

# Дискретная математика

Харитонцев-Беглов Сергей

28 сентября 2021 г.

## Содержание

<b>1. Теория множеств</b>	<b>1</b>
1.1 Базовые понятия . . . . .	1
1.2 Операции с множествами . . . . .	1
<b>2. Комбинаторика</b>	<b>4</b>
2.1 Сетки . . . . .	4
2.2 Биномиальные коэффициенты . . . . .	5
2.3 Мультимножество . . . . .	5
2.4 $k$ -перестановки . . . . .	5
2.5 Комбинаторика в схемах и мемах . . . . .	6
<b>3. Дискретная вероятность</b>	<b>8</b>

# 1. Теория множеств

## 1.1. Базовые понятия

Есть официальный конспект, который будет Здесь.

**Определение 1.1.** Множество — набор различных между собой по какому-то признаку предметов.

**Определение 1.2.** Предметы входящие в это множество называются его элементами.

Если мы хотим описать множество, то нужно просто описать предметы этого множества. Например, чтобы задать множество студентов необходимо задать просто студентов.

Есть конечные, счетные, несчетные и целый зоопарк множеств разных мощностей. Самое простое множество —  $\emptyset$ , множество ничего не содержащее — пустое.

**Определение 1.3.**  $X$  подмножество ( $\subseteq$ )  $Y \Leftrightarrow \forall y \in Y : y \in X$ .

$\emptyset$  и  $X$  — тривиальные, остальные — нетривиальные. все подмножества, кроме  $X$  — собственные.

## 1.2. Операции с множествами

Символ	Определение	Словами
$\cap$	$A \cap B = \dots$	Пересечение множества
$\cup$	$A \cup B = \dots$	Объединение множеств
$\setminus$	$A \setminus B = \dots$	Разность множеств
$\Delta$	$A \Delta B = \dots$	Симметрическая разность множеств

**Определение 1.4.** Алгебраическая структура — множество, на котором ввели какую-то операцию.

**Пример.** Пусть заданы несколько множеств:

1.  $\exists e : a \cdot e = a \forall a \in G$
2.  $\forall a \in G \exists a^{-1} \in G : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$
3.  $\forall a, b, c : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
4.  $\forall a, b \in G a \cdot b = b \cdot a$

То это абелева группа и это к алгебре.

А дискретная математика не имеет аксиом, то есть мало чего можно использовать из алгебры / матана.

Если задать какое-то надмножество  $X$  над  $A$ , то появится операция дополнения:  $A' = X \setminus A$ .  
Законы Де Моргана:

**Теорема 1.1.**  $(A \cup B)' = A' \cap B'$

**Теорема 1.2.**  $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Доказательство смотри в конспекте Омеля, тут мне лень это делать.

**Определение 1.5.** Система иномножеств — множество, элементами которого являются множества.

**Определение 1.6.** Семейство множеств — упорядоченный набор неких множеств  $(X_1, X_2, \dots, X_k)$ . Причем множества в наборе могут повторяться.

**Определение 1.7.** Некоторое покрытие множества  $X$  системой множеств — система множеств, объединение элементов которого равняется  $X$ .

**Определение 1.8.** Разбиение множества  $X$  на блоки — система  $(X_1, X_2, \dots, X_k)$ , удовлетворяющая неким условиям:

1.  $X = \bigcup_{i=1}^k X_i$
2.  $\forall i: X_i \neq \emptyset$
3.  $\forall i, j = 1..k: X_i \cap X_j = \emptyset$

**Определение 1.9.** Пара элементов  $(x, y)$  — упорядоченный набор из двух элементов. То есть для  $x \neq y: (x, y) \neq (y, x)$

**Определение 1.10** (Декартово произведение).  $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$

можно ввести понятие « $n$ ки» — упорядоченный набор из  $n$  элементов. Поэтому можно ввести  $A \times B \times C \times \dots$  и  $A^2, A^n$

**Определение 1.11.** Отношение между множествами — некое подмножество декартова произведения этих множеств

Пусть  $\omega$  — отношение между  $X$  и  $Y$ . Тогда их записывают  $X\omega Y$ , а отсутствие —  $X\not\omega Y$ .

**Определение 1.12.** Отношение эквивалентности  $(X, \sim)$ :

1.  $x \sim x \forall x \in X$
2.  $x \sim y \Rightarrow y \sim x \forall x, y \in X$
3.  $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z \forall x, y, z \in X$

Пусть  $\tilde{x} = \{y \in X \mid y \sim x\}$ .

**Свойство.** пусть  $y \in \tilde{x} \Rightarrow \tilde{y} = \tilde{x}$

**Теорема 1.3.** Разбиение на блоки задает классы эквивалентности.

- $X = \bigcup_{x \in X} \tilde{x}$
- $\tilde{x} \neq \emptyset$ , т.к. хотя бы  $x \in \tilde{x}$ .
- Рассмотрим  $\tilde{x}, \tilde{y}$ . Пусть  $\exists z: z \in \tilde{x} \cap \tilde{y}$ . Тогда  $\left. \begin{matrix} \tilde{z} = \tilde{x} \\ \tilde{z} = \tilde{y} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \tilde{x} = \tilde{y}$

**Определение 1.13.** Мультимножество —  $(x; \varphi): \varphi \rightarrow \mathbb{Z}_+$

Есть еще несколько базовых понятий:  $k$ -перестановки/сочетания из  $n$  элементов с/без повторений.

$|A \cup B| = |A| + |B|$ , если  $A \cap B = \emptyset$ . Поэтому, если есть разбиение на блоки, то  $X = X_1 \cup \dots \cup X_k \Rightarrow |X| = |X_1| + \dots + |X_k|$

$X = X_1 \times \dots \times X_k$ , тогда  $|X| = |X_1| \cdot \dots \cdot |X_k|$

$|A' \cap B'| = |(A \cup B)'| = |X| - |A \cup B| = |X| - |A| - |B| + |A \cap B|$

## 2. Комбинаторика

### 2.1. Сшки

Есть два способа записи цэшек:  $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ . Обычно формулы в комбинаторике используются не для подсчетов, а для определения асимптотики/верней оценки и так далее. Например если взять  $n = 100$ , то уже проблема:  $100!$  — довольно большое число. Но там еще и деление!!! Короче, может получится небольшое число при больших числах в подсчетах.

Давайте забудем эту дурацкую формулу и будем использовать рекурренты: легко считать, пишется в миг.  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ ,  $\binom{0}{0} = 1$ .

**Доказательство.** Пусть есть множество из  $n$  элементов. Разобьем все  $k$ -элементные подмножества на блоки: в одном все без последнего элемента, в другом все с последним. Тогда в первом блоке тогда есть  $\binom{n-1}{k}$  элементов. В другом  $\binom{n-1}{k-1}$  элементов. А значит  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$   $\square$

Есть пара граничных случаев:  $\binom{n}{0} = 1$ ,  $\binom{n}{k} (n < k) = 0$ . После этого можно сделать треугольник Паскаля:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & & & & 1 \\
 & & & & & & 1 & 1 \\
 & & & & 1 & 2 & 1 \\
 & & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1
 \end{array}$$

Рассмотрим решетчатую плоскость (если вы это читаете это и здесь нет картиночки напишите @doktorkrab, чтобы я добавил картиночку). Какое здесь количество путей? Ну  $An^k = A_{n-1}^k + A_{n-1}^{k-1}$ . А это Сшки.

Теперь посмотрим на сумму на диагонали. Получаем гипотезу:  $\sum m = 0^n \binom{m}{k} = \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \dots + \binom{n-1}{k} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$ .

**Доказательство.** По основному комбинаторному тождеству:  $\binom{m+1}{k+1} = \binom{m}{k+1} \binom{m}{k} \Rightarrow \binom{m}{k} = \binom{m+1}{k+1} - \binom{m}{k+1}$ . Тогда:

$$\sum_{m=k}^n \binom{m}{k} = \underbrace{\sum_{m=k}^n \binom{m+1}{k+1}}_{\binom{n+1}{k+1} + \sum_{m=k}^{n-1} \binom{m+1}{k+1}} - \underbrace{\sum_{m=k}^n \binom{m}{k+1}}_{\sum_{m=k+1}^n \binom{m}{k+1}}.$$

Дальше, если, расписать сумму все получится.

Пусть хочу набрать  $k+1$ -элементное подмножество из  $n+1$ -элементного множества. Пусть мы выбрали последний элемент, тогда у нас есть  $\binom{n}{k}$  способов, а если не выбрали, то  $\binom{n}{k+1}$  способов. А по индукции  $\binom{n}{k+1} = \binom{n-1}{k+1} + \binom{n-1}{k}$ . И так далее.  $\square$

Рассмотрим  $\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \cdot \binom{m}{k-i}$

**Доказательство.** Рассмотрим два множества: одно  $n$ -элементное ("мальчики"), другое  $m$ -элементное ("девушки"). Тогда пусть мы выбрали  $i$  мальчиков, тогда нам нужно выбрать  $k-i$  девушек.  $\square$

Мы здесь применили принцип **double counting**: если мы посчитали что-то двумя способами, то результаты равны.

## 2.2. Биномиальные коэффициенты

Подробности на втором курсе.

Рассмотрим бином Ньютона:  $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k}$

**Доказательство.** Раскроем скобки в левой части:  $(x+y)(x+y)(x+y) \dots$  Когда у нас  $x^k$ ? Когда мы ровно в  $k$  скобках выбрали  $x$ . Сколько способов? Очевидно  $\binom{n}{k}$ .  $\square$

Частные случаи:

- $x = y = 1$ . Тогда  $2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$

Рассмотрим множество  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Каждому числу можно сопоставить 0/1 — берем/не берем. Тогда количество подмножеств — количество бинарных строчек длины  $n$ . Такой метод называется биективным: когда мы доказываем, что один объект является биекцией другого, то их количества равны.

- $x = 1, y = -1$ . Тогда  $0 = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$  — количества способов выбрать подмножество четных длин и нечетных длин равны.

## 2.3. Мультимножество

Хотим посчитать  $\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)$  — количество  $k$ -элементных подмультимножеств.

Пусть  $X = [n]$ . По принципу биекции найдем сначала  $\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)$  для  $X$ , а потом найти для произвольного множества.

Пусть есть множество  $A$ , заменим его на множество  $\{i + A_i\}$ .  $\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \binom{n+k-1}{k}$

## 2.4. $k$ -перестановки

**Определение 2.1.** Упорядоченные набор из  $k$  элементов, где все элементы принадлежат множеству  $X$ .

Если мы считаем, что с повторениями, то ответ  $n^k$ , а если без то  $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = (n)_k$ . Перестановку можно записать как:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$ . То есть  $i$  перешло в  $a_i$ . После

этого можно композировать перестановки:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

Заметим, что:

1. Существует нейтральный элемент — тождественная перестановка  $e = \{1, 2, \dots, n-1, n\}$
2. Существует обратный элемент:  $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = e$
3. Ассоциативность:  $\sigma \cdot (\tau \cdot \pi) = (\sigma \cdot \tau) \cdot \pi$

Значит перестановки с операцией композиции — группа. Носит название  $S_n$ . Есть теорема о том, что любая конечная группа представима как подгруппа  $S_n$ .

Рассмотрим  $(n)_k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \binom{n}{k} \cdot k!$ . Тогда  $\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}$ . Тогда можно заменить  $n$  на  $q, q \in \mathbb{C}$ . Тогда

$$\binom{q}{k} = \begin{cases} \frac{(q)_k}{k!} & k > 0 \\ 1 & k = 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

Пусть  $(n)^k = n \cdot (n+1) \cdot \dots \cdot (n+k-1)$ . Тогда  $\binom{n}{k} = \frac{(n)^k}{k!}$

## 2.5. Комбинаторика в схемах и мемах

Пусть есть  $n$  различных предметов. Нужно выбрать  $k$  предметов с различными ограничениями: с повторениями/без, упорядоченные/неупорядоченные.

	с повторениями	без повторений
упорядоченные	$n^k$	$(n)_k$
неупорядоченные	$\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k}$

Схема ящиков.

	$\forall$	$\leq 1$	$1$	$\geq 1$
ящики+предметы различимы	$n^k$	$(n)_k$	$1/n!$	$\widehat{S}(n, k)$
ящики различимы, а предметы — нет	$\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k}$	$1/0$	$\binom{n}{k-n}$
ящики не различимы, а предметы различимы				$S(n, k)$
ящики+предметы неразличимы				

Последнюю строчку мы не сможем заполнить на первом курсе, нужны производящие функции. Эта строчка решает множество задач, например, разложение числа на слагаемые.

Отображение  $f : X \rightarrow Y$  — такое правило, что  $\forall x \in X \exists! y \in Y : y = f(x)$ . Количество  $k^n$  ( $|X| = n, |Y| = k$ )

**Определение 2.2.** Отображение — тройка из  $(x, y, \Gamma \subseteq X \times Y)$ , причем каждый  $x_i$  встречается в  $\Gamma$  ровно один раз.

**Определение 2.3.** Отображение называется инъективным, если  $\forall x_1, x_2 \in X \ f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ . Их количество —  $(k)_n$

**Определение 2.4.** Отображение называется биективным, если  $\forall y \in Y \exists! x \in X : y = f(x)$ . Количество —  $n!$ .

**Определение 2.5.** Отображение называется сюръективным, если  $\forall y \in Y \exists x \in X : y = f(x)$ .

Посчитаем количество сюръективных отображений. Пусть  $\text{Im}(f) = \{y \in Y \mid \exists x \in X : y = f(x)\}$ . Тогда для любого отношения  $f : X \rightarrow \text{Im}(f)$  — сюръективно.

Пусть  $|\text{Im}(f)| = i$ , а количество сюръективных отображений —  $\widehat{S}(n, i)$ . Тогда  $\widehat{S}(n, i) \cdot \binom{k}{i}$  — количество сюръективных подмножеств мощности  $k$ .

$$\text{Тогда } k^n = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \widehat{S}(n, i)$$

Пусть есть две числовые последовательности  $f_0, f_1, \dots, f_k, \dots$  и  $g_0, g_1, \dots, g_k, \dots$ . Причем  $g_k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} f_i$ , тогда  $f_k = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} g_i$ . Значит  $\widehat{S}(n, k) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \cdot i^n$

Рассмотрим отображение  $\{\{x_1, x_2\}, \{x_3\}, \emptyset\}$ . Получение разбиение на блоки. Предположим, что отображение сюръективно, значит получили разбиение  $k$  предметов  $n$  ящиков.

Предположим, что в первый ящик нужно положить  $a_1$  предмет, во второй —  $a_2$ , и так далее. Тогда количество вариантов:  $\sum \binom{n}{a_1} \binom{n-a_1}{a_2} \dots$ . Если взять  $\sum_{a_i \geq 0, a_1 + \dots + a_k = n} \binom{n}{a_1} \binom{n-a_1}{a_2} = k^n = \frac{n!}{a_1! a_2! \dots a_k!}$ . А если  $\sum_{a_i > 0, a_1 + \dots + a_k = n} \binom{n}{a_1} \binom{n-a_1}{a_2} = \widehat{S}(n, k)$

Хотим разбить на блоки вида  $a_1$  предметов +  $a_2$  предметов +  $a_3$  предметов... Тогда заметим, что это  $\sum_{a_i \geq 0, \sum a_i = n} \binom{n}{a_1} \binom{n-a_1}{a_2} \dots \binom{n-a_1-a_2-\dots-a_{k-1}}{a_k}$ . Заметим, что суммарно это  $k^n$ , а если строго больше нуля, то  $\widehat{S}(n, k)$ . Также можно раскрыть скобки и получить.  $\frac{n!}{a_1! a_2! \dots a_k!}$

Рассмотрим  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = P(n; k; n-k)$ . Комбинаторно они равны через битовые строки.

Теперь посмотрим на  $\left\langle\!\left\langle \binom{n}{k} \right\rangle\!\right\rangle = \frac{(n-1+k)!}{(n-1)!k!}$ , через шары и перегородки.

Вернемся к  $k^n$  — все отображения,  $\widehat{S}(n, k)$  — все сюръективные отображение,  $S(n, k)$  — количество разбиений  $n$ -множества на  $k$ -подмножества. (Числа Стирлинга второго рода).

Заметим, что  $S(n, k) \cdot k! = \widehat{S}(n, k)$ , так как в  $S$  с крышечкой это про неупорядоченные.  $S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n$ .  $S(0, 0) = 1$ .  $\forall S(n, 0) = 0$ .  $S(n, k) = S(n-1, k-1) + k \cdot S(n-1, k)$ . Доказываем так: либо удаляем  $x_n$ , либо пишем  $x_n$  куда-то.

$$k^n = \sum_{i=0}^n \binom{k}{i} \widehat{S}(n, i) = \sum_{i=0}^n \frac{k!}{i!(k-i)!} S(n, i).$$

Откуда:

$$x^n = \sum_{i=0}^n (x)_i \cdot S(n, i) \iff (x)_n = \sum_{i=0}^n x^i s(n, i)..$$

Где  $s(n, i)$  — числа Стирлинга первого рода.

Решим задачу, где мы хотим разбить  $n$  различных предметов в  $k$  различных ящиков  $B(n, k) = \sum_{i=0}^k S(n, i)$ . Причем  $B(n, n) = B_n$  — числа Белла. Количество способов разбить  $n$ -множество на блоки.



### 3. Дискретная вероятность

Текст.