Линейная алгебра и геометрия

Харитонцев-Беглов Сергей

10 января 2022 г.

Содержание

1. Векторные пространства

Рассмотрим простейшую систему уравнений:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f. \end{cases} \iff x + x \cdot \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Выразим $\binom{e}{f}$ через $\binom{a}{c}$, $\binom{b}{d}$: так как $x \cdot \binom{a}{c} = \binom{xa}{xc}$, тогда $\binom{xa}{xc} + \binom{yb}{yd} = \binom{xa+yb}{xc+yd}$.

***Определение* 1.1.** Тогда $x\binom{a}{c} + y\binom{b}{d}$ — линейная комбинация $\binom{a}{c}$ и $\binom{b}{d}$.

***Определение* 1.2.** А $\left\{x\binom{a}{c} + y\binom{b}{d}\right\}$ — линейная оболочка $\binom{a}{c}$ и $\binom{b}{d}$. Она обозначается $\langle\binom{a}{c}, \binom{b}{d}\rangle$.

***Определение* 1.3.** Пусть R — кольцо.

Множество $\left\{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_1, a_2, \ldots, a_n \in R\right\}$ — называется n-мерным арифметическим пространством с координатным пространством над R.

С операциями:

- $$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$
- $$r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_1 \\ ra_2 \\ \vdots \\ ra_n \end{pmatrix}$$

***Определение* 1.4.** Пусть K — поле. Векторным пространством над K это тройка $(V, +, \cdot)$, где V — множество, $+\colon V \times V \to V$, $\cdot\colon K \times V \to V$. Причем:

1–4 $(V, +)$ — абелева группа.

1. $a + b = b + a \ \forall a, b \in V$.
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$
3. $\exists \overline{0}\colon a + \overline{0} = a$
4. $\forall a \in v \ \exists(-a)\colon a + (-a) = \overline{0}$
5. $(k_1 k_2)v = k_1(k_2 v)$
6. $(k_1 + k_2)v = k_1 v + k_2 v$
7. $k(v_1 + v_2) = kv_1 + kv_2$
8. $1_K \cdot v = v$

Замечание. V — векторное пространство над K. Тогда:

- $0 \cdot v = \overline{0}\ \forall v \in V$.
- $k \cdot \overline{0} = \overline{0}\ \forall k \in K$.
- $(-1) \cdot v = -V\ \forall v \in V$.

Замечание. Из определений 2–8 следует 1.

***Определение* 1.5.** Пусть R — кольцо.
Тройка $(V, +, \cdot)$ с аксиомами 1-8 называется модулем над R.

Замечание. Абелевы группы $\implies$ модули над $\mathbb{Z}$.

***Определение* 1.6.** V — векторное пространство над K. $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$. Тогда $\sum a_i v_i$ — линейная комбинация $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

***Определение* 1.7.** $M \subset V$. $\langle M \rangle = \{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_k v_k \mid a_i \in K, v_i \in M\}$ называется линейной оболочкой множества M.

***Определение* 1.8.** Подпространство V — подмножество $U \subset V$, такое что $(U, +_V, \cdot_V)$ — векторное пространство.

Утверждение 1.1. $U \subset V$ — подпространство $\iff$ все операции с элементами U лежат в U.

Пример. ${}^nK$ — арифметическое пространство.

$$v_1, v_2, \ldots, v_m \in K^n.\ x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_m v_m = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$ — однородная система линейных уравнений. Множество решений $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in {}^nK$ является подпространством в ${}^nK$. А дальше я не понял)

Обозначение: U — подмножество V: $U \leqslant V$.

Утверждение 1.2. $V_1, V_2, \leqslant V \implies V_1 \cap V_2 \leqslant V$.

Доказательство. Очевидно! □

***Определение* 1.9.** Сумма по Минковскому: $A, B \subset V : A + V := \{a + b \mid a \in A \wedge b \in B\}$.

Утверждение 1.3 (Сумма по Минковскому)**.** $V_1, V_2 \leqslant V \implies V_1 + V_2 \implies V$.

Доказательство.

- $x, y \in V_1 + V_2 \iff x = v_1 + v_2, y = v_1' + v_2'$, где $v_1, v_1' \in V_1$, $v_2, v_2' \in V_2$.
- $k \cdot x$ — очевидно.

□

Замечание. $M \subset V$, $\langle M \rangle = \bigcap\limits_{\substack{U \leqslant V \\ U \supset M}} U$

***Определение* 1.10.** V_1, V_2 — векторные пространствами над K. Тогда $f : V_1 \to V_2$ — гомоморфизм (линейного отображения), если

1. $f(v_1+v_2)=f(v_1)+f(v_2)\ \forall v_1,v_2\in V_1$.
2. $f(kv)=kf(v)$.

Если при этом f — биекция, то f — изоморфизм.

Замечание. Координизация — сопоставление элементам векторного пространства координат пространства, являющимся изоморфным этому пространству.

Пример векторных пространств.

1. K — векторное пространство над K.
2. Вектора над плоскостью/пространством.
3. $K\left[x\right]_n=\{x\in K[x]\mid \deg f\leqslant n\}$. Тогда $K[x]_n\cong K^{n+1}$.
4. M — множество, K — поле. Тогда $V=\{f\colon M\to K\}$ — векторное пространство:
   - $(f_1+f_2)(m)\coloneqq f_1(m)+f_2(m)\ \forall m\in M$.
   - $(kf)(m)=k\cdot f(m)\ \forall k\in K$.

4'. $M=K=\mathbb{R}$, $C_0(\mathbb{R})$ — непрерывные функции $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. $C_0(\mathbb{R})\leqslant(a_0,a_1,\ldots)$. Значения во всех рациональных точках.

5. Последовательность фиббоначиевого типа: $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$. Тогда множество таких последовательностей — векторное пространство $\cong\mathbb{R}^2$
6. M — множество. $V=2^M$, $K=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $M_1+M_2\coloneqq M_1\bigtriangleup M_2,\ 0\cdot M=\varnothing, 1\cdot M=M$. Тогда V — векторное пространство над $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $V\cong{}^n(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

***Определение* 1.11.** V — векторное пространство над K. $\{v_i\}_{i\in I}$ называется базисом V, если $\forall v\in V\ \exists!\{a_i\}_{i\in I}\wedge a_i\in K\colon v=\sum a_iv_i$

Замечание. В терминах этого определения $I=\{1,2,\ldots,n\}$ $V\leftrightarrow\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$, то есть $V\cong K^n$.

***Определение* 1.12.** V — векторное пространство над полем K, тогда $\{v_i\}_{i\in I}$ называется линейно независимым (ЛНЗ), если выполнено одно из равносильных утверждений:

- $\nexists i\in I\colon V_i=\sum\limits_{j\neq i}a_jv_J$
- $\forall\{a_i\}\in K\colon\sum a_iv_i=0\implies a_i=0\ \forall i\in I$.

Доказательство. $2\implies 1$. Пусть $\exists i\colon v_i=\sum a_jv_j\implies\sum a_jv_j-v_i=0\xRightarrow{a_i=-1}$ не выполняется второе.

$1\implies 2$. Пусть $a_iv_i=0$, причем $\exists a_i\neq 0$. Тогда можно поделить на $-a_i$ и получить $v_i=\sum\limits_{i\neq j}b_jv_j$. □

Теорема 1.4 (Равносильное определение базиса)**.** $\{v_i\}_{i\in I}, v_i\in V$, V — векторное пространство над K.

1. $\{v_i\}$ — базис.

2. $\{v_i\}$ — линейно независимая система и $\langle\{v_i\}\rangle V$. $\{v_i\}$ — порождающая система.

3. $\{v_i\}$ — максимально линейная независимая. $\forall v \in V : \{v_i\}_{i\in I} \cup v$ — линейно зависимая.

4. $\{v_i\}$ — минимальная порождающая система. То есть выкидывание любого вектора делало систему не порождающей.

Доказательство.

- $1 \implies 2$. $\{v_i\}$ — базис $\implies$ $\{v_i\}$ порождающая по определению. Причем $\sum a_i v_i = 0$ выполняется при $a_i = 0$, тогда из независимости следует, что $a_i = 0$.

- $2 \implies 1$. $\forall v \in V : v = \sum a_i v_i$, так как $\{v_i\}$ — порождающая. Тогда докажем единственность: пусть существуют $\sum a_i' v_i = v = \sum a_i v_i$. Тогда возьмем разность: $0 = \sum (a_i - a_i')v_i \iff a_i - a_i' = 0 \iff a_i = a_i'$.

- $3 \implies 2$. Раз любой новый вектор добавляет зависимость, то по определению $V = \sum a_i v_i$. Значит система порождающая.

- $2 \implies 4$. Пусть наша $\{v_i\}$ — ЛНЗ. Тогда заметим, что если она не минимальная порождающая, то значит убрав один вектор, мы сможем его получить при помощи других наших векторов $\Rightarrow$ система линейно зависима.

$\square$

***Определение* 1.13.** V — векторное пространство над K.

V называется конечномерным, если $\exists$ конечная порождающая система $\in V$.

Лемма. Из любой конечной порождающей системы $V = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n\rangle$ можно выбрать базис.

Доказательство. Во-первых, если она линейно независима, то все очевидно.

Тогда, пусть $\exists v_i = \sum\limits_{j\neq i} a_j b_j$. Тогда заметим, что система никак не пострадает, если убрать V_i из системы: мы все равно можем его получить при помощи остальных векторов.

Теперь можно продолжить этот процесс до момента, когда эта система станет линейно независимой. Так как система была конечной, то этот процесс когда-либо закончится (например, если выкинем все вектора). $\square$

Замечание. Пример пространства с нулевым базисом: у множества $V = \{0\}$ базис равен $\varnothing$.

Следствие. В любом конечном пространстве есть базис.

Замечание. В любом пространстве есть базис.

Пример.

$$K[x] = \langle 1, x, x^2, \ldots\rangle$$
$$K[[x]] = \langle ???\rangle$$

У $K[[x]]$ есть базис, но на человеческом нельзя задать.

У $\mathbb{R}$ тоже есть базис, но как его задать — вопрос.

***Определение* 1.14.** Размерность пространства $\dim V$ — количество элементов в базисе.

Теорема 1.5. Все базисы имеют поровну элементов.

Лемма (Лемма о ЛЗЛК)**.** $u_1, \ldots, u_n \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$, $m > n$. Тогда $u_1, \ldots, u_m$ линейно зависима.

Доказательство.

Лемма. Лемма о замене: $\langle v_1, v_2, \ldots v_n \rangle = \langle \sum a_i v_i, v_2, \ldots, v_n \rangle$.

Доказательство. $\sum a_i v_i, v_2, \ldots, v_n \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$. В обратную сторону: ???. $\square$

Если у нас есть нуль-вектор, то мы сразу проиграли. Иначе представим $\overline{0} = u_1 = \sum a_i v_i$. По лемме произведем замену. И так пока система линейно зависима. А дальше я выпал :($\square$