

# Дискретная математика

Харитонцев-Беглов Сергей

30 ноября 2021 г.

## Содержание

<b>1. Теория множеств</b>	<b>1</b>
1.1 Базовые понятия . . . . .	1
1.2 Операции с множествами . . . . .	1
<b>2. Комбинаторика</b>	<b>4</b>
2.1 Сетки . . . . .	4
2.2 Биномиальные коэффициенты . . . . .	5
2.3 Мультимножество . . . . .	5
2.4 $k$ -перестановки . . . . .	5
2.5 Комбинаторика в схемах и мемах . . . . .	6
<b>3. Вероятности</b>	<b>8</b>
3.1 Дискретная вероятность . . . . .	8
3.2 Случайная величина . . . . .	9
3.3 Биномиальное распределение . . . . .	9
3.4 Геометрическое распределение . . . . .	10
3.5 Гипергеометрическое распределение . . . . .	10
3.6 Численные характеристики . . . . .	10
<b>4. Рекуррентные соотношения</b>	<b>12</b>
4.1 Определение . . . . .	12
4.2 Линейные рекурренты . . . . .	12
4.3 Неоднородные линейные рекурренты . . . . .	13
<b>5. Графы</b>	<b>14</b>
5.1 Определения . . . . .	14
5.2 Маршруты, пути, циклы. Связные графы . . . . .	15
5.3 Подграфы. Основные операции над графами . . . . .	17
5.4 Деревья . . . . .	18

# 1. Теория множеств

## 1.1. Базовые понятия

Есть официальный конспект, который будет Здесь.

**Определение 1.1.** Множество — набор различных между собой по какому-то признаку предметов.

**Определение 1.2.** Предметы входящие в это множество называются его элементами.

Если мы хотим описать множество, то нужно просто описать предметы этого множества. Например, чтобы задать множество студентов необходимо задать просто студентов.

Есть конечные, счетные, несчетные и целый зоопарк множеств разных мощностей. Самое простое множество —  $\emptyset$ , множество ничего не содержащее — пустое.

**Определение 1.3.**  $X$  подмножество ( $\subseteq$ )  $Y \Leftrightarrow \forall y \in Y : y \in X$ .

$\emptyset$  и  $X$  — тривиальные, остальные — нетривиальные. все подмножества, кроме  $X$  — собственные.

## 1.2. Операции с множествами

Символ	Определение	Словами
$\cap$	$A \cap B = \dots$	Пересечение множества
$\cup$	$A \cup B = \dots$	Объединение множеств
$\setminus$	$A \setminus B = \dots$	Разность множеств
$\Delta$	$A \Delta B = \dots$	Симметрическая разность множеств

**Определение 1.4.** Алгебраическая структура — множество, на котором ввели какую-то операцию.

**Пример.** Пусть заданы несколько множеств:

1.  $\exists e : a \cdot e = a \forall a \in G$
2.  $\forall a \in G \exists a^{-1} \in G : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$
3.  $\forall a, b, c : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
4.  $\forall a, b \in G a \cdot b = b \cdot a$

То это абелева группа и это к алгебре.

А дискретная математика не имеет аксиом, то есть мало чего можно использовать из алгебры / матана.

Если задать какое-то надмножество  $X$  над  $A$ , то появится операция дополнения:  $A' = X \setminus A$ .  
Законы Де Моргана:

**Теорема 1.1.**  $(A \cup B)' = A' \cap B'$

**Теорема 1.2.**  $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Доказательство смотри в конспекте Омеля, тут мне лень это делать.

**Определение 1.5.** Система иномножеств — множество, элементами которого являются множества.

**Определение 1.6.** Семейство множеств — упорядоченный набор неких множеств  $(X_1, X_2, \dots, X_k)$ . Причем множества в наборе могут повторяться.

**Определение 1.7.** Некоторое покрытие множества  $X$  системой множеств — система множеств, объединение элементов которого равняется  $X$ .

**Определение 1.8.** Разбиение множества  $X$  на блоки — система  $(X_1, X_2, \dots, X_k)$ , удовлетворяющая неким условиям:

1.  $X = \bigcup_{i=1}^k X_i$
2.  $\forall i: X_i \neq \emptyset$
3.  $\forall i, j = 1..k: X_i \cap X_j = \emptyset$

**Определение 1.9.** Пара элементов  $(x, y)$  — упорядоченный набор из двух элементов. То есть для  $x \neq y: (x, y) \neq (y, x)$

**Определение 1.10** (Декартово произведение).  $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$

можно ввести понятие « $n$ ки» — упорядоченный набор из  $n$  элементов. Поэтому можно ввести  $A \times B \times C \times \dots$  и  $A^2, A^n$

**Определение 1.11.** Отношение между множествами — некое подмножество декартова произведения этих множеств

Пусть  $\omega$  — отношение между  $X$  и  $Y$ . Тогда их записывают  $X\omega Y$ , а отсутствие —  $X\not\omega Y$ .

**Определение 1.12.** Отношение эквивалентности  $(X, \sim)$ :

1.  $x \sim x \forall x \in X$
2.  $x \sim y \Rightarrow y \sim x \forall x, y \in X$
3.  $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z \forall x, y, z \in X$

Пусть  $\tilde{x} = \{y \in X \mid y \sim x\}$ .

**Свойство.** пусть  $y \in \tilde{x} \Rightarrow \tilde{y} = \tilde{x}$

**Теорема 1.3.** Разбиение на блоки задает классы эквивалентности.

- $X = \bigcup_{x \in X} \tilde{x}$
- $\tilde{x} \neq \emptyset$ , т.к. хотя бы  $x \in \tilde{x}$ .
- Рассмотрим  $\tilde{x}, \tilde{y}$ . Пусть  $\exists z: z \in \tilde{x} \cap \tilde{y}$ . Тогда  $\left. \begin{matrix} \tilde{z} = \tilde{x} \\ \tilde{z} = \tilde{y} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \tilde{x} = \tilde{y}$

**Определение 1.13.** Мультимножество —  $(x; \varphi): \varphi \rightarrow \mathbb{Z}_+$

Есть еще несколько базовых понятий:  $k$ -перестановки/сочетания из  $n$  элементов с/без повторений.

$|A \cup B| = |A| + |B|$ , если  $A \cap B = \emptyset$ . Поэтому, если есть разбиение на блоки, то  $X = X_1 \cup \dots \cup X_k \Rightarrow |X| = |X_1| + \dots + |X_k|$

$X = X_1 \times \dots \times X_k$ , тогда  $|X| = |X_1| \cdot \dots \cdot |X_k|$

$|A' \cap B'| = |(A \cup B)'| = |X| - |A \cup B| = |X| - |A| - |B| + |A \cap B|$

## 2. Комбинаторика

### 2.1. Сшки

Есть два способа записи цэшек:  $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ . Обычно формулы в комбинаторике используются не для подсчетов, а для определения асимптотики/верней оценки и так далее. Например если взять  $n = 100$ , то уже проблема:  $100!$  — довольно большое число. Но там еще и деление!!! Короче, может получится небольшое число при больших числах в подсчетах.

Давайте забудем эту дурацкую формулу и будем использовать рекурренты: легко считать, пишется в миг.  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ ,  $\binom{0}{0} = 1$ .

**Доказательство.** Пусть есть множество из  $n$  элементов. Разобьем все  $k$ -элементные подмножества на блоки: в одном все без последнего элемента, в другом все с последним. Тогда в первом блоке тогда есть  $\binom{n-1}{k}$  элементов. В другом  $\binom{n-1}{k-1}$  элементов. А значит  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$   $\square$

Есть пара граничных случаев:  $\binom{n}{0} = 1$ ,  $\binom{n}{k} (n < k) = 0$ . После этого можно сделать треугольник Паскаля:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & & & & 1 \\
 & & & & & & 1 & 1 \\
 & & & & & 1 & 2 & 1 \\
 & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1
 \end{array}$$

Рассмотрим решетчатую плоскость (если вы это читаете это и здесь нет картиночки напишите @doktorkrab, чтобы я добавил картиночку). Какое здесь количество путей? Ну  $A_n^k = A_{n-1}^k + A_{n-1}^{k-1}$ . А это Сшки.

Теперь посмотрим на сумму на диагонали. Получаем гипотезу:  $\sum m = 0^n \binom{m}{k} = \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \dots + \binom{n-1}{k} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$ .

**Доказательство.** По основному комбинаторному тождеству:  $\binom{m+1}{k+1} = \binom{m}{k+1} \binom{m}{k} \Rightarrow \binom{m}{k} = \binom{m+1}{k+1} - \binom{m}{k+1}$ . Тогда:

$$\sum_{m=k}^n \binom{m}{k} = \underbrace{\sum_{m=k}^n \binom{m+1}{k+1}}_{\binom{n+1}{k+1} + \sum_{m=k}^{n-1} \binom{m+1}{k+1}} - \underbrace{\sum_{m=k}^n \binom{m}{k+1}}_{\sum_{m=k+1}^n \binom{m}{k+1}}.$$

Дальше, если, расписать сумму все получится.

Пусть хочу набрать  $k+1$ -элементное подмножество из  $n+1$ -элементного множества. Пусть мы выбрали последний элемент, тогда у нас есть  $\binom{n}{k}$  способов, а если не выбрали, то  $\binom{n}{k+1}$  способов. А по индукции  $\binom{n}{k+1} = \binom{n-1}{k+1} + \binom{n-1}{k}$ . И так далее.  $\square$

Рассмотрим  $\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \cdot \binom{m}{k-i}$

**Доказательство.** Рассмотрим два множества: одно  $n$ -элементное ("мальчики"), другое  $m$ -элементное ("девушки"). Тогда пусть мы выбрали  $i$  мальчиков, тогда нам нужно выбрать  $k-i$  девушек.  $\square$

Мы здесь применили принцип **double counting**: если мы посчитали что-то двумя способами, то результаты равны.

## 2.2. Биномиальные коэффициенты

Подробности на втором курсе.

Рассмотрим бином Ньютона:  $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k}$

**Доказательство.** Раскроем скобки в левой части:  $(x+y)(x+y)(x+y) \dots$  Когда у нас  $x^k$ ? Когда мы ровно в  $k$  скобках выбрали  $x$ . Сколько способов? Очевидно  $\binom{n}{k}$ .  $\square$

Частные случаи:

- $x = y = 1$ . Тогда  $2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$

Рассмотрим множество  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Каждому числу можно сопоставить 0/1 — берем/не берем. Тогда количество подмножеств — количество бинарных строчек длины  $n$ . Такой метод называется биективным: когда мы доказываем, что один объект является биекцией другого, то их количества равны.

- $x = 1, y = -1$ . Тогда  $0 = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$  — количества способов выбрать подмножество четных длин и нечетных длин равны.

## 2.3. Мультимножество

Хотим посчитать  $\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)$  — количество  $k$ -элементных подмультимножеств.

Пусть  $X = [n]$ . По принципу биекции найдем сначала  $\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)$  для  $X$ , а потом найти для произвольного множества.

Пусть есть множество  $A$ , заменим его на множество  $\{i + A_i\}$ .  $\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \binom{n+k-1}{k}$

## 2.4. $k$ -перестановки

**Определение 2.1.** Упорядоченные набор из  $k$  элементов, где все элементы принадлежат множеству  $X$ .

Если мы считаем, что с повторениями, то ответ  $n^k$ , а если без то  $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = (n)_k$ . Перестановку можно записать как:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$ . То есть  $i$  перешло в  $a_i$ . После

этого можно композировать перестановки:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

Заметим, что:

1. Существует нейтральный элемент — тождественная перестановка  $e = \{1, 2, \dots, n-1, n\}$
2. Существует обратный элемент:  $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = e$
3. Ассоциативность:  $\sigma \cdot (\tau \cdot \pi) = (\sigma \cdot \tau) \cdot \pi$

Значит перестановки с операцией композиции — группа. Носит название  $S_n$ . Есть теорема о том, что любая конечная группа представима как подгруппа  $S_n$ .

Рассмотрим  $(n)_k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \binom{n}{k} \cdot k!$ . Тогда  $\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}$ . Тогда можно заменить  $n$  на  $q, q \in \mathbb{C}$ . Тогда

$$\binom{q}{k} = \begin{cases} \frac{(q)_k}{k!} & k > 0 \\ 1 & k = 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

Пусть  $(n)^k = n \cdot (n+1) \cdot \dots \cdot (n+k-1)$ . Тогда  $\binom{n}{k} = \frac{(n)^k}{k!}$

## 2.5. Комбинаторика в схемах и мемах

Пусть есть  $n$  различных предметов. Нужно выбрать  $k$  предметов с различными ограничениями: с повторениями/без, упорядоченные/неупорядоченные.

	с повторениями	без повторений
упорядоченные	$n^k$	$(n)_k$
неупорядоченные	$\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k}$

Схема ящиков.

	$\forall$	$\leq 1$	$1$	$\geq 1$
ящики+предметы различимы	$n^k$	$(n)_k$	$1/n!$	$\widehat{S}(n, k)$
ящики различимы, а предметы — нет	$\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k}$	$1/0$	$\binom{n}{k-n}$
ящики не различимы, а предметы различимы				$S(n, k)$
ящики+предметы неразличимы				

Последнюю строчку мы не сможем заполнить на первом курсе, нужны производящие функции. Эта строчка решает множество задач, например, разложение числа на слагаемые.

Отображение  $f : X \rightarrow Y$  — такое правило, что  $\forall x \in X \exists! y \in Y : y = f(x)$ . Количество  $k^n$  ( $|X| = n, |Y| = k$ )

**Определение 2.2.** Отображение — тройка из  $(x, y, \Gamma \subseteq X \times Y)$ , причем каждый  $x_i$  встречается в  $\Gamma$  ровно один раз.

**Определение 2.3.** Отображение называется инъективным, если  $\forall x_1, x_2 \in X \ f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ . Их количество —  $(k)_n$

**Определение 2.4.** Отображение называется биективным, если  $\forall y \in Y \exists! x \in X : y = f(x)$ . Количество —  $n!$ .

**Определение 2.5.** Отображение называется сюръективным, если  $\forall y \in Y \exists x \in X : y = f(x)$ .

Посчитаем количество сюръективных отображений. Пусть  $\text{Im}(f) = \{y \in Y \mid \exists x \in X : y = f(x)\}$ . Тогда для любого отношения  $f : X \rightarrow \text{Im}(f)$  — сюръективно.

Пусть  $|\text{Im}(f)| = i$ , а количество сюръективных отображений —  $\widehat{S}(n, i)$ . Тогда  $\widehat{S}(n, i) \cdot \binom{k}{i}$  — количество сюръективных подмножеств мощности  $k$ .

$$\text{Тогда } k^n = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \widehat{S}(n, i)$$

Пусть есть две числовые последовательности  $f_0, f_1, \dots, f_k, \dots$  и  $g_0, g_1, \dots, g_k, \dots$ . Причем  $g_k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} f_i$ , тогда  $f_k = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} g_i$ . Значит  $\widehat{S}(n, k) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \cdot i^n$

Рассмотрим отображение  $\{\{x_1, x_2\}, \{x_3\}, \emptyset\}$ . Получение разбиение на блоки. Предположим, что отображение сюръективно, значит получили разбиение  $k$  предметов  $n$  ящиков.

Предположим, что в первый ящик нужно положить  $a_1$  предмет, во второй —  $a_2$ , и так далее. Тогда количество вариантов:  $\sum \binom{n}{a_1} \binom{n-a_1}{a_2} \dots$ . Если взять  $\sum_{a_i \geq 0, a_1 + \dots + a_k = n} \binom{n}{a_1} \binom{n-a_1}{a_2} = k^n = \frac{n!}{a_1! a_2! \dots a_k!}$ . А если  $\sum_{a_i > 0, a_1 + \dots + a_k = n} \binom{n}{a_1} \binom{n-a_1}{a_2} = \widehat{S}(n, k)$

Хотим разбить на блоки вида  $a_1$  предметов +  $a_2$  предметов +  $a_3$  предметов... Тогда заметим, что это  $\sum_{a_i \geq 0, \sum a_i = n} \binom{n}{a_1} \binom{n-a_1}{a_2} \dots \binom{n-a_1-a_2-\dots-a_{k-1}}{a_k}$ . Заметим, что суммарно это  $k^n$ , а если строго больше нуля, то  $\widehat{S}(n, k)$ . Также можно раскрыть скобки и получить.  $\frac{n!}{a_1! a_2! \dots a_k!}$

Рассмотрим  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = P(n; k; n-k)$ . Комбинаторно они равны через битовые строки.

Теперь посмотрим на  $\left\langle \binom{n}{k} \right\rangle = \frac{(n-1+k)!}{(n-1)!k!}$ , через шары и перегородки.

Вернемся к  $k^n$  — все отображения,  $\widehat{S}(n, k)$  — все сюръективные отображение,  $S(n, k)$  — количество разбиений  $n$ -множества на  $k$ -подмножества. (Числа Стирлинга второго рода).

Заметим, что  $S(n, k) \cdot k! = \widehat{S}(n, k)$ , так как в  $S$  с крышечкой это про неупорядоченные.  $S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n$ .  $S(0, 0) = 1$ .  $\forall S(n, 0) = 0$ .  $S(n, k) = S(n-1, k-1) + k \cdot S(n-1, k)$ . Доказываем так: либо удаляем  $x_n$ , либо пишем  $x_n$  куда-то.

$$k^n = \sum_{i=0}^n \binom{k}{i} \widehat{S}(n, i) = \sum_{i=0}^n \frac{k!}{i!(k-i)!} S(n, i).$$

Откуда:

$$x^n = \sum_{i=0}^n (x)_i \cdot S(n, i) \iff (x)_n = \sum_{i=0}^n x^i s(n, i)..$$

Где  $s(n, i)$  — числа Стирлинга первого рода.

Решим задачу, где мы хотим разбить  $n$  различных предметов в  $k$  различных ящиков  $B(n, k) = \sum_{i=0}^k S(n, i)$ . Причем  $B(n, n) = B_n$  — числа Белла. Количество способов разбить  $n$ -множество на блоки.



## 3. Вероятности

### 3.1. Дискретная вероятность

Вероятностное событие — событие в какой-то вероятностной математической модели. (Результат трудно предсказать)

Множество исходов  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  — состоит из элементарных исходов. В дискретной вероятности  $\Omega$  конечно или счетно.

Событие  $A$  — подмножество  $\Omega$ .

Рассмотрим какой-то набор событий, добавим туда  $\emptyset, \Omega$ . Получим алгебру. Тогда вероятность это отображение  $P : \Omega \mapsto [0, 1]$ , такое что  $\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$ . Тогда  $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$ .

1.  $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$
2.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

**Определение 3.1.** Назовем события  $A$  и  $B$  несовместными, если  $A \cap B = \emptyset$ .

Некоторым очень хочется дать определение вида  $P_r(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ . Это не работает, если события не равновероятны.

Пусть есть два события на кубике:  $A$  — число  $> 3$ ,  $B$  — четное число.  $P_r(A) = \frac{1}{2}, P_r(B) = \frac{1}{2}$ .

Теперь пусть есть инсайд: событие  $A$  произошло. Тогда  $P_r(B | A) = \frac{2}{3}$ . Тогда посмотрим на картинку и получим  $P_r(B | A = \frac{|A \cap B|}{|A|})$ . Но не забудем, про то, что мы смотрели на равновероятные события, тогда поделим на  $|\Omega|$ . Получим  $P_r(B|A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P_r(A \cap B)}{P_r(A)}$ .

Посмотрим на крайние случаи:  $P_r(A|A) = 1$ ,  $P_r(A|\Omega) = P_r(A)$ ,  $P_r(B|A) = 1$ , если  $A \subseteq B$ .

Тогда пусть  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ . Тогда  $P_r((B_1 \cup B_2) \cap A) = P_r((B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A)) = P_r(B_1 \cap A) + P_r(B_2 \cap A)$ .  
 $A$   $P_r(B_1 \cup B_2 | A) = P_r(B_1 | A) + P_r(B_2 | A)$ .

Посмотрим на  $P_r(B|\bar{A}) = \frac{1}{3}$ . Докажем, что  $P_r(B | A) \cdot P_r(A) + P_r(B | \bar{A}) \cdot P_r(\bar{A}) = 1$ . Докажем формулу полной вероятности.

**Доказательство.** Пусть  $\Omega$  разбита на блоки  $\{A_1, \dots, A_k\}$ . Заметим, что  $P_r(B) = P_r(B \cap \Omega) = P_r(B \cap (A_1 \cup \dots \cup A_k)) = P_r((B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_k))$ . Дальше заметим, что  $\forall i, j : A_i \cap A_j = \emptyset$ . Тогда получаем  $P_r(B \cap A_1) + P_r(B \cap A_2) + \dots + P_r(B \cap A_k)$ . Применив формулу условной вероятности, получим формулу полной вероятности:

$$P_r(B) = P_r(B | A_1) \cdot P_r(A_1) + P_r(B | A_2) \cdot P_r(A_2) + \dots + P_r(B | A_k) \cdot P_r(A_k).$$

□

Заметим, что  $P_r(A \cap B) = P_r(B | A) \cdot P_r(A)$  и  $P_r(B \cap A) = P_r(A | B) \cdot P_r(B) \Rightarrow P_r(A | B) = \frac{P_r(B|A)P_r(A)}{P_r(B)}$ . Тогда, вспомнив формулу полной вероятности, получаем:

$$P_r(A_i | B) = \frac{P_r(B | A_i) \cdot P_r(A_i)}{\sum_{j=1}^k P_r(B | A_j) \cdot P_r(A_j)}.$$

Пусть у вас есть событие  $P_r(B)$ , причем  $P_r(B) = P_r(B | A) = \frac{P_r(A \cap B)}{P_r(A)} P_r(A) \Rightarrow P_r(A \cap B) = P_r(A) \cdot P_r(B)$

**Определение 3.2.** Два события называются независимыми, если вероятность их пересечения равна произведению вероятностей этих событий.

Схема Бернулли: есть  $n$  независимых испытаний, где есть два исхода:  $p > 0$  и  $q > 0$ ,  $p + q = 1$ . Все элементарных исходов можно записать в виде бинарной строки длины  $n$ . Тогда для какого-то  $\omega$   $P_r(\omega) = p^k \cdot q^{n-k}$ ,  $k = \sum_{i=1}^n a_i$ . Заметим, что  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p + q)^n = 1^n = 1$ .

**Определение 3.3.** Независимые в совокупности события — события  $A_1, \dots, A_k$ , такие что  $P_r(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) = P_r(A_1) \cdot P_r(A_2) \cdot \dots \cdot P_r(A_k)$ ,

$\Omega_1 = \{\text{успех, неудача}\}$ ,  $P_{r_1}(\omega) = \begin{cases} p & \text{успех} \\ q & \text{неуспех} \end{cases}$ ,  $A_1 = \{\emptyset, \text{успех, неудача}, \Omega\}$ . Тогда  $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$ ,

$A = A_1 \times \dots \times A_n$ .

Тогда рассмотрим  $(\Omega_1, A_1, P_{r_1})$ ,  $(\Omega_2, A_2, P_{r_2})$ . Тогда  $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ ,  $A = A_1 \times A_2$ . Тогда события  $A_1 \times \Omega_2$ ,  $\Omega_1 \times A_2$ .

## 3.2. Случайная величина

**Определение 3.4.** Случайная величина  $\xi$  — отображение  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

Иногда описание при помощи  $\Omega, \mathbb{A}, \text{Pr}$  даёт слишком точное, громоздкое описание. А мы хотим только суть: например сумму значений после броска двух кубиков.

Рассмотрим некую  $\Omega$ :  $|\Omega| = m$ ,  $|X| = n$ , где  $X = \{x_i \mid x_i = \xi(\omega)\}$ . Рассмотрим событие  $A_k = \{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) = x_k\}$ . Тогда  $\text{Pr}(A_k) = \sum_{\omega \in \Omega; \xi(\omega) = x_k} \text{Pr}(\omega)$ .

**Определение 3.5.**  $\{\text{Pr}(A_1), \dots, \text{Pr}(A_n)\}$  — распределение вероятности случайной величины  $\xi$ . Причем  $\sum_{k=1}^n \text{Pr}(A_k) = 1$ .

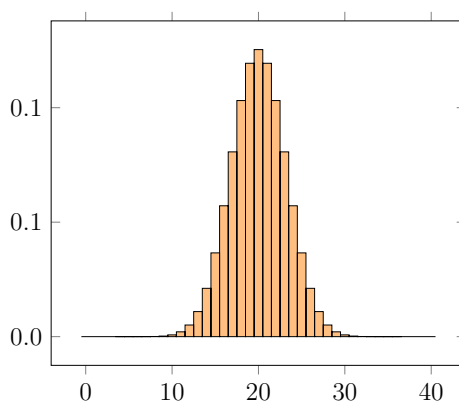
А теперь пусть  $B$  — множество всех подмножеств  $X$ , тогда можно перейти к пространству  $(X, B, \text{Pr})$ . Так мы получили более простой эксперимент.

## 3.3. Биномиальное распределение

Вспомним, что такое схема Бернулли: пусть есть монетка, которую кидаем  $n$  раз, орел выпадает с вероятностью  $p$ , решка с вероятностью  $q$ . Тогда  $\omega = (0, 1, 1, 0, \dots, 0)$ , в общем случае  $\omega = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $a_n \in \{0, 1\}$ .  $k := \sum_{i=1}^n a_i$  — количество успехов в  $n$  испытаниях.

Нам кажется, что такое описание  $\omega$  довольно сложно, нам хочется просто знать что-то про  $k$ . Тогда введем  $\xi$ :  $\xi(\omega) = k$ . Тогда  $X = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ , а  $\text{Pr}(\xi(\omega) = w) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ .

Тогда заметим, что  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p + q)^n = 1^n = 1$ . Значит, у нас нормальная вероятность. Построим тогда график.



### 3.4. Геометрическое распределение

Нам интересен первый момент, когда у нас произошел фейл. Тогда пусть  $\xi(\omega) = k$  — первый момент фейла.  $\Pr(\xi(\omega) = k) = q^{k-1} \cdot p$ . Тогда проверим нормировку:  $\sum_{k=1}^{\infty} p \cdot q^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \frac{p}{1-q} = \frac{p}{p} = 1$ .

### 3.5. Гипергеометрическое распределение

У нас есть три переменных  $n, m, k$ . Число предметов первого и второго сорта.  $\xi(\omega)$  — кол-во предметов 1-го сорта в выборке из  $k$  человек.  $\Pr(\xi(\omega) = i) = \frac{\binom{n}{i} \binom{m}{k-i}}{\binom{n+m}{k}}$

У нас могут начаться проблемы из-за того, что у нас может быть задано несколько величин. Пусть  $\eta$  — произведение при броске двух кубиков.

$y$	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16
$\Pr(B)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$										

**Определение 3.6.** Если  $\forall \omega : \Pr(\xi(\omega) = x \wedge \eta(\omega) = y) = \Pr(\xi(\omega) = x_k) \cdot \Pr(\eta(\omega) = k)$ , то случайные величины независимы.

Посмотрим на  $\xi(\omega) = x_i, \eta(\omega) = y_i$ . Тогда пусть  $\chi(\omega) = \eta(\omega) + \xi(\omega)$ . Тогда  $\Pr(\chi(\omega) = z) = \Pr(\chi(\omega) = x_i + y_i) = \sum_{k,j: x_k + y_j = z} \Pr(\xi(\omega) = x_k \wedge \eta(\omega) = y_k)$ . Если величины независимы, то получим под суммой  $\Pr(\xi(\omega)) \cdot \Pr(\eta(\omega))$

### 3.6. Численные характеристики

$\xi(\omega) \in X = \{x_1, \dots, x_n\}$ .  $\{p_1, p_n\}$  — распределение вероятности:  $p_i = \Pr(\xi(\omega) = x_i)$ . Посмотрим на среднее:  $\frac{x_1 \cdot (p_1 N) + x_2 \cdot (p_2 N) + \dots + x_n \cdot (p_n N)}{N} = \sum_{i=1}^n p_i \cdot x_i =: E(\xi)$ .

**Определение 3.7.**  $E(\xi)$  — мат. ожидание величины  $\xi$ .

**Определение 3.8.** Медианой называется число  $m$ , такое что  $\Pr(\xi(\omega) \geq m) \geq \frac{1}{2}$  и  $\Pr(\xi(\omega) \leq m) \geq \frac{1}{2}$

**Пример.** Пусть в университете работает 100 человек, у 96 зарплата 20 тысяч рублей, у 4 — 2 миллиона. Тогда  $E = 99200$  рублей. А медиана равна 20 тысячам. Поэтому медиану лучше использовать в неравномерных распределениях.

Помним, что  $E(\xi) = \sum_{k=1}^n x_k \cdot p_k = \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega) \cdot \Pr(\omega)$ . Так как  $p_k = \Pr(\xi(\omega) = x_k) = \sum_{\omega: \xi(\omega)=x_k} \Pr(\omega)$ .

**Утверждение 3.1.**  $E(c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2) = c_1 E(\xi_1) + c_2 E(\xi_2)$ .

**Доказательство.**  $E(\xi_1 + \xi_2) = \sum_{\omega \in \Omega} (\xi_1 + \xi_2) \Pr(\omega) = \sum_{\omega} \xi_1 \Pr(\omega) + \sum_{\omega} \xi_2 \Pr(\omega) = E(\xi_1) + E(\xi_2)$   $\square$

**Определение 3.9.** Дисперсия  $Var(\xi) = E(\xi - E(\xi))^2$

Посчитаем это:  $= E(\xi^2 - 2E(\xi)\xi + E^2(\xi)) = E(\xi^2) - 2E(\xi)E(\xi) + E^2(\xi) = E(\xi^2) - E^2(\xi)$ .

Заметим, что дисперсия не линейна:  $Var(\xi_1 + \xi_2) = E((\xi_1 + \xi_2)^2) - E^2(\xi_1 + \xi_2) = \dots = E(\xi_1^2) + 2E(\xi_1 \cdot \xi_2) + E(\xi_2^2) - E^2(\xi_1) - 2E(\xi_1)E(\xi_2) - E^2(\xi_2) = Var(\xi_1) + Var(\xi_2) + 2cor(\xi_1; \xi_2)$ , где  $cor(\xi_1, \xi_2) = E(\xi_1 \xi_2) - E(\xi_1) \cdot E(\xi_2)$

**Теорема 3.2** (Теорема Чебышева).  $E((\xi - \mu)^2 \geq \alpha) \leq \frac{Var(\xi)}{\alpha} \forall \alpha > 0$ , где  $\mu := E(\xi)$ .

**Следствие.**  $\sigma := \sqrt{\text{Var}(\xi)}$ ;  $\text{Var}(\xi) = \sigma^2 \Rightarrow \alpha = c^2 \sigma^2$ . Тогда  $E(|\xi - \mu| \geq c\sigma) \leq \frac{1}{c^2}$ .

## 4. Рекуррентные соотношения

### 4.1. Определение

**Определение 4.1.** Пусть есть последовательность  $(a_0, a_1, a_2, \dots)$  и  $a_{n+1} = F(a_0, a_1, \dots)$ . Тогда данная последовательность рекуррентная.

Будем рассматривать последовательности, в которых  $n$ -ый считается от фиксированного количества предыдущих членов.

**Пример.** Разводим лягушек. Изначально есть 50 лягушек. Каждый год количество увеличивается в 4 раза, но сто лягушек едут во Францию (навсегда...). Тогда количество лягушек в  $i$ -ый год:  $a_n = 4a_{n-1} - 100$ .

Очень классно, но что с этим можно сделать? Все просто — есть проблема в скорости пересчета, поэтому хочется найти замкнутую форму (формулу).

Но не для всех можно придумать формулу, конечно, не всегда. Но такие последовательности от дьявола.

### 4.2. Линейные рекурренты

**Определение 4.2.** Линейными рекуррентным соотношениями будем называть рекурренты вида:

$$a_{n+m} = b_1(n) \cdot a_{n+m-1} + b_2(n)a_{n+m-2} + \dots + u(n).$$

Где  $b_i(n) = \text{const} = u(n)$ .

**Определение 4.3.** Соотношение однородное, если  $u(n) = 0$ .

Если соотношение однородное, то можно сказать  $a_n = \lambda^n$ . Что просто замечательно!  $a_{n+2} = b_1 a_{n+1} + b_2 a_n$ . Тогда  $\lambda^{n+2} = b_1 \lambda^{n+1} + b_2 \lambda^n$ .

Тогда получаем,  $\lambda^2 = b_1 \lambda + b_2$  — **характеристическое уравнение рекуррентного соотношения**.

Пусть мы в решении мы нашли два неравных решения  $\lambda_1, \lambda_2$ . Тогда заметим, что их сумма подходит. А еще домножение каждого на константу работает.

То есть  $a_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n, \forall c_1, c_2$ . Тогда нам можно выбрать просто  $a_0, a_1$ .

Заметим, что по  $a_0, a_1$  можно найти  $c_1, c_2$ : 
$$\begin{cases} a_0 = c_1 \lambda_1^0 + c_2 \lambda_2^0 = c_1 + c_2 \\ a_1 = c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 \end{cases}$$
. Откуда получаем,

что  $c_2 = \frac{a_1 - \lambda_1 a_0}{\lambda_2 - \lambda_1}$  и  $c_1 = a_0 - c_2$ .

Теперь разберем случай, когда  $\lambda_1 = \lambda_2$ . Тогда будем искать вид  $a_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \cdot n \cdot \lambda_1^n$ .

**Доказательство.** Хотим доказать:

$$c_1 \cdot \lambda^{n+2} + c_2(n+2)\lambda^{n+2} = b_1 c_1 \lambda^{n+1} + c_2(n+1)\lambda^{n+1} + b_1 c_1 \lambda^n + c_2(n)\lambda^n.$$

Заметим, что достаточно доказывать, что  $c_1 \dots = c_1 \dots$  и  $c_2 \dots = c_2 \dots$ . Тогда докажем, что штука  $(n+2)\lambda_1^{n+2} = b_1(n+1)\lambda_1^{n+1} + b_2 n \lambda_1^n$ :

$$n \lambda_1^n + 2 \lambda_1^{n+2} = n \lambda_1^{n+1} + n \lambda_1^n + \lambda_1^{n+1}.$$

Заметим, что штуки с  $n$  решаются понятно как ( $\lambda_1$  — корень хар. уравнения). Тогда получили:

$$2\lambda_1^{n+2} = \lambda_1^{n+1} \iff 2\lambda_1^2 - \lambda_1 = 0.$$

Дальше решаем систему для  $a_0, a_1$  и живем счастливо! □

**Пример Числа Фиббоначи.**

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, F_n = \lambda^n.$$

$$\lambda^{n+1} = \lambda^n + \lambda^{n-1} \iff \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{cases} F_0 = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 \\ F_1 = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 \end{cases}.$$

Откуда получаем, что  $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ .

Пусть у нас больше двух членов в рекурренте. Заметим, что там техника будет ровно такая же. Только теперь получим  $a_n = \sum c_i \lambda_i^n$ . Но пусть у лямбды есть кратность, тогда будем искать:  $a_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 n \lambda_1^n + c_3 n^2 \lambda_1^n + \dots$ . Соответственно, если кратность  $ds$ , то для лямбды будет  $\sum c_i n^i \lambda^n$ .

### 4.3. Неоднородные линейные рекурренты

Пусть есть  $a_{n+1} = 4a_n - 100$ . Тогда скажем, что на самом деле  $a_{n+1} = ba_n + 4 = b(ba_{n-1} + 4) = b(b(ba_{n-2} + 4) + 4) + 4 = \dots = b^{n+1}a_0 + (b^n + b^{n-1} + \dots + b + 1) \cdot 4 = b^{n+1} \cdot a_0 + \frac{b^{n+1}-1}{b-1} \cdot 4$ .

**Теорема 4.1.**  $a_{n+m} = b_1 a_{n+m-1} + \dots + b_m a_n + u(n)$ . Если  $\alpha_n$  — решение левого, а  $\beta_n$  — удовлетворяет тому же, но без  $u(n)$ . То  $\alpha_n + c\beta_n$  будет удовлетворять рекурренте.

**Доказательство.**  $\alpha_{n+m} + c\beta_{n+m} = b_1(\alpha_{n+m-1} + c\beta_{n+m-1}) + \dots + u(n)$ . □

**Пример.**  $a_{n+1} = 2a_n + 7$ .  $a_n = C$ , тогда  $c = -7$ .  $a_{n+1} = 2a_n \Rightarrow a_n = c2^n$ .  $a_0 = c \cdot 2^0 - 7 \Rightarrow C = a_0 + 7$

**Пример.**  $a_{n+1} = 2a_n + (n+1)3^n$ . Будем искать частное решение вида  $(b_1 n + b_0)3^n$ :

$$b_1(n+1)3^{n+1} + b_0 3^{n+1} = 2b_1 3^n + 2b_1 b_0 3^n + (n+1)3^n.$$

Сокращаем на  $3^n$ :

$$3b_1 n + 3b_1 + 3b_0 = n + 2b_1 + b_0 + 1..$$

Что выполняется для любого  $n$ . Тогда  $3b_1 = 1$  и  $3b_1 + 3b_0 = 2b_1 + 2b_0 + 1$

**Пример.**  $a_{n+1} = a_n + 1$ . Заметим, что здесь  $c = c + 1$  уже не подходит. А характеристическое уравнение:  $a_{n+1} = a_n \Rightarrow \lambda = 1$ .

**Пример.**  $a_{n+2} = 7a_{n+1} + 11a_n + 7^n + (n+1)3^n$ . Последние два слагаемые нельзя представить в виде  $P(n)R^n$ . Тогда можно отдельно решить без них, с первым с двумя. А дальше как обычно.

## 5. Графы

### 5.1. Определения

**Определение 5.1.** Граф  $G$  — тройка  $(V, E, I)$ :

1.  $V$  — конечное множество вершин.
2.  $E$  — конечное множество ребер.
3.  $I: E \rightarrow \binom{V}{2}$ .

**Определение 5.2.** Концевые вершины ребра — вершины, которые соединены этим ребром.

**Определение 5.3.** Если два ребра имеют одинаковые концевые вершины, то такие ребра — кратные (мультиребра).

**Определение 5.4.** Если ребро соединяет вершину с собой, то это ребро — петля.

**Определение 5.5.** Граф простой — без петель и мультиребер.

**Определение 5.6.** Степень ребра (валентность) — количество ребер, исходящих из вершины.

**Теорема 5.1.** Сумма степеней вершин в графе равна удвоенному количеству ребер. То есть

$$\sum_{v \in V(G)} \deg v = 2 \cdot |E|$$

**Доказательство.** Каждое ребро состоит из двух полуребер. Из каждой вершины «торчит»  $\deg v$  полуребер (принцип биекции). Тогда получили, что  $\sum \deg v = 2|E|$   $\square$

**Следствие.** Количество вершин нечетной степени в графе чётно.

**Определение 5.7.** Ребро  $e$  инцидентно вершине  $u$ , если  $u$  — концевая вершина ребра.

**Определение 5.8.** Матрица инцидентности — таблица, где строчки соответствуют вершинам, а столбцы — рёбрам, а на пересечении столбца и строки стоит 0, если эта вершина не инцидентна этому ребру, иначе то, сколько раз она ему инцидентна (1, если не петля, иначе — 2).

Можно заметить, что сумма всех чисел в каждом столбце — два, а в каждой строке — степень вершины. Из этого несложно в очередной раз заметить, что сумма удвоенного количества рёбер есть сумма степеней вершин.

**Определение 5.9.** Полный граф — полный простой граф на  $n$  вершинах.  $K_n$ . Граф, в котором каждая вершина соединена ребром с каждой.

**Определение 5.10.** Дополнением графа  $G$  называется граф  $\bar{G}$ :  $V(\bar{G}) = V(G)$ , а  $E(\bar{G}) = \binom{V(G)}{2} \setminus E(G)$

**Определение 5.11.** Граф называется двудольным  $V(G) = V_1 \cup V_2, V_1 \cap V_2 = \emptyset$ . И все ребра ведут из  $V_1$  в  $V_2$ .

**Определение 5.12.** Полный двудольный граф — двудольный граф со всеми возможными ребрами.  $K_{n,m}$ , если в одной доле  $n$  вершин, а в другой  $m$ .

**Определение 5.13.** Граф « $k$ -мерный куб» —  $Q_k$ , такой граф, что  $V$  — множество бинарных строк длины  $k$ .  $E : e = uv \iff u$  и  $v$  отличаются в одном бите.

**Замечание.** Заметим, что данный граф двудольный: одна доля с четной суммой битов, другая — с нечетной.

**Определение 5.14.**  $P_n$  — граф «путь». Просто простой путь. Ничего лишнего.

**Определение 5.15.**  $C_n$  — граф «цикл». Простой путь, замкнутый в кольцо.

**Определение 5.16.** Регулярный граф — граф, в котором степень всех вершин равны.  $R$ -регулярный граф — граф, в котором степени всех вершин равны  $R$ .

**Определение 5.17.** Оргаф (ориентированный граф)  $D = (V, E, I)$ , где  $I : E \rightarrow V \times V$ .

**Теорема 5.2.**  $\sum_{v \in V(G)} \text{indeg}(v) = \sum_{v \in V(G)} \text{outdeg}(v) = |E(D)|$

**Доказательство.** Очев. Реально очев. Входящих концов у рёбер суммарно столько же, сколько и исходящих.  $\square$

**Определение 5.18.** Не помню, было ли тут что-нибудь. Если вам кажется, что мы пропустили какое-то определение — напишите пж.

**Определение 5.19.** Ориентацией графа  $G$  называется граф  $G$  полученный ориентацией всех ребер графа  $G$ .

**Определение 5.20.** Граф называется турниром, если он является ориентацией полного графа.

**Определение 5.21.** Две вершины называются смежными, если есть ребро между ними.

**Определение 5.22.** Матрица смежности — матрица размера  $V$  на  $V$ .  $A_{i,j}$  показывает сколько ребер идет из  $i$  в  $j$ .

**Определение 5.23.** Список смежности — список списков, где для каждой вершины храним выходящие из нее ребра.

## 5.2. Маршруты, пути, циклы. Связные графы

**Определение 5.24.** Маршрут (walk) — набор вершин и ребер вида:  $v_0, e_0, v_1, e_1, \dots$ , где  $v_i$  — вершины графа,  $e_i$  — ребра графа, причем  $e_i = v_{i-1}v_i$

**Определение 5.25.** Путь (trail) — маршрут без повторяющихся ребер.

**Определение 5.26.** Простой путь (path) — Путь (сложный) без повтора вершин.

**Определение 5.27.** Вершины  $x$  и  $y \in V$  называются связанными, если существует путь, соединяющий  $x, y$ .

**Замечание.** Заметим, что связность — отношение эквивалентности.  $x \rightarrow x$  — очев,  $x \rightarrow y = y \rightarrow x$ .  $x \rightarrow y, y \rightarrow z$ , тогда  $x \rightarrow z = x \rightarrow y \cup y \rightarrow z$ .

Тогда можно разбить на блоки — компоненты связности.

**Определение 5.28.** Расстояние  $d(x, y)$  — длина кратчайшего пути из  $x$  в  $y$ .

**Определение 5.29.** Диаметр графа — это расстояние между двумя наиболее удаленными точками.



**Определение 5.30.**  $x \in V(G)$  эксцентриситет  $\varepsilon(x) = \max_{y \in V(G)} d(x, y)$

**Определение 5.31.** Радиус  $G$  :  $r(G) = \min_{x \in V(G)} \varepsilon(x)$

**Определение 5.32.** Замкнутый путь — путь, которого стартовая вершина равна конечной.

**Определение 5.33.** Обхват — минимальная длина цикла в графе. Если в графе циклов нет, то равен бесконечности.

**Определение 5.34** (Теорема Кенига(König)). Граф двудольный  $\iff$  в нем нет циклов нечетной длины.

**Доказательство.**

- $\Rightarrow$ . Предположим, что есть цикл нечетной длины. Каждое ребро — переход в другую долю. То есть в стартовую долю мы переходим через четное число ходов. Противоречие.
- $\Leftarrow$ , нет простых нечетных циклов  $\Rightarrow$  двудольный.

Будем считать, что  $G$  — связный. Возьмем вершину  $x$ . Поместим все вершины на нечетном расстоянии в правую долю, все остальные в левую.

Неправильное решение: Рассмотрим случаи двух смежных вершин на нечетном + нечетном и четном + четном расстоянии. Проблема: путь может быть сложным, поэтому объединение может давать не простой цикл.

Правильное решение: пойти читать конспект Омеля, нам очень лень рисовать или писать словами. Поэтому очень жаль: (НО! если вы сильный, то можете написать)

□

Проверка на двудольность: для каждой вершины кидаем смежную вершину в другую долю.

**Определение 5.35.** Пусть  $x, y$  — вершины орграфа  $D$ , то они называются связанными, если существует путь из  $x$  в  $y$  и существует путь из  $y$  в  $x$ .

**Замечание.** Такая связанность — отношение эквивалентности. Блоки — компоненты сильной связности.

**Определение 5.36.** Компоненты слабой связности — компоненты связности, если забыть про ориентацию.

**Лемма.** Пусть  $H_1, H_2$  — компоненты сильной связности. Если существует ребро  $H_1 \rightarrow H_2$ , то ребра  $H_2 \rightarrow H_1$  не существует.

**Доказательство.** Предположим, что ребро существует. Тогда получили одну компоненту сильной связности. Противоречие. □

**Лемма.** Я пропустил лемму. Видимо про то, что из компонент сильной связности можно сделать граф без циклов.

**Доказательство.** По предыдущей лемме — очев. □

**Определение 5.37.** Топологическая сортировка — запись вершин в таком порядке, что все ребра идут слева направо.

**Утверждение 5.3.** Любой ациклический граф может быть топологически отсортирован.

**Доказательство.** Омель так сказал. □

**Замечание.** В графе может быть несколько топологических сортировок.

**Следствие.** В ациклическом графе есть вершина, из которой не выходит ребро.

### 5.3. Подграфы. Основные операции над графами

**Определение 5.38.** Граф  $H$  называется подграфом графа  $G$ , если

1.  $V(H) \subseteq V(G)$
2.  $E(H) \subseteq E(G)$
3.  $I_H: E(H) \rightarrow V(H) \times V(H)$   
 $I_G: E(G) \rightarrow V(G) \times V(G)$   
 $I_H$  — сужение  $I_G$ .

**Определение 5.39.** Операция удаления ребра —  $G \setminus e_5$  или  $G - e_5$ . Просто удаляем ребро. Получаем  $(G', V, E \setminus e_5)$ .

**Определение 5.40.** Операция удаления вершины. Удаляем вершину  $v$  + все смежные вершины.  $(G \setminus v, V \setminus \{v\}, E \setminus \bigcup_{u \sim v} vu)$

**Утверждение 5.4.** Любой подграф получается удалением ребер и вершин.

**Доказательство.** Удалим ребра  $E \setminus E'$ , удалим вершины  $V \setminus V'$ . □

**Определение 5.41.** Если подграф  $H$  графа  $G$  можно получить удалением из  $G$  только ребер, то  $H$  — остовный подграф.

**Определение 5.42.** Если подграф  $H$  графа  $G$  можно получить только удалением вершин, то  $H$  — порожденный или индуцированный подграф.  $V(H)$  — порождающее множество.

**Определение 5.43.** Операция стягивания ребра. Есть ребро  $(u, v)$  удалим,  $u, v$  и добавим вершину  $w$ , причем  $w$  смежна с  $x$ , если  $x$  смежна с  $v$  или  $x$  смежна с  $u$ .

**Определение 5.44.** Мост — ребро, при удалении которого число компонент связности увеличивается.

**Определение 5.45.** Вершина  $v$  называется точкой сочленения, если при удалении данной вершины компонента связности распадается на 2 и более.

**Утверждение 5.5.** Вершина  $v$  в связном графе  $G$  является точкой сочленения тогда, и только тогда, когда существуют вершины  $x$  и  $y$ , что любой путь из  $x$  в  $y$  проходит через  $v$ .

**Доказательство.** Пусть  $v$  — точка сочленения. Пусть существует путь из  $x$  в  $y$ , не проходящий через  $v$ . Тогда после удаления  $v$ , из  $x$  в  $y$  все еще будет путь  $\Rightarrow$  они в одной компоненты связности.

В обратную сторону. Удалим  $v$ , тогда из  $x$  больше нет пути в  $y$ . Значит компонента разбилась хотя бы на две компоненты. □

**Утверждение 5.6.** Ребро  $e$  является мостом  $\iff e$  не принадлежит ни одному циклу.

**Доказательство.** Положим противное.  $e$  лежит в цикле.

Тогда есть  $v, u$ , которые разъединились после удаления ребра  $e$ . Значит все пути из  $v$  в  $u$  проходили через  $e$ . Но! Если удалить ребро, то все равно можно будет ходить по циклу, а значит противоречие.

В обратную сторону. Пусть  $e = xy$ . Если  $e$  — не мост, то есть путь из  $x$  в  $y$  не через ребро. Значит в целом есть цикл, в котором есть  $e$ . Противоречие.  $\square$

**Определение 5.46.** Объединение, пересечение графов. Соответственно объединяем/пересекаем множества вершин/ребер.

**Определение 5.47.** Симметрическая разность графов  $H_1$  и  $H_2$ :  $H = H_1 \triangle H_2$

Пусть  $V(H) = V(H_1) = V(H_2)$ , а  $E(H) = E(H_1) \triangle E(H_2)$

*Замечание.*  $G_n \triangle \overline{G_n} = K_n$ .

## 5.4. Деревья

**Определение 5.48.** Дерево — связный граф без циклов.

**Определение 5.49.** Лес — граф без циклов. Или множество деревьев.

**Определение 5.50.** Лист — вершина степени 1.

**Лемма.** У любого дерева  $T$  с  $\geq 2$  вершинами как минимум 2 листа.

**Доказательство.** Рассмотрим самый длинный простой путь  $v_1, v_2, \dots, v_k$ .

Предположим  $v_1$  и  $v_k$  — не листья. Тогда есть какое-то ребро из  $v_1$ . Тогда есть еще какое-то ребро из  $v_1$ . Если оно ведет в наш путь, то у нас есть цикл. А если не в наш цикл, то в путь можно добавить вершину. Противоречие с выбором пути.  $\square$

**Теорема 5.7.** В любом дереве  $T$  на  $n$  вершинах ровно  $n - 1$  ребро.

**Доказательство.**

- База.  $n = 1$ : 0 ребер.  $n = 2$ : 1 ребро.
- Переход.  $n \rightarrow n + 1$ .
- Доказательство. Возьмем любой лист. Удалим его (вместе с его ребро). У нас останется  $n$  вершин, а для них ответ уже известен.

$\square$

**Теорема 5.8.** Любой простой связный граф  $G$  с  $n - 1$  ребром является деревом.

**Доказательство.** Пусть нет циклов. Получили определение дерева.

Пусть цикл есть. Тогда удалим ребро  $e$  на цикле. Граф остался связным. И так далее пока есть циклы.

Теперь у нас граф без циклов с  $m - k$  ребер. Тогда у нас дерево с  $n$  вершинами  $m - k$  ребрами. Значит изначально у нас не дерево (много ребер).  $\square$

**Определение 5.51.** Остовное дерево — подграф, содержащий все вершины, являющийся деревом.

**Следствие.**

1. в любом связном графе  $G$  как минимум  $n - 1$  ребро ( $n = |V(G)|$ ).
2. В любом графе  $G$  существует остовное дерево.

**Доказательство.** ????

□

### Deep-First Search

Тут просто пример, ничего интересного, смотрите у Омея.

**Утверждение 5.9.** Связный граф является деревом  $\iff$  все ребра — мосты.

**Доказательство.** Мосты  $\Rightarrow$  дерево. Пусть есть цикл, тогда есть ребро в цикле. Противоречие.

Обратно. В дереве есть не мост. Удалили ребро, остался путь, значит был цикл. Противоречие. □

**Утверждение 5.10.** Граф  $G$  является деревом  $\iff$  для любых двух вершин существует единственный путь.

**Доказательство.** Пусть существует два пути. Тогда они будут иметь хотя бы две общие точки. Значит есть цикл. □

В обратную сторону очевидно. □

**Следствие.**  $T$  — остовное дерево графа  $G$ ,  $e \in E(G)$ ,  $e \notin E(T)$ . Тогда  $T \cup \{e\}$  содержит единственный цикл и цикл проходит через  $e$ .

**Доказательство.** Очев. □

**Утверждение 5.11.**  $T$  и  $T'$  — различные остовные деревья графа  $G$ . Тогда  $T \cup e'$  — остовное дерево. ( $e$  не лежит в  $T'$ )

**Доказательство.** Рассмотрим две компоненты связности после удаления  $e$ . Тогда есть ребро  $e'$  из одной компоненты связности, так как две компоненты в  $T'$  связаны. □