Дискретная математика

Харитонцев-Беглов Сергей

21 сентября 2021 г.

Содержание

1. Теория множеств

1.1. Базовые понятия

Есть официальный конспект, который будет Здесь.

***Определение* 1.1.** Множество — набор различимых между собой по какому-то признаку предметов.

***Определение* 1.2.** Предметы входящие в это множество называются его элементами.

Если мы хотим описать множество, то нужно просто описать предметы этого множества. Например, чтобы задать множество студентов необходимо задать просто студентов.

Есть конечные, счетные, несчетные и целый зоопарк множеств разных мощностей. Самое простое множество — $\varnothing$, множество ничего не содержащее — пустое.

***Определение* 1.3.** X подмножество $(\subseteq)$ $Y \Leftarrow \forall y \in Y: \ y \in X$.
$\varnothing$ и X — тривиальные, остальные — нетривиальные. все подмножества, кроме X — собственные.

1.2. Операции с множествами

Символ	**Определение**	**Словами**
$\cap$	$A \cap B = \dots$	Пересечение множества
$\cup$	$A \cup B = \dots$	Объединение множеств
$\setminus$	$A \setminus B =$ ...	Разность множеств
$\triangle$	$A \triangle B = \dots$	Симметрическая разность множеств

***Определение* 1.4.** Алгебраическая структура — множество, на котором ввели какую-то операцию.

Пример. Пусть заданы несколько множеств:

1. $\exists e: \ a \cdot e = a \ \forall a \in G$
2. $\forall a \in G \ \exists a^{-1} \in G: \ a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$
3. $\forall a, b, c: \ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
4. $\forall a, b \in G a \cdot b = b \cdot a$

То это абелева группа и это к алгебре.

А дискретная математика не имеет аксиом, то есть мало чего можно использовать из алгебры / матана.

Если задать какое-то надмножество X над A, то появится операция дополнения: $A' = X \setminus A$. Законы Де Моргана:

Теорема 1.1. $(A \cup B)' = A' \cap B'$

Теорема 1.2. $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Доказательство смотри в конспекте Омеля, тут мне лень это делать.

***Определение* 1.5.** Система иножеств — множество, элементами которого являются множества.

***Определение* 1.6.** Семейство множеств — упорядоченный набор неких множеств $(X_1, X_2, \dots, X_k)$. Причем множества в наборе могут повторяться.

***Определение* 1.7.** Некоторое покрытие множества X системой множеств — система множеств, объединение элементов которого равняется X.

***Определение* 1.8.** Разбиение множества X на блоки — система $(X_1, X_2, \dots, X_k)$, удовлетворяющая неким условиям:

1. $X = \bigcup_{i=1}^{k} X_i$
2. $\forall i: \ X_i \neq \varnothing$
3. $\forall i, j = 1..k: \ X_i \cap X_j = \varnothing$

***Определение* 1.9.** Пара элементов (x, y) — упорядоченный набор из двух элементов. То есть для $x \neq y$: $(x, y) \neq (y, x)$

***Определение* 1.10** (Декартово произведение)**.** $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$

можно ввести понятие «nки» — упорядоченный набор из n элементов. Поэтому можно ввести $A \times B \times C \times \dots$ и A^2, A^n

***Определение* 1.11.** Отношение между множествами — некое подмножество декартого произведения этих множеств

Пусть ω — отношение между X и Y. Тогда их записывают $X\omega Y$, а отсутствие — $X \not\omega Y$.

***Определение* 1.12.** Отношение эквивалентности $(X, \sim)$:

1. $x \sim x \ \forall x \in X$
2. $x \sim, y \Rightarrow y \sim x \ \forall x, y \in X$
3. $x \sim y, y \sim z, \Rightarrow x \sim z \ \forall x, y, z \in X$

Пусть $\widetilde{x} = \{y \in X \mid y \sim x\}$.

Свойство. пусть $y \in \widetilde{x} \Rightarrow \widetilde{y} = \widetilde{x}$

Теорема 1.3. Разбиение на блоки задает классы эквивалентности.

- $X = \bigcup_{x \in X} \widetilde{x}$
- $\widetilde{x} \neq \varnothing$, т.к. хотя бы $x \in \widetilde{x}$.
- Рассмотрим $\widetilde{x}, \widetilde{y}$. Пусть $\exists z: \ z \in \widetilde{x} \cap \widetilde{y}$. Тогда $\left.\begin{array}{l} \widetilde{z} = \widetilde{x} \\ \widetilde{z} = \widetilde{y} \end{array}\right\} \Rightarrow \widetilde{x} = \widetilde{y}$

***Определение* 1.13.** Мультимножество — $(x; \varphi): \ \varphi \to \mathbb{Z}_+$

Есть еще несколько базовых понятий: k-перестановки/сочетания из n элементов с/без повторений.

$|A \cup B| = |A| + |B|$, если $A \cap B = \varnothing$. Поэтому, если есть разбиение на блоки, то $X = X_1 \cup \ldots \cup X_k \Rightarrow |X| = |X_1| + \ldots + |X_k|$

$X = X_1 \times \ldots \times X_k$, тогда $|X| = |X_1| \cdot \ldots \cdot |X_k|$

$|A' \cap B'| = |(A \cup B)'| = |X| - |A \cup B| = |X| - |A| - |B| + |A \cap B|$

2. Комбинаторика

2.1. Сшки

Есть два способа записи цэшек: $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$. Обычно формулы в комбинаторике используются не для подсчетов, а для определения асимптотики/верней оценки и так далее. Например если взять $n = 100$, то уже проблема: $100!$ — довольно большое число. Но там еще и деление!!! Короче, может получиться небольшое число при больших числах в подсчетах.

Давайте забудем эту дурацкую формулу и будем использовать рекурренты: легко считать, пишется в миг. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n}{k-1}, \binom{0}{0} = 1$.

Доказательство. Пусть есть множество из n элементов. Разобьем все k-элементные подмножества на блоки: в одном все без последнего элемента, в другом все с последним.Тогда в первом блоке тогда есть $\binom{n-1}{k}$ элементов. В другом $\binom{n-1}{k-1}$ элементов. А значит $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ □

Есть пара граничных случаев: $\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{k}(n < k) = 0$. После этого можно сделать треугольник Паскаля:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

Рассмотрим решетчатую плоскость (если вы это читаете это и здесь нет картиночки напишите `@doktorkrab`, чтобы я добавил картиночку). Какое здесь количество путей? Ну $An^k = A_{n-1}^k + A_{n-1}^{k-1}$. А это Сшки.

Теперь посмотрим на сумму на диагонали. Получаем гипотезу: $\sum m = 0^n \binom{m}{k} = \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \ldots + \binom{n-1}{k} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$.

Доказательство. По основному комбинаторному тождеству: $\binom{m+1}{k+1} = \binom{m}{k+1}\binom{m}{k} \Rightarrow \binom{m}{k} = \binom{m+1}{k+1} - \binom{m}{k+1}$. Тогда:

$$\sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} = \underbrace{\sum_{m=k}^{n} \binom{m+1}{k+1}}_{\binom{n+1}{k+1} + \sum_{m=k}^{n-1} \binom{m+1}{k+1}} - \underbrace{\sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k+1}}_{\sum_{m=k+1}^{n} \binom{m}{k+1}}.$$

Дальше, если, расписать сумму все получится.

Пусть хочу набрать $k+1$-элементное подмножество из $n+1$-элементного множества. Пусть мы выбрали последний элемент, тогда у нас есть $\binom{n}{k}$ способов, а если не выбрали, то $\binom{n}{k+1}$ способов. А по индукции $\binom{n}{k+1} = \binom{n-1}{k+1} + \binom{n-1}{k}$. И так далее. □

Рассмотрим $\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot \binom{m}{k-i}$

Доказательство. Рассмотрим два множества: одно n-элементное ("мальчики"), другое m-элементное ("девушки"). Тогда пусть мы выбрали i мальчиков, тогда нам нужно выбрать $k-i$ девушек. □

Мы здесь применили принцип `double counting`: если мы посчитали что-то двумя способами, то результаты равны.

2.2. Биномиальные коэффициенты

Подробности на втором курсе.

Рассмотрим бином Ньютона: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k}$

Доказательство. Раскроем скобки в левой части: $(x+y)(x+y)(x+y)\ldots$. Когда у нас x^k? Когда мы ровно в k скобках выбрали x. Сколько способов? Очевидно $\binom{n}{k}$. □

Частные случаи:

- $x = y = 1$. Тогда $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

  Рассмотрим множество $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Каждому числу можно сопоставить $0/1$ — берем/не берем. Тогда количество подмножеств — количество бинарных строчек длины n. Такой метод называется биективным: когда мы доказываем, что один объект является биекцией другого, то их количества равны.

- $x = 1, y = -1$. Тогда $0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$ — количества способов выбрать подмножество четных длин и нечетных длин равны.

2.3. Мультимножество

Хотим посчитать $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ — количество k-элементных подмультимножеств.

Пусть $X = [n]$. По принципу биекции найдем сначала $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ для X, а потом найти для произвольного множества.

Пусть есть множество A, заменим его на множество $\{i + A_i\}$. $\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \binom{n+k-1}{k}$

2.4. k-перестановки

***Определение* 2.1.** Упорядоченные набор из k элементов, где все элементы принадлежат множеству X.

Если мы считаем, что с повторениям, то ответ n^k, а если без то $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = (n)_k$. Перестановку можно записать как: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$. То есть i перешло в a_i. После этого можно композировать перестановки: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Заметим, что:

1. Существует нейтральный элемент — тождественная перестановка $e = \{1, 2, \ldots, n-1, n\}$
2. Существует обратный элемент: $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = e$
3. Ассоциативность: $\sigma \cdot (\tau \cdot \pi) = (\sigma \cdot \tau) \cdot \pi$

Значит перестановки с операцией композиции — группа. Носит название S_n. Есть теорема о том, что любая конечная группа представима как подгруппа S_n.

Рассмотрим $(n)_k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \binom{n}{k} \cdot k!$. Тогда $\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}$. Тогда можно заменить n на $q, q \in \mathbb{C}$. Тогда

$$\binom{q}{k} = \begin{cases} \frac{(q)_k}{k!} & k > 0 \\ 1 & k = 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}.$$

Пусть $(n)^k = n \cdot (n+1) \cdot \ldots \cdot (n+k-1)$. Тогда $\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \frac{(n)^k}{k!}$

2.5. Комбинаторика в схемах и мемах

Пусть есть n различных предметов. Нужно выбрать k предметов с различными ограничениям: с повторениями/без, упорядоченные/неупорядоченные.

	с повторениями	без повторений
упорядоченные	n^k	$(n)_k$
неупорядоченные	$\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$	$\binom{n}{k}$

Схема ящиков.

	$\forall$	$\leqslant 1$	1	$\geqslant 1$
ящики+предметы различимы	n^k	$(n)_k$	$1/n!$	
ящики различимы, а предметы — нет	$\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$	$\binom{n}{k}$	1/0	$\left(\!\binom{n}{k-n}\!\right)$
ящики не различимы, а предметы различимы				
ящики+предметы неразличимы				

Последнюю строчку мы не сможем заполнить на первом курсе, нужны производящие функции. Эта строчка решает множество задач, например, разложение числа на слагаемые.

Отображение $f : X \to Y$ — такое правило, что $\forall x \in X\ \exists! y \in Y : y = f(x)$. Количество k^n $(|X| = n, |Y| = k)$

***Определение* 2.2.** Отображение — тройка из $(x, y, \Gamma \subseteq X \times Y)$, причем каждый x_i встречается в Γ ровно один раз.

***Определение* 2.3.** Отображение называется иньективным, если $\forall x_1, x_2 \in X\ f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Их количество — $(k)_n$

***Определение* 2.4.** Отображение называется биективным, если $\forall y \in Y\ \exists! x \in X : y = f(x)$. Количество — $n!$.

***Определение* 2.5.** Отображение называется сурьективным, если $\forall y \in Y\ \exists x \in X : y = f(x)$.

Посчитаем количество сурьективных отображений. Пусть $\mathrm{Im}(f) = \{y \in Y \mid \exists x \in X : y = f(x)\}$. Тогда для любого отношения $f : X \to \mathrm{Im}(f)$ — сурьективно.

Пусть $|\mathrm{Im}(f)| = i$, а количество сурьективных отображений — $\widehat{S}(n, i)$. Тогда $\widehat{S}(n, i) \cdot \binom{k}{i}$ — количество суьективных подмножеств мощности k.

Тогда $k^n = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \widehat{S}(n, i)$

Пусть есть две числовые последовательности $f_0, f_1, \ldots, f_k, \ldots$ и $g_0, g_1, \ldots, g_k, \ldots$. Причем $g_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f_i$, тогда $f_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-1} \binom{k}{i} g_i$. Значит $\widehat{S}(n, k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-1} \binom{k}{i} \cdot i^n$

Рассмотрим отображение $\{\{x_1, x_2\}, \{x_3\}, \varnothing\}$. Получение разбиение на блоки. Предположим, что отображение сурьективно, значит получили разбиение k предметов n ящиков.

Предположим, что в первый ящик нужно положить a_1 предмет, во второй — a_2, и так далее. Тогда количество вариантов: $\sum \binom{n}{a_1} \binom{n-a_1}{a_2} \ldots$. Если взять $\sum_{a_i \geqslant 0, a_1 + \ldots + a_k = n} \binom{n}{a_1} \binom{n-a_1}{a_2} = k^n = \frac{n!}{a_1! a_2! \ldots a_k!}$. А если $\sum_{a_i > 0, a_1 + \ldots + a_k = n} \binom{n}{a_1} \binom{n-a_1}{a_2} = \widehat{S}(n, k)$