a_k D^{(l)}((x-a)^k)(a) = a_l D^{(l)}((x-a)^l)(a) = a_l \cdot l!$  Объяснение последнего перехода: все члены  $a_i, i < l$  отпали,

поскольку для них  $l$ -ая производная есть константный ноль. Все члены  $a_i, i > l$  отпали, поскольку в них осталась скобка  $(x - a)$ , которая в точке  $x = a$  обращается в ноль. А значит осталось только слагаемое при  $a_i, i = l$ , для которого мы умеем считать  $l$ -ую производную.

Предполагая, что  $\text{char } K = 0 \vee \text{char } K > \deg f$ , знаем, что  $1!, 2!, 3!, \dots (\deg f)! \neq 0$  в  $K$ . Тогда имеем  $a_l = \frac{D^l(f)(a)}{l!}$ . А ещё есть следующее обозначение:  $D^{(l)}(f) = f^{(l)}$ .

**Теорема 6.3** (Формула Тейлора).

$$f = \sum_{l=0}^{\deg f} \frac{f^{(l)}(a)}{l!} (x - a)^l.$$

## 7. Комплексные числа

$K$  — поле,  $K[x]$  — евклидово кольцо. Тогда  $f, g \in K[x], h \in K[x]. f \equiv g \pmod{h}$ , если  $f - g : h$ .

**Утверждение 7.1.** Это отношение эквивалентности.  $f_1 \equiv g_1, f_2 \equiv g_2 \pmod{h}$ , тогда  $f_1 + f_2 \equiv g_1 + g_2, f_1 f_2 \equiv g_1 g_2 \pmod{h}$ .

**Доказательство.** Как в целых. □

Из этого следует, что  $\exists$  фактормножество  $K[x]/\equiv_h$  и на это множество переносятся  $+$  и  $\cdot$ : получаем ассоциативное коммутативное кольцо с 1.  $K[x]/(h)$  — кольцо вычетов по модулю  $h$ . Заметим, что  $\forall f \in K[x] \exists! r \in K[x] : f \equiv r \pmod{h}$  и  $\deg r < \deg h$  по теореме о делении с остатком. Причем  $\deg r < \deg h$ .

**Пример.**  $h = x - a. \forall f: \bar{f} = \bar{c}, c = \text{const}. K[x]/(x - a) \cong K$ .

**Пример.**  $h = x^2 - 1, \forall f: \bar{f} = \overline{ax + b}$

$$K[x]/(x^2 - 1) \cong K[x]/(x - 1) \times K[x]/(x + 1)$$

**Пример.**  $h = x^2 + 1, K = \mathbb{R}. K[x]/(x^2 + 1) = \mathbb{C}$  — поле комплексных чисел.  $\mathbb{C} = \{\overline{ax + b} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ .  
 $\overline{ax + b} = \bar{a} \cdot \bar{x} + \bar{b} \cdot \bar{x} := i. i^2 = \bar{x}^2 = x^2 + 1 + \overline{-1} = -1$

Итоги (на самом деле не итоги, т.к. мы это докажем шагом позже, но хз): 1:  $\mathbb{C}$  — поле, 2:  $\{\bar{a} \mid a \in \mathbb{R}\}$  — подполе, изоморфное  $\mathbb{R}$

$$\text{Кек: } \overline{a + bx} \cdot \overline{a - bx} = \overline{a^2 - b^2(-1)} = \overline{a^2 + b^2}$$

$$\text{Другой кек (пруф): } \overline{a + bx} \neq \bar{0} \rightarrow \overline{a + bx} \cdot \frac{1}{\overline{\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}x}} = 1, \text{ т.е. } \overline{a + bx} \text{ — обратим.}$$

**Определение 7.1.**  $z = a + bi \in \mathbb{C}$ . Число  $a - bi$  называется сопряженным к  $z$  и обозначается  $\bar{z}$ .

**Определение 7.2.**  $a = \text{Re}(z), b = \text{Im}(z)$ ,  $\text{Re}$  — вещественная часть,  $\text{Im}$  — мнимая.

Явные формулы для сложения:  $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$ , для умножения:  $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$ .

Модуль комплексного числа определим как  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Тогда

$$z + \bar{z} = 2 \text{Re}(z), z - \bar{z} = 2 \text{Im}(z) \cdot i. z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \text{ — формула для } z^{-1} (z \neq 0 \iff |z| \neq 0)$$

### 7.1. Геометрический смысл комплексных чисел

Есть биекция  $I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , то есть  $a + bi \rightsquigarrow (a, b)$ , то есть комплексному числу соответствует точка на плоскости (радиус-вектор). Причем это изоморфизм групп по сложению, что следует из правила сложения комплексных чисел.

С геометрической точки зрения сложение двух комплексных чисел означает сложение двух радиус-векторов.

Немного сократим область рассматриваемых чисел:  $T := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ . Тогда получаем, что  $\forall z \in T z = a + bi \Rightarrow a^2 + b^2 = 1$ .

Тогда воспользуемся медицинским фактом:  $\forall a, b: a^2 + b^2 = 1 \iff \exists! \alpha: a = \cos \alpha, b = \sin \alpha$ . Тогда будем такие  $z$  записывать как  $z_\alpha$ .



Тогда посмотрим на умножение двух таких чисел:

$$\begin{aligned} z_\alpha \cdot z_\beta &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) = \\ &= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + i(\cos \alpha \sin \beta + \cos \beta \sin \alpha) = \\ &= \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) = z_{\alpha+\beta} \end{aligned}$$

То есть  $z_\alpha \cdot z_\beta = z_{\alpha+\beta}$ ,  $\alpha$  — называется аргументом  $z_\alpha$ .

**Замечание.**  $T$  — группа по умножению:  $|1| = 1, |z_1| = |z_2| = 1 \Rightarrow |z_1 z_2| = 1, |z_1^{-1}| = 1$

Рассмотрим  $(\mathbb{R}, +)a \equiv (\bmod 2\pi)$ , если  $a - b = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ . Это отношение эквивалентности (упражнение). Тогда  $(\mathbb{R}/\equiv_\pi, +)$  — группа углов.

Тогда  $f: (\mathbb{R}/\equiv_\pi, +) \rightarrow (T, \cdot)$  (причем  $I \rightarrow \cos \alpha + i \sin \alpha$ ) — изоморфизм.

Вернемся теперь обратно к  $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$ .  $z = |z| \cdot \frac{z}{|z|}$ , причем заметим, что  $|\frac{z}{|z|}| = 1$ , а значит  $\frac{z}{|z|} = z_\alpha$ , откуда получаем:

**Определение 7.3.**  $z = |z| \cdot z_\alpha = r \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha), r = |z|$  — тригонометрическая форма  $z$ .

Причем заметим, что  $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}: z_1 \cdot z_2 = (r_1 z_{\alpha_1}) \cdot (r_2 \cdot z_{\alpha_2}) = r_1 r_2 \cdot z_{\alpha_1 + \alpha_2}$

Заметим, что тригонометрическая форма числа единственна, так как  $z = r z_\alpha, r \in \mathbb{R}_+$ . Тогда  $|z| = |r| \cdot |z_\alpha| = r$ , то есть  $r = |z|$ . Тогда из  $\alpha$  — аргумент  $\frac{z}{|z|}$  следует, что  $z = r \cdot z_\alpha$  единственна ( $r \in \mathbb{R}_+, \alpha \in \mathbb{R}/2\pi$ ).

Значит существует биекция между  $\mathbb{C}^*$  и  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}/2\pi$ :  $z \rightsquigarrow (r, \alpha)$   $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

**Замечание.** Формула умножения говорит, что такая биекция — изоморфизм групп  $(\mathbb{C}^*, \cdot)$  и  $(\mathbb{R}_+, \cdot) \times (\mathbb{R}/2\pi, +)$

## 7.2. О геометрических преобразований плоскости

**Определение 7.4.** Пусть  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  — биекция.

1.  $f$  называется движением, если  $\forall A, B \in \mathbb{R}^2: |f(A)f(B)| = |AB|$
2.  $f$  — преобразование подобия, если  $\forall A, B, C, D \in \mathbb{R}^2: A \neq B, C \neq D \Rightarrow \frac{|f(C)f(D)|}{|f(A)f(B)|} = \frac{|CD|}{|AB|}$
3.  $f$  называется аффинным преобразованием, если условие выше верно для случаев  $AB \parallel CD$ . (это  $\iff \forall$  прямая  $l$   $f(l)$  — прямая).

**Утверждение 7.2.** Любое преобразование подобия — композиция гомотетии и движения.

**Доказательство.** Возьмем  $A \neq B, f$  — преобразование подобия.  $|f(A) \cdot f(B)| = k|AB| \Rightarrow \forall C, D: C \neq D \Rightarrow |f(C)f(D)| = k|CD|$ .

Поэтому  $h \circ f$ , где  $h$  — гомотетия с коэффициентом  $\frac{1}{k}$  — движение ( $A, B \in \mathbb{R}^2$ ):

$$|h \circ f(A)h \circ f(B)| = \frac{1}{k}|f(A)f(B)| = \frac{1}{k} \cdot k|AB| = |AB|.$$

А значит,  $h \circ f = g, h^{-1}$  — гомотетия с коэффициентом  $k$ , а значит  $f = h^{-1} \circ g$ . □

**Теорема 7.3** (Теорема Шаля). Любое движение плоскости — параллельный перенос на вектор  $\vec{x}$ , поворот вокруг точки  $A$  на угол  $\alpha$  или скользящая симметрия относительно прямой на расстоянии  $l$ .

**Доказательство.** Довольно школьная теорема. □

**Теорема 7.4.** Любое преобразование подобия записывается в  $\mathbb{C}$  с помощью  $+$ ,  $\cdot$ ,  $\bar{\cdot}$ .

**Доказательство.**

1.  $f$  — преобразование подобия  $\Rightarrow f = h \circ g$ ,  $g$  — движение,  $h$  — гомотетия с фиксированным центром  $\Rightarrow$  достаточно проверить для  $h$  и  $g$ .
2.  $h$  — с центром в  $O$ .  $h(x) = k \cdot x, k \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{C}$ .
3.  $g$  — параллельный перенос на  $\vec{x} \iff z_x \in \mathbb{C}. g(z) = z + z_x$ .
4.  $g$  — поворот на  $\alpha$  вокруг  $O$ . Заметим, что  $\arg(z) = \beta \rightarrow \arg(g(z)) = \alpha + \beta$  и  $|g(z)| = |z|$ , то есть  $g(z) = z \cdot z_\alpha$ .

Для произвольной точки: надо сначала сдвинуть в начало координат, затем повернуть, а потом восстановить центр обратно.

5. Симметрия относительно  $y = 0$  —  $g(z) = \bar{z}$ .

Скольльзящая симметрия — повернуть параллельный сдвиг.

Симметрия относительно другой прямой — сдвиг + поворот.

□

**Следствие.** Композиция поворотных гомотетий — поворотная гомотетия или параллельный перенос.

*План доказательства.*

1. Любая поворотная гомотетия задается линейной функцией  $f(z) = az + b$  (смотри теорему).
2. любая  $f(z) = az + b$  — это либо параллельный перенос ( $a = 1$ , поворотная гомотетия  $a \neq 1$ ).

□

**Теорема 7.5** (Формула Муавра).  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \Rightarrow z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) \forall n \in \mathbb{Z}$ .

**Доказательство.**

1.  $n \in \mathbb{N}$  индукция по  $n$ ,
2.  $n = 0$  очевидно,
3.  $n < 0$  следует из случая  $n > 0$  и  $z^{-1} = \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi))$

□

**Применения:**

1.  $\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha) = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos^k \alpha \cdot (i \sin \alpha)^{n-k}$ . Далее следим за четностью  $n - k$ .

Далее приравниваем Re и Im у левой и правой части. Получаем

$$\cos(n\alpha) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} \cos^{n-2j}(\alpha) (-1)^j \sin^{2j}(\alpha)$$

,  $\sin(n\alpha)$  — аналогично.

**Определение 7.5.**  $\cos(n\alpha) = T_n(\cos \alpha)$ , где  $T_n$  называется многочленом Чебышева.

### 7.3. Извлечение корня

$z_0 \in \mathbb{C}, z_0 \neq 0$ . Решим уравнение  $z^n = z_0$ .  $z_0 = r_0(\cos \varphi_0 + i \sin(\varphi_0))$ ,  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ .

Тогда  $z^n = z_0 \iff r^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) = r_0(\cos \varphi_0 + i \sin \varphi_0)$ .

Откуда получаем, что  $r = \sqrt[n]{r_0}$ , а  $\varphi_k = \frac{\varphi_0}{n} + \frac{2\pi k}{n}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Теорема 7.6.** Любое  $z_0 \in \mathbb{C}^*$  имеет ровно  $n$  корней  $n$ -ой степени.

**Доказательство.**

$$z = \sqrt[n]{r_0}(\cos(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2\pi k}{n}) + i \sin(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2\pi k}{n})), k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

□

Заметим, что  $x_0 \in \sqrt[n]{z} \Rightarrow x \in \sqrt[n]{z} \iff x^n = x_0^n \iff \frac{x^n}{x_0^n} = 1 \iff \left(\frac{x}{x_0}\right)^n = 1 \iff \frac{x}{x_0} \in \sqrt[n]{1} \iff x = x_0 \varepsilon, \varepsilon \in \sqrt[n]{1}$ .

### 7.4. Корни из 1

. Заметим что формула для корней из 1:

$$\varepsilon_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right), k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Причем заметим, что корни из 1 образуют правильный  $n$ -угольник. Это легко заметить, если расположить на окружности.

Причем заметим, что если  $\varepsilon = \varepsilon_1$ , тогда  $\varepsilon_k = \varepsilon^k$  по формуле Муавра.

**Теорема 7.7.**

1.  $R$  — кольцо.  $M_1(R) = \{a \in R \mid a^n = 1\}$  — группа.
2.  $R = \mathbb{C} \Rightarrow M_1(\mathbb{C})$  — циклическая.
3.  $M_n(\mathbb{C}) = \langle \varepsilon^k \rangle \iff (k, n) = 1$ .

**Доказательство.**

1. Очевидно следует из определения. Упражнение: проверить замкнутость.
2. Очевидно из доказанного выше.
3. Заметим, что  $M_n(\mathbb{C}) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ , а  $\varepsilon^k \leftarrow \bar{k}$

Тогда  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \langle k \rangle \iff k$  — образующий  $(k, n) = 1$ .

□

**Определение 7.6.** Такие корни ( $z \in M_n(\mathbb{C})$ , такие что  $\langle z \rangle = M_n(\mathbb{C})$ ) называются первообразными корнями степени  $n$ .

То есть  $z$  — первообразный корень степени  $n \iff \text{ord } z = n$  (в группе  $(\mathbb{C}, \cdot)$ )

**Лемма.**

$$\sum_{a \in M_1} a^k = \begin{cases} 0, & \text{если } k \not\equiv 1 \pmod{n} \\ n, & \text{если } k \equiv 1 \pmod{n} \end{cases}.$$

**Доказательство.**

$$1. a^k = 1 \quad \forall a \rightsquigarrow 1 \underbrace{1 + \dots + 1}_n = n$$

$$2. k \not\equiv n \pmod{\varepsilon} \text{ — первообразный корень, } \varepsilon^k \neq 1. \sum a^k = a + \varepsilon^k + (\varepsilon^2)^k + \dots + (\varepsilon^{n-1})^k = \sum_{l=0}^{n-1} \varepsilon^{lk} = \frac{1-\varepsilon^{nk}}{1-\varepsilon^k} = \frac{0}{1-\varepsilon^k} = 0$$

□

## 7.5. Дискретное преобразование Фурье

$$f \in \mathbb{C}[x], \deg f < n, f = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k.$$

Тогда  $f \rightarrow (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ . А ДПФ делает  $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \mapsto (b_0, b_1, \dots, b_{n-1})$

$$b_i = f(\varepsilon_i) = f(\varepsilon^i).$$

**Теорема 7.8** (Обратное преобразование Фурье).

$$a_i = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} (\varepsilon^{-i})^j b_j}{n}.$$

**Доказательство.**  $\forall j = 0, 1, \dots, n-1 \quad f(\varepsilon^j) = b_j$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon^{-ij} b_j = a_i \cdot n.$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon^{-ij} f(\varepsilon^j) = \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon^{-ij} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \varepsilon^{jk}.$$

$$\sum_{j=0, k=0}^{n-1} a_k \varepsilon^{jk} \varepsilon^{-ij} = \sum_{j=0, k=0}^{n-1} a_k \varepsilon^{j(k-i)}.$$

Зафиксируем  $k$ :

$$\sum_{j=0, k \text{ — fixed}}^{n-1} a_k (\varepsilon^j)^{k-i} \stackrel{\text{Лемма}}{=} a_k \cdot n.$$

□

## 7.6. Быстрое умножение многочленов

$f, g \in \mathbb{C}[x]$  хотим  $f \cdot g$ . По правилу свертки -  $\mathcal{O}(n^2)$  умножений.

Можно так  $\deg f, \deg g < n$ . Тогда применяем ДПФ к  $f, g$ . Получили точки. В них значения перемножили, вернули обратно после этого при помощи обратного преобразования Фурье.

## 7.7. TODO: название

**Определение 7.7.**  $K$  — поле.  $K$  называется алгебраически замкнутым, если  $\forall f \in K[x] \deg f > 0 \Rightarrow f$  имеет корень в  $K$ .

**Упражнение.**  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  — не алгебраически замкнутые.

**Теорема 7.9.** Для любого поля  $K \exists \bar{K} : K \subset \bar{K}$  и  $\bar{K}$  — алгебраически замкнуто.

*Набросок доказательства.* Пусть  $K$  не алгебраически замкнуто.  $f \in K[x]$  не имеет корней. Не умаляя общности  $f$  — неразложимый. Рассмотрим  $K[x]/(f)$  — поле, если  $f$  неразличимый.

Тогда  $f_1 \equiv f_2 \pmod{f}$ , если  $f_1 - f_2 \div f$ . Тогда получаем  $K \rightarrow K[x]/f$  — инъективный гомоморфизм ( $a \rightsquigarrow \bar{a}$ ).

Тогда  $f(\bar{x}) = \overline{f(x)} = 0$ .  $\bar{x}$  — корень  $f$  в  $K[x]/f$

То есть в  $K[x]/f$   $f$  — имеет корень. И так далее (трансфинитная индукция) ...  $\square$

**Теорема 7.10** (Основная теорема алгебры).  $\mathbb{C}$  — алгебраически замкнуто.

**Доказательство.** Доказательства не будет:) Будут на-/вбросы.  $\square$

*Наброс 1 (Топология).* Рассмотрим движение произвольной точки по окружности. Кукареку, никому не интересно. Либо сделайте PR)))  $\square$

**Следствие.**  $K$  — алгебраически замкнуто  $\Rightarrow \forall f \in K[x] f = a_0(x-1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$

**Доказательство.** Индукция по  $\deg f$

$n \rightarrow n+1$ .  $\deg f = n+1$ ,  $K$  — алгебраически замкнуто  $\Rightarrow f$  — имеет корень  $\Rightarrow f = (x-z_0)\tilde{f}$ , причем  $\deg \tilde{f} = n$ . Переход индукции. Получаем  $f = a_0(x-x_1)\dots(x-x_n)$   $\square$

**Лемма.**  $f \in \mathbb{R}[x], z \in \mathbb{C} f(z) = 0 \Rightarrow f(\bar{z}) = a$ .

**Доказательство.**  $f(x) = \sum a_k x^k$ .  $f(\bar{z}) = \sum a_k (\bar{z})^k = \sum a_k \overline{z^k} = \overline{\sum a_k z^k} = \overline{0} = 0$ .  $\square$

**Теорема 7.11.**  $f \in \mathbb{R}[x], \exists a \in \mathbb{R}, x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{R}$ .

$p_1, \dots, p_l, q_1, q_2, \dots, q_l \in \mathbb{R}$ , такие что  $f = a(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_k) \cdot (x^2+p_1x+q_1)\dots(x^2+p_lx+q_l)$ . Причем дискриминант у скобочек меньше нуля, а  $k+2l = \deg f$ .

**Доказательство.** Индукция по  $\deg f$ .  $n \rightarrow n+1$ :  $\deg f = n+1 f \in \mathbb{R}[x] \subset \mathbb{C}[x] \xrightarrow[\text{ОТА}]{\implies} \exists z \in \mathbb{C} : f(z) = 0$ .

Пусть  $z \in \mathbb{R}$ . Тогда просто по Безу получаем  $f = (x-z)\tilde{f}$ .

$z \notin \mathbb{R}$ . По лемме  $f(\bar{z}) = 0$ . Тогда раз  $(x-z, x-\bar{z}) = 1$  и  $f \div x-z, x-\bar{z}$ , то  $f \div (x-z)(x-\bar{z}) = x^2 - (z+\bar{z})x + z\bar{z}$ . Тогда  $f = (x^2 + px + q)\tilde{f}$ , где  $\deg f = n-1$ . По индукции все ок  $\square$

**Пример.** Над  $\mathbb{C}$ :  $f = \prod (x - \varepsilon_k)$ .

Над  $\mathbb{R}$ :  $n$  — нечетно:  $x^n - 1 = (x-1) \prod_{k=1}^{n-1} (x - \varepsilon_k) = (x-1) \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} (x - \varepsilon_k)(x - \varepsilon_{n-k}) = (x-1)(x^2 - \cos \frac{2\pi i}{n})$

Над  $\mathbb{Q}$ :  $x^n - 1 = \prod_{\substack{d|n \\ \text{ord}(\varepsilon)=d}} \left( \prod_{\varepsilon \in M_n, \Phi_d} (x - \varepsilon) \right)$ . Под первым сумматором:  $\Phi_d(x)$

**Утверждение 7.12.** 1.  $\Phi_d \in \mathbb{Q}[x]$

2.  $\Phi_d$  — неразложимы в  $\mathbb{Q}[x]$ .

**Доказательство.** 1. Индукция по  $n$ .  $\Phi_n(x) = \frac{x^n - 1}{\prod_{d|n, d < n} \Phi_d(x)} \in \mathbb{Q}[x]$

2. очень сложна и непонятно. Если бы мы знали, что это такое!

□

## 7.8. Гауссовы числа

**Определение 7.8.**  $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ .

**Утверждение 7.13.**  $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$  — кольцо.

**Теорема 7.14.**  $\mathbb{Z}[i]$  — евклидово

**Доказательство.**  $\varphi(z) = |z|^2$  — евклидова норма.

$$a + bi, c + di \in \mathbb{Z}[i], c^2 + d^2 \neq 0.$$

Хотим  $a + bi = (c + di) \cdot z + r$ ,  $z, r \in \mathbb{Z}[i]$ . Причем  $|r| < |c + di|$ . Возьмем  $z_0 = \frac{a + bi}{c + di}$ .  $a + bi = (c + di)z_0$ . Тогда  $a + bi = (c + di)z + \underbrace{(c + di)(z_0 - z)}_{=r}$ .

Теперь хочется  $|(c + di)(z_0 - z)| < |c + di| \iff |z_0 - z| < 1$ . Заметим, что достаточно посмотреть на ближайшие 4 числа. □

**Теорема 7.15** (Рождественская теорема Ферма).  $p = 4k + 1$  — простое  $\Rightarrow x, y \in \mathbb{Z}$ :  $p = x^2 + y^2$

**Доказательство.** Рассмотрим  $p$  как элемент  $\mathbb{Z}[i]$ .  $p = p + 0 \cdot i$ .  $\exists x \in \mathbb{Z}$ :  $x^2 + 1 \vdots p$ . Так как  $a^{p-1} = 1$ ,  $a^{\frac{p-1}{2}} = -1$ ,  $(a^{\frac{p-1}{4}})^2 = -1$ .  $a^{\frac{p-1}{4}} = ix$ .

Тогда  $x^2 + 1 = (x - i)(x + i) \vdots p$  в  $\mathbb{Z}[i]$ . Тогда  $p$  — составное в  $\mathbb{Z}[i]$ . Тогда  $p = (a + bi)(c + di)$ ,  $bc + ad = 0$ , откуда получаем  $c = a, d = -b$ , тогда  $p = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$ . □