Экзамен по математическому анализу. Часть 3

Харитонцев-Беглов Сергей, Ипатов Марк, Ерёмина Елизавета, Родионычев Михаил

28 марта 2022 г.

Содержание

Билет 01

Пусть $\mathcal{F}$ — совокупность (множество) ограниченных плоских фигур.

***Определение* 1.1.** Площадь: $\sigma\colon \mathcal{F} \to [0; +\infty)$, причём

1. $\sigma([a; b] \times [c, d]) = (b - a)(d - c)$
2. (Аддитивность). $\forall E_1, E_2 \in \mathcal{F}\colon E_1 \cap E_2 = \varnothing \Rightarrow \sigma(E_1 \cup E_2) = \sigma(E_1) + \sigma(E_2)$

Свойство Монотонность площади. $\forall E, \widetilde{E}\colon E \subset \widetilde{E} \Rightarrow \sigma(E) \leqslant \sigma(\widetilde{E})$.

Доказательство. $\widetilde{E} = E \cup (\widetilde{E} \setminus E) \Rightarrow \sigma(\widetilde{E}) = \sigma(E) + \sigma(\widetilde{E} \setminus E)$. □

***Определение* 1.2.** Псевдоплощадь: $\sigma\colon \mathcal{F} \to [0; +\infty)$, причём

1. $\sigma([a; b] \times [c, d]) = (b - a)(d - c)$,
2. $\forall E, \widetilde{E} \in \mathcal{F}\colon E \subset \widetilde{E} \Rightarrow \sigma(E) \leqslant \sigma(\widetilde{E})$,
3. Разобьем E вертикальной или горизонтальной прямой, в том числе теми прямыми, которые правее или левее E. Тогда $E = E_- \cup E_+, E_- \cap E_+ = \varnothing$ и $\sigma(E) = \sigma(E_-) + \sigma(E_+)$.

Свойства. 1. Подмножество вертикального или горизонтального отрезка имеет нулевую площадь.

2. В определении E_- и E_+ неважно куда относить точки из l.

   Доказательство. Пусть $\widetilde{E} = E_- \cup (E \cap l) = (E_- \setminus l) \cup (E \cap l)$.

   Тогда $\sigma(\widetilde{E}) = \sigma(E_- \cup (E \cap l)) = \sigma(E_- \setminus l) + \underbrace{\sigma(E \cap l)}_{=0} \Rightarrow$ вообще не имеет разницы куда относить точки из l. □

Билет 02

Пример.

1. $\sigma_1(E) = \inf\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} |P_k|\colon P_k \text{ — прямоугольник}, \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k \supset E\right\}$.
2. $\sigma_2(E) = \inf\left\{\sum\limits_{k=1}^{\infty} |P_k|\colon P_k \text{ — прямоугольник}, \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k \supset E\right\}$.

Упражнение.

1. Доказать, что $\forall E \quad \sigma_1(E) \geqslant \sigma_2(E)$.
2. $E = ([0, 1] \cap \mathbb{Q}) \times ([0, 1] \cap \mathbb{Q})$. Доказать, что $\sigma_1(E) = 1, \sigma_2(E) = 0$.

Теорема 2.1.

1. σ_1 — квазиплощадь.

2. Если E' — сдвиг E, то $\sigma_1(E) = \sigma_1(E')$.

Доказательство.

2. E' — сдвиг E на вектор v. Пусть P_k — покрытие $E \iff P'_k$ — покрытие E'. Знаем, что площади прямоугольников не меняются при сдвиге, а значит:

   $\sigma_1(E) = \inf\{\sum\limits_{k=1}^{n} |P_k|\} = \inf\{\sum |P'_k|\} = \sigma_1(E')$.

1. $\Rightarrow$ монотонность. Пусть есть $E \subset \widetilde{E}$. Тогда возьмем покрытие P_k для $\widetilde{E}$. $E \subset \widetilde{E} \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k$.

   А теперь заметим, что σ_1 — inf, и любое покрытие для $\widetilde{E}$ является покрытием и для E, т.е. все суммы из $\sigma_1(\widetilde{E})$ есть в $\sigma_1(E)$, а значит $\sigma_1(E) \leqslant \sigma_1(\widetilde{E})$ как инфинум по более широкому множеству.

1'. Докажем теперь аддитивность.

«$\leqslant$»: $\sigma_1(E) = \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+)$. Пусть P_k — покрытие E_-, Q_j — покрытие E_+.

Тогда $\bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k \cup \bigcup\limits_{j=1}^{n} Q_j \supset E_- \cup E_+ = E$.

А значит $\sigma_1(E) \leqslant \inf\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} |P_k| + \sum\limits_{j=1}^{n} |Q_j|\right\} = \inf\{\sum |P_k|\} + \inf\{\sum |Q_j|\} = \sigma_1(E_-) + \sigma(E_+)$.
Заметим, Что переход с разделением инфинумов возможен, так как P и Q выбираются независимо.

«$\geqslant$»: Пусть P_k — покрытие E. Тогда можно пересечь прямой (покрытие и само E) и разбить P_k на P_k^- и P_k^+, а тогда: $|P_k| = |P_k^-| + |P_k^+|$, $\sum |P_k| = \sum |P_k^-| + \sum |P_k^+|$.

$\sum |P_k^-| \geqslant \sigma_1(E_-), \sum |P_k^+| \geqslant \sigma_1(E^+) \Rightarrow \sum |P_k| \geqslant \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+)$ для любого покрытия P_k, а значит и $\sigma_1(E) \geqslant \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+)$

Таким образом $\sigma_1(E) = \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+)$

1". Проверим, что сама площадь прямоугольника не сломалась: $\sigma_1([a,b] \times [c,d]) = (b-a)(d-c)$. Заметим, что $\sigma_1(P) \leqslant |P|$, т.к. прямоугольник можно покрыть им самим.

Чтобы доказать $\sigma_1(P) \geqslant |P|$, посмотрим на P_k. Проведем прямые содержащие все стороны прямоугольников из покрытия (и P). Заметим, что такими прямыми каждый прямоугольник разбивается на подпрямоугольники, сумма площадей которых равна площади исходного прямоугольника. Тогда заметим, что и площадь P это сумма «кусочков из нарезки» P, и некоторые части разбиения встречаются в P_k несколько раз. А значит выкинув все лишнее мы как раз получим $|P|$, а значит $\sigma_1(P) \geqslant |P|$.

Формально: Если $\bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k \supset P$, то $\sum\limits_{k=1}^{n} |P_k| \geqslant P \Rightarrow \inf\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} |P_k|\right\} \geqslant |P|$.

Таким образом $\sigma_1(P) = |P|$.

$\square$

Билет 03

***Определение* 3.1.** Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Тогда $f_+, f_- : [a,b] \to [0;+\inf)$. Причем $f_+(x) = \max\{f(x),0\}$, $f_- = \max\{-f(x),0\}$. f_+ — положительная составляющая, а f_- — отрицательная составляющая.

Свойства. 1. $f = f_+ - f_-$.

2. $|f| = f_+ + f_-$

3. $f_+ = \frac{f+|f|}{2}$, $f_- = \frac{|f|-f}{2}$. (Сложили и вычли первые два свойства)

4. Если $f \in C([a,b])$, то $f_\pm \in C([a,b])$. (Видно из 3-го пункта)

***Определение* 3.2.** Пусть $f\colon [a,b] \to [0;+\infty)$.

Тогда подграфик $P_f([a;b]) \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b], 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$. Подграфик может быть взят и от какого-то подотрезка области определения функции!

Билет 04

***Определение* 4.1.** Пусть $f \in C([a,b])$. Зафиксируем произвольную квазиплощадь σ. Тогда Определённый интеграл: $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^b f(x)dx = \sigma(P_{f_+}([a;b])) - \sigma(P_{f_-}([a;b]))$.

Определение корректно, поскольку, раз функция непрерывна, то и составляющие непрерывны на отрезке, значит ограничены, значит под σ ограниченные множества, на которых σ определена. А позже проверим, что результат не зависит и от выбора σ.

Свойства. 1. $\int\limits_a^a f = 0$. (Площадь отрезка = 0)

2. $\int\limits_a^b c = c(b-a), c \geqslant 0$ (для отрицательных будет следовать из пунктов ниже)

Доказательство. По графику очевидно :) $\square$

3. $f \geqslant 0 \Rightarrow \int\limits_a^b = \sigma(P_f)$.

4. $\int\limits_a^b (-f) = -\int\limits_a^b f$.

Доказательство. $(-f)_+ = \max\{-f,0\} = f_-$. $(-f)_- = \max\{f,0\} = f+$, откуда $\int_a^b(-f) = \sigma(P_{(-f)_+}) - \sigma(P_{(-f)_-}) = \sigma(P_{f_-}) - \sigma(P_{f_+}) = -\int_a^b f$ $\square$

5. $f \geqslant 0 \wedge \int\limits_a^b f = 0 \wedge a < b \Rightarrow f = 0$.

Доказательство. От противного. Пусть $\exists c \in [a,b]\colon f(c) > 0$. Тогда, возьмем $\varepsilon \coloneqq \frac{f(c)}{2}, \delta$ из определения непрерывности в точке c. Если $x \in (c-\delta, c+\delta)$, то $f(x) \in (f(c)-\varepsilon, f(c)+\varepsilon) = (\frac{f(c)}{2}; \frac{3f(c)}{2}) \Rightarrow f(x) \geqslant \frac{f(c)}{2}$ при $x \in (c-\delta; c+\delta) \Rightarrow P_f \supset [c-\frac{\delta}{2}; c+\frac{\delta}{2}] \times [0; \frac{f(c)}{2}] \Rightarrow \int\limits_a^b f = \sigma(P_f) \geqslant \delta \cdot \frac{f(c)}{2} > 0$, противоречие. $\square$

Билет 05

Теорема 5.1 (Аддитивность интеграла)**.** Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $c \in [a,b]$.

Тогда $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$.

Доказательство. $\int\limits_a^b f = \sigma(P_{f_+}([a,b])) - \sigma(P_{f_-}([a,b]))$. Разделим наш $[a,b]$ и соответствующие множества вертикальной прямой $x = c$. Тогда $\sigma(P_{f_+}[a,b]) - \sigma(P_{f_-}[a,b]) = \sigma_{P_{f_+}[a,c]} + \sigma_{P_{f_+}[c,b]} - \sigma(P_{f_-}[a,c]) - \sigma(P_{f_-}[c,b]) = \int_a^c f + \int_c^b f$ □

Теорема 5.2 (Монотонность интеграла)**.** Пусть $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ и $\forall x \in [a,b]\colon f(x) \leqslant g(x)$.

Тогда $\int\limits_a^b f \leqslant \int\limits_a^b g$.

Доказательство. $f_+ = \max\{f, 0\} \leqslant \max\{g, 0\} = g_+ \Rightarrow P_{f_+} \subset P_{g_+} \Rightarrow \sigma(P_{f_+}) \leqslant \sigma(P_{g_+})$.

$f_- = \max\{-f, 0\} \geqslant \max\{-g, 0\} = g_- \Rightarrow P_{f_-} \supset P_{g_-} \Rightarrow \sigma(P_{f_-}) \geqslant \sigma(P_{g_-})$.

$\int\limits_a^b f = \sigma(P_{f_+}) - \sigma(P_{f_-}) \leqslant \sigma(P_{g_+}) - \sigma(P_{g_-}) = \int\limits_a^b g$. □

Следствие. 1. $|\int\limits_a^b f| \leqslant \int\limits_a^b |f|$.

2. $(b-a) \min\limits_{x \in [a,b]} f(x) \leqslant \int\limits_a^b f \leqslant (b-a) \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.

Доказательство. 1. $-|f| \leqslant f \leqslant |f| \Rightarrow$ (Применим теорему к двум неравенствам)

$\int\limits_a^b -|f| \leqslant \int\limits_a^b f \leqslant \int\limits_a^b |f| \Rightarrow |\int\limits_a^b f| \leqslant \int\limits_a^b |f|$.

2. $m \coloneqq \min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, $M \coloneqq \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$. $m \leqslant f(x) \leqslant M \Rightarrow \int\limits_a^b m \leqslant \int\limits_a^b f \leqslant \int\limits_a^b M \Rightarrow$

$m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f \leqslant M(b-a)$.

□

Теорема 5.3 (Интегральная теорема о среднем)**.** Пусть $f \in C([a,b])$.

Тогда $\exists c \in (a,b)\colon \int\limits_a^b f = (b-a)f(c)$.

Доказательство. $m \coloneqq \min f = f(p), M \coloneqq \max f = f(q)$ (по теореме Вейерштрасса). Тогда $\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f = f(c) \Rightarrow f(p) \leqslant \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f \leqslant f(q) \xRightarrow{\text{т. Б-К}} \exists c \in (p,q)$или $(q,p)\colon f(c) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f$. □

***Определение* 5.1.** $I_f \coloneqq \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f$ — среднее значение f на отрезке $[a,b]$.

Билет 06

***Определение* 6.1.** $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. Интеграл с переменным верхним пределом $\Phi(x) \coloneqq \int\limits_a^x f$, где $x \in [a,b]$.

***Определение* 6.2.** $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. Интеграл с переменным нижним пределом $\Psi(x) \coloneqq \int\limits_x^b f$, где $x \in [a,b]$.

Замечание. $\Phi(x) + \Psi(x) = \int\limits_a^b f$.

Теорема 6.1 (Теорема Барроу)**.** Пусть $f \in C([a,b])$. Тогда $\Phi'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$. То есть Φ — первообразная функции f.

Доказательство. Надо доказать, что $\lim\limits_{y\to x} \frac{\Phi(y)-\Phi(x)}{y-x} = f(x)$. Проверим для предела справа (слева аналогично, но, возможно, с чуть другим порядком точек).

Тогда $\Phi(y) - \Phi(x) = \int\limits_a^y f - \int\limits_a^x f = \int\limits_x^y f$.

Тогда $\frac{\Phi(y)-\Phi(x)}{y-x} = \frac{1}{y-x}\int\limits_x^y f = f(c)$ для некоторого $c \in (x,y)$ по интегральной теореме о среднем.

Проверяем определение по Гейне. Берем $y_n > x$ и $y_n \to x$. Тогда $\frac{\Phi(y_n)-\Phi(x)}{y_n-x} = f(c_n)$, где $c_n \in (x, y_n)$, $x < c_n < y_n \to x \Rightarrow c_n \to x \Rightarrow$ в силу непрерывности f $f(c_n) \to f(x)$. □

Следствие. $\Psi'(x) = -f(x) \quad \forall x \in [a,b]$.

Доказательство. $\Psi(x) = \int\limits_a^b f - \Phi(x) = C - \Phi(x) \Rightarrow \Psi' = (C - \Phi(x))' = -\Phi'(x) = -f(x)$. □

Теорема 6.2. Непрерывная на промежутке функция имеет первообразную.

Доказательство. $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$.

Возьмём $c \in (a,b)$ Рассмотрим $F(x) \coloneqq \begin{cases} \int\limits_c^x f & \text{при } x \geqslant c \\ -\int\limits_x^c f & \text{при } x \leqslant c \end{cases}$.

Утверждаем, что $F(x)$ — первообразная $f(x)$. Если $x > c$, то $F'(x) = f(x)$. Если $x < c$, то $F'(x) = -(-f(x)) = f(x)$ Если $x = c$, то, так как производные слева и справа считаются правильно и равны, то и в этой точке производная есть $f(x)$. □

Теорема 6.3 (Формула Ньютона-Лейбница)**.** $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ и F – её первообразная. Тогда $\int\limits_a^b f = F(b) - F(a)$.

Доказательство. $\Phi(x) = \int\limits_a^x f$ — первообразная и $F(x) = \Phi(x) + C$ (знаем, что две первообразные отличаются на константу)

Тогда $F(b) - F(a) = (\Phi(b) + C) - (\Phi(a) + C) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int\limits_a^b f$ □

И ровно в этот момент мы поняли, что от выбора псевдоплощади не зависим, поскольку первообразные от них не зависят (отсылка к первому билету/началу конспекта про псевдоплощади)

***Определение* 6.3.** $F \mid_a^b := F(b) - F(a)$

Билет 07

Теорема 7.1 (Линейность интеграла)**.** $\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$.

Доказательство. Пусть F, G — первообразные для f, g.

Тогда $\alpha F + \beta G$ — первообразная для $\alpha f + \beta g$. Тогда воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b \alpha f + \beta g = (\alpha F + \beta G)|_a^b = \alpha F(b) + \beta G(b) - \alpha F(a) - \beta G(a) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

$\square$

Теорема 7.2 (Формула интегрирования по частям)**.** Пусть $f, g \in C^1[a, b]$.

Тогда $\int\limits_a^b fg' = fg \mid_a^b - \int\limits_a^b f'g$.

Доказательство. Докажем при помощи формулы Ньютона-Лейбница. Пусть H — первообразная $f'g$. Тогда $fg - H$ — первообразная для fg'.

Проверим данный факт: $(fg - H)' = f'g + fg' - f'g = fg'$. А значит нам можно воспользоваться формулой Ньютона-Лейбница.

$\int\limits_a^b fg' = (fg - H) \mid_a^b = fg \mid_a^b - H \mid_a^b = fg \mid_a^b - \int_a^b f'g$. $\square$

`Замечание Соглашение.` Если $a > b$, то $\int\limits_a^b f := -\int\limits_b^a f$.

Мотивация: Если F — первообразная, то $\int\limits_a^b f = F \mid_a^b$.

Теорема 7.3 (Формула замены переменной)**.** Пусть $f \in C[a, b]$, $\varphi\colon [c, d] \to [a, b]$, $\varphi \in C^1[c, d]$, $p, q \in [c, d]$.

Тогда $\int\limits_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int\limits_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)\mathrm{d}x$.

Доказательство. Пусть F — первообразная f. Тогда $\int\limits_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)\mathrm{d}x = F \mid_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} = F \circ \varphi \mid_p^q$. Заметим, что $F \circ \varphi$ — первообразная для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

Проверим это: $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

Тогда: $\int\limits_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)\mathrm{d}x = F \circ \varphi|_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} = \int\limits_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$ $\square$

Пример.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2t}{1+\sin^4 t}\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Произведем замену $\varphi(t) = \sin^2 t$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $\varphi'(t) = 2\sin t\cos t = \sin 2t$, $\varphi(0) = 0, \varphi(\frac{\pi}{2}) = 1$:

$$(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi'(t)}{1+(\varphi(t))^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(\frac{\pi}{2})} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \mid_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Билет 08

Пример. $W_n \coloneqq \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\mathrm{d}t = (1)$ Докажем этот момент:

Положим $x = \frac{\pi}{2} - t =: \varphi(t)$, $\varphi'(t) = -1$, $\sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos t$.

Тогда $(1) = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \varphi(t) \cdot \varphi'(t)\mathrm{d}t = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^n x\mathrm{d}x$

Частные случаи $W_0 = \frac{\pi}{2}$, $W_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x = -\cos|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

Общее решение: $W_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \cdot (\cos x)'\mathrm{d}x = (*)$. Воспользовались тем, что $\sin x = -(\cos x)'$, $f'(x) = (n-1)\sin^{n-2} x \cdot \cos x$.

Тогда получаем:

$$(*) = -\left(\underbrace{\sin^{n-1} x \cdot \cos x \mid_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2} x \underbrace{\cos^2 x}_{=1-\sin^2 x} \mathrm{d}x\right) =$$

$$= (n-1)\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\mathrm{d}x - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x\right) = (n-1)(W_{n-2} - W_n).$$

Посчитаем для четных: $W_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot W_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} W_{2n-4} = \ldots = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}$, где $k!!$ — произведение натуральных чисел $\leqslant k$ той же четности, что и k .

Для нечетных: $W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} W_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} W_{2n-3} = \ldots = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} W_1 = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$

Билет 09

Теорема 9.1 (Формула Валлиса)**.**

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Доказательство. $\sin^n x \geqslant \sin^{n+1} x$ на $[0, \frac{\pi}{2}]$. Тогда $W_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x \geqslant \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x \mathrm{d}x = W_{n+1}$.

Заметим, что $W_{2n+2} \leqslant W_{2n+1} \leqslant W_{2n} \iff \frac{\pi}{2}\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \leqslant \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leqslant \frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$. Поделим на $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$:

$$\frac{\pi}{2}\frac{2n+1}{2n+2} \leqslant \frac{((2n)!!)^2}{(2n+1)((2n-1)!!)^2} \leqslant \frac{\pi}{2} \implies \lim\left(\frac{(2n)!!}{\sqrt{(2n+1)}(2n-1)!!}\right)^2 = \frac{\pi}{2}.$$

Последний переход — по двум милиционерам, т.к. при $n \to +\infty$ $\frac{2n+1}{2n+2} \to 1$ $\square$

Следствие.

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Доказательство. Заметим, что $(2n)! = (2n)!! \cdot (2n-1)!!$, а $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n) = 2^n \cdot n!$. Тогда подставим в Cшку:

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{\frac{(2n)!!}{2^n}\frac{(2n)!!}{2^n}} = 4^n \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

При этом из Валлиса, заметим, что $\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2n+1} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2n} = \sqrt{\pi n}$. А значит все сойдется. $\square$

Билет 10

Теорема 10.1 (Формула Тейлора (с остатком в интегральной форме))**.** Пусть $f \in C^{n+1}[a,b]$, $x, x_0 \in [a,b]$. Тогда:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

Доказательство. Индукция по n:

- База. $n = 0$, $f(x) = f(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f'(t)\mathrm{d}t = f(x_0) + f\mid_{x_0}^{x}$
- Переход. $n \to n+1$.
- Доказательство. $f(x) = T_n(x) + \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} \underbrace{(x-t)^n}_{g'}\underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{f}\mathrm{d}t$. Проинтегрируем интеграл по частям. $g(t) = -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}$.

  Подставим: $\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t = -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \cdot f^{(n+1)}(t)\mid_{t=x_0}^{t=x} + \int_{x_0}^{x}\frac{1}{n+1}(x-t)^{n+1} \cdot f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t =$ $\underbrace{\frac{1}{n+1}(x-x_0)^{n+1}f^{(n+1)}(x_0)}_{\text{новый член Тейлора!}} + \int_{x_0}^{x}\frac{1}{n+1}(x-t)^{n+1} \cdot f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t$

  Вспомнив, что у нас там ещё был $\frac{1}{n!}$ перед исходным интегралом заметим, что мы действительно получили новый член суммы и новый интеграл с $\frac{1}{(n+1)!}$, что доказывает индукционный переход.

□

Билет 11

Пример.

$$H_j \coloneqq \frac{1}{j!}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^j \cos x \mathrm{d}x. \tag{2}$$

Свойство 1. $0 < H_j \leqslant \frac{1}{j!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2j}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2j}}{j!}$.

Свойство 2. $\forall c > 0\colon c^j \cdot H_j \xrightarrow{j\to\infty} 0$. $0 < c^j H_j \leqslant \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2j}\cdot c^j}{j!} = \frac{\left(\frac{\pi^2}{4}c\right)^j}{j!} \to 0$.
Свойство 3. $H_0 = 1$, $H_1 = 2$ (*упражнение*).
Свойство 4. $H_j = (4j-2)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}$, при $j \geqslant 2$.

Доказательство.

$$j!H_j = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^j (\sin x)'\mathrm{d}x \tag{3}$$

Заметим, что $\left(\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^j\right)' = j\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^{j-1}\cdot(-2x)$. Тогда:

$$(3) = \underbrace{\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^j \sin x \,\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}}}_{=0} + 2j\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^{j-1} x \underbrace{\sin x}_{=(-\cos x)'}\mathrm{d}x =$$

$$= 2j\left(\underbrace{\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^{j-1}\cdot x\cdot(-\cos x)\,\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left((j-1)\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^{j-2}(-2x)x + \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^{j-1}\right)(-\cos x)\mathrm{d}\right.$$

$$= 2j\left((j-1)!H_{j-1} - 2(j-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^{j-2} x^2\cos x dx\right).$$

В процессе мы дважды интегрировали по частям, а теперь нужно избавиться во втором слагаемом от x^2. Для этого заметим, что $x^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)$, подставим и разобьём интеграл на два, которые есть H_{j-2} и H_{j-1} с нужными коэффициентами:

$$j!H_j = 2j(j-1)!H_{j-1} - 4j(j-1)\left(((j-2)!\left(\frac{\pi}{2}\right)^2)H_{j-2} - (j-1)!H_{j-1}\right)$$

Откуда с легкостью получаем $j!H_j = 2j!H_{j-1} - \pi^2 j!H_{j-2} + 4(j-1)j!H_{j-1} \iff H_j = (4j-2)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}$.
Свойство 5. Существует многочлен P_n с целыми коэффициентами степени $\leqslant n$, такой что $H_j = P_j(\pi^2)$.

Доказательство. $P_0 \equiv 1, P_1 \equiv 2, P_n(x) = (4n-2)P_{n-1}(x) - xP_{n-2}(x)$. □

□

Теорема 11.1 (Ламберта, доказательство: Эрмит)**.** Числа π и π^2 иррациональные.

Доказательство. От противного. Пусть π^2 — рационально. Тогда пусть $\pi^2 = \frac{m}{n}$. Тогда $H_j = P_j(\frac{m}{n}) = \frac{\text{целое число}}{n^j} > 0$.
$n^j H_j =$ целое число $> 0 \Rightarrow n^j H_j \geqslant 1$

Но, по свойству 2, при $j \to +\infty$ $n^j H_j \to 0$, противоречие. □

Билет 12

***Определение* 12.1.** $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна на E, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in E\colon |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

***Определение* 12.2.** f непрерывна во всех точках из E:
$\forall x \in E \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in E\colon |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Концептуальное отличие в том, что в первом случае у нас $\delta(\varepsilon)$, а во втором — $\delta(x, \varepsilon)$, т.е. при равномерной непрерывности у нас есть общая дельта по эспилону на всю область, а при непрерывности во всех точках для каждой точки своё δ по ε

Пример. $\sin x$ и $\cos x$ равномерно непрерывны на $\mathbb{R}$.

$|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y| \Rightarrow \delta = \varepsilon$ подходит. $|\cos x - \cos y| \leqslant |x - y|$.

Пример. $f(x) = x^2$ не является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$. Рассмотрим $\varepsilon = 1$, никакое $\delta > 0$ не подходит. x и $x + \frac{\delta}{2}$. $f(x + \frac{\delta}{2}) - f(x) = (x + \frac{\delta}{2})^2 - x^2 = \ldots = \delta x + \frac{\delta^2}{4} > \delta x$. При $x = \frac{1}{\delta}$ противоречие.

Теорема 12.1 (Теорема Кантора)**.** Пусть $f \in C[a, b]$, тогда f равномерно непрерывна на $[a, b]$.

Доказательство. Берем $\varepsilon > 0$ и предположим, что $\delta = \frac{1}{n}$ не подходит, то есть $\exists x_n, y_n \in [a, b]\colon |x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ и $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. По теореме Больцано-Вейерштрасса у последовательности x_n есть сходящаяся подпоследовательность $x_{n_k} \to c$, то есть $\lim x_{n_k} = c \in [a, b]$.

$\underbrace{x_{n_k} - \dfrac{1}{n_k}}_{\to c} < y_{n_k} < \underbrace{x_{n_k} + \dfrac{1}{n_k}}_{\to c} \implies \lim y_{n_k} = c$. Но f непрерывна в точке $c \implies \lim f(x_{n_k}) = f(c) = \lim f(y_{n_k}) \implies \lim(f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})) = 0$, но $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geqslant \varepsilon$. □

Замечание. Для интервала или полуинтервала неверно. $f(x) = \frac{1}{x}$ на $(0; 1]$. Докажем, что нет равномерной непрерывности на $(0; 1]$.

Пусть $\varepsilon = 1$ и $\delta > 0$. Пусть $0 < x < \delta$, $y = \frac{x}{2}$, $|x - y| = \frac{x}{2} < \delta$. Тогда $f(y) - f(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} > 1$.

Билет 13

***Определение* 13.1.** Пусть $f\colon E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Тогда $\omega_f(\delta) \coloneqq \sup\{|f(x) - f(y)| \mid \forall x, y \in E, |x - y| \leqslant \delta\}$ — модуль непрерывности f.

Свойства. 1. $\omega_f(0) = 0$,

2. $|f(x) - f(y)| \leqslant \omega_f(|x - y|)$.

3. $\omega_f \uparrow$.

4. Если f — липшицева функция с константой L, то $\omega_f(\delta) \leqslant L\delta$.
   В частности, если $|f'(x)| \leqslant L \quad \forall x \in \langle a, b\rangle$.

5. f равномерна и непрерывна на $E \iff \omega_f$ непрерывна в нуле $\iff \lim\limits_{\delta \to 0+} \omega_f(\delta) = 0$.

   Доказательство. • $1 \to 2$. $\forall \varepsilon > 0 \exists \gamma > 0 \forall x, y \in E\colon |x - y| < \gamma \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
   Возьмем $\delta < \gamma$. Тогда $|x - y| \leqslant \delta \implies |x - y| < \gamma \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon \implies \sup \leqslant \varepsilon$. Тогда с одной стороны $\omega_f \geqslant 0$, а с другой ограничена ε. Следовательно предел ω_f равен 0.

   • $2 \to 1$. Из $\lim\limits_{\delta \to 0+} \omega_f(\delta) = 0$. Возьмем $\delta > 0$ для $\omega_f(\delta) < \varepsilon$: $|f(x) - f(y)| \leqslant \omega_f(\delta) < \varepsilon\ \forall \varepsilon$, $\forall x, y \in E\colon |x - y| \leqslant \delta$.

   □

6. $f \in C[a, b] \iff \omega_f$ непрерывен в нуле $\iff \lim\limits_{\delta \to 0+} \omega_f(\delta) = 0$.

   Доказательство. Для функции на отрезке равномерная непрерывность $\iff$ непрерывность $\iff$ теорема Кантора. □

Билет 14

***Определение* 14.1.** Пусть есть $[a, b]$. Тогда дробление (разбиение, пунктир) отрезка: набор точек: $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.

***Определение* 14.2.** Ранг дробления: $\max\limits_{k=1,2,\ldots,n} (x_k - x_{k-1}) =: |\tau|$, $\tau = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$

***Определение* 14.3.** Оснащение дробления — набор точек $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, такой что $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

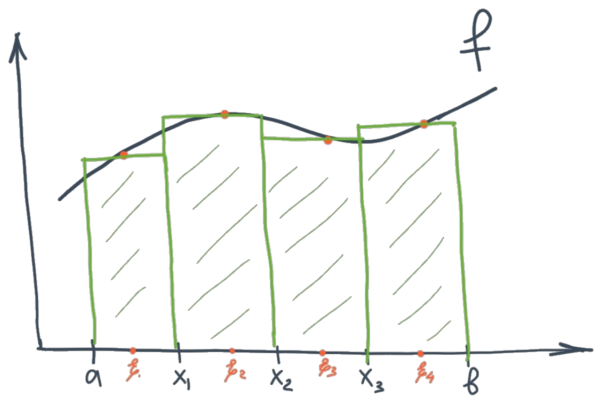
***Определение* 14.4.** Интегральная сумма (сумма Римана) $S(f, \tau, \xi) :== \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$,

По факту просто сумма площадей прямоугольников под графиком

Билет 15

Теорема 15.1 (Теорема об интегральных суммах)**.** Пусть $f \in C[a, b]$,

тогда $|\int\limits_a^b - S(f, \tau, \xi)| \leqslant (b - a)\omega_f(|\tau|)$.



Доказательство.

$$\Delta := \int\limits_a^b f - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(\xi_k)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} (f(t) - f(\xi_k))\mathrm{d}t.$$

$$|\Delta| \leqslant \sum |\int \dots| \leqslant \sum_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t) - f(\xi_k)|\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})\omega_f(|\tau|) = (b-a)\omega_f(|\tau|).$$

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t) - f(\xi_k)|\mathrm{d}t \leqslant \int_{x_{k-1}}^{x_k} \omega_f(|\tau|)\mathrm{d}t = (x_k - x_{k-1})\omega_f(|\tau|)..$$

$\square$

Следствие. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall$ дробления ранга $\leqslant \delta$ $\forall$ оснащения $|\int\limits_a^b - S(f, \tau, \xi)| < \varepsilon$

Следствие. Если τ_n — последовательность дроблений, ранг которых $\to 0$, то $S(f, \tau_n, \xi_n) \to \int\limits_a^b f$.

Пример. $S_p(n) := 1^p + 2^p + \ldots + n^p$. Посчитаем $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_p(n)}{n^{p+1}}$.

Возьмем $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad f(t) = t^p$ $\frac{S_p(n)}{n^{p+1}} = \frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^p = S(f, \tau, \xi)$, где $x_k = \xi_k = \frac{k}{n}$.

Тогда $\lim \frac{S_p(n)}{n^{p+1}} = \int\limits_0^1 t^p \mathrm{d}t = \frac{t^{p+1}}{p+1} |_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{p+1}$

***Определение* 15.1.** Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, тогда f интегрируема по Риману, если $\exists I \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall$ дробления ранга $< \delta \forall$ его оснащения $|S(f, \tau, \xi) - I| < \varepsilon$.

I — интеграл по Риману $\int\limits_a^b f$.

Билет 16

Лемма. $f \in C^2[\alpha, \beta]$. Тогда

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(t)\mathrm{d}t - \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta-\alpha) = -\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} f''(t)(t-\alpha)(\beta-t)\mathrm{d}t.$$

Доказательство. Пусть $\gamma := \frac{\alpha+\beta}{2}$. Тогда:

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(t)\mathrm{d}t = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(t)(t-\gamma)'\mathrm{d}t = f(t)(t-\gamma)\mid_{t=\alpha}^{t=\beta} - \int\limits_{\alpha}^{\beta} f'(t)(t-\gamma)\mathrm{d}t.$$

Заметим, что $f(t)(t-\gamma)\mid_{t=\alpha}^{t=\beta} = f(\beta)(\beta-\gamma) - f(\alpha)(\alpha-\gamma) = \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta-\alpha)$. Продолжим:

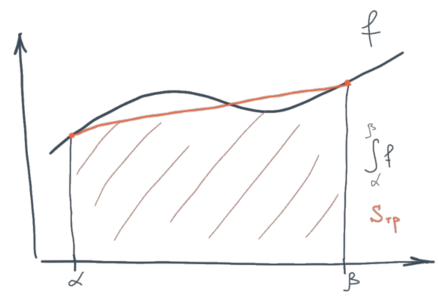
$$\text{левая часть} = -\int_{\alpha}^{\beta} f'(t)(t-\gamma)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f'(t)((t-\alpha)(\beta-t))'\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{2}f'(t)(t-\alpha)(\beta-t)\mid_{t=\alpha}^{t=\beta} - \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f''(t)(t-\alpha)(\beta-t)\mathrm{d}t.$$

Переход к $((t-\alpha)(\beta-t))'$:

$$((t-\alpha)(\beta-t))' = (-t^2+(\alpha+\beta)t-\alpha\beta)' = -2t+(\alpha+\beta) = -2(t-\gamma).$$

□

Замечание. $\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta-\alpha)$ — площадь трапеции:



Теорема 16.1 (Оценка погрешности в формуле трапеции)**.** Пусть $f \in C^2[a, b]$.

Тогда :

$$\left|\int\limits_{a}^{b} f(t)\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k-x_{k-1})\right| \leqslant \frac{|\tau|^2}{8}\int\limits_{a}^{b}|f''|$$

Доказательство. $\Delta := \int\limits_a^b - \sum \ldots = \sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\mathrm{d}t - \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k-x_{k-1})$

$$|\Delta| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left|\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\mathrm{d}t - \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k-x_{k-1})\right| = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(t)(t-x_{k-1})(x_k-t)\mathrm{d}t\right|. \quad (4)$$

Тогда вспомним, что $(t-x_{k-1})(x_k-t)\leqslant\left(\frac{x_k-x_{k-1}}{2}\right)^2\leqslant\frac{|\tau|^2}{4}\implies(4)\leqslant\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}|f''(t)|\cdot\frac{|\tau|^2}{4}\mathrm{d}t=$ $\frac{|\tau|^2}{8}\sum\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}|f''|=\frac{|\tau|^2}{8}\cdot\int\limits_a^b|f''|$ □

Замечание. Пусть разбиение на n равных отрезков $x_k-x_{k-1}=\frac{b-a}{n}=|\tau|$:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k-x_{k-1})=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}=\frac{b-a}{n}(\frac{f(x_0)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+\frac{f(x_n)}{2}).$$

Замечание. Возьмем разбиение на равные отрезки и $\xi_k=x_k$:

$$S(f,\tau,\xi)=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k).$$

Билет 17

Теорема 17.1 (формула Эйлера-Маклорена)**.** Пусть $f\in C^2[m,n]$, тогда

$$\sum_{k=m}^{n}f(k)=\frac{f(m)+f(n)}{2}+\int_m^n f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_m^n f''(t)\{t\}(1-\{t\})\mathrm{d}t.$$

Доказательство. Подставим $\alpha=k$ и $\beta=k+1$ в лемму:

$$\int_k^{k+1}f(t)\mathrm{d}t=\frac{f(k)+f(k+1)}{2}-\frac{1}{2}\int_k^{k+1}f''(t)(t-k)(k+1-t)\mathrm{d}t=$$
$$=\frac{f(k)+f(k+1)}{2}-\frac{1}{2}\int_k^{k+1}f''(t)\{t\}(1-\{t\})\mathrm{d}t.$$

Дальше суммируем по k от m до $n-1$:

$$\int_m^n f(t)\mathrm{d}t=\sum_{k=m}^{n-1}\frac{f(k)+f(k+1)}{2}-\frac{1}{2}\int_m^n f''(t)\{t\}(1-\{t\})\mathrm{d}t.$$

Заметим, что $\sum\limits_{k=m}^{n-1}\frac{f(k)+f(k+1)}{2}=\frac{f(m)+f(n)}{2}+\sum_{k=m+1}^{n-1}f(k)$. И тогда:

$$\sum_{k=m}^{n}f(k)=\frac{f(m)+f(n)}{2}+\int_m^n f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_m^n f''(t)\{t\}(1-\{t\})\mathrm{d}t.$$

□

Билет 18

Пример. $S_p(n) = 1^p + 2^p + \ldots + n^p$, $f(t) = t^p$, $m = 1$, $f''(t) = p(p-1)t^{p-2}$.

$S_p(n) = \frac{1+n^p}{2} + \int\limits_1^n t^p \mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int\limits_1^n p(p-1)t^{p-2}\{t\}(1-\{t\})\mathrm{d}t$.

При $p \in (-1, 1)$ $\int_1^n t^p \mathrm{d}t = \frac{t^{p+1}}{p+1} \mid_1^n = \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1} = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \mathcal{O}(1)$.

$$\int_1^n t^{p-2} \underbrace{\{t\}(1-\{t\})}_{\leqslant \frac{1}{4}} \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{4}\int_1^n t^{p-2}\mathrm{d}t = \frac{1}{4} \cdot \frac{t^{p-1}}{p-1} \mid_1^n = \frac{1}{4} \cdot \frac{n^{p-1}-1}{p-1} = \mathcal{O}(1).$$

То есть $S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \mathcal{O}(1)$.

При $p > 1$ $S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \mathcal{O}(n^{p-1})$.

Пример. Гармонические числа: $H_n \coloneqq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$. $m = 1, f(t) = \frac{1}{t}, f''(t) = \frac{2}{t^3}$.

$$H_n = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} + \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} + \frac{1}{2}\int_1^n \frac{2}{t^3}\{t\}(1-\{t\})\mathrm{d}t$$

Откуда получаем ($a_n \coloneqq \int\limits_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^3}$; $\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln t \mid_1^n = \ln n$):

$$H_n = \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + a_n.$$

Заметим, что $a_{n+1} = a_n + \int\limits_n^{n+1} \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^3}\mathrm{d}t > a_n$. То есть $a_n \uparrow$. Причем $a_n \leqslant \int\limits_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = -\frac{1}{2t^2} \mid_1^n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} < \frac{1}{2}$.
А значит a_n имеет предел, а значит $a_n = a + o(1)$.
Вывод: $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$, где $\gamma \approx 0.5772156649$ — постоянная Эйлера.

Замечание. $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$ — точная формула.

Билет 19

Пример Формула Стирлинга. $m = 1, f(t) = \ln t, f''(t) = -\frac{1}{t^2}$.

$$\ln n! = \sum_{k=1}^n \ln k = \underbrace{\frac{\ln 1 + \ln n}{2}}_{=\frac{1}{2}\ln n} + \underbrace{\int_1^n \ln t \mathrm{d}t}_{=t\ln t - t|_1^n = n\ln n - n + 1} - \underbrace{\frac{1}{2}\int_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^2}\mathrm{d}t}_{:=b_n} \Rightarrow \ln n! = \frac{1}{2}\ln n + n\ln n - n + 1 - b_n.$$

Посмотрим на b_n:

$$b_n \leqslant \frac{1}{2}\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{1}{2}(-\frac{1}{t}) \mid_1^n = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n}) < \frac{1}{2} \implies b_n = \underbrace{b}_{=\lim b_n} + o(1).$$

А значит $\ln n! = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + (1-b) + o(1)$.
Можем найти b, для этого представим обе части как экспоненты: $n! = n^n e^{-n}\sqrt{n}e^{1-b}e^{o(1)} \sim n^n e^{-n}\sqrt{n}C$.

Вспомним (из следствия формулы Валлиса): $\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$. А еще знаем, что $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2n}C}{(n^n e^{-n}\sqrt{n}C)^2} = \frac{4^n\sqrt{2}}{\sqrt{n}C}$.

Тогда получаем, что $\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \sim \frac{4^n\sqrt{2}}{\sqrt{n}C} \implies C \sim \frac{4^n\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{\pi n}}{4^n} = \sqrt{2\pi}$.

Итоговый результат (Формула Стирлинга):

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

$$\ln n! = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln(2\pi n) + o(1).$$

Замечание. Если посчитать точнее, то получим $\ln n! = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln(2\pi n) + \mathcal{O}(\frac{1}{n})$.

Билет 20

Определение 20.1. Пусть $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ и $f \in C[a,b)$.

Тогда определим $\int\limits_a^{\to b} f := \lim\limits_{B\to b-}\int\limits_a^B f$ (если он существует).

Если $-\infty \leqslant a < b < +\infty, f \in C(a,b]$, то $\int\limits_{\to a}^b f := \lim\limits_{A\to a+}\int\limits_A^b f$ (опять же, если он существует).

Замечание. Если $b < +\infty$ и $f \in C[a,b]$, то определение не дает ничего нового:

$$\int_a^b f = \lim_{B\to b-}\int\limits_a^B f$$

$$\left|\int_a^b f - \int_a^B f\right| = \left|\int_B^b f\right| \leqslant M(b-B) \to 0, M = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

Пример. 1. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \lim\limits_{y\to+\infty}\int\limits_a^y \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \lim\limits_{\substack{y\to+\infty\\ \text{при } p\neq 1}} -\frac{1}{(p-1)x^{p-1}}\Big|_{x=1}^{x=y} = \frac{1}{p-1} - \lim\limits_{y\to+\infty}\frac{1}{(p-1)y^{p-1}} = \frac{1}{p-1}$ при $p > 1$, при $p < 1$ получаем $+\infty$, а при $p = 1$ $\lim\limits_{y\to+\infty}\ln x\,\Big|_1^y = \lim\limits_{y\to+\infty}\ln y = +\infty$

То есть, при $p \leqslant 1$ $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p} = +\infty$,

при $p > 1$ $\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \frac{1}{1-p}$.

2. $\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \lim\limits_{y\to0+}\int\limits_y^1\frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \lim\limits_{y\to0+} -\frac{1}{(p-1)x^{p-1}}\Big|_{x=y}^{x=1} = -\frac{1}{p-1} + \lim\limits_{y\to0+} = \frac{y^{1-p}}{p-1} = \frac{1}{1-p}$ при $p < 1$, при $p > 1$ получаем $+\infty$, а вот при $p = 1$ $\lim\limits_{y\to0+}\ln x\,\Big|_y^1 = \lim\limits_{y\to0+} -\ln y = +\infty$.

То есть, при $p < 1$ $\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \frac{1}{1-p}$,

при $p \geqslant 1$ $\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^p} = +\infty$.

Замечание. Если $f \in C[a,b)$ и F — его первообразная, то $\int\limits_a^b f = \lim\limits_{B\to b-} F(B) - F(a)$.

Если $f \in C(a,b]$ и F — его первообразная, то $\int\limits_a^b f = F(b) - \lim\limits_{A\to a+} F(A)$.

Доказательство. Очевидно по формуле Ньютона-Лейбница. □

Определение 20.2. $F\Big|_a^b := \lim\limits_{B\to b-} F(B) - F(a)$.

Определение 20.3. $\int\limits_a^{\to b} f$ сходится, если lim в его определении существует и конечен. Иначе расходится.

Теорема 20.1 (Критерий Коши)**.** Пусть $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, $f \in C[a,b)$.

Тогда $\int\limits_a^{\to b} f$ сходится $\iff \forall\varepsilon\exists c \in (a,b)\colon \forall A, B \in (c,b)\ \left|\int\limits_A^B f\right| < \varepsilon$.

Замечание.

1. Если $b = +\infty$ это означает, что $\forall\varepsilon\exists c > a\forall A, B > c\colon \left|\int\limits_A^B f\right| < \varepsilon$.
2. Если $b < +\infty$ это означает, что $\forall\varepsilon > 0\exists\delta > 0\forall A, B \in (b-\delta; b)\colon \left|\int\limits_A^B f\right| < \varepsilon$.

Доказательство. Для $b < +\infty$ (то есть для конечной точки).

- "$\Rightarrow$" $\int\limits_a^b f$ сходится $\implies \exists$ конечный $I := \lim\limits_{B\to b-} \int\limits_a^B f$, обозначим $\int\limits_a^B f$ за $g(B)$. Воспользуемся критерием Коши для функций:

$$\forall\varepsilon > 0\exists\delta > 0 \begin{array}{ll} \forall B \in (b-\delta, b) & |g(B) - I| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall A \in (b-\delta, b) & |g(A) - I| < \frac{\varepsilon}{2} \end{array} \implies |g(B) - g(A)| \leqslant |g(B) - I| + |I - g(A)| < \varepsilon$$

- "$\Leftarrow$" $\int\limits_a^B f =: g(B)$.

  $\forall\varepsilon > 0\exists\delta > 0\forall A, B \in (b-\delta, b)\colon |g(B) - g(A)| < \varepsilon$ — а это условие из критерия Коши для $\lim\limits_{B\to b-} g(B)$.

□

Замечание. Если существуют $A_n, B_n \in [a,b)\colon \lim A_n = \lim B_n = b\colon \int\limits_{A_n}^{B_n} f \not\to 0$, то $\int\limits_a^b f$ расходится.

Доказательство. Возьмем A_{n_k} и $B_{n_k}\colon |\int\limits_{A_{n_k}}^{B_{n_k}} f| \to C > 0 \implies |\int\limits_{A_{n_k}}^{B_{n_k}} f| > \frac{C}{2}$ при больших k. Но это противоречит критерию Коши. □

Билет 21

Свойства несобственных интегралов. 1. Аддитивность. Пусть $f \in C[a, b)$, $c \in (a, b)$. Если $\int\limits_a^b f$ сходится, то $\int\limits_c^b f$ сходится и $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$.

2. Если $\int\limits_a^b f$ сходится, то $\lim\limits_{c \to b-} \int\limits_c^b f = 0$

3. Линейность $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $\int\limits_a^b f$ и $\int\limits_a^b g$ сходятся. Тогда $\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g)$ сходится и $\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$.

4. Монотонность. Пусть $\int\limits_a^b f$ и $\int\limits_a^b g$ существуют в $\overline{R}$ и $f \leqslant g$ на $[a, b)$. Тогда $\int\limits_a^b f \leqslant \int\limits_a^b g$.

5. Интегрирование по частям. $f, g \in C^1[a; b) \implies \int\limits_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int\limits_a^b f'g$.

6. Замена переменных. $\varphi\colon [\alpha, \beta) \to [a, b)$, $\varphi \in C^1[\alpha, \beta)$ и $\exists \lim\limits_{\gamma \to \beta-} \varphi(\gamma) =: \varphi(\beta-)$ и $f \in C[a, b)$.

Тогда $\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f(x)\mathrm{d}x$. «Если существует один из $\int$, то существует второй и они равны»

Доказательство. 1. $\int\limits_a^b f = \lim\limits_{B \to b-} F(B) - F(a) \implies \lim_{B \to b-} F(B)$ существует и конечен $\implies$ $\int\limits_c^b = \lim\limits_{B \to b-} F(b) - F(c)$ — сходится ($F(c)$ — просто число какое-то).

$\int\limits_a^b = \lim F(B) - F(a) = \lim F(B) - F(c) + F(c) - F(a) = \int\limits_c^b f + \int\limits_a^c f$.

2. $\int\limits_c^b f = \int\limits_a^b f - \int\limits_a^c f \underset{c \to b-}{\to} \int\limits_a^b f \Rightarrow$ разность $\to 0$

3. $\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g) = \lim\limits_{B \to b-} \int\limits_a^B (\alpha f + \beta g) = \lim\limits_{B \to b-} (\alpha \int\limits_a^B f + \beta \int\limits_a^B g) = \alpha \lim\limits_{B \to b-} \int\limits_a^B f + \beta \lim\limits_{B \to b-} \int\limits_a^B g = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$.

4. $\int\limits_a^B f \leqslant \int\limits_a^B g$ (монотонность собственных интегралов), а дальше предельный переход: $\lim\limits_{B \to b-} \int\limits_a^B f \leqslant \lim\limits_{B \to b-} \int\limits_a^B g$

5. $a < B < b$ и пишем формулу интегрирования по частям: $\int\limits_a^B fg' = fg\Big|_a^B - \int\limits_a^B f'g$ и переходим к пределу при $B \to b-$. Так как f, g — непрерывные функции, то $\lim\limits_{B \to b-} fg\Big|_a^B = fg\Big|_a^b$ и получаем, что нужно.

6. $F(y) := \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{y} f(x)\mathrm{d}x$, $\Phi(\gamma) := \int_\alpha^\gamma f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$. Знаем, что $F(\varphi(\gamma)) = \Phi(\gamma)$ при $\alpha < \gamma < \beta$.

Пусть существует правый $\int$, то есть $\exists \lim\limits_{y\to\varphi(\beta-)} F(y)$. Возьмем $\gamma_n \nearrow \beta \implies \varphi(\gamma_n) \to \varphi(\beta-) \implies \Phi(\gamma_n) = F(\varphi(\gamma_n)) \to \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f(x)\mathrm{d}x$. При этом $\Phi(\gamma_n) \to \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$.

Пусть существует левый $\int$, то есть $\exists \lim\limits_{\gamma\to\beta-} \Phi(\gamma)$. Докажем, что $\exists$ правый $\int$. При $\varphi(\beta-) < b$ нечего доказывать.

Пусть $\varphi(\beta-) = b$. Тогда возьмем $b_n \nearrow b$. Можно считать, что $b_n \in [\varphi(\alpha), b)$. Тогда $\exists \gamma_n \in [\alpha,\beta)\colon \varphi(\gamma_n) = b_n$. Докажем, что $\gamma_n \to \beta$. Пусть это не так. Тогда найдется $\gamma_{n_k} \to \widetilde{\beta} < \beta \implies \varphi(\gamma_{n_k}) \to \varphi(\widetilde{\beta}) < b$ по непрерывности φ в точке $\widetilde{\beta}$. Противоречие.

Итак, $\gamma_n \to \beta$, $F(b_n) = F(\varphi(\gamma_n)) = \Phi(\gamma_n) \to \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$.

□

Замечание к третьему свойству. 1. Если $\int\limits_a^b f$ сходится, а $\int\limits_a^b g$ расходится, то $\int\limits_a^b (f+g)$ расходится. Доказательство от противного, пусть интеграл сходится, тогда $g = (f+g) - f \implies \int\limits_a^b g$ сходится.

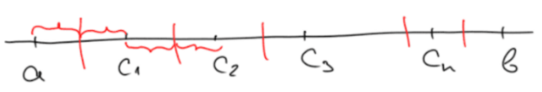
2. Если $\int\limits_a^b f$ и $\int\limits_a^b g$ расходятся, то $\int\limits_a^b (f+g)$ может сходиться. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ и $\int\limits_1^{+\infty} -\frac{\mathrm{d}x}{x}$ расходятся.

Замечание к шестому свойству. $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Сделаем замену $x = b - \frac{1}{t} = \varphi(t)$, $\varphi'(t) = \frac{1}{t^2}, \varphi(\alpha) = a, \alpha = \frac{1}{b-a}$.

Тогда $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f(b - \frac{1}{t})\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$.

***Определение* 21.1.** Пусть f непрерывна на (a,b) за исключением некоторого количества точек $c_1 < c_2 < \ldots < c_n$.

$\int\limits_a^b f$ сходится, если сходятся интегралы по всем маленьким отрезкам (содержащим только одну выколотую точку).



Билет 22

Теорема 22.1. Пусть $f \in C[a,b)$ и $f \geqslant 0$.

Тогда $\int\limits_a^b f$ сходится $\iff F(y) := \int\limits_a^y f$ ограничена сверху.

Доказательство. $f \geqslant 0 \implies F$ монотонно возрастает. $\int\limits_a^b f$ сходится $\iff \exists$ конечный $\lim\limits_{y\to b-} F(y) \iff F$ ограничена сверху. □

Замечание. $f \in C[a;b), f \geqslant 0$. Если $\int\limits_a^b f$ расходится, это означает, что $\int\limits_a^b f = +\infty$.

Следствие Признак сравнения. $f, g \in C[a,b)$, $f, g \geqslant 0$ и $f \leqslant g$.

1. Если $\int\limits_a^b g$ сходится, то и $\int\limits_a^b f$ сходится.
2. Если $\int\limits_a^b f$ расходится, то и $\int\limits_a^b g$ расходится.

Доказательство. $F(y) \coloneqq \int\limits_a^y f$ и $G(y) \coloneqq \int\limits_a^y g$.

1. Пусть $\int\limits_a^b g$ сходится $\implies G(y)$ ограничена, но $F(y) \leqslant G(y) \implies F(y)$ ограничена $\implies \int\limits_a^b f$ сходится.
2. От противного. Пусть $\int\limits_a^b g$ сходится $\Rightarrow$ см. первый пункт — противоречие.

□

Замечание. 1. Неравенство $f \leqslant g$ может выполняться лишь для аргументов, близких к b.

2. Неравенство $f \leqslant g$ можно заменить на $f = \mathcal{O}(g)$.

   $f = \mathcal{O}(g) \implies f \leqslant cg$. $\int\limits_a^b g$ сходится $\implies \int\limits_a^b cg$ сходится $\implies \int\limits_a^b f$ – сходится.

3. Если $f = \mathcal{O}(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}})$ для $\varepsilon > 0$, то $\int\limits_a^{+\infty} f$ — сходится.

   $f \in C[a, +\infty), g(x) = \frac{1}{x^{1+\varepsilon}}$ и можно считать, что $a \geqslant 1$ $\int\limits_1^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ — сходится.

Следствие. $f, g \in C[a,b)$, $f, g \geqslant 0$ и $f(x) \sim g(x)$ при $x \to b-$. Тогда $\int\limits_a^b f$ и $\int\limits_a^b g$ ведут себя одинаково (либо оба сходятся, либо оба расходятся).

Доказательство. $f \sim g \implies f = \varphi \cdot g$, где $\varphi(x) \xrightarrow{x\to b-} 1 \implies$ в окрестности b $\frac{1}{2} \leqslant \varphi \leqslant 2 \implies f \leqslant 2g \wedge g \leqslant 2f$ в окрестности $b \implies$ из сходимости $\int\limits_a^b g$ следует сходимость $\int\limits_a^b f$, и наоборот. □

Билет 23

***Определение* 23.1.** $f \in C[a,b)$. $\int\limits_a^b f$ абсолютно сходится, если $\int\limits_a^b |f|$ сходится.

Теорема 23.1. $\int\limits_a^b f$ сходится абсолютно $\implies \int\limits_a^b f$ сходится.

Доказательство. $f = f_+ - f_-$, $|f| = f_+ + f_-$. $|f| \geqslant f_\pm \geqslant 0$. Если $\int\limits_a^b f$ сходится абсолютно $\implies \int\limits_a^b |f|$ сходится $\Rightarrow \int\limits_a^b f_\pm$ сходится $\implies \int\limits_a^b f = \int\limits_a^b f_+ - \int\limits_a^b f_-$ сходится. □

Теорема 23.2 (Признак Дирихле)**.** $f, g \in C[a, +\infty)$. Если

1. f имеет ограниченную первообразную на $[a, +\infty)$ (то есть $\left|\int\limits_a^y f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant K \quad \forall y$)
2. g монотонна
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$

$\Rightarrow$ то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ сходится.

Доказательство. Только для случая $g \in C^1[a; +\infty)$.

Надо доказать, что $\exists$ конечный $\lim\limits_{y\to+\infty} \int\limits_a^y f(x)g(x)\mathrm{d}x$, $F(y) \coloneqq \int\limits_a^y f(x)\mathrm{d}x$.

$$\int\limits_a^y f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^y F'(x)g(x)\mathrm{d}x = F(x)g(x)\Big|_a^y - \int_a^y F(x)g'(x)\mathrm{d}x = F(y)g(y) - \int_a^y F(x)g'(x)\mathrm{d}x.$$

Чтобы доказать существование предела у разности каких-то штук, нужно доказать, что он существует у них по отдельности.

$\lim\limits_{y\to+\infty} F(y)g(y) = 0$ — произведение бесконечно малой и ограниченной функции.

Хотим показать, что $\int\limits_a^y F(x)g'(x)\mathrm{d}x$ имеет конечный lim, то есть $\int\limits_a^{+\infty} F(x)g'(x)\mathrm{d}x$ сходится.

Тогда докажем, что он абсолютно сходится. $\int\limits_a^{+\infty} |F(x)||g'(x)|\mathrm{d}x$, $|F(x)||g'(x)| \leqslant K|g'(x)| = Kg'(x)$. (считаем, что $g(x)$ возрастает) $\int_a^{+\infty} g'(x)\mathrm{d}x = g\ |_a^{+\infty} = \lim\limits_{y\to+\infty} g(y) - g(a) = -g(a) \implies$ сходится. □

Теорема 23.3 (Признак Абеля)**.** $f, g \in C[a, +\infty)$, Если

1. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)$dx сходится
2. g монотонна
3. g ограничена

$\Rightarrow$ то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ сходится.

Доказательство. $2)+3) \implies g$ имеет конечный предел $l \in \mathbb{R} \coloneqq \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

Пусть $\widetilde{g}(x) \coloneqq g(x) - l \implies \lim\limits_{x\to+\infty} \widetilde{g}(x) = 0$ и $\widetilde{g}$ монотонна.

Пусть $F(x) \coloneqq \int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t$. Тогда 1) $\iff$ существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) \implies F$ ограничена.

Тогда f и $\widetilde{g}$ удовлетворяют условиям признака Дирихле $\implies \int\limits_a^{+\infty} f(x)\widetilde{g}(x)\mathrm{d}x$ — сходится. Тогда:

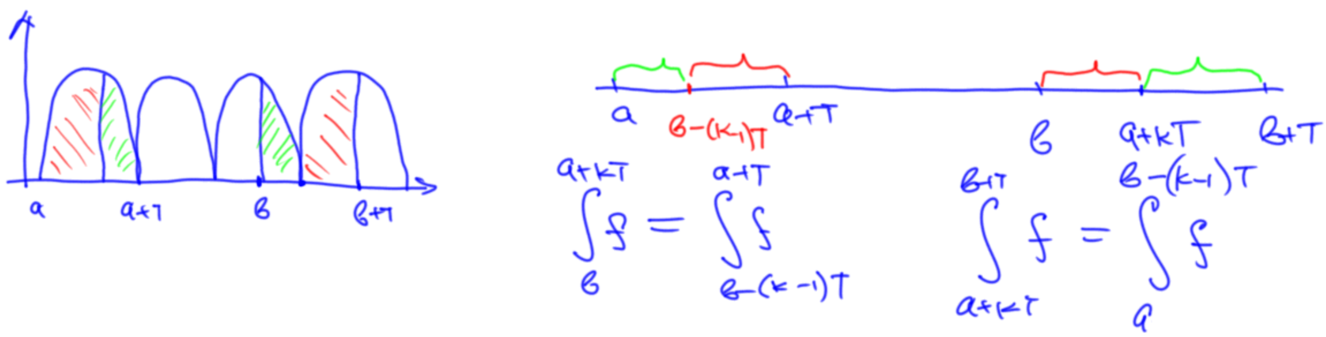
$$\int\limits_a^{+\infty} fg = \int\limits_a^{+\infty} f(\widetilde{g}+l) = \int\limits_a^{+\infty} f\widetilde{g} + l\int\limits_a^{+\infty} f.$$

Где $\int\limits_a^{+\infty} f\widetilde{g}$ сходится по доказанному, а $\int\limits_a^{+\infty} f$ — по условию. $\square$

Билет 24

Утверждение 24.1. f — периодическая функция с периодом T. Тогда неважно, по какому периоду интегрировать$\Rightarrow \int\limits_a^{a+T} f = \int\limits_b^{b+T} f$

Доказательство. см. картинку:



$\int\limits_b^{a+kT} f = \int_{b-(k-1)T}^{a+T} f$. $\int\limits_{a+kT}^{b+T} f = \int\limits_a^{b-(k-1)T} f$ $\square$

Следствие. $f, g \in C[a; +\infty)$, f — периодическая с периодом T, g монотонная и $g \xrightarrow{x\to+\infty} 0$ $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ расходится.

Тогда $\int\limits_a^{+\infty} fg$ сходится $\iff$ $\int\limits_a^{a+T} f = 0$.

Доказательство. $\Leftarrow$. $F(x) = \int\limits_a^x f$ — периодична с периодом T:

$F(x+T) = \int\limits_a^{x+T} f = \int\limits_a^x f + \underbrace{\int\limits_x^{x+T} f}_{=0} = F(x)$. F — непрерывна и периодична $\implies$ ограничена $\implies$ $\int\limits_a^{+\infty} fg$ сходится по признаку Дирихле.

$\Rightarrow$. Пусть $\int\limits_a^{a+T} f =: K \neq 0$. $\widetilde{f}(x) =: f(x) - \frac{K}{T}$ — периодична с периодом T. Тогда $\int\limits_a^{a+T} \widetilde{f} = \int\limits_a^{a+T} (f - \frac{K}{T}) = K - T \cdot \frac{K}{T} = 0 \implies \int\limits_a^{+\infty} \widetilde{f}g$ сходится.

Тогда $\int\limits_a^{+\infty} fg = \int\limits_a^{+\infty} (\widetilde{f} + \frac{K}{T})g = \int\limits_a^{+\infty} \widetilde{f}g + \frac{K}{T} \int\limits_a^{+\infty} g \implies \int\limits_a^{+\infty} fg$ расходится как сумма сходящегося и расходящегося. □

Пример. Рассмотрим $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$.

1. $p > 1$ интеграл сходится абсолютно: $|\sin x| \leqslant 1 \implies \left|\frac{\sin x}{x^p}\right| \leqslant \frac{1}{x^p}$, а значит $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ сходится.

2. $0 < p \leqslant 1$ интеграл сходится, но не абсолютно. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ — расходится, $\frac{1}{x^p} \searrow 0$.

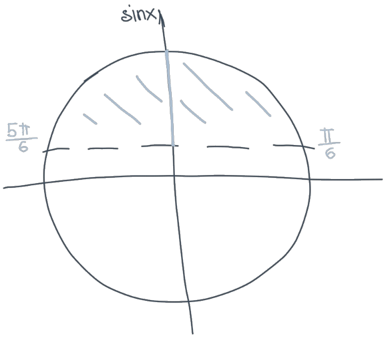
   $g(x) \coloneqq \frac{1}{x^p}, f(x) \coloneqq \sin x$. $\int\limits_0^{2\pi} \sin x\mathrm{d}x = 0 \implies \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$ сходится.

   Если взять $f(x) = |\sin x|$, то интеграл по периоду равен 4 $(\int\limits_0^{2\pi} |\sin x|\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^{\pi} \sin x\mathrm{d}x = 4)$. Значит исходный интеграл расходится.

3. $p \leqslant 0$ интеграл расходится.

   $a_n := \frac{\pi}{6} + 2\pi n, b_n := \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$. Тогда $\int\limits_{a_n}^{b_n} \frac{\sin x}{x^p} \mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{2} \int\limits_{a_n}^{b_n} \frac{\mathrm{d}x}{x^p} \geqslant \frac{1}{2} \int\limits_{a_n}^{b_n} \mathrm{d}x = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{\pi}{3}$.

   Предъявили сколь угодно далеко такие отрезки, что интеграл по ним превосходит $\frac{\pi}{3}$ — это отрицание критерия Коши.



Билет 25

***Определение* 25.1.** Метрика (расстояние) $\rho\colon X \times X \to [0; +\infty)$, если выполняются следующие условия:

1. $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$,
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
3. (неравенство треугольника) $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

***Определение* 25.2.** Метрическое пространство — пара (X, ρ).

Пример. Дискретная метрика (метрика Лентяя) $\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$

Пример. На $\mathbb{R}$: $\rho(x, y) = |x - y|$.

Пример. На $\mathbb{R}^d$: $\rho(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{d} (x_k - y_k)^2}$. Неравенство треугольника здесь — неравенство Минковского.

Пример. $C[a, b]$. $\rho(f, g) = \int\limits_a^b |f - g|$.

Неравенство треугольника:

$$\rho(f, h) = \int\limits_a^b |f - h| \overset{(*)}{\leqslant} \int_a^b (|f - g| + |g - h|) = \rho(f, g) + \rho(g, h).$$

$(*) \iff |f(x) - h(x)| \leqslant |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|$ — неравенство треугольника для $(\mathbb{R}, |x - y|)$.

Пример. Манхэтеннская метрика: $\mathbb{R}^2$, $\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$.

Пример. Французская железнодорожная метрика. $\mathbb{R}^2$. Есть точка P (Париж), тогда $\rho(A,B) = AB$, если A, B, P на одной прямой, иначе $\rho(A,B) = |AP| + |PB|$.

***Определение* 25.3.** (X, ρ) — метрическое пространство. $B_r(x) \coloneqq \{y \in X \mid \rho(x,y) < r\}$ — открытый шар радиуса r с центром в точке x.

***Определение* 25.4.** (X, ρ) — метрическое пространство. $\overline{B}_r(x) \coloneqq \{y \in X \mid \rho(x,y) \leqslant r\}$ — закрытый шар радиуса r с центром в точке x.

Свойства. 1. $B_{r_1}(a) \cap B_{r_2}(a) = B_{\min\{r_1,r_2\}}(a)$.

2. $x \neq y \implies \exists r > 0\colon B_r(x) \cap B_r(y) = \varnothing \wedge \overline{B}_r(x) \cap \overline{B}_r(y) = \varnothing$.

Доказательство. 1. $x \in B_{r_1}(a) \cap B_{r_2}(a) \iff \begin{cases} \rho(x,a) < r_1 \\ \rho(x,a) < r_2 \end{cases} \iff \rho(x,a) < \min\{r_1, r_2\} \implies$ $x \in B_{\min\{r_1,r_2\}}(a)$.

2. $r \coloneqq \frac{1}{3}\rho(x,y) > 0$. Пусть $\overline{B}_r(x) \cap \overline{B}_r(y) \neq \varnothing$.

   Тогда $\exists z \in \overline{B}_r(x) \cap \overline{B}_r(y) \implies \rho(x,z) \leqslant r \wedge \rho(y,z) \leqslant r \implies \rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y) \leqslant 2r = \frac{2}{3}\rho(x,y) \implies 1 \leqslant \frac{2}{3}$. Противоречие.

   При этом, $B_r(x) \subset \overline{B}_r(x) \implies \exists r\colon B_r(x) \cap B_r(y) = \varnothing$.

□

Билет 26

***Определение* 26.1.** $A \subset X$. A — открытое множество, если $\forall a \in A \exists B_r(a) \subset A$ $(r > 0)$.

Теорема 26.1 (О свойствах открытых множеств)**.** 1. $\varnothing, X$ — открытые.

2. Объединение любого числа открытых множеств — открытое.
3. Пересечение конечного числа открытых множеств — открытое.
4. $B_R(a)$ — открытое.

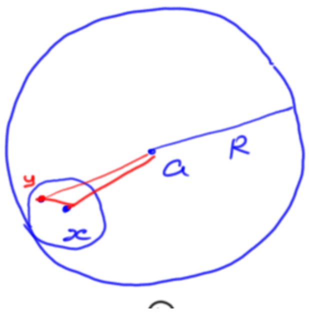
Доказательство. 2. A_α — открытые, $\alpha \in I$. $B =: \bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$. Берем $b \in B \implies b \in A_\beta$ для некоторого β. Но A_β — открытое $\implies \exists r > 0 \quad B_r(b) \subset A_\beta \subset B$.

3. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — открытые. $B \coloneqq \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$. Берем $b \in B \implies b \in A_k \forall k = 1, 2, \ldots, n$. Но A_k — открытое $\implies \exists r_k > 0 B_{r_k} \subset A_k$. $\forall k$ $B_{r_k}(b) \subset \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k = B \implies \exists r = \min\limits_{i=1..k} r_k\colon B_r(b) \subset B$ $\forall b \in B \implies B$ — открытое.

4. $\rho(a,x) < R$, $r \coloneqq R - \rho(a,x) > 0$. Докажем, что $B_r(x) \subset B_R(a)$. Возьмем $y \in B_r(x)$, то есть $\rho(x,y) < r \implies \rho(y,a) \leqslant \rho(y,x) + \rho(x,a) < r + \rho(x,a) = R \implies y \in B_R(a)$.

□

Замечание. Существенна конечность. $\mathbb{R}$. $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n}, 1) = [0, 1)$. А для нуля любой открытый шарик плохой.



Билет 27

***Определение* 27.1.** $A \subset X$, $a \in A$. a — внутренняя точка множества A, если $\exists r > 0\colon B_r(a) \subset A$.

Замечание. A — открытое $\iff$ все его точки внутренние.

***Определение* 27.2.** Внутренность множества $\operatorname{Int} a \coloneqq \{a \in A \mid a$ — внутренняя точка$\}$.

Пример. $A = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Тогда $\operatorname{Int} A = (0, 1)$.

Свойства внутренности. 1. $\operatorname{Int} A \subset A$.

2. $\operatorname{Int} A$ — $\bigcup$ всех открытых множеств, которые содержатся в A.
3. $\operatorname{Int} A$ — открытое множество.
4. A — открытое $\iff A = \operatorname{Int} A$.
5. Если $A \subset B$, то $\operatorname{Int} A \subset \operatorname{Int} B$.
6. $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$
7. $\operatorname{Int}(\operatorname{Int} A) = \operatorname{Int} A$.

Доказательство.

2. $B \coloneqq \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$, $A_\alpha \subset A$, A_α открытые.

   $B \subset \operatorname{Int} A$. Берем $b \in B \implies \exists \beta \in I\colon b \in A_\beta$ — открытое $\implies \exists r > 0\colon B_r(b) \subset A_\beta \subset A \implies b$ — внутренняя точка $A \implies b \in \operatorname{Int} A$.

   $\operatorname{Int} A \subset B$. Берем $b \in \operatorname{Int} A \implies \exists r > 0 B_r(b) \subset A$, но $B_r(b)$ — открытое множество $\implies$ оно участвует в объединении $\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha \implies B_r(b) \subset B \implies b \in B$.

4. $\Leftarrow$: пользуемся пунктом 3.
   $\Rightarrow$: всего его точки внутренние $\implies A = \operatorname{Int} A$.

6. $\subset$: $A \cap B \subset A, \subset B \implies \operatorname{Int}(A \cap B) \subset \operatorname{Int} A \land \operatorname{Int}(A \cap B) \subset \operatorname{Int} B$.

   $\supset$. Пусть $x \in \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B \implies \begin{cases} \exists r_1 > 0 & B_{r_1}(x) \subset A \\ \exists r_2 > 0 & B_{r_2}(x) \subset B \end{cases} \implies$ если $r = \min\{r_1, r_2\} \implies$ $B_r(x) \subset A \land B_r(x) \subset B \implies B_r(x) \subset A \cap B \implies x \in \operatorname{Int}(A \cap B)$.

7. $B \coloneqq \operatorname{Int} A$ — открытое $\implies B = \operatorname{Int} B$.

$\square$

Билет 28

***Определение* 28.1.** $A \subset X$. A — замкнутое, если $X \setminus A$ — открытое.

Теорема 28.1 (о свойствах замкнутых множеств). 1. $\varnothing, X$ — замкнуты.

2. Пересечение любого числа замкнутых множеств — замкнуто.
3. Объединение конечного числа замкнутых множеств — замкнуто.
4. $\overline{B}_R(a)$ — замкнуто.

Доказательство. 2. A_α — замкнуты $\implies X \setminus A_\alpha$ — открытые $\implies \bigcup\limits_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha$ — открыто $\implies X \setminus \bigcup\limits_{\alpha \in I}(X \setminus A_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ — замкнутое.

4. $X \setminus \overline{B}_R(a)$ — открытое. Берем $x \notin \overline{B}_R(a)$. Возьмем $r := \rho(a,x) - R > 0$. Покажем, что $B_r(x) \subset X \setminus \overline{B_R}(a)$.

   От противного. Пусть $B_r(x) \cap \overline{B}_R(a) \neq \varnothing$. Берем $y \in B_r(x) \cap \overline{B}_R(a) \implies \rho(x,y) < r \wedge \rho(a,y) \leqslant R \implies \rho(a,x) \leqslant \rho(a,y) + \rho(y,x) < R + r = \rho(a,x)$. Противоречие.

$\square$

Замечание. В 3 важна конечность. $\mathbb{R}$. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{n}, 1] = (0,1]$ — не является замкнутой.

***Определение* 28.2.** Замыкание множества $\operatorname{Cl} A$ — пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A.

Теорема 28.2. $X \setminus \operatorname{Cl} A = \operatorname{Int}(X \setminus A)$ и $X \setminus \operatorname{Int} A = \operatorname{Cl}(X \setminus A)$.

Доказательство. $\operatorname{Int}(X \setminus A) = \bigcup B_\alpha$. B_α — открытые, $B_\alpha \subset X \setminus A \iff X \setminus B_\alpha$ — замкнутое. $X \setminus B_\alpha \supset A$.

$\bigcap(X \setminus B_\alpha) = \operatorname{Cl} A \implies X \setminus \bigcap(X \setminus B_\alpha) = X \setminus \operatorname{Cl} A \iff \bigcup(B_\alpha) = \operatorname{Int}(X \setminus A)$. $\square$

Следствие. $\operatorname{Int} A = X \setminus Cl(X \setminus A)$ и $\operatorname{Cl} A = X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A)$.

Свойства. 1. $\operatorname{Cl} A \supset A$.

2. $\operatorname{Cl} A$ — замкнутое множество.
3. A — замкнуто $\iff A = \operatorname{Cl} A$.

   Доказательство. $\Leftarrow$ — пункт 2. $\Rightarrow$ A — замкнутое $\Rightarrow$ оно участвует в пересечении из определения $\implies \operatorname{Cl} A \subset A \implies \operatorname{Cl} A = A$. $\square$

4. $A \subset B \implies \operatorname{Cl} A \subset \operatorname{Cl} B$.

   Доказательство. $X \setminus A \supset X \setminus B \implies \operatorname{Int}(X \setminus A) \supset \operatorname{Int}(C \setminus B) \implies X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A) \subset X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus B)$ $\square$

5. $\operatorname{Cl}(A \cup B) = \operatorname{Cl} A \cup \operatorname{Cl} B$.
6. $\operatorname{Cl}(\operatorname{Cl} A) = \operatorname{Cl} A$.

Доказательство. $B \coloneqq \operatorname{Cl} A$ — замкнуто $\implies \operatorname{Cl} B = B$. □

Упражнение. $\operatorname{Cl}\operatorname{Int}\operatorname{Cl}\operatorname{Int}\ldots A$. Какое наибольшее количество различных множеств может получиться.

Теорема 28.3. $x \in \operatorname{Cl} A \iff \forall r > 0 \quad B_r(x) \cap A \neq \varnothing$.

Доказательство. Запишем отрицание условия теоремы: $x \notin \operatorname{Cl} A \iff \exists r > 0 B_r(x) \cap A = \varnothing$.

Что означает, что $x \notin A$? Это значит, что $x \in X \setminus \operatorname{Cl} A = \operatorname{Int}(X \setminus A) \iff x \in \operatorname{Int}(X \setminus A) \iff x$ — внутренняя точка $X \setminus A \iff \exists r > 0\colon B_r(x) \cap A = \varnothing \iff \exists r > 0\colon B_r(x) \subset X \setminus A$. □

Следствие. U — открытое, $U \cap A = \varnothing \implies U \cap \operatorname{Cl} A = \varnothing$.

Доказательство. Возьмем $x \in U \implies \exists r > 0 : B_r(x) \subset U \implies B_r(x) \cap A = \varnothing \implies x \notin \operatorname{Cl} A \implies U \cap \operatorname{Cl} A = \varnothing$. □

Билет 29

***Определение* 29.1.** Окрестностью точки x будем называть шар $B_r(x)$ для некоторого $r > 0$. Обозначать будем U_x

***Определение* 29.2.** Проколотой окрестностью точки x — $B_r(x) \setminus \{x\}$. Обозначать будем $\dot{U}_x$.

***Определение* 29.3.** x — предельная точка множества A, если $\forall \dot{U}_x \colon \dot{U}_x \cap A \neq \varnothing$.

Обозначим через A' — множество предельных точек для A.

Свойства.

1. $\operatorname{Cl} A = A \cup A'$.

   Доказательство. $x \in \operatorname{Cl} A \iff \forall U_x \colon U_x \cap A \neq \varnothing \iff \left[\begin{array}{l} x \in A \\ \forall \dot{U}_x \cap A \neq \varnothing \iff x \in A' \end{array}\right.$ □

2. $A \subset B \implies A' \subset B'$. Очевидно.

3. A — замкнуто $\iff A \supset A'$.

   Доказательство. A — замкнуто $\iff A = \operatorname{Cl} A \iff A = A \cup A' \iff A \supset A'$. □

4. $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

   Доказательство. Докажем "$\subset$". Возьмем $x \in (A \cup B)' \colon x \notin A' \implies \exists \dot{U}_x \colon \dot{U}_x \cap A = \varnothing$, но $\dot{U}_x \cap (A \cup B) \neq \varnothing \implies \dot{U}_x \cap B \neq \varnothing \implies x \in B'$.

   Докажем "$\supset$". $A \cup B \supset A \implies (A \cup B)' \supset A'$. Провернем тот же фокус для B, получим $(A \cup B)' \supset A' \cup B'$. □

Теорема 29.1. $x \in A' \iff \forall r > 0\ B_r(x)$ содержит бесконечное количество точек из A.

Доказательство. Докажем "$\Leftarrow$". $B_r(x)\cap A$ содержит бесконечное количество точек $\implies \dot{B}_r(x)\cap A$ содержит бесконечное число точек $\implies \dot{B}_r(x)\cap A\neq\varnothing \Rightarrow x\in A'$.

"$\Rightarrow$". Возьмем радиус r. Тогда $\dot{B}_r(x)\cap A\neq\varnothing \implies \exists x_1\in A: 0<\rho(x,x_1)<r$. Возьмем $r=\rho(x,x_1)$ $\dot{B}_r(x)\cap A\neq\varnothing \implies \exists x_2\in A\colon 0<\rho(x,x_2)<\rho(x,x_1)$. Тогда можно взять $r=\rho(x,x_2)$, и так далее.

В итоге получили, что $r>\rho(x,x_1)>\rho(x,x_2)>\rho(x,x_3)>\ldots>0 \implies$ все x_n различны. $\square$

Следствие. Конечное множество не имеет предельных точек.

Доказательство. Предположим предельная точка существует $\iff \exists r>0\colon B_r(x)\cap A$ содержит бесконечное количество точек. Но это невозможно, так как в A конечное число точек. $\square$

Билет 30

***Определение* 30.1.** (X,ρ) — метрическое пространство $Y\subset X$.

Тогда $(Y,\rho\mid_{Y\times Y})$ — подпространство метрического пространства (X,ρ).

Пример. $(\mathbb{R},|x-y|)$. $Y=[a,b]\subset\mathbb{R}$, например, $Y=[0,1]$.

$B_1(1)=(0,1], B_2(0)=[0,1]$. $B_r^Y(a)=Y\cap B_r^X(a)$. (B_r^A- шарик радиуса r на множестве A)

Теорема 30.1 (об открытых и замкнутых множества в пространстве и подпространстве)**.** (X,ρ) — метрическое пространство, (Y,ρ) — его подпространство, $A\subset Y$. Тогда

1. A — открыто в $Y \iff \exists G$ — открытое в $X\colon A=G\cap Y$.
2. A — замкнуто в $Y \iff \exists F$ — замкнутое в $X\colon A=F\cap Y$.

Доказательство.

1. "$\Rightarrow$" A — открыто в $Y \implies \forall x\in A\exists r_x>0\colon B_{r_x}^Y(x)\subset A \implies A=\bigcup\limits_{x\in A}B_{r_x}^Y(x)$.

   То есть наше множество будет объединением большего числа шариков (возможно бесконечного). Найдем теперь G: $G:=\bigcup\limits_{x\in A}B_{r_x}^X(x)$ — открыто. Посмотрим теперь на $G\cap Y=\bigcup\limits_{x\in A}(B_{r_x}^X(x)\cap Y)=\bigcup\limits_{x\in A}B_{r_x}^Y(x)=A$.

   В обратную сторону. Пусть $A=G\cap Y$, где G открыто в X. Возьмем $x\in G\cap Y$. G — открыто в $X \implies \forall x\in G\cap Y\exists r>0\colon B_r^X(x)\subset G \implies B_r^X(x)\cap Y\subset G\cap Y=A \implies B_r^Y(x)\subset A \implies x$ — внутренняя точка $A \implies A$ — открыто в Y.

2. A — замкнуто в $Y \iff Y\setminus A$ — открыто в $Y \iff \exists G$ — открытое в X, такое что $Y\setminus A=Y\cap G \iff A=Y\setminus(Y\cap G)\overset{(1)}{=}Y\setminus G\overset{(2)}{=}Y\cap(X\setminus G) \iff \exists G$ — открытое в X, такое что $A=Y\cap(X\setminus G) \iff \exists F$ — замкнуто в X, такое что $A=Y\cap F$.

   (1) — Можно забить на пересечение с Y, потому что, если элемент G не лежит в Y, то и в $Y\setminus G$ он участия не принимает. (2) — Помним, что $Y\subset X$, а значит такая операция корректна.

$\square$

Пример. $(\mathbb{R}, |x-y|)$. $Y = [0,3)$. $[0,1)$ — открыто в $[0,3)$: $[0,1) = [0,3) \cap (-1,-1)$. $[2,3)$ — замкнуто в $[0,3)$: $[2,3) = [0,3) \cap [2,3]$.

Билет 31

***Определение* 31.1.** X — векторное пространство над $\mathbb{R}$.

$\|.\|\colon X \to \mathbb{R}$ — норма, если

1. $\|x\| \geqslant 0 \quad \forall x \in X$ и $\|x\| = 0 \iff x = \overrightarrow{0}$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \forall x \in X\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
3. (неравенство треугольника): $\forall x, y\colon \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Пример.

1. $|x|$ в $\mathbb{R}$,
2. $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_d|$ в $\mathbb{R}^d$.
3. $\|x\|_\infty = \max\limits_{k=1,2,\ldots,d} |x_k|$.
   Неравенство треугольника: $\|x+y\|_\infty = \max\{|x_k| + |y_k|\} \leqslant \max\{|x_k|\} + \max\{|y_k|\} = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$
4. $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$.
5. $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{k=1}^{d} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ в $\mathbb{R}^d$ при $p \geqslant 1$. Неравенство треугольника — неравенство Минковского.
6. $C[a,b]$. $\|f\| = \max\limits_{t \in [a,b]} |f(t)|$.

***Определение* 31.2.** X векторное пространство над $\mathbb{R}$. $\langle .,. \rangle\colon X \times X \to \mathbb{R}$ скалярное произведение, если

1. $\langle x, x\rangle \geqslant 0$ и $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = \overrightarrow{0}$.
2. $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$
3. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$.
4. $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

Пример.

1. $\mathbb{R}^d$. $\langle x, y\rangle = \sum x_i y_i$.
2. Возьмем $w_1, \ldots, w_d > 0$. Тогда $\langle x, y\rangle = \sum w_i x_i y_i$.
3. $C[a,b]$. $\langle f, g\rangle = \int\limits_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

Свойства.

1. Неравенство Коши-Буняковского. $\langle x, y\rangle^2 \leqslant \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle$.

   Доказательство. $f(t) \coloneqq \langle x+ty, x+ty\rangle \geqslant 0$. $f(t) = \langle x, x\rangle + t\langle x, y\rangle + t\langle x, y\rangle + t^2\langle y, y\rangle = t^2\langle y, y\rangle + 2t\langle x, y\rangle + \langle x, y\rangle$ — квадратный трехчлен (если $\langle y, y\rangle = 0 \implies y = 0 \implies$ везде нули). Тогда $0 \geqslant D = (\langle x, y\rangle)^2 - 4\langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle = 4(\langle x, y\rangle^2 - \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle)$. Потому что иначе есть два корня и где-то есть отрицательное значение, а $f(t) \geq 0$. □

2. $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ — норма.

   Доказательство. $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda^2\langle x, x\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle x, x\rangle} = |\lambda|\cdot\|x\|$.

   Неравенство треугольника: $\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|$. Возведем в квадрат, получим $\langle x+y, x+y\rangle \leqslant \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + 2\sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle}$, но теперь вспомним, что $\langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + 2\langle x, y\rangle$. А, сократив общие слагаемые, получим доказанное неравенство Коши-Буняковского. □

3. $\rho(x, y) = \|x - y\|$ — метрика.

   Доказательство. $\rho(x, y) \geqslant 0$. $\rho(x, y) = 0 \iff \|x - y\| = 0 \iff x - y = \overrightarrow{0} \iff x = y$.

   $\rho(y, x) = \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = |-1|\|x - y\| = \rho(x, y)$.

   $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$: $\|(x - y) + (y - z)\| = \|x - z\| \leqslant \|x - y\| + \|y - z\|$. □

4. $\|x - y\| \geqslant |\|x\| - \|y\||$.

   Доказательство. Надо доказать, что $-\|x - y\| \leqslant \|x\| - \|y\| \leqslant \|x - y\|$.

   Левое: $\|y\| = \|(y - x) + x\| \leqslant \|y - x\| + \|x\|$

   Правое: $\|x\| = \|(x - y) + y\| \leqslant \|x - y\| + \|y\|$

   □

5. Упражненение. Если норма порождается скалярным произведением $\iff \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$. Тождество параллелограмма.

Билет 32

Определение 32.1. (X, ρ) — метрическое пространство. $x_1, x_2, \ldots \in X, a \in X$.

$\lim x_n = a$, если

1. Вне любого открытого шара с центром в точке a содержится лишь конечное число членов последовательности.
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geqslant N \quad \rho(x_n, a) < \varepsilon \iff x_n \in B_\varepsilon(a)$.

Определение 32.2. $A \subset X$.

Тогда A — ограничено, если оно содержится в некотором шаре.

Свойства.

1. $a = \lim x \iff \rho(x_n, a) \to 0$.

   Доказательство. $\forall \varepsilon > 0 \exists n > N \quad |\rho(x_n, a)| < \varepsilon$ — предел равен 0. □

2. Предел единственный.

   Доказательство. Пусть $a = \lim x_n$ и $b = \lim x_n$. Тогда возьмем шарики такие, что $B_r(a) \cap B_r(b) = \varnothing \implies \exists N_1, N_2, \forall n \geqslant \max\{N_1, N_2\}\ x_n \in B_r(a) \land x_n \in B_r(b)$ — противоречие. □

3. Если $a = \lim x_n, a = \lim y_n$. То для перемешанной последовательности x_n и y_n предел такой же.

4. $a = \lim x_n \implies$ для последовательности, в которой x_n взяты с конечной кратностью, a будет пределом.

5. Если $a = \lim x_n$, то $\lim x_{n_k} = a$.

6. Последовательность имеет предел $\implies$ она ограничена

   Доказательство. $\varepsilon = 1 \exists N \forall n \geqslant N \rho(x_n, a) < 1$. Тогда $R = \max\{\rho(x_1, a), \dots, \rho(x_{N-1}, a)\} + 1 \implies x_n \in B_R(a)$. $\square$

7. Если $a = \lim x_n$, то последовательность, полученная из $\{x_n\}$ перестановкой членов имеет тот же предел.

8. a — предельная точка $A \iff \exists \{x_n\} \neq a \in A\colon \lim x_n = a$.

   Более того, x_n можно выбирать так, что $\rho(x_n, a)$ строго убывает.

   Доказательство. "$\Leftarrow$" Пусть $\lim x_n = a$. Возьмем $B_r(a) \implies \exists N \forall n \geqslant N x_n \in B_r(a) \implies \exists x_n \in \dot{B}_r(a) \implies \dot{B}_r(a) \cap A \neq \varnothing \implies a$ — предельная точка.

   "$\Rightarrow$" Берем $r_1 = 1$. $\dot{B}_{r_1}(a) \cap A \neq \varnothing$. Берем оттуда точку, называем $x_1 \neq a$. $r_2 = \frac{\rho(x_1, a)}{2}$. $\dot{B}_{r_2}(a) \cap A \neq \varnothing$. Берем оттуда точку $x_3 \neq a$. $r_3 = \frac{\rho(x_2, a)}{2}$. И так далее.

   Получили: $x_n \neq a$ и $\rho(x_n, a) < \frac{\rho(x_{n-1}, a)}{2} < \rho(x_{n-1}, a)$. $\rho(x_n, a) < \frac{1}{2^n} \to 0 \implies x_n = a$. $\square$

Билет 33

Теорема 33.1 (об арифметических действиях с пределами)**.** X — нормированное пространство, $x_n, y_n \in X$, $\lambda_n \in \mathbb{R}$. $\lim x_n = a, \lim y_n = b, \lim \lambda_n = \mu$. Тогда:

1. $\lim(x_n + y_n) = a + b$.

2. $\lim(x_n - y_n) = a - b$.

3. $\lim \lambda_n x_n = \mu a$.

4. $\lim \|x_n\| = \|a\|$.

5. Если в X есть скалярное произведение, то $\lim\langle x_n, y_n\rangle = \langle a, b\rangle$.

Доказательство.

1. $\rho(x_n + y_n, a + b) = \|(x_n + y_n - (a + b))\| = \|(x_n - a) + (y_n - b)\| \leqslant \|x_n - a\| + \|y_n - b\| = \rho(x_n, a) + \rho(y_n, b) \to 0$.

2. Аналогично.

3. $\rho(\lambda_n x_n, \mu a) = \|\lambda_n x_n - \mu a\| = \|\lambda_n x_n - \lambda_n a + \lambda_n a - \mu a\| \leqslant \|\lambda_n x_n - \lambda_n a\| + \|\lambda_n a - \mu a\| = |\lambda_n| \|x_n - a\| + |\lambda_n - \mu| \|a\| \to 0$, так как $|\lambda_n|$ — ограниченная, $\|x_n - a\| = \rho(x_n - a) \to 0$, $|\lambda_n - \mu| \to 0$, $\|a\|$ — константа.

4. $|\|x_n\| - \|a\|| \leqslant \|x_n - a\| = \rho(x_n, a) \to 0 \implies \lim\|x_n\| = \|a\|$

5. $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) = \frac{1}{4}(\langle x+y, x+y\rangle - \langle x-y, x-y\rangle)$. Тогда получаем $4\langle x_n, y_n\rangle = \|x_n+y_n\|^2 - \|x_n-y_n\|^2 \to \|a+b\|^2 - \|a-b\|^2 = 4\langle a, b\rangle$.

□

***Определение* 33.1.** $\mathbb{R}^d$ — пространство с нормой $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_d^2}$.

***Определение* 33.2.** Покоординатная сходимость в $\mathbb{R}^d$:
$x_n \in \mathbb{R}^d$. $x_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(d)}) \xrightarrow{\text{покоординатно}} a = (a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(d)})$.

Теорема 33.2. в $\mathbb{R}^d$ сходимость по метрике и покоординатная сходимость совпадает.

Доказательство. Метрика $\implies$ покоординатная. $\rho(x_n, a) \to 0 \implies 0 \leqslant (x_n^{(1)} - a^{(1)})^2 + \ldots + (x_n^{(d)} - a^{(d)})^2 = \rho(x_n, a)^2 \to 0 \implies \lim(x_n^{(k)} - a^{(k)})^2 = 0 \implies \lim x_n^{(k)} = a^{(k)} \implies$ покоординатная сходимость.

Покоординатная $\implies$ метрика. Пусть $|x_n^{(k)} - a^{(k)}| \to 0 \quad \forall k \implies (x_n^{(k)} - a^{(k)})^2 \to 0 \implies \sum\limits_{k=1}^{d} (x_n^{(k)} - a^{(k)})^2 \to 0$. А так как $(\ldots)^2 = \rho(x_n, a)^2 \implies \rho(x_n, a) \to 0$. □

Билет 34

***Определение* 34.1.** $x_n \in X$ — фундаментальная последовательность, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n \geqslant N \colon \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Свойства.

1. Сходящаяся последовательность фундаментальна.
2. Фундаментальная последовательность ограничена.
3. Если у последовательности есть сходящаяся подпоследовательность, то последовательность имеет предел.

Доказательство. Упражнение! Утверждается, что так же, как и в пределах. □

***Определение* 34.2.** (x, ρ) — метрическое пространство — полное, если любая фундаментальная последовательность имеет предел.

Пример. $\mathbb{R}$:, $\rho(x, y) = |x - y|$ — полное.

Упражнение. (X, ρ) — полное метрическое пространство $X \supset Y$ замкнуто. Доказать, что (Y, ρ) — полное.

Упражнение. $(0, 1)$ не полное. $x_n = \frac{1}{n}$ — фундаментальная, но $\lim \frac{1}{n} = 0 \notin (0; 1)$.

Теорема 34.1. $\mathbb{R}^d$ — полное.

Доказательство. Пусть x_n — фундаментальная, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n \geqslant N \colon \rho(x_n, x_m) = \sqrt{(x_n^{(1)} - x_m^{(1)})^2 + \ldots + (x_n^{(d)} - x_m^{(d)})^2} < \varepsilon.$$

Но мы знаем, что $\rho(x_n, x_m) \geqslant |x_n^{(k)} - x_m^{(k)}|$, так как, могут быть еще координаты, а значит еще неотрицательные слагаемые.

Тогда заметим, что $x_n^{(k)}$ — фундаментальная $\implies \exists a^{(k)} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n^{(k)}$. Значит и x_n сходится к a покоординатно $\implies \rho(x_n, a) \to 0 \implies x_n$ сходится к a по метрике. □

Билет 35

***Определение* 35.1.** $A, U_\alpha, \alpha \in I$.

Множества U_α — покрытие множества A, если $A \subset \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$.

***Определение* 35.2.** Открытое покрытие — покрытие открытыми множествами.

***Определение* 35.3.** (X, ρ) — метрическое пространство, $K \subset X$.

K — компакт, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

***Определение* 35.4.** То есть для любого покрытия можно выбрать $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in I \colon K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$

Теорема 35.1 (Теорема о свойствах компактных множеств)**.**

1. $K \subset Y \subset X$. Тогда K — компакт в $(X, \rho) \iff K$ — компакт в (Y, ρ).
2. K — компакт $\implies K$ замкнуто и ограничено.
3. Замкнутое подмножество компакта — компакт.

Доказательство.

1. $\Leftarrow$. Пусть G_α покрытие K множествами, открытыми в X. Тогда $U_\alpha = G_\alpha \cap Y$ — открыты в Y и $K \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha \cap Y = (\bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha) \cap Y$.

   U_α — открытое покрытие в $(Y, \rho) \implies$ можно выделить конечное подпокрытие $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, такое что $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$ — конечное подпокрытие $G_\alpha \implies K$ компакт в (X, ρ).

   $\Rightarrow$. Воспользуемся тем же наблюдением: $U_\alpha = G_\alpha \cap Y$. Следовательно можно выбрать $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ в X и они же подойдут и в Y.

2. Ограниченность. Возьмем $a \in X$. Тогда $K \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n(a) = X$ — открытое покрытие K. Выделим конечное подпокрытие $K \subset \bigcup\limits_{n=1}^{N} B_n(a) \implies K \subset B_N(a) \implies K$ — ограничено.

   Замкнутость. Надо доказать, что $X \setminus K$ — открытое. Возьмем $a \in X \setminus K$ и $x \in K$ и докажем, что a лежит в $X \setminus K$ вместе с некоторым шариком.

   Пусть $U_x = B_{\frac{\rho(x,a)}{2}}(x)$. Причем он не пересекается с $B_x = B_{\frac{\rho(x,a)}{2}}(a)$. Возьмем тогда $K \subset \bigcup_{x \in K} U_x$ — открытое покрытие (поскольку каждый шарик точно покрывает свой центр и ещё что-то). Выделим конечное подпокрытие $K \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{x_i}$, $r = \min\{\frac{\rho(x_i,a)}{2}\}$. Тогда $B_r(a) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} B_{x_i}$. $B_r(a) \cap \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{x_i} = \varnothing \implies B_r(a) \cap K = \varnothing \implies B_r(a) \subset X \setminus K \implies a$ — внутренняя $X \cap K$.

3. Пусть $\widetilde{K}$ — компакт, K — замкнуто и $K \subset \widetilde{K}$.

   Рассмотрим открытое покрытие K U_α. Тогда $\widetilde{K}$ покрыто $(X \setminus K) \cup \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$ – открытое покрытие $\widetilde{K}$. Выделим конечное подпокрытие $X \setminus K, U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}$. $K \subset X \setminus K \cup \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} \implies K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$ — открытое множество, а значит K — компакт.

□

Билет 36

Теорема 36.1. K_α — семейство компактов, такое что пересечение любого конечного числа из них непусто. Тогда $\bigcap_{\alpha\in I} K_\alpha \neq \varnothing$.

Следствие. $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \ldots$ непустые компакты. Тогда $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n \neq \varnothing$.

Доказательство теоремы. От противного. Пусть $\bigcap\limits_{\alpha\in I} K_\alpha = \varnothing$. Зафиксируем компакт $K_0 \implies K_0 \cap \bigcap\limits_{\alpha\in I} K_\alpha = \varnothing \implies K_0 \subset X \setminus \bigcap\limits_{\alpha\in I} K_\alpha = \bigcup_{\alpha\in I} X \setminus K_\alpha$ — открытое покрытие K_0. Выделим конечное подпокрытие $K_0 \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} X \setminus K_{\alpha_i} = X \setminus \bigcap\limits_{i=1}^{n} K_{\alpha_i} \implies K_0 \cap \bigcap\limits_{i=1}^{n} K_{\alpha_i} = \varnothing$.??! □

Билет 37

***Определение* 37.1.** K — секвенциально компактное множество, если из любой последовательности точек из K можно выделить подпоследовательность, которая сходится к какой-то точке из K.

Пример. $[a, b] \in \mathbb{R}$ секвенциально компактно.

$x_n \in [a; b] \xRightarrow{\text{Т. Б-В}} \exists$ подпоследовательность x_{n_k}, имеющая предел $\implies \lim x_{n_k} \in [a, b]$, так как неравенства сохраняются.

Теорема 37.1. Бесконечное подмножество компакта имеет предельную точку.

Доказательство. K — компакт. $A \subset K$. Пусть $A' = \varnothing$. Тогда A — замкнуто $\implies$ A — компакт и ни одна из его точек не является предельной. $a \in A$ не предельная $\implies \exists r_a > 0\ \dot{B}_{r_a}(a) \cap A = \varnothing \implies B_{r_a}(a) \cap A = \{a\}$. Рассмотрим открытое покрытие $A \subset \bigcup_{a\in A} B_{r_a}(a)$, но их этого покрытия нельзя убрать ни одного множества, так как мы выбрали радиусы так, что каждый шар в пересечении с A дает только одну точку $\implies$ нет конечного подпокрытия $\implies$ противоречие. □

Следствие. Компактность $\implies$ секвенциальная компактность.

Доказательство. $x_1, x_2, \ldots \in K$. $D = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ — множество значений последовательности.

1. $|D| < +\infty \implies$ в последовательности есть элемент, повторяющийся бесконечно много раз, оставим только его — это нужная подпоследовательность.

2. $|D| = +\infty \implies$ у D есть предельная точка.

   Пусть a — предельная точка $D \implies$ найдутся различные $y_1, y_2, \ldots \in D$, такие что $\lim y_n = a$.

   Но y_i — это какой-то x_{n_i} $\lim x_{n_i} = a$. Осталось переставить x_{n_i} так, что получится последовательность. Ну, а так как K — замкнуто, то $a \in K$.

$\square$

Билет 38

Лемма (Лемма Лебега)**.** K — секвенциальный компакт, $K \subset \bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha$ — открытое покрытие.

Тогда $\exists r > 0 \colon \forall x \in K \quad B_r(x)$ целиком покрывается каким-то U_α.

Доказательство. От противного. Тогда $r = \frac{1}{n}$ не подходит $\implies \exists x_n \in K \colon B_{\frac{1}{n}}(x_n)$ не содержится целиком ни в каком U_α.

Выберем подпоследовательность x_{n_k}, такую что $\lim x_{n_k} = a \in K$.

Тогда $a \in U_\beta$ для некоторого $\beta \in I \implies \exists B_\varepsilon(a) \subset U_\beta$. Возьмем $N_1 \colon \forall k \geqslant N_1 \quad \rho(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$. А еще можно взять $N_2 \colon \forall k \geqslant N_2 \quad \frac{1}{n_k} < \frac{\varepsilon}{2}$. А значит $B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k}) \subset B_\varepsilon(a) \subset U_\beta$ при $k \geqslant \max\{N_1, N_2\}$?!!

Докажем $B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k}) \subset B_\varepsilon(a)$: Если $x \in B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k})$ $\rho(x_{n_k}, x) < \frac{1}{n_k} < \frac{\varepsilon}{2} \wedge \rho(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2} \implies \rho(x, a) \leqslant \rho(x_{n_k}, x) + \rho(a, x_{n_k}) < \varepsilon$ $\square$

Теорема 38.1. Компактность = секвенциальная компактность.

Доказательство. $\Leftarrow$ Пусть $K \subset \bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha$ — открытое покрытие. Возьмем $r > 0$ из леммы Лебега. Рассмотрим открытое покрытие $K \subset \bigcup\limits_{x\in K} B_r(x)$.

Достаточно из него выделить конечное подпокрытие. Возьмем $x_1 \in K$. Если $B_r(x_1) \supset K$, то выбрали конечное покрытие. Иначе берем $x_2 \in K \setminus B_r(x_1)$. Если объединение шариков $\supset K$, то выбрали конечное подпокрытие. Иначе продолжаем процесс: $x_n \in K \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} B_r(x_i)$. Если процесс оборвался, то выделили конечное подпокрытие.

Если он не оборвался, то мы построили последовательность $x_1, x_2, \ldots$. Причем $\rho(x_n, x_k) \geqslant r \forall n > k \implies \rho(x_i, x_j) \geqslant r \forall i \neq j$. Из такой последовательности не выбрать сходящуюся подпоследовательность, так как любая подпоследовательность не фундаментальная, - противоречие секвенциальной компактности. $\square$

Билет 39

***Определение* 39.1.** $A \subset X$. (X, ρ) — метрическая пространство.

$E \subset A$, ε-сеть множества A, если $\forall a \in A \exists x \in E \colon \rho(x, a) < \varepsilon$.

Конечная ε-сеть — E — конечное множество.

То есть $\{x_1, x_2, .., x_n\} \subset A$ — ε-сеть, если $\forall a \in A \exists k \quad \rho(a, x_k) < \varepsilon$.

***Определение* 39.2.** A — вполне ограничено, если $\forall \varepsilon > 0 \exists$ конечная ε-сеть A.

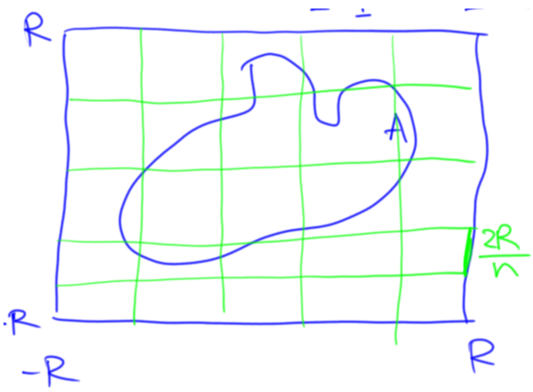
Свойства. 1. Вполне ограниченность $\implies$ ограниченность.

Доказательство. $\varepsilon = 1$ и конечная 1-сеть $x_1, x_2, \ldots, x_n$. $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_1(x_k) \subseteq B_{r+1}(x_1)$, где $r = \max\limits_{i\neq j} \rho(x_i, x_j)$. $\square$

2. В $\mathbb{R}^d$ ограниченность $\implies$ вполне ограниченность.

Доказательство. $A \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченное. $A \subset B_R(O) \subset [-R, R]^d$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и возьмем $n \in \mathbb{N}$. $\rho(x_i, a) \leqslant$ главная диагональ $= \sqrt{d}\frac{2R}{n} < \varepsilon$ при $n > \frac{\sqrt{d}2R}{\varepsilon}$ получается ε-сеть. $\square$



Билет 40

Теорема 40.1 (Хаусдорфа). 1. Компактное множество вполне ограничено.

2. Если (X, ρ) — полное метрическое пространство, то замкнутое вполне ограниченное подмножество X — компактно.

Доказательство. 1. Берем $\varepsilon > 0$ $K \subset \bigcup_{x \in K} B_\varepsilon(x)$ — открытое покрытие. Выделим конечное подпокрытие $\implies K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_\varepsilon(x_i) \implies x_1, \dots, x_n$ — ε-сеть.

2. Проверим секвенциальную компактность. Берем $x_1, x_2, \dots \in K$. Возьмем 1-сеть $K \subset \bigcup_{i=1}^{n_1} B_1(y_{1i})$. В каком-то шарике $B_1(z_1)$ бесконечное число членов последовательности. Выкинем все, кроме них, останутся $x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots$. Возьмем $\frac{1}{2}$-сеть. $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n_2} B_{\frac{1}{2}}(y_{2i})$. В каком-то шарике $B_{\frac{1}{2}(z_2)}$ бесконечное число членов последовательности...

На j-ом шаге $K \subset B_{\frac{1}{j}}(y_{ji})$. Пусть на каждом шаге выбирали шарик $B_{\frac{1}{i}}(z_i)$.

В итоге получили:

$$\begin{array}{cccccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & \dots & B_1(z_1) \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & \dots & B_{\frac{1}{2}}(z_2) \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & \dots & B_{\frac{1}{3}}(z_3) \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & \dots & B_{\frac{1}{4}}(z_4) \end{array}$$

Воспользуемся диагональным методом Кантора. Пусть $a_n := x_{nn}$. Заметим, что $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$ — подпоследовательность $x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, \dots \implies$ все лежат в $B_{\frac{1}{n}}(z_n) \implies \rho(a_i, a_j) \leqslant \rho(a_i, z_n) + \rho(a_j, z_n) < \frac{2}{n}$, при $i, j \geqslant n \implies a_i$ — фундаментальная $\implies$ у нее есть предел $\implies a = \lim a_n \in K$, так как K — замкнуто. Следовательно, K — секвенциально компактно.

$\square$

Следствие Характеристика компактов в $\mathbb{R}^d$***.*** K — компакт $\iff$ K — замкнуто и ограничено.

Доказательство. $\Rightarrow$ верна всегда и доказано выше.

А вот $\Leftarrow$ верна не всегда. Поэтому докажем эту штуку для $\mathbb{R}^d$. Мы знаем, что $\mathbb{R}^d$ — полное. А еще мы знаем, что в $\mathbb{R}^d$ ограниченность $\implies$ вполне ограниченность, а значит понятно, что K — компакт. $\square$

Упражнение. (K, ρ) — метрическое пространство, K — компакт. Доказать, что (K, ρ) — полное.

Теорема 40.2 (Теорема Больцано-Вейерштрасса в $\mathbb{R}^d$)**.** Из любой ограниченной последовательности в $\mathbb{R}^d$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. $\{x_n\}$ — ограничено $\implies$ $\exists R \quad x_n \in B_R(a) \subset \overline{B}_R(a)$ — замкнуто и ограничено $\implies$ компактно $\implies$ секвенциально компактно $\implies$ x_n — последовательность точек секвенциального компакта $\implies$ у нее есть сходящаяся последовательность. $\square$

Билет 41

Билет 42

Билет 43

Билет 44

Билет 45

Билет 46

Билет 47

Билет 48

Билет 49

Билет 50

Билет 51

Билет 52

Билет 53

Билет 54

Билет 55

Билет 56

Билет 57

Билет 58

Билет 59