

# Математический анализ

Харитонцев-Беглов Сергей

22 декабря 2021 г.

## Содержание

<b>1. Множества, отношения</b>	<b>1</b>
1.1 Орг. моменты . . . . .	1
1.2 Что такое множество . . . . .	1
1.3 Операции с множествами. . . . .	2
1.4 Вещественные числа . . . . .	4
1.5 Мат. индукции . . . . .	5
1.6 Наибольшие/наименьшие элементы . . . . .	5
1.7 Инфинум/Супремум . . . . .	6
<b>2. Последовательности</b>	<b>8</b>
2.1 Предел последовательности . . . . .	8
2.2 Бесконечно большие и бесконечно малые . . . . .	11
2.3 Экспонента . . . . .	14
2.4 Подпоследовательность . . . . .	17
2.5 Ряды . . . . .	20
<b>3. Предел и непрерывность</b>	<b>22</b>
3.1 Предел функции . . . . .	22
3.2 Непрерывные функции . . . . .	25
3.3 Элементарные функции . . . . .	30
3.4 Сравнение функций . . . . .	32
<b>4. Дифференциальное исчисление</b>	<b>35</b>
4.1 Дифференцируемость и производная . . . . .	35
4.2 Таблица производных . . . . .	37
4.3 Теоремы о среднем . . . . .	38
4.4 Производные высших порядков . . . . .	41
4.5 Экстремумы функций . . . . .	44
4.6 Выпуклые функции . . . . .	46

<b>5. Интегральное исчисление функции одной переменной</b>	<b>51</b>
5.1 Первообразная и неопределенный интеграл . . . . .	51

# 1. Множества, отношения

## 1.1. Орг. моменты

- За основу начала была взята книжка "Виноградов, Громов «Курс по математическому анализу». Том 1". Но это было давно, как база, но смотреть туда можно.
- Зорич «Математический анализ».
- Фихтенгольц. Книжка устарела, написана старым языком, но там разобрано много примеров, поэтому можно смотреть просто темы.
- [Курс на степике](#). (Часть вторая).

Для связи можно использовать почту [aikhrabrov@mail.ru](mailto:aikhrabrov@mail.ru).

Система состоит из нескольких кусочков:  $0.3 \cdot \text{оценка за практику (АЗ, кр...)} + 0.35 \cdot \text{Коллоквиум в нечетном семестре} + 0.35 \cdot \text{Экзамен в четном модуле}$ . Хвост образуется только в конце семестра.

Первый модуль — общие слова, последовательности, пределы последовательности, функции, непрерывность. Второй модуль — конец непрерывности, производная, начало интегралов.

## 1.2. Что такое множество

Обойдемся без формалистики — мы тут занимаемся прикладной математикой. Поэтому

**Определение 1.1.** Множество — какой-то набор элементов. Для любого элемента можно сказать принадлежит множеству или нет.

Операция	определение	название
$A \subset B$	$\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$	$A$ — подмножество $B$
$A = B$	$A \subset B \wedge B \subset A$	$A$ равно $B$
$A \subsetneq B$	$A \subset B \wedge A \neq B$	$A$ — собственное подмножество $B$

Способы задания множеств:

- Полное задание:  $\{a, b, c\}$ .
- Неполное:  $a_1, a_2, \dots, a_k$ . Но должно быть понятно как образована последовательно. Например  $\{1, 5, \dots, 22\}$  — непонятно
- Можно так же и бесконечные:  $\{a_1, a_2, \dots\}$
- Словесным описанием. Например, множество простых чисел.
- Формулой. Например, пусть задана функция  $\Phi(x)$  — функция для всех чисел, которая возвращает истину или ложь. Тогда можно взять множество  $\{x : \Phi(x) = \text{истина}\}$ . Но не всякая функция подходит, особенно если функция из реального мира. Например: «натуральное число может быть описано не более чем 20 словами русского языка». Не подходит оно по следующей причине: пусть наша функция подходит, то образуется множество  $A = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ . У каждого множества есть минимальный элемент, тогда минимальное не входящее число может быть описано как «первое число, которое нельзя описать не более чем 20 словами русского языка», что меньше 20 слов. Противоречие.

### 1.3. Операции с множествами.

Символ	Определение	Описание
$\cap$	$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$	Пересечение множеств
$\bigcap_{k=1}^n A_k$	$A = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$	Пересечение множества множеств
$\cup$	$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$	Объединение множеств
$\bigcup_{k=1}^n A_k$	$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$	Объединение множества множеств
$\setminus$	$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$	Разность множеств
$\times$	$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$	Произведение множеств
$\triangle$	$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$	Симметрическая разность
$\emptyset$	$\forall x : x \notin \emptyset$	пустое множество
$\mathbb{N}$		Натуральные числа
$\mathbb{Z}$		целые числа
$\mathbb{Q}$	$\frac{a}{b}$ , где $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$	рациональные числа
$\mathbb{R}$		действительные числа
$2^X$		множество всех подмножеств $X$

Важный момент:  $1 \in \{1\}$ , но  $1 \notin \{\{1\}\}$

Правила де Моргана. Пусть есть  $A_\alpha \subset X$

$$1. X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha.$$

$$2. X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha.$$

**Доказательство:**  $X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : x \in X \wedge x \notin A_\alpha \forall \alpha \in I\} = \{x : \forall \alpha \in I X \setminus A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha\}.$

**Теорема 1.1.**  $A \cap \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} A \cap B_\alpha$

$$A \cup \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} A \cup B_\alpha$$

**Доказательство.** TODO. □

**Определение 1.2.** Упорядоченная пара  $\langle x, y \rangle$ . Важное свойство  $\langle x, y \rangle = \langle x', y' \rangle \iff x = x' \wedge y = y'$

**Определение 1.3.** Пусть даны множества  $X_1, \dots, X_n$ , то упорядоченной  $n$ - (кортеж) —  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ , обладающее условием  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle = \langle y_1, \dots, y_n \rangle \iff x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n$

**Определение 1.4.** Отношение  $R \subset X \times Y$ .  $x$  и  $y$  находятся в отношении  $R$ , если их  $\langle x, y \rangle \in R$ .

**Определение 1.5.** Область отношения  $\delta_R = \text{dom}_R = \{x \in X : \exists y \in Y : \langle x, y \rangle \in R\}$ .

**Определение 1.6.** Область значений  $\rho_R = \text{ran}_R = \{y \in Y : \exists x \in X : \langle x, y \rangle \in R\}$

**Определение 1.7.** Обратное отношение  $R^{-1} \subset Y \times X$   $R^{-1} = \{\langle y, x \rangle \in R\}$ .

**Определение 1.8.** Композиция отношения.  $R_1 \subset X \times Y, R_2 \subset Y \times Z : R_1 \circ R_2 \subset X \times Z$ .  
 $R_1 \circ R_2 = \{\langle x, z \rangle \in X \times Z \mid \exists y \in Y : \langle x, y \rangle \in R_1 \wedge \langle y, z \rangle \in R_2\}$

Примеры отношений.

- Отношение равенства.  $R = \{\langle x, x \rangle : x \in X\}$ . Но это просто равенство.

- " $\geq$ " ( $X = \mathbb{R}$ ).  $R = \{\langle x, y \rangle : x \geq y\}$

- " $>$ " ( $X = \mathbb{R}$ ).  $R = \{\langle x, y \rangle : x > y\}$

$\delta_{>} = 2, 3, 4 \dots$

$\rho_{>} = \mathbb{N}$

$>^{-1} = < = \{\langle x, y \rangle : x < y\}$

$> \circ > = \{\langle x, z \rangle : x - z \geq 2\}$

- $X$  — прямые на плоскости. " $\perp$ ":  $R = \{\langle x, y \rangle : x \perp y\}$ .

$\delta_{\perp} = \rho_{\perp} = X$

$\perp^{-1} = \perp$

$\perp \circ \perp = \parallel$

- $\langle x, y \rangle \in R$ , когда  $x$  — отец  $y$ .

$\delta_R = \{\text{Все, у кого есть сыновья}\}$ .

$\rho_R$  — религиозный вопрос. См. Библию

$R^{-1} = \text{сын}$

$R \circ R = \{\text{дед по отцовской линии}\}$

**Определение 1.9.** Функция из  $X$  в  $Y$  — отношение  $(\delta_f = X)$ , для которого верно:

$$\left. \begin{array}{l} \langle x, y \rangle \in f \\ \langle x, z \rangle \in f \end{array} \right\} \Rightarrow y = z.$$

Используется запись  $y = f(x)$ .

**Определение 1.10.** Последовательность — функция у которой  $\delta_f = \mathbb{N}$

**Определение 1.11.** Отношение  $R$  называется рефлексивным, если  $\forall x : \langle x, x \rangle \in R$ .

**Определение 1.12.** Отношение  $R$  называется симметричным, если  $\forall x, y \in X : \langle x, y \rangle \in R \Rightarrow \langle y, x \rangle \in R$

**Определение 1.13.** Отношение  $R$  называется иррефлексивным, если  $\forall x \langle x, x \rangle \notin R$

**Определение 1.14.** Отношение  $R$  называется антисимметричным, если  $\left. \begin{array}{l} \langle x, y \rangle \in R \\ \langle y, x \rangle \in R \end{array} \right\} \Rightarrow x = y$

**Определение 1.15.** Отношение  $R$  называется транзитивным, если  $\left. \begin{array}{l} \langle x, y \rangle \in R \\ \langle y, z \rangle \in R \end{array} \right\} \Rightarrow \langle x, z \rangle \in R$

**Определение 1.16.** Отношение называется отношением эквивалентности, если отношение рефлексивно, симметрично, транзитивно.

**Пример.** Равенство, сравнение по модулю  $\mathbb{Z}$ ,  $\parallel$ , отношение подобия треугольников.

**Определение 1.17.** Если выполняется рефлексивность, антисимметричность и транзитивность, то данное отношение — отношение нестрогого частичного порядка.

**Пример.**  $\geq$ ;  $A \subset B$  на  $2^X$ .

**Определение 1.18.** Если выполняется иррефлексивность и транзитивность, то данное отношение — отношение строгого частичного порядка.

**Пример.**  $>$ ;  $A$  собственное подмножество  $B$  на  $2^X$ .

**Упражнение.** Иррефлексивность + транзитивность  $\Rightarrow$  антисимметрично.

**Упражнение.**  $R$  — нестрогий ч.п.  $\Rightarrow R = \{\langle x, y \rangle \in R : x \neq y\}$  — строгий ч.п.

## 1.4. Вещественные числа

Есть две операции.

•  $+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

- Коммутативность.  $x + y = y + x$ .
- Ассоциативность.  $(x + y) + z = x + (y + z)$
- Существует ноль.  $\exists 0 \in \mathbb{R} \ x + 0 = x$
- Существует противоположный элемент.  $\exists (-x) \in \mathbb{R} \ x + (-x) = 0$

•  $\cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

- Коммутативность.  $x \cdot y = y \cdot x$ .
- Ассоциативность.  $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
- Существует единица.  $\exists 1 \in \mathbb{R} \ x \cdot 1 = x$
- Существует обратный элемент.  $\exists x^{-1} \in \mathbb{R} \ x \cdot x^{-1} = 1$

Свойство дистрибутивности:  $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ . Структура с данными операциями называется полем.

Введем отношение  $\leq$ . Оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно, то есть нестрогий частичного порядка. Причем:

- $x < y \Rightarrow x + z < y + z$
- $0 \leq x \wedge 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq x \cdot y$

**Аксиома полноты.** Если  $A$  и  $B \subset \mathbb{R}$  и  $\forall a \in A, b \in B : a \leq b$  и  $A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$ , тогда  $\exists c \in \mathbb{R} \ a \leq c \leq b$ .

**Замечание.** Множество рациональных не удовлетворяет аксиоме полноты. Например:  $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \wedge x^2 > 2\}$ . Единственная точка, между этими множествами —  $\sqrt{2}$

**Теорема 1.2 (Принцип Архимеда).** Пусть  $x \in \mathbb{R} \wedge y > 0$ . Тогда  $\exists n \in \mathbb{N} : x < ny$

**Доказательство.**  $A = \{u \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : u < ny\}$ . Пусть  $A \neq \mathbb{R}$ ,  $B = \mathbb{R} \setminus A \neq \emptyset$ ,  $A \neq \emptyset$ , т.к.  $0 \in A$ .

Возьмем  $a \in A, b \in B$ .  $b < a \Rightarrow \exists n : a < ny \Rightarrow b < ny \Rightarrow$  противоречие.

По аксиоме полноты  $\exists c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b \forall a \in A, \forall b \in B$ .

Пусть  $c \in A$ . Тогда  $c < ny \Rightarrow c < c + y < ny + y = (n+1)y \Rightarrow c < c + y \Rightarrow c + y \in A$ . Противоречие.

Пусть  $c \in B$ . Рассмотрим  $c - y < c \Rightarrow c - y \in A \Rightarrow \exists n : c - y < ny \Rightarrow c < ny + y = (n+1)y \Rightarrow c \in A$ . Противоречие.  $\square$

**Следствие.** Если  $\epsilon > 0$ , то  $\exists n \in \mathbb{N} \frac{1}{n} < \epsilon$

**Доказательство.**  $x = 1, y = \epsilon \Rightarrow ny = n\epsilon > x = 1 \iff \epsilon > \frac{1}{n}$   $\square$

## 1.5. Мат. индукции

Пусть  $P_n$  - последовательность утверждений. Тогда, если  $P_1$  — верное и из того, что  $P_n$  — верно следует, что  $P_{n+1}$  — верно. Тогда все  $P_n$  верны  $\forall n \in \mathbb{N}$

**Определение 1.19.** Пусть  $A \subset \mathbb{R}$ . Тогда  $A$  — ограничено сверху, если  $\exists c \in \mathbb{R} : \forall a \in A a \leq c$ . Такое  $c$  называется верхней границей.

**Определение 1.20.** Пусть  $A \subset \mathbb{R}$ . Тогда  $A$  — ограничено снизу, если  $\exists b \in \mathbb{R} : \forall a \in A a \geq b$ . Такое  $b$  называется нижней границей.

**Определение 1.21.** Пусть  $A \subset \mathbb{R}$ . Тогда  $A$  — ограничено, если оно ограничено сверху и снизу.

**Пример.**  $\mathbb{N}$  не ограничено сверху, но ограничено снизу.

**Доказательство.** Пусть  $\exists c \in \mathbb{R} : c \geq n \forall n \in \mathbb{N}$ . Тогда это противоречит принципу Архимеда при  $x = c, y = 1$ .

Для ограниченности снизу достаточно взять  $c = -1$ .  $\square$

## 1.6. Наибольшие/наименьшие элементы

**Теорема 1.3.** В непустом конечном множестве  $A$  есть наибольший и наименьший элементы.

**Доказательство.** Докажем по индукции:

- База.  $|A| = 1$ . Очевидно.
- Переход.  $n \rightarrow n + 1$ .
- Доказательство. Рассмотрим множество из  $n+1$  элемента  $\{x_1 \dots x_n, x_{n+1}\}$ . Выкинем из него последний элемент. Тогда по индукционному предположению у нас есть максимальный элемент  $x_k$ . Тогда рассмотрим два случая:

1.  $x_k \geq x_{n+1}$ . Тогда  $x_k$  — наибольший элемент множества  $\{x_1 \dots x_n, x_{n+1}\}$ .
2.  $x_k < x_{n+1}$ . Тогда по транзитивности  $x_{n+1}$  больше всех других элементов множества. Значит,  $x_{n+1}$  — наибольший элемент множества  $\{x_1 \dots x_n, x_{n+1}\}$ .

$\square$

**Теорема 1.4.** В непустом ограниченном сверху (снизу) множестве целых чисел есть наибольший (наименьший) элемент.

**Доказательство.** Пусть  $A \subset \mathbb{Z}$ .  $c$  — его верхняя граница.

Возьмем  $b \in A$  и рассмотрим  $B := \{x \in A \mid x \geq b\}$ . Заметим, что  $B$  содержит конечное число элементов, значит в нем есть наибольший элемент. Пусть это  $m \in B$ :  $\forall x \in B : x \leq m$ . Докажем, что  $m$  — наибольший элемент и в  $A$ .

Для этого заметим, что любой  $x \in A$  либо лежит в  $B$ , либо  $x < b$ , а по транзитивности  $x < b \leq m$ .  $\square$

**Определение 1.22.** Пусть  $x \in \mathbb{R}$ , тогда  $[x] = \lfloor x \rfloor$  — наименьшее целое число, не превосходящее  $x$ .

$$1. \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

Левое неравенство очевидно. Правое неравенство можно доказать от противного: пусть  $x \geq \lfloor x \rfloor + 1$ , тогда справа целое число большее  $\lfloor x \rfloor$ , но меньшее  $x$ . Противоречие.

$$2. x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

**Теорема 1.5.** Если  $x < y$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ), то

$$1. \exists r \in \mathbb{Q} : x < r < y.$$

$$2. \exists r \notin \mathbb{Q} : x < r < y$$

**Пункт 1.**  $\epsilon := y - x > 0$ .

Найдется  $n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \epsilon = y - x$ . Тогда  $m := \lfloor xn \rfloor + 1$ :  $r = \frac{m}{n}$  подходит.

$$\frac{m}{n} > x \iff \lfloor xn \rfloor + 1 = m > xn \text{ — свойство целой части. } \frac{m}{n} < y. \frac{m-1}{n} = \frac{\lfloor xn \rfloor}{n} \leq \frac{nx}{n} = x \Rightarrow \frac{m}{n} \leq x + \frac{1}{n} < x + \epsilon = x + y - x = y \quad \square$$

**Пункт 2.**  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ . Рассмотрим  $x - \sqrt{2} < y - \sqrt{2} \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q} : x - \sqrt{2} < r < y - \sqrt{2} \Rightarrow x < \underbrace{r + \sqrt{2}}_{r'} < y$ .

Почему  $r'$  иррационально? Иначе  $\sqrt{2} = r' - r \in \mathbb{Q}$ .  $\square$

## 1.7. Инфинум/Супремум

**Определение 1.23.**  $A \subset \mathbb{R}$  — непустое и ограниченное сверху. Тогда супремум — наименьшая из всех верхних границ  $A$ . Обозначается  $\sup A$ .

**Определение 1.24.**  $A \subset \mathbb{R}$  — непустое и ограниченное снизу. Тогда инфинум — наибольшая из всех нижних границ  $A$ . Обозначается  $\inf A$ .

**Пример.**  $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ .  $\sup A = 1$ .  $\inf A = 0$ .

**Теорема 1.6.** Пусть  $A \subset \mathbb{R}$  — непустое и ограниченное сверху. Тогда  $\sup A$  существует и единственен.

**Доказательство.** Существование: Пусть  $B$  — все верхние границы  $A$ . Во-первых  $B$  — не пусто, так как  $A$  ограничено сверху.

Тогда возьмем  $b \in B$ .  $b$  — верхняя граница для  $A$ , то есть  $\forall a \in A : a \leq b$ . Тогда по аксиоме полноты  $\exists c \in \mathbb{R} \forall a \in A, b \in B : a \leq c \leq b$ . Из левого неравенства получаем, что  $c$  — верхняя граница, то есть  $c \in B$ . Из второго неравенства получаем, что  $c$  — наименьший элемент  $B$ . Так и получается, что  $c = \sup A$ .

Единственность. Если  $c = \sup A$  и  $c' = \sup A$ , то  $c \leq c'$ , так как  $c$  — наименьший элемент  $B$ , но и  $c' \leq c$ , так как  $c'$  — наименьший элемент  $B$ . Значит  $c = c'$ . Противоречие.  $\square$



**Следствие.**  $A \subset B \subset \mathbb{R}$ ,  $B$  ограничено сверху,  $A$  — не пустое. Тогда  $\sup A \leq \sup B$ .

**Доказательство.** Если  $c$  — верхняя граница  $B$ , то  $c$  — верхняя граница для  $A$ . Заметим, что все верхние границы  $A \supset B$ . Тогда все понятно.  $\square$

**Теорема 1.7.** Пусть  $A \subset \mathbb{R}$  — непустое и ограниченное снизу. Тогда  $\inf A$  существует и единственен.

**Упражнение.** Доказательство.

**Следствие.**  $A \subset B \subset \mathbb{R}$ ,  $B$  ограничено снизу,  $A$  — не пустое. Тогда  $\inf A \geq \inf B$ .

**Замечание.** Без аксиомы полноты теоремы существования не верны.  $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ . Любое рациональное число  $> \sqrt{2}$  — верхние границы. А вот  $\sup A$  нет.

**Теорема 1.8.** Пусть непустое  $A \in \mathbb{R}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \bullet \quad a = \inf A &\iff \begin{cases} a \leq x \quad \forall x \in A \\ \forall \epsilon > 0 \exists x \in A : x < a + \epsilon \end{cases} \\ \bullet \quad b = \sup A &\iff \begin{cases} a \geq x \quad \forall x \in A \\ \forall \epsilon > 0 \exists x \in A : x > a - \epsilon \end{cases} \end{aligned}$$

**Доказательство.** Рассмотрим два неравенства по отдельности:

1.  $b$  — верхняя граница.
2.  $b - \epsilon$  — не является верхней границей множества  $A$ . То есть  $\forall b' < b : b' — не является верхней границей.$

Все это в точности значит, что  $b = \sup A$ .  $\square$

**Теорема 1.9** (Теорема о вложенных отрезках). Пусть  $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots$ . Тогда  $\exists c \in \mathbb{R} : \forall n : c \in [a_n, b_n]$ .

**Доказательство.** Пусть  $A = \{a_1, a_2, \dots\}, B = \{b_1, b_2, \dots\}$ . Заметим, что так как отрезки вложены, то  $a_1 \leq a_2 \leq \dots$ , а  $b_1 \geq b_2 \geq \dots$ . Проверим, что  $a_i \leq b_j \forall i, j \in \mathbb{N}$ . Пусть  $i \leq j$ , тогда  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_i \leq \dots \leq a_j \leq b_j$ . Пусть  $i > j$ , тогда  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_j \geq \dots \geq b_i \geq a_i$ . Тогда по аксиоме полноты  $\exists c \in \mathbb{R} : a_i \leq c \leq b_j \forall i, j \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall n \forall a_n \leq c \leq b_n \Rightarrow c \in [a_n, b_n]$   $\square$

**Замечание.**  $\sqrt{2} = 1.41\dots$ . Тогда отрезке:  $[1, 2], [1.4, 1.5], [1.41, 1.42], \dots$ . Тогда единственная точка, лежащая во всех отрезках:  $\sqrt{2}$ .

**Замечание.** Для полуинтервалов, (интервалов) неверно:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (0, \frac{1}{n}) = \emptyset.$$

**Замечание.** Для лучей неверно.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [n, +\infty) = \emptyset.$$

## 2. Последовательности

### 2.1. Предел последовательности

**Определение 2.1.**  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

Способы задания последовательностей

1. Формулой.  $f_n := \frac{\sin n}{n^n}$
2. Рекуррентой:  $f_1 = 1, f_2 = 2, f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ .

Способы визуализации:

1. Можно ставить точки на прямой. Но если последовательность, например,  $a_n := \sin(\frac{n\pi}{2})$ , то получится кукож.
2. График. Считаем значения в натуральных точках.

**Определение 2.2.** Последовательность  $a_n$  ограничена сверху, если  $\exists C : \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq C$ .

**Определение 2.3.** Последовательность  $a_n$  ограничена снизу, если  $\exists C : \forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq C$ .

**Определение 2.4.** Последовательность  $a_n$  ограничена, если она ограничена и сверху, и снизу.

**Определение 2.5.** Последовательность  $a_n$  монотонно возрастает, если  $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$

**Определение 2.6.** Последовательность  $a_n$  строго монотонно возрастает, если  $a_1 < a_2 < \dots$

**Определение 2.7.** Последовательность  $a_n$  монотонно убывает, если  $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$

**Определение 2.8.** Последовательность  $a_n$  строго монотонно убывает, если  $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$

**Определение 2.9** (Нетрадиционное определение предела).  $l = \lim a_n \iff$  вне любого интервала, содержащего  $l$  находится конечное число членов последовательности.

**Замечание.** Мы можем смотреть только на симметричные относительно точки  $l$  интервалы. Если он не симметричен, то можно большую границу уменьшить. Так можно сделать, так как мы знаем, что вне меньшего конечное число точек, то и снаружи большего точно конечное число точек. Тогда наш интервал выглядит как  $(l - \varepsilon; l + \varepsilon)$

**Замечание.** Конечное число точек снаружи интервала  $\iff$  начиная с некоторого номера все попали в интервал, так как возьмем последнюю точку вне интервалов, и взяли её номер  $+ 1$ .

**Определение 2.10** (Традиционное определение предела).  $l = \lim a_n \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : |a_n - l| < \varepsilon$

1. Предел единственный. Пусть  $l$  и  $l'$  единственный. (*Картинка*). Рассмотрим интервал содержащий  $l$ , но не  $l'$ . Снаружи конечное число точек, теперь наоборот, там тоже конечное число точек. Тогда последовательность конечна.
2. Если из последовательности выкинуть какое-то число членов, то предел не изменится. Доказательство через картинку.

3. Если как-то переставить члены последовательности, то предел не изменится. Ну очевидно, что количество членов не изменилось, точки не поменяли своё местоположение.
4. Если члены последовательности записать с какой-то кратностью (конечной), то предел не изменится.
5. Если добавить к последовательности конечное число членов, то наличие/отсутствие предела и значение предела, если он существует, не поменяется. Доказательство по картинке.
6. Изменение конечного числа членов в последовательности не меняет предел.

**Пример.**  $\lim \frac{1}{n} = 0$ . Мы знаем, что найдется такой номер, что  $\frac{1}{n} < \beta$ , тогда при  $n \geq N$   $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \beta$

**Пример.**  $a_n = (-1)^n$  не имеет предела.

**Доказательство.** Посмотрим на картинку. Возьмем сначала точку не равную  $\pm 1$ . Тогда можно выбрать интервал, которые не содержит  $\pm 1$ . То есть интервал не содержит бесконечное число точек.

Для  $x = 1$  можно взять  $(0; 2)$ , для  $x = -1$  можно взять  $(-2; 0)$ . □

**Лемма.**  $\forall a, b, x_n, y_n, \varepsilon > 0 : a = \lim x_n \wedge b = \lim y_n \Rightarrow \exists N : \forall n \geq N : |x_n - a| < \varepsilon \wedge |y_n - b| < \varepsilon$

**Доказательство.** Запишем определения пределов:  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 \forall n \geq N_1 |x_n - a| < \varepsilon$  и  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_2 \forall n \geq N_2 |y_n - b| < \varepsilon$ . Тогда просто возьмем  $N = \max(N_1, N_2)$ . □

**Теорема 2.1** (Предельный переход в неравенствах).  $\forall x_n, y_n (x_i < y_i \forall i) a = \lim x_n \wedge b = \lim y_n \Rightarrow a \leq b$

**Доказательство.** Докажем от противного. Пусть  $a > b$ . Посмотрим картиночку. Пусть  $\varepsilon := \frac{a-b}{2}$ . По лемме  $\exists N : \forall n \geq N : |x_n - a| < \varepsilon \wedge |y_n - b| < \varepsilon$ . Заметим, что  $|x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow x_n > a - \varepsilon$ , а  $|y_n - b| < \varepsilon \Rightarrow y_n < b + \varepsilon \Rightarrow x_n > a - \varepsilon = b + \varepsilon > y_n$ . Противоречие. □

**Замечание.** Строгий знак может не сохраняться. Пример:  $x_n = -\frac{1}{n} < y_n = \frac{1}{n}$ , но предел и там, и там 0. Т.к.  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N : \frac{1}{n} = |y_n| = |x_n| < \varepsilon$

**Следствие.** Три пункта:

1.  $\forall n x_n \leq b \wedge \lim x_n = a \Rightarrow a \leq b$ .
2.  $\forall n a \leq y_n \wedge \lim y_n = b \Rightarrow a \leq b$ .
3.  $\forall n x_n \in [a; b] \wedge \lim x_n = l \Rightarrow l \in [a; b]$ .

**Доказательство.** Константу можно заменить на последовательность  $z_n = \text{const}$  □

**Теорема 2.2** (Теорема о двух милиционерах(теорема о сжатой последовательности)). Пусть  $\forall n : x_n \leq y_n \leq z_n \wedge \lim x_n = \lim z_n = l$ , тогда  $\lim y_n = l$ .

**Доказательство.** Возьмем  $\varepsilon > 0$ . По лемме:  $\exists N : \forall n \geq N : |x_n - l| < \varepsilon \wedge |z_n - l| < \varepsilon$ , откуда  $x_n > l - \varepsilon$  и  $z_n < l + \varepsilon$ . Тогда  $l - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < l + \varepsilon \Rightarrow l - \varepsilon < y_n < l + \varepsilon$ , то есть  $|y_n - l| < \varepsilon$ . □

**Следствие.** Если  $\forall n |y_n| \leq z_n \wedge \lim z_n = 0 \Rightarrow \lim y_n = 0$

**Доказательство.**  $x_n := -z_n$ . Тогда  $|y_n| \leq z_n \iff -z_n \leq y_n \leq z_n$ . Ну тогда и  $\lim y_n = 0$  □

**Теорема 2.3** (Теорема Вейерштрасса для монотонной последовательности). Три пункта:

1.  $\forall x_n x_n \uparrow \wedge x_n$  — ограничена сверху  $\Rightarrow \exists a = \lim x_n$ .
2.  $\forall x_n x_n \downarrow \wedge x_n$  — ограничена снизу  $\Rightarrow \exists a = \lim x_n$ .
3. Монотонная последовательность имеет предел  $\iff$  она ограничена.

*Пункт 1.*  $b := \sup\{x_1, x_2, \dots\}$  — существует, т.к.  $x_n$  — ограничено сверху. Теперь докажем, что  $\lim x_n = b$ , возьмем  $\varepsilon > 0$ .  $b$  — наименьшая верхняя граница  $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 b - \varepsilon$  — не верхняя граница. То есть  $\exists N : x_N > b - \varepsilon$ . Проверим, что такое  $N$  подходит: при  $n \geq N$   $b - \varepsilon < x_N < x_{N+1} < \dots x_n \leq b \leq b + \varepsilon \Rightarrow b - \varepsilon < x_n < b + \varepsilon$ .  $\square$

*Пункт 3.* Докажем отдельно в каждую сторону:

$\Leftarrow$  Если  $\uparrow$ , то пункт 1, иначе пункт 2.

$\Rightarrow$  Докажем это утверждение для любой последовательности.

Пусть  $\lim x_n = a$ . Возьмем  $\varepsilon = 1$ , тогда  $\exists N : \forall n > N : |x_n - a| < 1 \Rightarrow a - 1 < x_n < a + 1$ . Ну тогда верхняя граница  $\max\{a + 1, x_1, x_2, \dots, x_{N+1}\}$ , а нижняя  $\min\{a - 1, \dots\}$ .  $\square$

**Замечание.** В 1:  $\lim x_n = \sup\{x_1, x_2, \dots\}$ , во 2:  $\lim x_n = \inf\{x_1, x_2, \dots\}$ .

**Теорема 2.4** (О арифметических операциях с пределами).  $\forall x_n, y_n a = \lim x_n \wedge \lim y_n = b$ . Тогда:

1.  $x_n + y_n$  имеет предел и он равен  $a + b$
2.  $x_n - y_n$  имеет предел и он равен  $a - b$
3.  $x_n \cdot y_n$  имеет предел и он равен  $a \cdot b$
4.  $|x_n|$  имеет предел и он равен  $|a|$
5.  $\frac{x_n}{y_n}$  имеет предел, если  $b \neq 0 \wedge \forall n y_n \neq 0$  и он равен  $\frac{a}{b}$

**Доказательство.**

1. Возьмем  $\varepsilon > 0$  и найдем  $N$  из леммы для  $\frac{\varepsilon}{2}$ . Тогда  $\forall n \geq N : |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |(x_n + y_n) - (a + b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
2. Так же.
3. Поскольку  $\lim y_n = b$ , то  $y_n$  — ограничена, а значит  $\exists M : |y_n| \leq M$ . Рассмотрим  $|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - a y_n + a y_n - ab| \leq |x_n y_n - a y_n| + |a y_n - ab| = |y_n| |x_n - a| + |a| |y_n - b| \leq M |x_n - a| + |a| |y_n - b|$ .  $M |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \iff |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}$ . Значит  $\exists N_1$  при котором  $\forall n > N_1$  выполнено.  $|a| |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \iff |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|a|+1}$ . Тогда найдется  $N_2$ , такой что  $\forall n \geq N_2$  это выполнено. Такой что  $N = \max N_1, N_2$ .
4.  $||x| - |a|| \leq |x_n - a| \iff -|x_n - a| \leq |x_n| - |a| \leq |x_n - a|$ , а в правой части написано, что  $|x_n| = |(x_n - a) + a| \leq |x_n - a| + |a|$ . Понятно, что это выполняется при любых  $x_n, a$ .

Возьмем  $N$ , для которого  $\forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon$ . Тогда  $\forall n \geq N : ||x_n| - |a|| \leq |x_n - a| < \varepsilon$

5. Докажем, что  $\lim \frac{1}{y_n} = \frac{1}{b}$ . Возьмем  $|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}| = \frac{|y_n - b|}{|y_n||b|} \iff (1)$ . Посмотрим на картинку: возьмем  $\varepsilon = \frac{b}{2}$ . Получим интервал  $(\frac{b}{2}; \frac{3b}{2})$ . Тогда берем  $N_1 : \forall n \geq N |y_n - b| < |b|/2 \Rightarrow |y_n| > \frac{|b|}{2}$ . Тогда  $(1) \iff \frac{|y_n - b|}{\frac{|b|}{2}|b|} = \frac{2}{|b|^2} |y_n - b| < \varepsilon \iff |y_n - b| < \varepsilon \cdot \frac{|b|}{2}$ . Поэтому  $\exists N_2 : \forall n \geq N_2$  такой, что это выполняется. Ну тогда  $N = \max N_1, N_2$ .

□

**Следствие.** Если  $\lim x_n = a$ , то  $\lim cx_n = ca$ .

**Следствие.** Если  $\lim x_n = a \wedge \lim y_n = b$ , то  $\lim(cx_n + dy_n) = ca + db$

**Замечание.** Если  $\lim y_n = b \neq 0$ , то начиная с некоторого  $N$ ,  $y_n \neq 0$

**Пример.**  $\lim \frac{n^2 + 2n - 3}{4n^2 - 5n + 6} = \frac{1 + \frac{2}{n} - \frac{3}{n^2}}{4 - \frac{5}{n} + \frac{6}{n^2}} = \frac{\lim(1 + \frac{2}{n} - \frac{3}{n^2})}{4 - \frac{5}{n} + \frac{6}{n^2}} = \frac{1}{4}$

## 2.2. Бесконечно большие и бесконечно малые

**Определение 2.11.** Последовательность  $x_n$  называется бесконечно малой, если  $\lim x_n = 0$ .

**Утверждение 2.5.**  $\forall x_n, y_n : x_n$  — бесконечно мала последовательность  $\wedge y_n$  ограничена,  $x_n y_n$  — бесконечно малая последовательность.

**Доказательство.**  $y_n$  — ограничена  $\Rightarrow \exists M : \forall n : |y_n| \leq M$ . Возьмем  $\varepsilon > 0$  и подставим в определение  $\lim x_n = 0$ . Тогда найдется  $N : \forall n \geq N : |x_n| < \frac{\varepsilon}{M}$ . Следовательно  $x_n y_n \leq M |x_n| < M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon \Rightarrow \lim x_n y_n = 0$ . □

**Определение 2.12.**  $\lim x_n = +\infty$  означает то, что вне любого луча вида  $(E; +\infty)$  лежит лишь конечное число членов последовательности. Или:  $\forall E \exists N : \forall n \geq N x_n > E$ .

**Определение 2.13.**  $\lim x_n = -\infty$  означает то, что вне любого луча вида  $(-\infty, E)$  лежит лишь конечное число членов последовательности. Или:  $\forall E \exists N : \forall n \geq N x_n < E$ .

**Определение 2.14.**  $\lim x_n = \infty$  означает то, что в любом промежутке содержится конечное число членов последовательности. Или:  $\forall E \exists N \forall n \geq N |x_n| > E$ .

**Замечание.**  $\lim x_n = \infty \iff \lim |x_n| = +\infty$

**Замечание.**  $\lim x_n = +\infty$  (или  $-\infty$ )  $\Rightarrow \lim x_n = \infty$ . Но  $\nLeftarrow$ ! Пример  $x_n = (-1)^n \cdot n$ .

**Замечание.**  $\lim x_n = \infty \Rightarrow x_n$  — неограниченная последовательность. Но наоборот неверно. Пример:  $x_n = \begin{cases} n & n - \text{четно} \\ 0 & n - \text{нечетно} \end{cases}$ .

**Определение 2.15.**  $x_n$  называется бесконечно большой, если  $\lim x_n = \infty$ .

**Теорема 2.6.**  $\forall x_n : \forall n x_n \neq 0 \Rightarrow x_n$  — бесконечно малая  $\iff \frac{1}{x_n}$  — бесконечно большая.

**Доказательство.** Докажем в каждую сторону отдельно:

$\Rightarrow x_n$  — бесконечно малая  $\iff \lim x_n = 0$ . Возьмем  $E$  из определения бесконечно большой и  $\varepsilon = \frac{1}{E}$ , подставим в предел. Тогда  $\exists N : \forall n \geq N |x_n| < \varepsilon = \frac{1}{E} \Rightarrow |\frac{1}{x_n}| > E$ .

$\Leftarrow \frac{1}{x_n}$  — бесконечно большая  $\Rightarrow \lim \frac{1}{x_n} = \infty$ . Возьмем  $\varepsilon > 0$  из определения бесконечно малой и  $E = \frac{1}{\varepsilon}$  и подставим в  $\lim$ . Тогда  $\exists N, \forall n \geq N : |\frac{1}{x_n}| > E = \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |x_n| < \varepsilon$

□

**Определение 2.16.**  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \pm\infty$

**Теорема 2.7.** В  $\overline{\mathbb{R}}$  предел единственен.

**Доказательство.** Пусть  $\lim x_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$  и  $\lim x_n = b \in \overline{\mathbb{R}}$ . Если  $a, b \in \mathbb{R}$ , то знаем. Иначе рассмотрим случаи:

- $a = \pm\infty, b \in \mathbb{R}$ . Картинка.
- $a = +\infty, b = -\infty$ . Ну такого быть не может, смотри картинку.

□

**Теорема 2.8** (о стабилизации знака). Если  $\lim x_n = a \in \overline{\mathbb{R}} \wedge a \neq 0 \Rightarrow \exists N : \forall n \geq N$  все члены последовательности имеют тот же знак, что и  $a$ .

**Доказательство.** Несколько случаев:

- $a \in \mathbb{R}$ . Картинка. Начиная с некоторого номера все  $x_n \in (0; 2a)$  или  $x_n \in (2a; 0)$ .
- $a = +\infty$ . Картинка. Возьмем  $E = 0$ , начиная с некоторого номера все члены попали в этот луч.
- $a = -\infty$ . Аналогично.

□

**Теорема 2.9** (предельный переход в неравенстве  $\overline{\mathbb{R}}$ ).  $\forall n : x_n \leq y_n \wedge \lim x_n = a \in \overline{\mathbb{R}} \wedge \lim y_n = b \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow a \leq b$ .

**Доказательство.** Если  $a, b \in \mathbb{R}$ , то уже есть. Иначе предположим противное:

- $a = +\infty$  и  $b \in \mathbb{R}$ . Картинка...

□

**Теорема 2.10** (Теорема о двух миллионерах).

1.  $\forall x_n, y_n : x_n \leq y_n \wedge \lim x_n = +\infty \Rightarrow \lim y_n = +\infty$
2.  $\forall x_n, y_n : x_n \leq y_n \wedge \lim y_n = -\infty \Rightarrow \lim x_n = -\infty$

**Доказательство.**

1.  $\lim x_n = +\infty \Rightarrow \forall E : \exists N : \forall n \geq N x_n > E$ , но  $y_n \geq x_n > E$ .
2. Упражнение для читателя.

□

**Теорема 2.11** (О арифметических действиях с бесконечно большими).

1.  $\forall x_n, y_n \lim x_n = +\infty, y_n$  — ограничена снизу  $\Rightarrow \lim(x_n + y_n) = +\infty$
2.  $\forall x_n, y_n \lim x_n = -\infty, y_n$  — ограничена сверху  $\Rightarrow \lim(x_n + y_n) = -\infty$

3.  $\forall x_n, y_n \lim x_n = \infty, y_n — \text{ограничена} \Rightarrow \lim(x_n + y_n) = \infty$
4.  $\forall x_n, y_n \lim x_n = \pm\infty \wedge \exists C : \forall n : y_n \geq C > 0 \Rightarrow \lim(x_n y_n) = \pm\infty$
5.  $\forall x_n, y_n \lim x_n = \pm\infty \wedge \exists C : \forall n : y_n \leq C < 0 \Rightarrow \lim(x_n y_n) = \mp\infty$
6.  $\forall x_n, y_n \lim x_n = \infty \wedge \exists C : \forall n : |y_n| \geq C > 0 \Rightarrow \lim(x_n y_n) = \infty$
7.  $\forall x_n, y_n \lim x_n = a \neq 0 \wedge \lim y_n = 0 \Rightarrow \lim \frac{x_n}{y_n} = \infty$
8.  $\forall x_n — \text{ограничена}, y_n : \lim y_n = \infty \Rightarrow \lim \frac{x_n}{y_n} = 0$
9.  $\forall x_n, y_n — \text{ограничена} : \lim x_n = \infty \wedge y_n \neq 0 \Rightarrow \lim \frac{x_n}{y_n} = \infty$

**Доказательство.**

1.  $y_n — \text{ограничена снизу} \Rightarrow y_n \geq c$ . А так как  $\lim x_n = +\infty \Rightarrow \forall E \exists N : \forall n \geq N : x_n > E$ . Подставим  $E - c$  вместо  $E$ .  $\exists N \forall n \geq N x_n > E - c \Rightarrow x_n + y_n \geq E - c + y_n \geq E - c + c = E$ .
2. Упражнение.
3. Упражнение.
4.  $\lim x_n = +\infty \Rightarrow \forall E \exists N \forall n \geq N : x_n > E$ . Подставим  $\frac{E}{c}$  вместо  $E$ :  $x_n > \frac{E}{c} \Rightarrow x_n y_n \geq x_n c > \frac{E}{c} \cdot c = E$ .
5. Упражнение.
6. Упражнение.
7.  $\lim y_n = 0 \Rightarrow y_n — \text{бесконечно малое} \Rightarrow \frac{1}{y_n} — \text{бесконечно большая}$ . Поймем, что  $|x_n| \geq C > 0$  при больших  $n$ . Возьмем картинку и окрестность  $\frac{a}{2}$ . Заметим, что начиная с некоторого номера  $|x_n| \geq \frac{a}{2} > 0$ .
8.  $y_n — \text{бесконечно большая} \Rightarrow \frac{1}{y_n} — \text{бесконечно малая} \Rightarrow x_n \cdot \frac{1}{y_n} — \text{произведение ограниченное и бесконечно малой}$ .
9.  $x_n — \text{бесконечно большая} \Rightarrow \frac{1}{x_n} — \text{бесконечно малая} \Rightarrow y_n \cdot \frac{1}{x_n} — \text{бесконечно малая} \Rightarrow \frac{y_n}{x_n} — \text{бесконечно малая}$ .

□

**Арифметика с бесконечностями:**

1.  $\pm\infty + c = \pm\infty$
2.  $+\infty + \infty = +\infty$
3.  $-\infty + -\infty = -\infty$
4.  $\pm\infty \cdot c = \pm\infty$ , если  $c > 0$
5.  $\pm\infty \cdot c = \mp\infty$ , если  $c < 0$
6.  $+\infty \cdot +\infty = +\infty$   
 $-\infty \cdot -\infty = +\infty$   
 $+\infty \cdot -\infty = -\infty$

Запрещенные операции:

1.  $+\infty - +\infty$  или  $+\infty + -\infty$ . Может получиться беспредел, любое число, любая бесконечность.
2.  $+\infty \cdot 0$
3.  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ . Может получиться беспредел, любое число, бесконечность правильного знака.
4.  $\frac{0}{0}$  — любое число, любая бесконечность, отсутствие предела.

**Пример.**

- $x_n = n + a, y_n = n, x_n - y_n = a : \lim x_n = +\infty, \lim y_n = +\infty, \lim x_n - y_n = a$
- $x_n = 2n \rightarrow +\infty, y_n = n\infty + \infty, x_n - y_n = n \rightarrow +\infty$
- ясно.
- $x_n = n + (-1)^n \rightarrow +\infty, y_n = n \rightarrow +\infty, x_n - y_n = (-1)^n$  — нет предела.

**Упражнение.** Примеры к остальному.

### 2.3. Экспонента

**Теорема 2.12** (Неравенство Бернулли).  $\forall x \geq -1, n \in \mathbb{N}(1+x)^n \geq 1+nx$ . Равенство при  $x = 0 \vee n = 1$ .

**Доказательство.** Индукция:

- База  $n = 1: 1+x \geq 1+x$ .
- Переход  $n \rightarrow n+1$ .
- Предположение:  $(1+x)^n \geq 1+nx$ .
- Заметим, что  $(1+x)^{n+1} = (1+x) \cdot (1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1+x+nx+nx^2 = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$ . Строгий знак при  $x \neq 0$ .

□

**Замечание.** На самом деле  $(1+x)^P \geq 1+Px$ , если  $x > -1$  и  $P \geq -1$  или  $P \leq 0$ . Иначе верно  $(1+x)^P \leq 1+Px$ .

**Теорема 2.13.** Пусть  $a \in \mathbb{R}$  и  $x_n := (1 + \frac{a}{n})^n$ . Тогда при  $n > -a$  монотонно возрастает и ограничена сверху.

**Доказательство.**  $\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{(1+\frac{a}{n})^n}{(1+\frac{a}{n+1})^{n+1}} = \frac{(n+a)^n}{n^n} \cdot \frac{(n-1)^{n-1}}{(n-1+a)^{n-1}} = \frac{n-1+a}{n-1} \left( \frac{(n+a)(n-1)}{n \cdot (n-1+a)} \right)^n = \frac{n-1+a}{n-1} \left( \frac{n^2+an-n-a}{n^2+an-n} \right)^n = \frac{n-1+a}{n-1} \left( 1 - \frac{a}{n(n-1+a)} \right)^n \geq \frac{n-1+a}{n-1} \left( 1 + n \cdot \frac{-a}{n(n-1+a)} \right) = \frac{n-1+a}{n-1} \cdot \frac{n-1+a-a}{n-1+a} = 1$

Убедимся в выполнении условий для неравенства Бернулли. Посмотрим на  $\frac{a}{n-1+a}$ . Если  $a > 0$ , то очевидно. Если  $a < 0$ , то  $n_1 > a$ , а значит дробь меньше нуля.

Ограниченность:  $y_n := (1 - \frac{a}{n})^n$  возрастает при  $n > a$ .  $x_n y_n = \left( (1 + \frac{a}{n}) (1 - \frac{a}{n}) \right)^n = \left( 1 - \frac{a^2}{n^2} \right)^n$ , что не больше 1. Тогда  $x_n \leq \frac{1}{y_n} \leq \frac{1}{y_{n-1}} \leq \dots \leq \frac{1}{y_{[a]+1}}$  □

**Следствие.**  $x_n := (1 + \frac{a}{n})^n$  имеет предел.



**Определение 2.17.**  $\exp a := \lim \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$   
 $e := \exp 1 = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.7182818284590$

**Следствие.** Последовательность  $z_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$  монотонно убывает и стремится к  $e$ .

**Доказательство.**  $\lim z_n = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e$ .  $\frac{1}{z_n} = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$  — строго монотонно возрастает.  $\square$

Свойства экспоненты:

1.  $\exp 0 = 1, \exp 1 = e$ .
2.  $\exp a > 0$
3.  $\exp a \geq 1 + a$ .  $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \geq 1 + n \frac{a}{n} = 1 + a$ , при  $n > -a$ . Далее совершим предельный переход.
4.  $\exp a \exp(-a) \leq 1$ .  $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{a^2}{n^2}\right)^n \leq 1$ . Далее предельный переход.
5.  $\forall a, b : a \leq b \Rightarrow \exp a \leq \exp b$ . Знаем, что  $1 + \frac{a}{n} \leq 1 + \frac{b}{n}$  и при больших  $n$  они положительны, тогда можно возвести в  $n$ -ую степень и совершить предельный переход.
6.  $\exp a < \frac{1}{1-a}$  при  $a \leq 1$ .  $\exp a \cdot \exp(-a) \leq 1 \Rightarrow \exp a \leq \frac{1}{\exp(-a)}$ . А  $\exp(-a) \geq 1 + (-a) = 1 - a$  (применили Бернулли). Тогда можно уменьшить знаменатель, тем самым увеличить дробь.
7.  $\forall n \in \mathbb{N} x_n < e < z_n$ . Знаем, что  $x_n \uparrow$ . Тогда возьмем  $k \geq n + 1 : x_n < x_{n+1} < x_k$ . Устремляем  $k \rightarrow \infty : x_n < x_{n+1} \leq e \iff x_n < e$ .

С другой стороны  $z_n \downarrow$ . Тогда по той же технике  $z_n > z_{n+1} \geq e \iff z_n \geq e$ .

8.  $2 < e < 3$ .  $2 = x_1, 3 = z_5$  или  $z_6$ .

**Замечание.**  $z_n - x_n = \frac{x_n}{n} \approx \frac{e}{n}$ .

**Лемма.**  $\forall a_n \lim a_n = a \Rightarrow y_n := \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n \rightarrow \exp a$ .

**Доказательство.** Пусть  $x_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$ ,  $A = 1 + \frac{a}{n}$ ,  $B = 1 + \frac{a_n}{n}$ . Тогда  $|x_n - y_n| = |A^n - B^n| = \underbrace{|A - B|}_{= \frac{|a - a_n|}{n}} \cdot |A^{n-1} + A^{n-2}B + \dots + B^{n-1}|$ .

Тогда  $\lim a_n = a \Rightarrow a_n$  — ограниченная последовательность ( $|a_n| \leq M$ ). Тогда  $|a_n| \leq M \Rightarrow A = 1 + \frac{a}{n} \leq 1 + \frac{M}{n}, B = 1 + \frac{a_n}{n} \leq 1 + \frac{M}{n}$ . Тогда исходное:  $\frac{|a - a_n|}{n} n \left(1 + \frac{M}{n}\right)^{n-1} \leq |a - a_n| \left(1 + \frac{M}{n}\right)^n \leq |a - a_n| \exp M \rightarrow 0$ . Что произошло:  $\left(1 + \frac{M}{n}\right)^n < \exp M$  при любом  $n$ , а  $|a - a_n| \rightarrow 0$ , получили в пределе  $0 \cdot \text{const} = 0$ .

То есть  $\lim x_n - y_n = 0 \Rightarrow \lim y_n = \lim x_n - \lim(x_n - y_n) = \exp a - 0 = \exp a$ .  $\square$

**Теорема 2.14.**  $\exp(a + b) = \exp a \cdot \exp b$ .

**Доказательство.**  $x_n := \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \rightarrow \exp a$ .  $y_n := \left(1 + \frac{b}{n}\right)^n \rightarrow \exp b$ . Тогда  $x_n y_n = \left(\left(1 + \frac{a}{n}\right)\left(1 + \frac{b}{n}\right)\right)^n = \left(1 + \frac{a+b+\frac{ab}{n}}{n}\right)^n \xrightarrow[a+b+\frac{ab}{n} \rightarrow a+b]{\text{Лемма}} \exp(a + b)$   $\square$

**Следствие.**

1.  $\forall t : |t| < 1 \Rightarrow \lim t^n = 0$
2.  $\forall t : |t| > 1 \Rightarrow \lim t^n = \infty$

**Доказательство.**

2. Пусть  $x = |t| - 1 > 0$ . Тогда  $|t^n| = |t|^n = (1+x)^n > 1+nx \rightarrow +\infty$
1. Если  $0 < |t| < 1$ , то  $|\frac{1}{t}| > 1$  и  $(\frac{1}{t})^n$  — бесконечно большая  $\Rightarrow t^n$  — бесконечно малая.

□

**Теорема 2.15.**  $\forall x_n > 0 \lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = a < 1 \Rightarrow \lim x_n = 0$ .

**Доказательство.** Картинка. Возьмем окрестность с правой границей  $b = \frac{a+1}{2}$ . Тогда начиная с некоторого номера  $m$  члены последовательности  $\frac{x_{n+1}}{x_n}$  попали в этот интервал. То есть  $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq b < 1$  при  $n \geq m$ .

$$\text{Пусть } n < m. \quad x_n = x_m \cdot \frac{x_{m+1}}{x_m} \cdot \frac{x_{m+2}}{x_{m+1}} \cdot \dots \cdot \frac{x_n}{x_{n-1}} \leq x_m b^{n-m} \cdot x_m = \frac{x_m}{b^m} \cdot b^n \rightarrow \frac{x_m}{b^m} \lim b^n = 0.$$

□

**Следствие.**

1.  $\lim \frac{n^k}{a^n} = 0$  при  $a > 1$  и  $k \in \mathbb{N}$ .
2.  $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$ , при  $a \in \mathbb{R}$ .
3.  $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$ .

**Доказательство.**

1.  $x_n = \frac{n^k}{a^n} \cdot \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^k}{a^{n+1}} \cdot \frac{a^n}{n^k} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \cdot \frac{1}{a} \rightarrow \frac{1}{a} < 1$ .
2.  $x_n = \frac{a^n}{n!} \cdot \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1} \rightarrow 0$ .
3.  $x_n = \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n+1}{(n+1)^{n+1}} n^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e} < 1$ .

□

**Теорема 2.16** (Теорема Штольца). Пусть  $y_1 < y_2 < y_3 < \dots$  и  $\lim y_n = +\infty$ . Если  $\lim \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$ , то  $\lim \frac{x_n}{y_n} = l$ .

**Доказательство.** Ключевой случай:  $l = 0$ . Пусть  $a_n := \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$ . По условию  $\lim a_n = 0$ . Зафиксируем  $\varepsilon > 0$ . Тогда найдется номер  $m$ , такой, что при  $n \geq m \Rightarrow |a_n| < \varepsilon$ . Тогда  $|x_{n+1} - x_n| = |a_n|(y_{n+1} - y_n) < \varepsilon(y_{n+1} - y_n)$ .  $|x_n - x_m| \leq |x_n - x_{n-1}| + |x_{n-1} - x_{n-2}| + \dots + |x_{m+1} - x_m| < \varepsilon(y_n - y_{n-1}) + \varepsilon(y_{n-1} - y_{n-2}) + \dots + \varepsilon(y_{m+1} - y_m) = \varepsilon(y_n - y_m)$ .

Теперь посмотрим на  $|\frac{x_n}{y_n}| \leq \frac{|x_n - x_m| + |x_m|}{|y_n|} < \frac{\varepsilon(y_n - y_m)}{y_n} + \frac{|x_m|}{y_n} < \varepsilon \frac{y_n}{y_n} + \frac{|x_m|}{y_n} = \varepsilon + \frac{|x_m|}{y_n} < 2\varepsilon$ . Берем такой  $N : \forall n \geq N y_n \geq \frac{1}{\varepsilon} |x_m|$ . Если  $n > \max\{m, N\}$ , то  $|\frac{x_n}{y_n}| < 2\varepsilon$ . Тогда  $\lim \frac{x_n}{y_n} = 0$

Рассмотрим случай  $l \in \mathbb{R}$ . Рассмотрим  $\widetilde{x}_n := x_n - ly_n$ . Тогда  $\frac{(\widetilde{x}_{n+1} - \widetilde{x}_n) - (x_n - ly_n)}{y_{n+1} - y_n} = \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} - l \rightarrow 0$ , т.к.  $\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} \rightarrow l$ . Тогда, по случаю выше получаем что  $\frac{\widetilde{x}_n}{y_n} \rightarrow 0 \iff \frac{x_n}{y_n} - l \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow l$

Рассмотрим случай  $l = +\infty$ .  $\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} > 1$  при  $n \geq N \Rightarrow x_{n+1} - x_n > y_{n+1} - y_n > 0 \Rightarrow x_n \uparrow$ .

Из того, что для  $x_n - x_{n-1} > y_n - y_{n-1} \wedge \dots \wedge x_{N+1} - x_N > y_{N+1} - y_N \Rightarrow x_n - x_N > y_n - y_N \Rightarrow x_n > \underbrace{y_n}_{\rightarrow +\infty} + \underbrace{(x_N - y_N)}_{=const} \Rightarrow x_n \rightarrow +\infty$ . Тогда  $\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n} \rightarrow 0 \xrightarrow{\text{Случай 0}} \frac{y_n}{x_n} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow \infty \frac{x_n}{y_n} \rightarrow +\infty$ .

Случай  $l = -\infty$ .  $\widetilde{x}_n = -x_n$ .

□

**Пример.**  $S_n = 1^k + 2^k + \dots + n^k < n^k k = n^{k+1}$ . Можно еще взять половину: получим  $\leq \frac{n^{k+1}}{2^{k+1}}$

$$\text{Тогда } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^{k+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n - S_{n-1}}{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{n^{k+1} - (n^{k+1} - k \cdot n^k + \frac{k(k-1)}{2} n^{k-1} - \dots)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k - \dots n^{-1} + \dots n^{-2} + \dots} = \frac{1}{k}$$

**Замечание.** То же самое можно сказать, если  $y_n \downarrow -\infty$

**Теорема 2.17** (Теорема Штольца 2).  $\lim x_n = \lim y_n = 0 \wedge y_n > y_{n+1} > 0$ . Тогда  $\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = l \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim \frac{x_n}{y_n} = l$ .

**Доказательство.** Случай  $l = 0$ .  $a_k := \frac{x_{k+1} - x_k}{y_{k+1} - y_k}$ .  $\lim a_n = 0$ . Возьмем  $\varepsilon > 0$  и найдем  $m \geq N$  :  $|a_n| < \varepsilon$  при  $n \geq N$ . Тогда  $x_n - x_m = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + (x_{m+1} - x_m) = a_{n-1}(y_n - y_{n-1}) + a_{n-2}(y_{n-1} - y_{n-2}) + \dots + a_m(y_{m+1} - y_m)$ .

Тогда  $|x_n - x_m| \leq |a_{n-1}|(y_{n-1} - y_n) + \dots + |a_m|(y_m - y_{m-1}) < \varepsilon((y_{n-1} - y_n) + (y_{n-2} - y_{n-1}) + \dots + (y_m - y_{m-1})) = \varepsilon(y_m - y_n)$

$|x_n - x_m| < \varepsilon(y_m - y_n) \rightarrow \varepsilon y_m \Rightarrow |x_m| \leq \varepsilon y_m \Rightarrow \left| \frac{x_m}{y_m} \right| \leq \varepsilon$ . Получили определение предела!!!

Случай  $l \in \mathbb{R}$ . См. выше.

Случай  $l = +\infty$  нужна лишь монотонность.

Случай  $l = -\infty$ . □

## 2.4. Подпоследовательность

**Определение 2.18.** Последовательность: последовательность  $x_{n_i}$ , заданная как набор индексов  $n_i : 1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \dots$

Свойства.

1.  $n_k \geq k$ . Индукция.  $n_{k+1} > n_k \geq k$ .
2. Если последовательность предел в  $\overline{\mathbb{R}}$ , то подпоследовательность имеет тот же предел.
3. Две подпоследовательности  $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots$  и  $x_{m_1}, x_{m_2}, \dots$  в объединение дают всю последовательность и они имеют один и тот же предел  $l \in \overline{\mathbb{R}}$ , то  $\lim x_n = l$ . Доказательство по картинке.

**Теорема 2.18** (О стягивающихся отрезках). Пусть  $[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset [a_3; b_3] \supset \dots$  и  $\lim(b_n - a_n) = 0$ . Тогда  $\exists! c \in \mathbb{R}$  принадлежащая всем отрезкам и  $\lim a_n = \lim b_n = c$ .

**Доказательство.** Существование следует из теоремы о вложенных отрезка. Докажем единственность. Пусть  $c, d \in [a_n; b_n]$ . Тогда  $c - d \leq b_n - a_n \rightarrow 0 \Rightarrow c = d$ .

Проверим, что  $\lim a_n = c$ .  $|a_n - c|$  — длина подотрезка  $[a_n; b_n]$ , тогда  $|a_n - c| \leq b_n - a_n \rightarrow 0 \Rightarrow a_n - c \rightarrow 0 \Rightarrow \lim a_n = c$ . □

**Теорема 2.19** (Больцано-Вейерштрасса). Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность. То есть, если  $x_n$  — ограниченная последовательность, то существует  $x_{n_k}$  имеющая конечный предел.

**Доказательство.**  $a$  — нижняя граница,  $b$  — верхняя для  $x_n$ . То есть  $\forall n : x_n \in [a; b]$ . В какой-то половине отрезка бесконечное число членов (иначе в сумме конечное число членов). Назовем подходящую  $[a_1; b_1]$ . Теперь делю эту половинку пополам. В одной из половинок половинки бесконечное число членов. Получили процесс деления отрезков на кусочки.

Заметим, что  $[a; b] \supset [a_1; b_1] \supset \dots b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \rightarrow 0$ . Тогда  $\exists c \in \mathbb{R} : \lim a_n = \lim b_n = c$ . Берем  $[a_1; b_1]$ , там бесконечное число членов. Берем какой-то  $x_{n_1}$ . Берем  $[a_2; b_2]$ , там есть  $n_2 > n_1$ . Тогда получили возрастание индексов и  $x_{n_k} \in [a_k; b_k]$ .  $a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$ , то тогда по двум милиционерам  $\lim x_{n_k} = c$ .  $\square$

**Теорема 2.20.** Несколько пунктов:

1. Монотонная неограниченная последовательность стремится к  $\pm\infty$ .
2. Из неограниченной сверху последовательности можно выбрать подпоследовательность, стремящуюся к  $+\infty$ .
3. Из неограниченной снизу последовательности можно выбрать подпоследовательность, стремящуюся к  $-\infty$ .

**Доказательство.**

1. Пусть  $x_n$  монотонно возрастает. Докажем, что  $\lim x_n = +\infty$ .  $\forall E$ . Это не верхняя граница, значит найдется  $x_N > E \Rightarrow \exists n \geq N \Rightarrow E < x_N \leq x_{N+1} \leq \dots \leq x_n$ .
2. 1 — не верхняя граница  $\Rightarrow$  есть  $x_{n_1} > 1$ .  $2 + x_{n_1}$  — не верхняя граница  $\Rightarrow$  есть  $x_{n_k} > 2 + x_{n_k} + 2$ . И так далее ...Получилось, что  $x_{n_k} > k \rightarrow \infty \Rightarrow x_{n_k} \rightarrow +\infty$ . Далее переставим члены в порядке возрастания индексов.

$\square$

**Определение 2.19.**  $l$  — Частичный предел последовательности, если существует подпоследовательность, стремящаяся к  $l$ .

**Замечание.** Больцано-Вейерштрасса + 2/3 пункт предыдущей теоремы говорят о том, что частичный предел точно существует.

**Определение 2.20.** Пусть  $l \in \mathbb{R}$ . Тогда окрестность  $l$  — произвольный интервал  $(l - \varepsilon; l + \varepsilon)$ .

**Определение 2.21.** Окрестность  $+\infty$  — луч  $(E; +\infty)$ ,  $-\infty$  — луч  $(-\infty; E)$

**Теорема 2.21.**  $l \in \overline{\mathbb{R}}$  — частичный предел последовательности  $\iff$  в любой окрестности  $l$  содержится бесконечно много членов.

**Доказательство.**

- $\Rightarrow l$  — частичный предел  $\Rightarrow$  найдется подпоследовательность  $x_{n_k} \rightarrow l \Rightarrow$  вне любой окрестности  $l$  конечное число членов последовательности  $x_{n_k} \Rightarrow$  внутри бесконечное.
- $\Leftarrow$  Возьмем  $(l - 1; l + 1)$ . В ней бесконечное число членов. Возьмем любой  $x_{n_1}$ . Далее из  $(a - \frac{1}{2}; a + \frac{1}{2})$  возьмем  $x_{n_2}, n_2 > n_1$ . Повторим процесс:  $x_{n_k} \in (a - \frac{1}{k}; a + \frac{1}{k}), n_k > n_{k-1}$ . Тогда получили подпоследовательность, для которой верно:  $a - \frac{1}{k} < x_{n_k} < a + \frac{1}{k} \xrightarrow[2 \text{ мил.}]{\text{Th.}} x_{n_k} \rightarrow a \Rightarrow l$  — частичный предел.

$\square$

**Определение 2.22.**  $x_n$  — фундаментальная (сходящаяся в себе, последовательность Коши), если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n \geq N : |x_n - x_m| < \varepsilon$ .

**Свойство.** Сходящаяся последовательность фундаментальна.

**Доказательство.** Пусть предел  $l = \lim x_n$ . Берем  $\varepsilon > 0$ .  $\exists N \forall n \geq N |x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge |x_m - l| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |x_n - x_m| \leq |x_n - l| + |l - x_m| < \varepsilon$   $\square$

**Свойство.** Фундаментальная последовательность ограничена.

**Доказательство.** Берем  $\varepsilon = 1$ . Тогда  $\exists N \forall m, n \geq N : |x_n - x_m| < 1 \Rightarrow |x_n - x_N| < 1 \Rightarrow |x_n| < 1 + |x_N| \Rightarrow |x_n| \leq \max\{|x_1|, \dots, |x_{N-1}|, 1 + |x_N|\}$ .  $\square$

**Свойство.** Если фундаментальная последовательность содержит сходящуюся последовательность, то она сама сходящаяся.

**Доказательство.** Берем  $\varepsilon > 0$ .  $\exists N : \forall n, m \geq N |x_n - x_m| < \varepsilon$ .  $\exists K : \forall k \geq K |x_{n_k} - l| < \varepsilon$ . Возьмем  $n \geq N$  и рассмотрим  $|x_n - l| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - l| < 2\varepsilon$ , если  $k = \max\{N, K\}$ .  $\square$

**Теорема 2.22** (Критерий Коши). Последовательности фундаментальна  $\iff$  последовательность сходящаяся.

**Доказательство.**

- $\Leftarrow$ . Св-во 1.
- $\Rightarrow$  Фундаментальна  $\Rightarrow$  ограничена  $\Rightarrow$  существует сходящаяся подпоследовательность.  $\square$

**Пример.**  $x_n := \sum_{k=1}^n \frac{\sin k}{2^k}$ . Проверим фундаментальность. Пусть  $n > m$ .  $|x_n - x_m| = |\sum_{k=m+1}^n \frac{\sin k}{2^k}| \leq \sum_{k=m+1}^n \frac{|\sin k|}{2^k} \leq \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^m} < \varepsilon$ .

**Определение 2.23.**  $x_n$  — последовательность.  $y_n := \inf_{k \geq n} x_k, z_n := \sup_{k \geq n} x_k$ . Тогда верхний предел  $\overline{\lim} x_n = \lim z_n$ , а нижний предел  $\underline{\lim} x_n = \lim y_n$

**Теорема 2.23.**  $\exists \underline{\lim}$  и  $\overline{\lim}$ .  $\overline{\lim} \geq \underline{\lim}$ .

**Доказательство.**  $y_n \leq z_n \Rightarrow \underline{\lim} \leq \overline{\lim}$ .

Существование.  $y_n$  монотонно убывает.  $y_{n+1} = \inf\{x_{n+1}, \dots\} \geq \inf\{x_n, \dots\} = y_n$ . Тогда у нее есть предел. Аналогично  $z_n$  монотонно убывает.  $\square$

**Замечание.**  $\overline{\lim} = \inf z_n = \inf \sup_{k \geq n} x_n$ .

$$\underline{\lim} = \sup y_n = \sup \inf_{k \geq n} x_n.$$

**Теорема 2.24.**

1. Верхний предел — наибольший из всех частичных пределов.
2. Нижний предел — наименьший из всех частичных пределов.
3. Если  $\underline{\lim} = \overline{\lim}$ , то последовательность имеет предел и он равен  $\underline{\lim}$ .

**Доказательство.**

1. Пусть  $a = \overline{\lim} \in \mathbb{R}$ . Тогда  $a = \lim z_n$ , где  $z_n = \sup_{k \geq n} x_k$ . Мы знаем, что  $z_n \downarrow a$ . Значит, что  $z_1 \geq a = \sup x_n \Rightarrow n_1 : x_{n_1} > a - 1$ . Тогда знаем, что  $z_{n_1+1} = \sup_{k \geq n_1+1} x_k \geq a \Rightarrow \exists n_2 > n_1 : x_{n_2} > a - \frac{1}{3}$ . И так далее.

Тогда получили  $n_1 < n_2 < \dots$  и  $z_{n_k} > x_{n_k} > a - \frac{1}{k} \Rightarrow x_{n_k} \rightarrow a$ . Так как  $z_{n_k} \rightarrow a$ .

Пусть  $a = -\infty$ , значит  $z_n \downarrow -\infty$ , тогда  $x_n \leq z_n \rightarrow -\infty \Rightarrow x_n \rightarrow -\infty$ .

Пусть  $a = +\infty$ , значит  $\forall n : z_n = +\infty \Rightarrow$  последовательность  $x_n$  не ограничена сверху. Тогда выберем подпоследовательность, стремящаяся к  $+\infty$ .

Поняли, что  $a$  — частичный предел. Докажем, что он максимальный. Возьмем  $x_{n_k} \rightarrow b$ . Тогда  $x_{n_k} \leq z_{n_k} \wedge x_{n_k} \rightarrow b \wedge z_{n_k} \rightarrow a \Rightarrow b \leq a$ .

2. Упражнение.

3.  $y_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, \dots\} \leq x_n \leq \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\} = x_n$ . Тогда два милиционера.

□

**Теорема 2.25.**

$$1. a = \underline{\lim} x_n \iff \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N : x_n > a - \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \forall N \exists n \geq N : x_n < a + \varepsilon \end{cases}$$

$$2. b = \overline{\lim} x_n \iff \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N : x_n < b + \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \forall N \exists n \geq N : x_n > b - \varepsilon \end{cases}$$

**Доказательство.** Будем доказывать второй пункт.  $z_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$

1.  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N x_n < b + \varepsilon \xLeftrightarrow[\text{def } z_n]{\text{def } \sup} \forall \varepsilon > 0 \exists N : z_N < b + \varepsilon$ . Там достаточно этого по определению  $z_n$  и  $\sup$ .

2.  $\forall \varepsilon > 0 \forall N \exists n \geq N x_n > b - \varepsilon \iff \varepsilon > 0 \forall N z_N > b - \varepsilon$ .

3. Так как  $z_n \downarrow \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N : z_n \leq b + \varepsilon$ . Поэтому  $\forall N \in \mathbb{N} : z_N \geq b - \varepsilon \wedge z_N \leq b + \varepsilon$ , то  $z_n \rightarrow b$ .

□

**Теорема 2.26.**  $\forall x_n, y_n : x_n \leq y_n \Rightarrow \underline{\lim} x_n \leq \underline{\lim} y_n \wedge \overline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} y_n$ .

**Доказательство.** Раскрываем определения, получаем  $\inf\{\dots\} \leq \inf\{\dots\}$ .

□

**Замечание.** Арифметики нет. Пример:  $x_n = (-1)^n, y_n = (-1)^{n+1}$ .

## 2.5. Ряды

**Определение 2.24.**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim \sum_{k=1}^n a_k$ , если  $\lim$  существует, и  $\in \overline{\mathbb{R}}$ .

**Определение 2.25.** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  — сходится, если его сумма конечна, иначе ряд расходится.

**Пример.**  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n q^k = \lim \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \frac{1}{1-q} + \frac{\lim q^n}{q-1}$ .

Если  $|q| < 1$ , то  $\lim q^n = 0$  и  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$  ряд сходится.

Если  $q > 1$ , то  $\lim q^n = +\infty$  и  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty$  ряд расходится.

Если  $q \leq -1$ , то  $\lim q^n$  не существует и  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$  расходится.

**Пример.**  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \cdot S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1$ .

**Пример.** Гармонический ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ .  $H_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ . Поймем, что  $\lim H_n = +\infty$ .  
Разобьем на блоки:  $1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{> 2 \cdot \frac{1}{4}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \dots > 1 + \frac{n}{2} \rightarrow +\infty$

Свойства:

1. Если ряд сходил, то сумма определена однозначно.
2. Добавление/выкидывание из ряда конечного числа членов не влияет на сходимость (но может влиять на сумму).
3. Расстановка скобок:  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + \dots \rightarrow (a_1 + a_2) + a_3 + (a_4 + a_5 + a_6) + (a_7 + a_8) + a_9 + a_{10} + \dots$ . Взятие в скобки означает, что мы заменяем скобки на посчитанную сумму. Но это не меняет его сумму.

**Замечание.** Ряд  $1-1+1-1+\dots$  можно сгруппировать двумя способами:  $(1-1)+(1-1)+\dots = 0$  и  $1+(-1+1)+(-1+1)+\dots = 1$ , так что надо сначала проверить сходимость.

4.  $\forall a_n, b_n \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  — сходится и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  — сходится  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$  — сходится, причем  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ .
5.  $\forall a_n \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  — сходится  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

**Доказательство.**  $A_n := \sum_{k=1}^n a_k \wedge B_n := \sum_{k=1}^n b_k \Rightarrow S_n := \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k = A_n + B_n$   $\square$

## 3. Предел и непрерывность

### 3.1. Предел функции

**Определение 3.1.**  $a \in \mathbb{R}$ , тогда  $U_a$  — окрестность точки  $a \Leftarrow U_a = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ .

**Определение 3.2.**  $U_{+\infty}$  — луч  $(E, +\infty)$

**Определение 3.3.**  $U_{-\infty}$  — луч  $(-\infty, E)$

**Определение 3.4.**  $\dot{U}_a = U_a \setminus \{a\}$  — выколота окрестность.

**Определение 3.5.**  $E \subset \mathbb{R}$   $a$  — предельная точка  $E$ , если любая  $\dot{U}_a$  пересекается с  $E$ .

**Теорема 3.1.** Следующие условия равносильны:

1.  $a$  — предельная точка  $E$ .
2. В любой  $U_a$  содержится бесконечное кол-во точек из  $E$ .
3.  $\exists \{x_n\} : \forall n : x_n \in (E \setminus \{a\}) \wedge x_n \rightarrow a$ . Более того, можно выбрать последовательность  $x_n$  так, что  $|x_n - a| \downarrow 0$ .

**Доказательство.**

- $2 \Rightarrow 1$ . Любая  $U_a \cap E$  содержит бесконечное число точек  $\Rightarrow$  хотя бы одна из них не  $a$  и тогда  $\dot{U}_a \cap E \neq \emptyset$ .
- $3 \Rightarrow 2$ . Берем  $x_n \neq a \in E : \lim x_n = a$ . Возьмем  $U_a = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ .  $\exists N : \forall n \geq N x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \in U_a$ .
- $1 \Rightarrow 3$ . Возьмем  $\varepsilon_1 = 1 : (a - 1; a + 1)$  содержит точку из  $E \setminus \{a\}$ . Назовем такую точку  $x_1$ . Возьмем  $\varepsilon_2 = \min\{\frac{1}{2}, |x_1 - a|\} > 0 : (a - \varepsilon_2; a + \varepsilon_2)$  содержит точку из  $E \setminus \{a\}$ . Назовем её  $x_2$ . Возьмем  $\varepsilon_3 = \min\{\frac{1}{3}, |x_2 - a|\} > 0$  (заметим, что  $|x_2 - a| < \varepsilon_2 < |x_1 - a|$ ). Тогда  $(a - \varepsilon_3, a + \varepsilon_3)$  содержит точку из  $E \setminus \{a\}$ .  
Получили  $|x_1 - a| > |x_2 - a| > \dots$  причем  $|x_k - a| < \varepsilon_k = \min\{\frac{1}{k}, |x_{k-1} - a|\} \leq \frac{1}{k} \rightarrow 0 \Rightarrow |x_k - a| \rightarrow 0 \Rightarrow x_k \rightarrow a$ .

□

**Определение 3.6.** Пусть  $a$  — предельная точка  $E$ .  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда  $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , если

1. По Коши.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ .
2. Окрестности.  $\forall U_A \exists U_a : f(\dot{U}_a \cap E) \subset U_A$ .
3. По Гейне. Для любой последовательности  $x_n \neq a \in E : \lim x_n = a \Rightarrow \lim f(x_n) = A$ .

**Равносильность 1. и 2.**  $\forall U_A \exists U_a : f(\dot{U}_a \cap E) \subset U_A$ .

$$\forall U_A \iff \forall \varepsilon > 0 : U_A = (A - \varepsilon, A + \varepsilon).$$

$$\exists U_a \iff \exists \delta > 0 : U_a = (a - \delta, a + \delta).$$

$$x \in (\dot{U}_a \cap E) \iff x \in E \wedge 0 < |x - a| < \delta.$$



$$f(x \in (\dot{U}_a \cap E) \subset U_A \iff \forall x \in E : 0 < |x - a| < \delta |f(x) - A| < \varepsilon.$$

По сути, просто расписали, что значат окрестности, и получили просто определение по Коши.  $\square$

**Свойство.** Определение предела — локальное свойство. То есть, если  $f$  и  $g$  совпадают в  $\dot{V}_a$ , то либо оба предела не существуют, либо существуют и равны.

**Доказательство.**  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \rightarrow \forall U_A \exists U_a : f(\dot{U}_a \cap E) \subset U_A$ . Тогда можем взять  $\dot{W}_a = \dot{V}_a \cap \dot{U}_a$  и в этой окрестности всё будет выполняться требование  $f(\dot{W}_a \cap E) \subset U_A$  но при этом там ещё и функции будут равны в каждой точке, а значит  $\dot{W}_a$  попадёт и под определение предела для  $g$ . Т.е. у  $f$  в  $a$  есть предел  $A$ , то и у  $g$  в  $a$  есть предел, равный  $A$ , аналогично из  $g$  следует для  $f$ .  $\square$

**Свойство.** Значение  $f$  в точке  $a$  не участвует в определении.

**Свойство.** В определении по Гейне, если для любой последовательности  $x_n \neq a \in E : x_n \rightarrow a$   $\exists \lim f(x_n)$ , то все эти пределы равны.

**Доказательство.** Пусть  $x_n \neq a \in E : x_n \rightarrow a, \lim f(x_n) = A$  и  $y_n \neq a \in E : y_n \rightarrow a, \lim f(y_n) = B$ .

Рассмотрим  $z_n := x_1, y_1, x_2, y_2, \dots$ . Знаем, что  $z_n \rightarrow a \Rightarrow \lim f(z_n) =: C$ . Но  $\{f(x_n)\}$  — подпоследовательность  $\{f(z_n)\} \Rightarrow \lim f(x_n) = \lim f(z_n) = C$ . То же самое для  $y_n$ . Так получили, что  $A = C$  и  $B = C$ .  $\square$

**Теорема 3.2.** Определение по Коши и по Гейне равносильны.

**Доказательство.**

- Коши  $\Rightarrow$  Гейне.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ . Пусть  $x_n \in E : \lim x_n = a$ . Проверим, что  $\lim f(x_n) = A$ . Возьмем  $\varepsilon > 0$ , берем соответствующий  $\delta$  из определения. Найдется  $N : \forall n \geq N : 0 < \underbrace{|x_n - a|}_{\text{предел последовательности}} < \delta \Rightarrow |f(x_n) - A| < \varepsilon$ .

- Гейне  $\Rightarrow$  Коши. От противного: пусть нашелся  $\varepsilon > 0$  для которого ни одна  $\delta > 0$  не подходит. Возьмем  $\delta = \frac{1}{n}$ . Она не подходит, то есть  $\exists x \in E : 0 < |x - a| < \delta$ , но  $|f(x) - A| \geq \varepsilon$ . Из таких  $x$ , последовательно меняя  $\delta$ , получили  $x_n$ .

Посмотрим на последовательность:  $x_n \neq a \in E : |x_n - a| < \frac{1}{n} \Rightarrow \lim x_n = a \Rightarrow \lim f(x_n) = A \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |f(x_n) - A| < \varepsilon$ . Противоречие.  $\square$

Свойства пределов:

1. Предел единственный.
2. Если существует  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ , то  $f$  локально ограничена, то есть  $\exists U_a : f$  в  $U_a$  ограничена.
3. (Стабилизация знака). Если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \neq 0$ , то существует такая окрестность  $U_a$ , что  $f(x)$  при  $x \in \dot{U}_a$  имеет тот же знак, что и  $A$ .

**Доказательство.**

1. Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  и  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$ . Возьмем  $x_n \in E$ , такой, что  $x_n \rightarrow a$  (рассматриваем только предельные точки  $E$ ). Тогда  $\lim f(x_n) = A$  и  $\lim f(x_n) = B$ , но предел последовательности единственен  $\Rightarrow A = B$ .

2. Возьмем  $\varepsilon = 1$  в определении по Коши.  $\exists \delta > 0 \forall x \in E : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon = 1$ .  $U_a = (a - \delta, a + \delta)$ , тогда  $f$  ограничена на  $U_a \cap E$ .  $|f(x)| \leq |A| + |f(x) - A| < A + 1$ . Аккуратно рассмотрим еще про  $x = a$ , это одна конкретная точка, если она больше  $A + 1$ , то  $f$  локально ограничена  $f(a)$ .
3. Пусть  $A > 0$ . Возьмем  $\varepsilon = A$ .  $\exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \wedge x \in E \Rightarrow |f(x) - A| < A \iff 0 < f(x) < 2A$ . Берем  $\dot{U}_a = (a - \delta, a + \delta)$  для нее значения  $> 0$ .

□

**Теорема 3.3** (Теорема о арифметических действиях с пределами). Пусть  $a$  — предельная точка  $E$ ,  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$  и  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ . Тогда

1.  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$
2.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$
3.  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |A|$
4.  $B \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$

**Доказательство.** Проверим определение по Гейне. Берем последовательность  $x_n \neq a \in E : \lim x_n = a$ . Тогда  $\lim f(x_n) = A$  и  $\lim g(x_n) = B$ . Следовательно  $\lim (f(x_n) \pm g(x_n)) = A \pm B \Rightarrow \lim (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$ . По сути, просто перетаскиваем аналогичные теоремы с пределов последовательности.

Второй и третий пункты доказываются ровно так же.

Но вот в четвертом пункте надо что-то сказать про  $g(x)$ . Если  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B \neq 0$ , то по теореме о стабилизации знака  $\exists \delta > 0 : x_n \neq a \in E \wedge |x - a| < \delta \Rightarrow g(x) \neq 0$ . Тогда для  $x \in (a - \delta; a + \delta) \cap E / \{a\}$  можно писать  $\frac{f(x)}{g(x)}$ . □

**Теорема 3.4** (О предельном переходе в неравенствах). Пусть  $a$  — предельная точка  $E$ ,  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$  и  $f(x) \leq g(x)$ . Если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  и  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ , то  $A \leq B$ .

**Доказательство.** Возьмем какую-то последовательность  $x_n \neq a \in E : \lim x_n = a$  (найдется, так как  $a$  — предельная точка  $E$ ). Тогда  $A = \lim f(x_n)$  и  $B = \lim g(x_n)$ .

Тогда знаем, что  $\forall n : f(x_n) \leq g(x_n) \xrightarrow[\text{для послед.}]{\text{пред. переход}} A \leq B$  □

**Теорема 3.5** (О двух милиционерах). Пусть  $a$  — предельная точка  $E$ ,  $f, g, h : E \rightarrow \mathbb{R}$  и  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  при всех  $x \in E$ . Тогда,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) =: A \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$ .

**Доказательство.** Проверим определение по Гейне для  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$ . Берем любую последовательность  $x_n \neq a \in E : \lim x_n = a$ . Тогда  $\lim f(x_n) = A \wedge \lim h(x_n) = A \wedge f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n) \xrightarrow[\text{для послед.}]{\text{Th. о 2 мил.}} \lim g(x_n) = A$ . □

**Теорема 3.6** (Критерий Коши для предела функции).  $a$  — предельная точка  $E$ ,  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ .

Тогда существует конечный  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in E : \begin{matrix} 0 < |x - a| < \delta \\ 0 < |y - a| < \delta \end{matrix} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

**Доказательство.**

- $\Rightarrow$ . Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \neq a \in E : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ .  
 $\forall y \neq a \in E : |y - a| < \delta \Rightarrow |f(y) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Тогда, если сложить получим  $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - A| + |A - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

- $\Leftarrow$ . Докажем, что существует конечный  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  по Гейне. Берем последовательность  $x_n \neq a \in E : \lim x_n = a$ . Надо доказать, что  $\lim f(x_n)$  существует и конечен. Для этого проверим, что  $f(x_n)$  фундаментальная последовательность.

Возьмем  $\varepsilon > 0$  и соответствующую ему  $\delta > 0$ .  $\exists N : \forall n \geq N |x_n - a| < \delta$ . Берем  $m, n \geq N$   
 $\begin{matrix} |x_n - a| < \delta \\ |x_m - a| < \delta \end{matrix} \wedge a \neq x_n \in E \wedge a \neq x_m \in E \Rightarrow |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$ , т.е.  $f(x_n)$  — фундамен-  
 тальная последовательность  $\Rightarrow$  существует конечный  $\lim f(x)$ .

□

**Определение 3.7.**  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E_1 = (-\infty, a) \cap E$ . Пусть  $a$  — предельная точка  $E_1$ ,  $g :=$  сужение  $f$  на  $E_1$ . Тогда  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \iff \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = A$  — предел слева в точке  $A$ .

**Определение 3.8.**  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E_2 = (a, +\infty) \cap E$ . Пусть  $a$  — предельная точка  $E_2$ ,  $g :=$  сужение  $f$  на  $E_2$ . Тогда  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \iff \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = A$  — предел справа в точке  $A$ .

**Замечание.**  $A = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E : a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

**Замечание.**  $B = \lim_{x \rightarrow a+} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E : a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - B| < \varepsilon$

**Замечание.**  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x) =: A \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$

**Определение 3.9.**  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда  $f$  — монотонно возрастает  $\iff \forall x, y \in E : x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ . Аналогично вводится строгое монотонное возрастание, монотонное убывание, строгое монотонное убывание.

**Теорема 3.7** (Вейерштрасса, о пределе монотонной функции).  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E_1 := (-\infty, a) \cap E$ ,  $a$  — предельная точка  $E_1$ . Тогда

1. Если  $f$  монотонно возрастает и ограничена сверху, то существует конечный предел  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ .
2. Если  $f$  монотонно убывает и ограничена снизу, то существует конечный предел  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ .

**Замечание.** На самом деле в 1  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \sup_{x \in E_1} f(x)$ , в 2  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \inf_{x \in E_1} f(x)$ .

**Доказательство.**

1.  $A := \sup_{x \in E_1} f(x)$ . Проверим, что  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = A$ . Возьмем  $\varepsilon > 0$ . Тогда  $A - \varepsilon$  не верхняя граница множества  $\{f(x) : x \in E_1\} \Rightarrow$  найдется  $x_0 \in E_1 : f(x_0) > A - \varepsilon$ .  $\delta := a - x_0 > 0$ . Проверим, что он подходит. Возьмем  $x \in E : a - \delta = x_0 < x < a \Rightarrow f(x_0) \leq A - \varepsilon < f(x) \leq A < A + \varepsilon \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ .

□

## 3.2. Непрерывные функции

**Определение 3.10.**  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  и  $a \in E$ .  $f$  непрерывна в точке  $a$ , если  $a$  — не предельная точка или  $a$  — предельная точка и  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

**Определение 3.11.** Расписывая через Коши:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

**Определение 3.12.** Расписывая через окрестности:  $\forall U_{f(a)} \exists U_a f(U_a \cap E) \subset U_{f(a)}$

**Определение 3.13.** Расписывая через Гейне:  $\forall x_n \in E : \lim x_n = a \Rightarrow \lim f(x_n) = f(a)$ .

**Пример.**  $f(x) = c$  — непрерывна всегда.

**Пример.**  $f(x) = x$  — непрерывна всегда.

**Пример.**  $f(x) = [x]$ . Если  $a \notin \mathbb{Z}$   $\lim_{x \rightarrow a} [x] = [a]$ . Иначе предела нет, значит  $f$  не непрерывна (да и вообще получили разрыв первого рода)

**Пример.**  $f(x) = |\{x\} - \frac{1}{2}|$ .

Если  $a \notin \mathbb{Z}$ , то очевидно непрерывная.

Если  $a = n \in \mathbb{Z}$ , то  $\lim_{x \rightarrow n+} |\{x\} - \frac{1}{2}| = \lim_{x \rightarrow n+} |x - n - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2} = f(n)$ .  $\lim_{x \rightarrow n-} |\{x\} - \frac{1}{2}| = \lim_{x \rightarrow n-} |x - (n-1) - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2} = f(n)$ .

Функция непрерывна!

**Теорема 3.8.**  $\exp x$  непрерывна во всех точках.

**Доказательство.** Хотим  $\lim_{x \rightarrow a} \exp x = \exp a$ . Пусть  $h := x - a \rightarrow 0$ . Теперь хотим  $\lim_{h \rightarrow 0} \exp(a+h) = \exp a$ . Тогда надо доказать, что  $\lim_{h \rightarrow 0} \exp h = 1$ . Заметим, что  $1 + h \leq \exp h \leq \frac{1}{1-h}$ , при  $|h| \leq 1$ . Значит, по 2 милиционеру  $\exp h \rightarrow 1$ .  $\square$

**Теорема 3.9** (Теорема об арифметических действиях с непрерывными функциями).  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}, a \in E$ ,  $f, g$  непрерывны в  $a$ . Тогда:

1.  $f \pm g$  непрерывна в  $a$ .
2.  $f \cdot g$  непрерывна в  $a$ .
3.  $|f|$  непрерывна в  $a$
4. если  $g(a) \neq 0$ , то  $\frac{f}{g}$  непрерывна.

**Доказательство.** Если  $a$  не предельная, то очев. Иначе ссылаемся на арифм. действия с пределами.  $\square$

**Следствие.**

1. Многочлены непрерывны во всех точках.
2. Рациональные функции (т.е. отношение двух многочленов) непрерывны на всех области определения.

**Доказательство.**

1.  $f(x) = c, g(x) = x \Rightarrow cx^k$  — непрерывна  $\Rightarrow$  многочлены непрерывны.
2.  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  непрерывна в точке  $a$ , если  $Q(a) \neq 0$ .

$\square$

**Теорема 3.10** (О стабилизации знака).  $f : E \rightarrow \mathbb{R}, a \in E$ ,  $f$  — непрерывна в  $a$  и  $f(a) \neq 0$ . Тогда  $\exists U_a : \forall x \in U_a \cap E$  знак  $f(x)$  совпадает с  $f(a)$ .

**Доказательство.**

- Точка не предельная. Берем окрестность из одной точки —  $a$ .
- Иначе ссылаемся на теорему о стабилизации знака для предела

□

**Теорема 3.11.** Пусть  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in E$ ,  $f$  — непрерывна в  $a$ ,  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ,  $g$  — непрерывна в  $A$ ,  $D \supset f(E)$ , тогда  $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(A)$ .

**Доказательство.**  $g$  непрерывна в точке  $A \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in D |y - A| < \delta \Rightarrow |g(y) - g(A)| < \varepsilon$ .

Зафиксируем  $\varepsilon > 0$  и по нему возьмем  $\delta > 0$  и подставим его вместо  $\varepsilon$  в определение  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ .

$\forall \delta > 0 \exists \gamma > 0 \forall x \in E |x - a| < \gamma \Rightarrow |f(x) - A| < \delta$ . Подставим  $y = f(x)$ :  $|g(f(x)) - g(A)| < \varepsilon$ . □

**Следствие Непрерывность композиции.** Пусть  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in E$ ,  $f$  — непрерывна в  $a$ ,  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ,  $g$  — непрерывна в  $A$ ,  $D \supset f(E)$ , тогда  $g \circ f$  непрерывна в  $a$ .

**Доказательство.** Если  $a$  не предельная, то всё просто и круто.

Если предельная, то предыдущая теорема. □

**Замечание.** Без непрерывности  $g$  неверно.  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ .  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$   $g(y) = \begin{cases} 0 & y = 0 \\ 1 & y \neq 0 \end{cases}$ .

$\lim_{y \rightarrow 0} g(y) = 1$ . Но  $\lim g(f(x))$  не существует, поскольку для  $x_n = \frac{1}{\pi n}$ ,  $f(x_n) = 0$ .  $g(f(x_n)) = 0$ , а для  $y_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$   $f(y_n) \neq 0$ ,  $g(f(y_n)) = 1 \neq 0$ .

**Теорема 3.12.**  $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin x < x < \operatorname{tg} x$ .

**Следствие.**  $\forall x : |\sin x| \leq |x|$

**Доказательство.**

- $0 < x < \frac{\pi}{2}$  — уже было, доказывается картинкой: для синуса: дуга больше высоты из этой точки, а для тангенса: площадь сектора ( $\frac{x}{2}$ ) меньше площади треугольника ( $\frac{\operatorname{tg} x}{2}$ )
- $x > \frac{\pi}{2} \Rightarrow |\sin x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq |x|$ .
- При  $x < 0 \Rightarrow |x| = |-x|$  и  $|\sin x| = |\sin(-x)|$ .

□

**Следствие.**

1.  $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$
2.  $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$

**Доказательство.**  $|\sin x - \sin y| = 2 \left| \sin \frac{x-y}{2} \right| \left| \cos \frac{x+y}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x-y}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{x-y}{2} \right| \leq |x - y|$

Второй так же. □

**Теорема 3.13.**  $\sin, \cos, \operatorname{tg}, \operatorname{ctg}$  — непрерывны.

**Доказательство.** Хотим доказать, что  $\lim_{x \rightarrow a} \sin(x) = \sin(a)$ , для этого нужно  $\lim_{x \rightarrow a} \sin(x) - \sin(a) = 0$ , а, по предыдущим записям,  $|\sin(x) - \sin(a)| \leq |x - a|$ , и тогда по двум милиционерам получаем, что тут предел равен 0, а значит  $\sin x$  непрерывен.

Для косинуса аналогично:  $\lim_{x \rightarrow a} \cos(x) = \cos(a) \iff \lim_{x \rightarrow a} \cos(x) - \cos(a) = 0, |\cos(x) - \cos(a)| \leq |x - a| \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \cos(x) - \cos(a) = 0$ , т.е. косинус непрерывный.

Непрерывность  $\operatorname{tg}$  и  $\operatorname{ctg}$  следует из непрерывности частного двух непрерывных.  $\square$

**Теорема 3.14** (Первый замечательный предел).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

**Доказательство.** Нам известно неравенство  $\sin x \leq x \leq \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ , при  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ .

$$\text{Тогда } \sin x \leq x \leq \operatorname{tg} x \iff \frac{1}{\operatorname{tg} x} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\sin x}$$

$$\text{Тогда } \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1 \text{ при } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}.$$

Тогда применим двух милиционеров:  $\cos x \rightarrow 1, 1 \rightarrow 1$  при  $x \rightarrow 0$ , а значит  $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ .  $\square$

**Теорема 3.15** (Теорема Вейерштрасса).

1. Непрерывная на отрезке функция ограничена.
2. Непрерывная на отрезке функция принимает наибольшее и наименьшее значение.

**Доказательство.** Введем обозначения:  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна во всех точках.

1. От противного. Пусть число  $n$  не является верхней границей для  $|f|$ . Значит  $\exists x_n \in [a, b] : |f(x_n)| > n$ , построим последовательность таких  $x_n$ .

Применим к ней теорему Больцано-Вейерштрасса. Выберем  $x_{n_k}$  имеющий предел  $c \in \mathbb{R}$ . Причем, так как  $a \leq x_{n_k} \leq b \Rightarrow a \leq c \leq b$ . А значит, поскольку  $f$  непрерывна в точке  $c$ ,  $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = |f(c)| \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} |f(x_{n_k})| = |f(c)|$ , но  $|f(x_{n_k})| > n_k \rightarrow +\infty$ . Получили противоречие.  $+\infty \neq c \in \mathbb{R}$ .

2. Будем доказывать максимум.  $M := \sup_{x \in [a, b]} f(x) \in \mathbb{R}$ . Пусть он не достигается, то есть  $f(x) < M \forall x \in [a, b]$ .

Тогда рассмотрим вспомогательную функцию  $g(x) := \frac{1}{M - f(x)}$  — непрерывна на  $[a, b] \Rightarrow g$  ограничена  $\Rightarrow g(x) \leq \widehat{M} \forall x \in [a, b]$ .

Тогда  $M - f(x) \geq \frac{1}{\widehat{M}} \Rightarrow f(x) \leq M - \frac{1}{\widehat{M}} < M$ . Получили противоречие, так как  $M$  — супремум, т.е. наименьшая верхняя граница, а тут столкнулись с границей ещё меньше.  $\square$

**Замечание.** Отрезок нельзя менять на интервал или полуинтервал.  $f(x) = \frac{1}{x}$  на  $(0, 1]$  — непрерывность есть, ограниченности нет.

**Замечание.** Непрерывность должна быть на всех точках.  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \in (0, 1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$  на  $[0, 1]$ . Ограниченности нет, непрерывность во всех точках, кроме одной.

**Теорема 3.16** (Теорема Больцано-Коши, теорема о промежуточных значениях).

1.  $f$  непрерывна на  $[a, b]$  и значения  $f(a)$  и  $f(b)$  разных знаков. Тогда  $\exists c \in (a, b) : f(c) = 0$ .

2.  $f$  непрерывна на  $[a, b]$  и  $y$  лежит между  $f(a)$  и  $f(b)$ . Тогда  $\exists c \in (a, b): f(c) = y$

**Доказательство.**

1. Считаем, что  $f(a) < 0 \wedge f(b) > 0$ . Будем делить отрезок на части.  $a_0 := a, b_0 := b$ . Тогда:

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} [\frac{a_n+b_n}{2}, b_n] & \text{если } f(\frac{a_n+b_n}{2}) < 0 \\ [a_n, \frac{a_n+b_n}{2}] & \text{если } f(\frac{a_n+b_n}{2}) > 0 \end{cases}.$$

Тогда, если процесс не оборвался, получили  $[a, b] = [a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$ . Сходящиеся отрезки  $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \rightarrow 0$ . Тогда найдется  $c$ , лежащая во всех отрезках,

причем  $\lim a_n = \lim b_n = c$ . Функция непрерывна в  $c \Rightarrow \lim_{\substack{\leq 0}} f(a_n) = f(c) = \lim_{\substack{\geq 0}} f(b_n) \Rightarrow 0 \geq \lim f(a_n) = f(c) \wedge \lim f(b_n) \geq 0 \Rightarrow f(c) = 0$ .

2.  $g(x) := f(x) - y$ . Тогда  $g(a)$  и  $g(b)$  разных знаков  $\Rightarrow \exists c \in [a, b]: f(c) - y = g(c) = 0$

□

**Замечание.** Нужна непрерывность во всех точках.  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in [0, 1] \\ -1 & \text{при } x \in [-1; 0) \end{cases}$  непрерывна на  $[-1, 1]$ , за исключением 0.

**Замечание.** Бывают разрывные функции, удовлетворяющие теореме о промежуточных значениях.  $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{при } x \in (0; 1] \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$ . Если  $a, b \in [0, 1]$ , то на  $[a, b]$   $f$  принимает все значения между  $f(a)$  и  $f(b)$ . Случай  $0 < a < b$  — теорема Больцано-Коши. Случай  $a = 0 < b$  на  $(0, b)$  принимает все значения. Так как на  $[\frac{1}{2\pi(n+1)}; \frac{1}{2\pi n}]$   $\sin \frac{1}{x}$  принимает все значения от  $-1$  до  $1$ .

**Теорема 3.17.** Непрерывный образ отрезка — отрезок. То есть  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывная  $\Rightarrow f([a, b])$  — отрезок.

**Доказательство.**  $m := \min_{x \in [a, b]} f(x)$   $M := \max_{x \in [a, b]} f(x)$ . По теореме Вейерштрасса  $\exists p, q \in [a, b]: m = f(p), M = f(q)$ . Рассмотрим отрезок с концами в  $p$  и  $q$ . По теореме Больцано-Коши, на  $(p, q)$  функция принимает все значения между  $f(p)$  и  $f(q)$ , то есть все значения из  $[m, M]$  достигаются  $\Rightarrow f([a, b]) = [m, M]$ . □

**Определение 3.14.**  $\langle a, b \rangle$  означает один из промежутков  $[a, b]; (a, b]; [a, b); (a, b)$ .

**Теорема 3.18.** Непрерывный образ промежутка — промежуток (но, возможно, промежуток другого типа.)

**Доказательство.**  $\langle a, b \rangle$  — промежуток.  $m := \inf_{x \in \langle a, b \rangle} f(x)$  (возможно  $-\infty$ ).  $M := \sup_{x \in \langle a, b \rangle} f(x)$ .

Тогда  $m \leq f(x) \leq M \forall x \in \langle a, b \rangle$ , а значит  $f(\langle a, b \rangle) \subset [m, M]$ . Докажем, что  $f(\langle a, b \rangle) \supset (m; M)$ : Возьмем  $y \in (m, M)$ , такой что  $m < y < M$ .

$m = \inf \Rightarrow y$  — не нижняя граница  $\Rightarrow \exists p \in \langle a, b \rangle: f(p) < y$ .

$M = \sup \Rightarrow y$  — не верхняя граница  $\Rightarrow \exists q \in \langle a, b \rangle: f(q) > y$ .

Применим теорему Больцано-Коши для отрезка с концами  $p$  и  $q \Rightarrow \exists c \in (p, q) \subset \langle a, b \rangle: f(c) = y$ .

Тогда  $(m, M) \subset f(\langle a, b \rangle) \subset [m, M] \Rightarrow f(\langle a, b \rangle)$  — промежуток. □

**Замечание.**  $f(x) = x^2$  на  $(-1, 1)$ , образ  $[0, 1)$ .

$f(x) = \sin x$  на  $(0, 2\pi)$ , образ  $[-1, 1]$ .

$f(x) = \frac{\sin \frac{1}{x}}{x}$  на  $(0, 1]$ , образ  $\mathbb{R}$ .

**Определение 3.15.** Пусть  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  и инъективна. Тогда  $g$  — обратная к  $f \iff g : \text{переводит из множества значений } f \text{ — } f(\langle a, b \rangle) \text{ в } \langle a, b \rangle \text{ и } f(g(y)) = y \wedge g(f(x)) = x.$

$g$  обозначается как  $f^{-1}$ .

**Замечание.** Обратная функция существует, так как  $f$  — биекция между  $\langle a, b \rangle$  и  $f(\langle a, b \rangle)$ .

**Замечание.** График непрерывной функции симметричен относительно прямой  $y = x$ .

**Теорема 3.19.**  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна и строго монотонна.  $m := \inf_{x \in \langle a, b \rangle} f(x)$  (возможно  $-\infty$ ).  $M := \sup_{x \in \langle a, b \rangle} f(x)$ . Тогда:

1.  $f$  обратима и  $f^{-1} : \langle m, M \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$
2.  $f^{-1}$  строго монотонна.
3.  $f^{-1}$  непрерывна на  $\langle m, M \rangle$ .

**Доказательство.**

1. Строгая монотонность  $\Rightarrow f$  — инъекция  $\Rightarrow f$  — обратима.
2. Пусть  $f$  строго возрастает  $\Rightarrow f(x) < f(y) \iff x < y$ . Тогда  $x < y \Rightarrow f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$ .
3. Непрерывность. Возьмем  $y_0 \in \langle m, M \rangle$ . Докажем непрерывность в точке  $y_0$ .  $A := \sup_{y < y_0} f^{-1}(y) = \lim_{y \rightarrow y_0-} f^{-1}(y)$  (функция строго монотонная)  $\leq f^{-1}(y_0) \leq \lim_{y \rightarrow y_0+} f^{-1}(y) = \inf_{y > y_0} f^{-1}(y) =: B$ . Докажем, что  $A = B$ .

Пусть  $A < B$ . Рассмотрим множество значений  $f^{-1} : (-\infty; A] \cup \{f^{-1}(y_0)\} \cup [B; +\infty) \supset f^{-1}(\langle m, M \rangle) = \langle a, b \rangle$ . Противоречие (не сможем покрыть  $\langle a, b \rangle$ , если множество значений не будет единым промежутком, а с разрывами)

□

### 3.3. Элементарные функции

**Обратные тригонометрические функции.**

- $\sin : [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$  непрерывна и строго возрастает. По теории у него есть обратная функция.
- $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$  непрерывна и строго возрастает.
- $\cos : [0; \pi] \rightarrow [-1, 1]$  непрерывна и строго убывает.
- $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$  непрерывна и строго убывает.
- $\operatorname{tg} : (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна и строго возрастает. По теории у него есть обратная функция.
- $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$  непрерывна и строго возрастает.
- $\operatorname{ctg} : (0; \pi) \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна и строго убывает.



- $\operatorname{arcsctg}: \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$  непрерывна и строго убывает.

**Логарифм.**

$\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0; +\infty)$  непрерывна и строго возрастает. Обратная функция  $\ln: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна и строго возрастает.

**Свойства.** •  $\lim_{x \rightarrow 0+} \ln x = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
- $\ln(1+x) \leq x$ , при  $x > -1$ .
- $\ln(1+x) \geq 1 - \frac{1}{1+x}$ , при  $x > -1$ .

**Доказательство.** • Предел существует из монотонности, они такие, т.к. множество значений  $y \ln - \mathbb{R}$ .

- $\exp(u+v) = \exp u \cdot \exp v$ . Если  $\exp u = a, \exp v = b$ , то  $u = \ln a, v = \ln b$ , тогда  $\exp(u+v) = a \cdot b \Rightarrow \ln(ab) = u+v = \ln a + \ln b$
- $\exp u \geq 1+u \Rightarrow u = \ln(\exp u) \geq \ln(1+u)$
- $y := \ln(1+x). \exp y = 1+x \Rightarrow 1+x = \exp y \leq \frac{1}{1-y} \Rightarrow 1-y \leq \frac{1}{1+x}$ .

□

**Теорема 3.20.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

**Доказательство.**  $\frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$ , при  $-1 < x < 1$ .

$$\text{При } x > 0: \underbrace{\frac{1}{1+x}}_{\rightarrow 1} \leq \frac{\ln(1+x)}{x} \leq 1.$$

$$\text{При } x < 0: 1 \leq \frac{\ln(1+x)}{x} \leq \frac{1}{1+x} \rightarrow 1$$

□

**Определение 3.16.**  $a^b := \exp(b \ln a)$ , при  $a > 0, b \in \mathbb{R}$

Если  $b \in \mathbb{N}$ :  $a^n = \exp(\underbrace{\ln a + \ln a + \dots + \ln a}_{n \text{ штук}}) = \exp(\ln a) \cdot \dots \cdot \exp(\ln a)$  — штук.

$$a^{-n} = \exp(-n \ln a) = \frac{1}{\exp(n \ln a)} = \frac{1}{a^n}.$$

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m. \exp(\frac{m}{n} \ln a) = \exp(m \frac{\ln a}{n}) = (\exp(\frac{\ln a}{n}))^m.$$

**Упражнение.** Доказать, что  $a^b = \lim a^{b_n}$ , где  $b_n \in \mathbb{Q}$  и  $b_n \rightarrow b$ .

**Следствие.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e \quad (2)$$

**Доказательство.** 1.  $(1+x)^{\frac{1}{x}} = \exp(\frac{1}{x} \ln(1+x))$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \exp(\frac{\ln(1+x)}{x}) = \exp(\lim \dots) = \exp 1 = e$$

2.  $y = \frac{1}{x} \cdot (1+x)^{\frac{1}{x}} = (1+\frac{1}{y})^y$ . При  $x \rightarrow 0+$   $y \rightarrow +\infty$ . При  $x \rightarrow 0-$   $y \rightarrow -\infty$

□

### Показательная функция

**Определение 3.17.** Показательная функция  $a^x := \exp(x \ln a) : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ , при  $a > 0$ .

**Свойства.** 1. При  $a > 1$  строго возрастает. Так как  $\ln a > 0$ .

2. При  $a < 1$  строго убывает.

3.  $a^x \geq 1 + x \ln a$  по свойству экспоненты.

**Теорема 3.21.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} a^x &\geq 1 + x \ln a \Rightarrow a^x - 1 \geq x \ln a \\ a^{-x} &\geq 1 - x \ln a \Rightarrow a^x = \frac{1}{a^{-x}} \leq \frac{1}{1 - x \ln a} \text{ при малых } x \\ a^x - 1 &\leq -1 + \frac{1}{1 - x \ln a} = \frac{x \ln a}{1 - x \ln a}. \end{aligned}$$

Тогда  $\frac{a^x - 1}{x}$  зажато между  $\ln a$  и  $\frac{\ln a}{1 - x \ln a} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \ln a$ .

□

### Степенная функция

**Определение 3.18.** Степенная функция:  $x^p := \exp(p \ln x) : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , когда  $p \in \mathbb{R}$ .

Функция непрерывна и, если  $p \neq 0$ , то строго монотонная.

**Теорема 3.22.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^p - 1}{x} = p.$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} (1+x)^p &= \exp(p \ln(1+x)) \geq 1 + p \ln(1+x) \\ (1+x)^p &= \frac{1}{(1+x)^{-p}} \leq \frac{1}{1 - p \ln(1+x)}, \text{ при } x \text{ близких к нулю} \\ p \ln(1+x) &= (1+x)^p - 1 \leq \frac{1}{1 - p \ln(1+x)} - 1 = \frac{p \ln(1+x)}{1 - p \ln(1+x)} \end{aligned}$$

Тогда  $\frac{(1+x)^p - 1}{x}$  зажато между  $p \cdot \frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow{\text{зам. предел}} p$  и  $p \cdot \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot \frac{1}{1 - p \ln(1+x)} \xrightarrow[\text{непрерывность}]{\text{зам. предел}} p$ . Дальше два милиционера.

□

## 3.4. Сравнение функций

**Определение 3.19.**  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ .  $x_0$  — предельная точка  $E$ . Если  $\exists \varphi : E \rightarrow \mathbb{R} : f = \varphi g$ , при  $x \in \dot{U}_{x_0} \cap E$  и (тут три разных случая):

1. Если  $\varphi$  — ограниченная:  $f = \mathcal{O}(g)$ .  $|f(x)| \leq C|g(x)|$  в окрестности  $x_0$ .

2. Если  $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$ :  $f = o(g)$ .  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

3. Если  $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1$ :  $f \sim g$ .  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

**Определение 3.20.**  $f = \mathcal{O}(g)$  на множестве  $E \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists C > 0: |f(x)| \leq C|g(x)| \quad \forall x \in E$ .

**Определение 3.21.**  $f = \mathcal{O}(g) \quad f \prec g \quad g \succ f$ . Если  $f = \mathcal{O}(g)$  и  $g = \mathcal{O}(f)$ , то  $f \asymp g \iff \exists C_1, C_2 > 0: C_1|g(x)| \leq |f(x)| \leq C_2|g(x)|$ .

**Замечание.**  $g(x) \neq 0 \Rightarrow \varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  и  $g(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$  (иначе  $\varphi(x)$  не существует.)

**Свойства.** 1.  $\sim$  — отношение эквивалентности.

2.  $f_1 \sim g_1 \wedge f_2 \sim g_2 \Rightarrow f_1 f_2 \sim g_1 g_2$ .

3.  $f_2$  и  $g_2$  не обращаются в ноль в  $\dot{U}_{x_0} \Rightarrow f_1 \sim g_1 \wedge f_2 \sim g_2 \Rightarrow \frac{f_1}{f_2} \sim \frac{g_1}{g_2}$

4.  $f \sim g \iff f = g + o(g) \iff f = g + o(f)$ .

**Доказательство.** 1. Рефлексивность  $f \sim f$ :  $\varphi = 1$ .

Симметричность  $f \sim g \Rightarrow g \sim f \quad f \sim g \Rightarrow f = \varphi g \Rightarrow g = \frac{1}{\varphi} f$ , где  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\varphi(x)} = 1$ .

Транзитивность:  $f \sim g \wedge g \sim h \Rightarrow f \sim h$ .  $f = \varphi_1 g \wedge g = \varphi_2 h \Rightarrow f = \varphi_1 \varphi_2 h$ . И еще пределы (очевидно).

2.  $f_i \sim g_i \Rightarrow f_i = \varphi_i g_i$ , и  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi_i = 1$ . Можно перемножить  $\varphi_i$ , все будет ок.

3.  $\frac{f_1}{f_2} = \frac{\varphi_1 g_1}{\varphi_2 g_2}$ .

4.  $f \sim g \iff f = \varphi g \iff f = g + (\varphi - 1)g$ . Так как  $\varphi \rightarrow 1 \Rightarrow \varphi - 1 \rightarrow 0$ .

□

**Свойства.** 6.  $f = o(g) \Rightarrow f = \mathcal{O}(g)$  в точке  $x_0$ .  $f \sim g \Rightarrow f = \mathcal{O}(g)$  в точке  $x_0$ . Что тут произошло — непонятно.

7.  $f \cdot o(g) = o(fg)$

8.  $o(f) + o(f) = o(f)$  и  $\mathcal{O}(f) + \mathcal{O}(f) = \mathcal{O}(f)$ .

9.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \iff f(x) = a + o(1)$

**Доказательство.** 6.  $f = o(g) \Rightarrow f = \varphi g$ , где  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi = 0$ . Для  $\sim \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi = 1 \Rightarrow \varphi$  ограничена в окрестности.

7.  $h = f \cdot o(g) \iff h = f\varphi g$ , где  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi = 0 \iff h = \varphi f g \iff h = o(fg)$ .

8.  $g = o(f), h = o(f) \Rightarrow g + h = o(f)$ .  $g = \varphi f, h = \psi f$ , Где  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi = \lim_{x \rightarrow x_0} \psi = 0 \Rightarrow g + h = (\varphi + \psi)f$  и предел = 0.

$g = \mathcal{O}(f) \Rightarrow |g| \leq C|f| \wedge h = \mathcal{O}(f) \Rightarrow |h| \leq C'|f| \Rightarrow |g + h| \leq |g| + |h| \leq (C + C')|f|$ .

9.  $f(x) = a + o(1)$ , где  $o(1)$  — что-то, стремящееся к 0.  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - a) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$

□

**Пример.**  $\sin x \sim x, \ln(1+x) \sim x, \operatorname{tg} x \sim x$  при  $x \rightarrow 0$ .

**Пример.**  $\sin x = x + o(1)$ .

$$\ln(1+x) = x + o(1)$$

$$\operatorname{tg} x = x + o(x)$$

$$\frac{(1+x)^p - 1}{x} \rightarrow p \iff \frac{(1+x)^p - 1}{x} = p + o(1) = (1+x)^p = 1 + px + o(1)$$

$$\frac{a^x - 1}{x} \rightarrow \ln a \iff \frac{a^x - 1}{x} = \ln a + o(1) \iff a^x = 1 + x \ln a + o(x).$$

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \sim \frac{2 \left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2} = \frac{1}{2}. \text{ Получается, что } \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} + o(1). \text{ А значит } 1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \iff \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

## 4. Дифференциальное исчисление

### 4.1. Дифференцируемость и производная

**Определение 4.1.**  $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R} \wedge x_0 \in \langle a, b \rangle$ .

$f$  — дифференцируема в точке  $x_0$ , если существует такое  $k \in \mathbb{R}: f(x) = f(x_0) + k(x - x_0) + o(x - x_0)$  при  $x \rightarrow x_0$ . Можно думать, что  $\alpha(x) = o(x - x_0)$ , где  $\frac{\alpha(x)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$ .

**Определение 4.2.** Производная функции  $f$  в точке  $x_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} =: f'(x_0)$ .

**Теорема 4.1** (Критерий дифференцируемости).  $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \langle a, b \rangle$ . Следующие условия равносильны:

1.  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$ .
2.  $f$  имеет в точке  $x_0$  конечную производную.
3.  $\exists \varphi: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}: f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0)$  и  $\varphi$  непрерывна в точке  $x_0$ .

Причем, если выполнены эти условия, то  $k = f'(x_0) = \varphi(x_0)$

**Доказательство.** • 1.  $\Rightarrow$  2.  $f(x) = f(x_0) + k(x - x_0) + o(x - x_0) \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{k(x - x_0) + o(x - x_0)}{x - x_0} = k + o(1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k \Rightarrow f'(x_0) = k$

• 2.  $\Rightarrow$  3.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$ .  $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & x \neq x_0 \\ f'(x_0) & x = x_0 \end{cases} \Rightarrow \varphi$  — непрерывна в  $x_0$ .

• 3.  $\Rightarrow$  1.  $f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0)$ , причем  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) \Rightarrow f(x) = f(x_0) + \varphi(x_0)(x - x_0) + (\varphi(x) - \varphi(x_0))(x - x_0)$ , где последний член есть  $o(x - x_0)$  при  $x \rightarrow x_0$ . □

**Определение 4.3.** Бесконечная производная  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm \infty$

**Пример.**  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ .  $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h - 0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty$

**Определение 4.4.**  $f'_+ := \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$$f'_- := \lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

**Замечание.** Существование  $f'(x_0) \iff$  существование  $f'_\pm(x_0)$  и их равенство.

**Пример.**  $f(x) = |x|$ .  $f'_+(x) = 1, f'_-(x) = -1$

**Определение 4.5.** Касательная — предельное положение секущей.

**Пример.** Уравнение касательной. Пусть  $f$  дифференцируема в точке  $u \in \langle a, b \rangle$ .

$$y = f(u) + \frac{f(v) - f(u)}{v - u}(x - u). \quad f'(u) = \lim_{v \rightarrow u} \frac{f(v) - f(u)}{v - u}. \quad \text{То есть } y = f(u) + f'(u)(x - u).$$

Геометрический смысл  $f'(x_0)$  — угловой коэффициент к графику функции в точке  $(x_0, f(x_0))$

**Определение 4.6.** Дифференциал функции  $(d_{x_0}f)$   $f(x_0 + h) = f(x_0) + k \cdot h + o(h)$  при  $h \rightarrow 0$ .  $f(x_0)$  — константа,  $k \cdot h$  — что-то линейное.

Дифференциал функции — линейное отображение  $k \cdot$ .

**Утверждение 4.2.** Если  $f$  дифференцируема в  $x_0$ , то  $f$  непрерывна в  $x_0$ .

**Доказательство.**  $f(x) = f(x_0) + \underbrace{k(x - x_0)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{o(x - x_0)}_{\rightarrow 0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f(x_0)$  □

**Теорема 4.3** (Арифметические действия с дифференцируемыми функциями).  $f, g: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \langle a, b \rangle$ ,  $f, g$  — дифференцируемые в  $x_0$ . Тогда:

1.  $f \pm g$  дифференцируема в  $x_0$  и  $(f \pm g)' = f' \pm g'$
2.  $f \cdot g$  дифференцируема в  $x_0$  и  $(f \cdot g)' = f'g + fg'$
3.  $cf$  дифференцируема в  $x_0$  и  $(cf)' = cf'$
4.  $\alpha f + \beta g$  дифференцируема в  $x_0$  и  $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$
5. если  $g(x_0) \neq 0$ , то  $\frac{f}{g}$  дифференцируема в  $x_0$  и  $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

**Доказательство.**

1.  $(f + g)'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) + g(x)) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$
2.  $(fg)'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)$
3.  $(cf)' = cf' + c'f = cf'$
4.  $(\alpha f + \beta g)' = (\alpha f)' + (\beta g)' = \alpha f' + \beta g'$
5.  $\left(\frac{f}{g}\right)' = (f' \cdot \frac{1}{g}) + f \cdot (\frac{1}{g})'$   
 $(\frac{1}{g})'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0} = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$

□

**Теорема 4.4** (Дифференцируемость композиции). Пусть  $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: \langle c, d \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$ ,  $x_0 \in \langle c, d \rangle$ ,  $g$  дифференцируема в точке  $x_0$ ,  $f$  дифференцируема в точке  $g(x_0)$ .

Тогда  $f \circ g$  дифференцируема в точке  $x_0$ , и  $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$ .

**Доказательство.**  $g$  дифференцируема в точке  $x_0 \Rightarrow g(x) - g(x_0) = \psi(x)(x - x_0)$ , где  $\psi$  — непрерывна в точке  $x_0$ .  $f$  дифференцируема в точке  $y_0 = g(x_0) \Rightarrow f(y) - f(y_0) = \varphi(y)(y - y_0)$ , где  $\varphi$  непрерывна в точке  $y_0$ .

Поставим  $y = g(x)$ , получим  $f(g(x)) - f(g(x_0)) = \varphi(g(x))(g(x) - g(x_0)) = \underbrace{\varphi(g(x))}_{\text{непрерывна в точке } x_0 \text{ как композиция}} \psi(x)(x - x_0) \Rightarrow$

$f \circ g$  дифференцируема в точке  $x_0$  и  $(f \circ g)'(x_0) = \varphi(g(x_0))\psi(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$  □

**Теорема 4.5** (дифференцируемость обратной функции). Пусть  $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , строго монотонна, непрерывна,  $x_0 \in \langle a, b \rangle$ ,  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$  и  $f'(x_0) \neq 0$ .

Тогда  $f^{-1}$  дифференцируема в точке  $y_0 = f(x_0)$  и  $(f^{-1})' = \frac{1}{f'(x_0)}$ .

**Доказательство.**  $f$  дифференцируема в  $x_0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0)$ , где  $\varphi$  — непрерывна в точке  $x_0$ . Пусть  $y = f(x)$ . Тогда предыдущее равенство можно написать как  $y - y_0 = \varphi(f^{-1}(y))(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0))$ .

$\varphi(f^{-1}(y))$  непрерывна в точке  $y_0$  как композиция непрерывных и  $\varphi(f^{-1}(y_0)) = \varphi(x_0) = f'(x_0) \neq 0$ . Тогда  $\varphi(x) \neq 0$  в окрестности  $x_0$  и  $f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) = \frac{1}{\varphi(f^{-1}(y))}(y - y_0)$

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{\varphi(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{\varphi(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

□

**Следствие.**  $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

## 4.2. Таблица производных

1.  $c' = 0$
2.  $(x^p)' = px^{p-1}, p \in \mathbb{R}, x > 0$
3.  $(a^x)' = a^x \ln a, a > 0$   
 $(e^x)' = e^x$
4.  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, a > 0, a \neq 1$   
 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
5.  $(\sin x)' = \cos x$
6.  $(\cos x)' = -\sin x$
7.  $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
8.  $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
9.  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10.  $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11.  $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
12.  $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

**Доказательство.** 1. Очевидно.

$$2. (x^p)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^p - x^p}{h} = x^p \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+\frac{h}{x})^p - 1}{\frac{h}{x}} \frac{1}{x} = x^p \frac{p}{x} = px^{p-1}.$$

$$3. (a^x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \ln a$$

$$4. \log_a x — \text{обратная к } a^x \text{ функция } f(x) = a^x, \text{ тогда } (\log_a y)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{a^{f^{-1}(y)} \ln a} = \frac{1}{y \ln a}$$

$$5. (\sin x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} = \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = \cos x \cdot 0 + \sin x \cdot 1 = \cos x$$

6. То же самое.

$$7. (\operatorname{tg} x)' = \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x) \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

8. То же самое.

$$9. f(x) = \sin x. \arcsin'(y) = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(\arcsin y)} = \frac{1}{\cos(\arcsin y)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

$$10. \arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x.$$

$$11. f(x) = \operatorname{tg} x, \operatorname{arctg}: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}).$$

$$(\operatorname{arctg})'(y) = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(\operatorname{arctg} y)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} y)}} = \cos^2(\operatorname{arctg} y) = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} y)} = \frac{1}{1+y^2},$$

так как  $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$

□

### 4.3. Теоремы о среднем

**Теорема 4.6** (Теорема Ферма).  $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in (a, b)$ ,  $f$  — дифференцируема в точке  $x_0$ .

$$f(x_0) = \max_{x \in \langle a, b \rangle} f(x) \vee f(x_0) = \min_{x \in \langle a, b \rangle} f(x) \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

**Доказательство.** Пусть  $f(x_0) = \max_{x \in \langle a, b \rangle} f(x)$ . Тогда  $f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+} \overbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}^{\leq 0} \leq 0$ .

$$\text{Посмотрим на } f'(x_0) = f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0-} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{< 0} \geq 0.$$

Значит, что  $f'(x_0) \leq 0$  и  $f'(x_0) \geq 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$ .

□

**Пример.** У  $f(x) = x$  на отрезке  $[0, 1]$  максимум в 1, минимум в 0, но производная на концах 1. Поэтому важно, чтобы  $x_0$  принадлежало интервалу.

**Теорема 4.7** (Теорема Ролля).  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна во всех точках и дифференцируема на  $(a, b)$ . Если  $f(a) = f(b)$ , то  $\exists c \in (a, b): f'(c) = 0$

**Доказательство.**  $f$  непрерывна на  $[a, b] \xrightarrow[\text{Вейерштасса}]{\text{теорема}}$   $f$  достигает наибольшего и наименьшего значения.

Пусть  $f(p) = \min, f(q) = \max$ . Если  $p$  и  $q$  — концы отрезка, то  $\max = \min \Rightarrow f = \text{const} \Rightarrow f' = 0$  во всех точках.

А если же одна из этих точек не является концом отрезка, то по теореме Ферма  $f'$  в этой точке равна 0.

□

**Замечание.** Геометрический смысл теоремы Ферма: в точках  $\min, \max$  касательная горизонтальна.

Геометрический смысл теоремы Ролля: если значения на концах равны, то можно провести горизонтальную касательную

**Теорема 4.8** (Лагранжа, Формула конечных приращений).  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна на  $[a, b]$ , дифференцируема на  $(a, b)$ . Тогда  $\exists c \in (a, b): f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

**Доказательство.**  $g(x) = f(x) - kx$ . Подберем  $k$  так, что  $g(a) = g(b)$ .  $f(a) - ka = g(a) = g(b) = f(b) - kb \Rightarrow k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ .



Применим теорему Ролля к функции  $g(x)$ .  $\exists c \in (a, b): g'(c) = 0 \iff 0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$  и умножим на  $b - a$ .  $\square$

**Замечание.**  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$  — угловой коэффициент секущей,  $f'(c)$  — угловой коэффициент касательной в точке  $c$ . В некоторой точке касательная параллельная секущей.

**Теорема 4.9** (Теорема Коши).  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывны на  $[a, b]$ , дифференцируемы на  $(a, b)$ ,  $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$ . Тогда  $\exists c \in (a, b): \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

**Доказательство.**  $h(x) := f(x) - kg(x)$ . Подберем  $k$  так, что  $h(a) = h(b)$ .

$f(a) - kg(a) = h(a) = h(b) = f(b) - kg(b) \Rightarrow k = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$  (по Роллю у нас  $g'(x) \neq 0$ , а значит в концах значения точно не равны).

по т. Ролля для  $h$  найдем  $c \in (a, b): h'(c) = 0$ . Тогда  $h'(c) = f'(c) - kg'(c) \Rightarrow k = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ .  $\square$

**Замечание.** Геометрический смысл. Пусть у нас есть кривая, заданная параметрически: обе координаты от параметра.  $(g(t), f(t))$  координаты точки в момент времени  $t$ . Тогда  $k$  — угловой коэффициент секущей.  $(f'(t), g'(t))$  — вектор скорости в момент времени  $t$ . Тогда  $\frac{f'(t)}{g'(t)}$  — угловой коэффициент касательной. Иначе говоря, если у нас есть кривая, соединяющая точки  $A$  и  $B$ , заданная параметрически, то существует точка на этой кривой в которой касательная к кривой параллельна секущей — прямой, соединяющей точки  $A$  и  $B$ .

**Определение 4.7.**  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  — Липшицева функция с константой  $M$ , если  $\forall x, y \in E: |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ .

**Следствие Следствия теоремы Лагранжа.**

- $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна на  $\langle a, b \rangle$ , дифференцируема на  $(a, b)$  и  $|f'(x)| \leq M \forall x \in (a, b)$ .  
Тогда  $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \forall x, y \in \langle a, b \rangle$
- $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна на  $\langle a, b \rangle$ , дифференцируема на  $(a, b)$ . Если  $f'(x) = 0 \forall x \in (a, b) \Rightarrow f = \text{const}$ .
- $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна на  $\langle a, b \rangle$ , дифференцируема на  $(a, b)$ ,  $f'(x) > 0 \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$  строго возрастает.
- $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна на  $\langle a, b \rangle$ , дифференцируема на  $(a, b)$ ,  $f'(x) \geq 0 \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$  нестрого возрастает.
- $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна на  $\langle a, b \rangle$ , дифференцируема на  $(a, b)$ ,  $f'(x) < 0 \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$  строго убывает.
- $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна на  $\langle a, b \rangle$ , дифференцируема на  $(a, b)$ ,  $f'(x) \leq 0 \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$  нестрого убывает.

**Доказательство.**

- $[x, y] \subset \langle a, b \rangle$ . Применим теорему Лагранжа к  $[x, y]$ . Тогда  $\exists c \in (x, y) \subset (a, b): f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) \Rightarrow |f(y) - f(x)| = |f'(c)| \cdot |y - x| \leq M|y - x|$
- Аналогично:  $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) = 0, y - x \neq 0$ .
- Напишем Лагранжа для  $[x, y] \subset \langle a, b \rangle, (x, y) \subset (a, b)$ . Тогда  $\exists c \in (a, b): f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$ , что  $> 0 \iff f(y) > f(x)$ .
- Аналогично.

5. Аналогично.

6. Аналогично.

□

**Теорема 4.10** (Теорема Дарбу).  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируема во всех точках. Пусть  $C$  лежит между  $f'(a)$  и  $f'(b)$ . Тогда найдется  $c \in (a, b)$ , такая что  $f'(c) = C$ .

**Доказательство.** Пусть  $f'(a) < 0 < f'(b)$ . Покажем, что  $\exists c \in (a, b): f'(c) = 0$ ,  $f$  непрерывна на  $[a, b]$ . По теореме Вейерштрасса  $f$  достигает min. Пусть минимум достигается в точке  $c$ . Покажем, что  $c \neq a$  и  $c \neq b$ .

От противного: пусть  $f(a) = \min$ . Тогда  $f'(a) = f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ . Заметим, что числитель  $\geq 0$  и знаменатель  $> 0$ , тогда по предельному переходу предел  $\geq 0$ . Противоречие.

Пусть  $f(b) = \min$ . Тогда  $f'(b) = f'_-(b) = \lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$ . Заметим, что числитель  $\geq 0$ , а знаменатель  $< 0$ . Противоречие.

Следовательно,  $c \in (a, b)$ . Тогда по теореме Ферма  $f'(c) = 0$ .

Перейдём к общему случаю. Введём  $g(x) := f(x) - C \cdot x$ .  $g'(x) = f'(x) - C \Rightarrow g'(a)$  и  $g'(b)$  разных знаков, следовательно  $\exists c \in (a, b): g'(c) = f'(c) - C = 0 \Rightarrow f'(c) = C$ . □

**Следствие.**  $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , дифференцируема на  $\langle a, b \rangle$ ,  $f'(x) \neq 0 \forall x \in \langle a, b \rangle$ . Тогда  $f$  строго монотонна.

**Доказательство.** Очев. □

**Теорема 4.11** (Правило Лопиталя).  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ ,  $f, g$  дифференцируемы на  $(a, b)$ .  $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$  и  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

**Доказательство.** Проверяем по Гейне. Возьмем  $x_n \rightarrow a$ , причем убывающую.  $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \xrightarrow{?} l$ . Посчитаем  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{g(x_{n+1}) - g(x_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}$ , где  $c_n \in (x_{n+1}, x_n)$ . Последовательность  $c_n$  стремится к  $a$  справа. Тогда по Штольцу  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = l$ . Надо было проверить, что  $g(x_n)$  строго монотонна. Это из последнего следствия и монотонности  $x_n$ . □

**Теорема 4.12** (Второе правило Лопиталя).  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ .  $f, g$  дифференцируемы на  $(a, b)$ .  $\forall x \in (a, b): g'(x) \neq 0, \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = +\infty$ .  $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

**Пример.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$  при  $p > 0$ .

Подставляем в Лопиталя  $f(x) = \ln x, g(x) = x^p, f'(x) = \frac{1}{x}, g'(x) = px^{p-1}$ .  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{px^{p-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} \frac{1}{x^p} = 0$

**Пример.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{a^x} = 0$ .  $f'(x) = px^{p-1}, g'(x) = a^x \ln a$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{px^{p-1}}{a^x \ln a} = \frac{p}{\ln a} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{p-1}}{a^x} = 0, \text{ при } p \leq 1.$$

**Пример.**  $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0+} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x} = e^0 = 1$ .

$$\ln x^x = x \ln x, \lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} (-x) = 0$$

#### 4.4. Производные высших порядков

**Определение 4.8.**  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \langle a, b \rangle$ ,  $f$  – дифференцируема в окрестности  $x_0$ . И если  $f'$  дифференцируема в  $x_0$ , то  $f$  дважды дифференцируема в  $x_0$ .

То есть  $f''(x_0) := (f'(x))'|_{x=x_0}$

**Определение 4.9.**  $f$  дважды дифференцируема в окрестности  $x_0$ . Если  $f''$  дифференцируема в точке  $x_0$ , то  $f$  трижды дифференцируема в точке  $x_0$ .

**Определение 4.10.**  $f \in C(E) \iff f : E \rightarrow \mathbb{R}$  и непрерывна во всех точках.

**Определение 4.11.**  $f \in C^1(\langle a, b \rangle)$   $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , дифференцируема во всех точках и  $f'$  непрерывна.

Будем называть такое свойство «непрерывной дифференцируемостью».

**Определение 4.12.**  $f \in C^n(\langle a, b \rangle)$ .  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$   $n$  раз дифференцируема и  $f^{(n)}$  непрерывна.

**Определение 4.13.**  $f \in C^\infty(\langle a, b \rangle)$  означает, что  $f \in C^n(\langle a, b \rangle) \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Замечание.**  $C^n(\langle a, b \rangle) \supsetneq C^{n+1}(\langle a, b \rangle) \supset C^\infty(\langle a, b \rangle)$

**Пример.**  $f_n(x) := x^{n+\frac{1}{3}}$ . Покажем, что  $f_n \in C^n(\mathbb{R})$ ,  $f_n \notin C^{n+1}(\mathbb{R})$ .

Тогда  $f^{(n)}(x) = (n + \frac{1}{3})(n - \frac{2}{3}) \dots \frac{4}{3} =: cx^{\frac{1}{3}}$ . Заметим, что  $f^{(n+1)}$  в пределе равна  $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ , что в пределе бесконечность.

**Теорема 4.13** (Арифметические действия с  $n$ -ми производными).  $f, g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \langle a, b \rangle$ ,  $f, g$   $n$  раз дифференцируема в  $x_0$ . Тогда:

1.  $\alpha f + \beta g$   $n$  раз дифференцируема в точке  $x_0$  и  $(\alpha f + \beta g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)}$
2.  $f \cdot g$  дифференцируема в точке  $n$  раз и  $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ .
3.  $f(\alpha x + \beta)^{(n)} = \alpha^n f^{(n)}(\alpha x + \beta)$
4. (Композиция: формула Фаа-Ди Бруно)

**Доказательство.**

1. Индукция по  $n$ .

2. Индукция по  $n$ . База  $n = 1$ .  $(fg)' = f'g + fg'$ .

Переход  $n \rightarrow n + 1$ .  $(fg)^{(n+1)} = ((fg)^{(n)})' = (\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)})' = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n-k+1)}) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)}$ .

Последний переход обусловлен заменой  $j = k + 1$  в левой скобке, после чего получается  $\sum_{k=0}^{n+1} (\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}) f^{(k)} g^{(n-k+1)}$

3. Индукция по  $n$ . Очев.

□

**Пример.** 1.  $(x^p)^{(n)} = p(p-1)(p-2) \dots (p-n+1)x^{p-n}$

2.  $(\frac{1}{x})^{(n)} = (-1)(-2) \dots (-n)x^{-1-n} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

3.  $(\ln x)^{(n)} = ((\ln x)')^{(n-1)} = (\frac{1}{x})^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n}$

$$4. a^x = ((a^x)')^{(n-1)} = (\ln a a^x)^{(n-1)} = \dots = (\ln a)^n a^x$$

$$(e^x)^{(n)} = e^x$$

$$5. (\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{\pi n}{2})$$

$$(\sin x)^{(n)} = ((\sin x)^{(n-1)})' = (\sin(x + \frac{\pi(n-1)}{2}))' = \sin(x + \frac{\pi(n-1)}{2} + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + \frac{\pi n}{2})$$

$$6. (\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{\pi n}{2})$$

**Теорема 4.14** (формула Тейлора для многочленов).  $T$  — многочлен степени  $n$ . Тогда  $T(x) = \sum_{k=0}^n \frac{T^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$

**Лемма.**  $f(x) = (x - x_0)^k \Rightarrow f^{(m)}(x_0) = \begin{cases} k! = m! & \text{если, } k = m \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$

*Доказательство леммы.*  $f^{(m)}(x) = k(k-1)\dots(k-m+1)(x-x_0)^{k-m}$ .

Если  $k > m$ , то  $f^{(m)}(x_0) = 0$

Если  $k = m$ , то  $f^{(m)}(x_0) = k(k-1)\dots 1 = k!$

Если  $k < m$ , то  $f^{(k)}(x) \equiv k!$  и  $f^{(k+1)}(x) \equiv 0$  □

*Доказательство теоремы.* Напишем разложение  $T(x) = \sum_{k=0}^n c_k (x - x_0)^k$ . (Пояснение:  $T(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = \sum_{k=0}^n a_k (x_0 + (x - x_0))^k$  и раскроем скобки).

Поймем, что  $c_k = \frac{T^{(k)}(x_0)}{k!}$ . Заметим, что  $T^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^n (c_k (x - x_0)^k)^{(n)}|_{x=x_0} = m!$ .

То есть, у нас в  $i$ -ой производной остается только  $i$ -ый коэффициент, домноженный на  $i!$  □

**Определение 4.14.** Пусть  $f$   $n$  раз дифференцируема в точке  $x_0$ . Многочлен Тейлора степени  $n$   $T_{n,x_0}f(x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ .

$$R_{n,x_0}f(x) := f(x) - T_{n,x_0}f(x)$$

**Лемма.** Пусть  $g$   $n$  раз дифференцируема в точке  $x_0$  и  $g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(n)}(x_0) = 0$ .

Тогда  $g(x) = o((x - x_0)^n)$  при  $x \rightarrow x_0$ .

**Доказательство.**  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{(x-x_0)^n} \stackrel{\text{Лопиталь}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \frac{g''(x)}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}} = \dots = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)} =$

$0$

$g^{(n-1)}$  — дифференцируема в  $x_0 \Rightarrow g^{(n-1)}(x) = g^{(n-1)}(x_0) + g^{(n)}(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) = o(x - x_0)$  □

**Теорема 4.15** (Формула Тейлора с остатком в форме Пеано). Пусть  $f$   $n$  раз дифференцируема в точке  $x_0$ . Тогда  $f(x) = T_{n,x_0}f(x) + o((x - x_0)^n) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$ .

**Доказательство.**  $g(x) := f(x) - T_{n,x_0}f(x)$ .  $g^{(m)}(x_0) = f^{(m)}(x_0) - (T_{n,x_0}f)^{(m)}(x_0) = f^{(m)}(x_0) - f^{(m)}(x_0)$ , смотри теорему выше про Тейлора для многочлена.

Таким образом,  $g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(n)}(x_0) = 0$ .

По лемме  $g(x) = o((x - x_0)^n) \Rightarrow f(x) - T_{n,x_0}f(x) = o((x - x_0)^n)$ . □

**Следствие Единственность.**  $f$   $n$  раз дифференцируема в точке  $x_0$  и  $f(x) = P(x) + o((x - x_0)^n)$  при  $x \rightarrow x_0$ , где  $P$  — многочлен степени  $\leq n$ . Тогда  $P(x) = T_{n,x_0}f(x)$

**Доказательство.**  $Q(x) := P(x) - T_{n,x_0}f(x) = o((x - x_0)^n)$  при  $x \rightarrow x_0$  (просто вычитаем два равенства на  $f(x) = P(x) + o((x - x_0)^n) = T_{n,x_0}f(x) + o((x - x_0)^n)$ )

$Q(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x - x_0)^k$  пусть  $a_m \neq 0$  — ненулевой коэффициент с наименьшим индексом  $\Rightarrow \frac{Q(x)}{(x-x_0)^m} = a_m + \sum_{k=m+1}^n a_k(x - x_0)^{k-m}$ . Левая часть стремится к нулю, справа второе слагаемое стремится к 0. Но значит и  $a_m$  должно быть нулю.  $\square$

**Теорема 4.16** (Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа).  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \langle a, b \rangle$ ,  $f$   $(n + 1)$  раз дифференцируема на  $\langle a, b \rangle$ . Тогда  $\exists c$  между  $x$  и  $x_0$ , такой что  $f(x) = T_{n,x_0}f(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$

**Доказательство.** Зафиксируем  $x$  и возьмем  $M \in \mathbb{R}$ , такой что  $f(x) = T_{n,x_0}f(x) + M(x - x_0)^{n+1}$ . Рассмотрим  $g(t) := f(t) - T_{n,x_0}f(t) - M(t - x_0)^{n+1}$

$g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - M(n+1)!$ , то есть надо доказать, что  $g^{(n+1)}(c) = 0$ , в некоторой точке между  $x$  и  $x_0$ . Знаем, что  $g(x) = 0$ ,  $g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(n)}(x_0) = 0$ .  $g(x) = g(x_0) = 0 \xrightarrow{\text{Ролль}} \exists x_1$  между  $x$  и  $x_0$ , такая что  $g'(x_1) = 0$ .

$g'(x_1) = g'(x_0) = 0 \xrightarrow{\text{Ролль}} \exists x_2$  между  $x_0$  и  $x_1$ , такая что  $g''(x_2) = 0$ .

И так далее до  $g^{(n)}(x_n) = g^{(n)}(x_0) = 0 \xrightarrow{\text{Ролль}} \exists c$  между  $x$  и  $x_0$ , такая что  $g^{(n+1)}(c) = 0$   $\square$

**Следствие.** Если  $|f^{(n+1)}(t)| \geq M \forall t \in (x_0, x)$ , то  $|R_{n,x_0}f(x)| \leq \frac{M(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} = \mathcal{O}((x - x_0)^{n+1})$ .

**Следствие.** Если  $|f^{(n)}(t)| \leq M \forall n \forall t \in (a, b)$ , то  $T_{n,x_0}f(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$

**Доказательство.**  $|f(x) - T_{n,x_0}f(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right| \leq M \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0$ . Так как  $x - x_0 = h$ ,  $M \cdot \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0$ .  $\square$

**Формулы Тейлора для элементарных функций.** Везде  $x_0 = 0$ .

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$ .
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$ .
- $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} x^n + o(x^n)$
- $(1 + x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$ .

**Доказательство.**  $f(x) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^m)$

- Для  $f(x) = e^x$   $f^{(k)}(x) = e^x$ ,  $f^{(k)}(0) = 1$
- Для  $f(x) = \sin x$   $f^{(k)}(x) = \sin(x + \frac{\pi k}{2})$ ,  $f^{(k)}(0) = \sin(\frac{\pi k}{2})$
- Для  $f(x) = \cos x$   $f^{(k)}(x) = \cos(x + \frac{\pi k}{2})$ ,  $f^{(k)}(0) = \cos(\frac{\pi k}{2})$
- Для  $f(x) = \ln(1 + x)$ .  $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$ ,  $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$
- Для  $f(x) = (1 + x)^p$ ,  $f^{(k)}(x) = p(p-1)\dots(p-k+1)(1+x)^{p-k}$ ,  $f^{(k)}(0) = p(p-1)\dots(p-k+1)$

$\square$

**Ряды Тейлора для  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$** 

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (3)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (4)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad (5)$$

**Доказательство.**  $\sin x$ ,  $\cos x$  удовлетворяют следствию 2.  $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{\pi n}{2}) \Rightarrow |\sin^{(n)}(x)| \leq 1$ .  $|\cos^{(n)}(x)| \leq 1$

Следовательно,  $T_{n,0}f(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$ . А значит по определению ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} \dots = \sin x$

Рассмотрим  $f(x) = e^x$  на  $[a, b] \Rightarrow f^{(n)}(x) = e^x \leq e^b$ , тогда  $|f^{(n)}(x)| \leq e^b$ . Тогда по свойству ряда и соображениям выше, получаем, что сумма данного ряда равна  $e^x$ .  $\square$

**Теорема 4.17.**  $e$  — иррационально.

**Доказательство.** Пусть  $e = \frac{m}{n}$ ,  $n \geq 2$  (так как  $2 < e < 3$ ).

Напишем формулу Тейлора с остатком в форме Лагранжа для функции  $e^x$ , точки  $x_0 = 0$  и  $x = 1$ :

$$e = e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}, \quad 0 < c < 1$$

$$\underbrace{m(n-1)!}_{\text{целое число}} = \underbrace{n! + n! + \frac{n!}{2!} + \dots + \frac{n!}{n-1!} + \frac{n!}{n!} + \frac{e^c}{n+1}}_{\text{целое число}}$$

Тогда получаем, что  $\frac{e^c}{n+1}$  — целое число. Но  $\frac{e^c}{n+1} > 0 \Rightarrow \frac{e^c}{n+1} \geq 1$ . А значит  $\frac{e^c}{n+1} \leq \frac{e}{2+1} = \frac{e}{3} < 1$ .  $\square$

**4.5. Экстремумы функций**

**Определение 4.15.**  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  и  $a \in E$ .  $a$  — точка локального минимума  $\iff \exists U(a): \forall x \in E \cap U \quad f(a) \leq f(x)$

**Определение 4.16.**  $a$  — точка строгого локального минимума  $\iff \exists U(a): \forall x \in E \cap U \quad x \neq a \Rightarrow f(a) < f(x)$ .

**Определение 4.17.**  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  и  $a \in E$ .  $a$  — точка локального максимума  $\iff \exists U(a): \forall x \in E \cap U \quad f(a) \geq f(x)$

**Определение 4.18.**  $a$  — точка строгого локального максимума  $\iff \exists U(a): \forall x \in E \cap U \quad x \neq a \Rightarrow f(a) > f(x)$ .

**Определение 4.19.**  $a$  — точка экстремума, если  $a$  — точка локального минимума/максимума.

**Определение 4.20.**  $a$  — точка строгого экстремума, если  $a$  — точка строгого локального max/min.

**Теорема 4.18** (необходимые условия экстремума).  $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируема в  $x_0 \in (a, b)$ . Тогда  $x_0$  — точка экстремума  $\Rightarrow f'(x_0) = 0$ .

**Доказательство.** Возьмем какую-то окрестность  $x_0$ ,  $x_0$  — точка локального минимума. Причем окрестность такая, что  $f(x_0) \leq f(x) \forall x \in U$ .

Тогда, рассмотрим  $f$  на  $U$ .  $x_0$  — точка минимума этой функции, по теореме Ферма  $f'(x_0) = 0$ .  $\square$

**Замечание.** Обратное неверно:  $f(x) = x^3$ ,  $f'(x) = 3x^2$ ,  $f'(0) = 0$ , но  $0$  — не точка экстремума.

**Замечание.** Экстремум может быть в точке, где нет дифференцируемости. Пример:  $f(x) = |x|$ .

**Замечание.** Экстремум может быть в концах отрезка.

**Теорема 4.19** (Достаточные условия экстремума в терминах первой производной).  $x_0 \in (a, b)$ ,  $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  непрерывна в  $x_0$ , дифференцируема на  $(x_0 - \delta, x_0) \cap (x_0, x_0 + \delta)$ . Тогда:

1.  $f'(x) < 0$  на  $(x_0 - \delta, x_0)$  и  $f'(x) > 0$  на  $(x_0, x_0 + \delta)$ , то  $x_0$  — строгий минимум.
2.  $f'(x) > 0$  на  $(x_0 - \delta, x_0)$  и  $f'(x) < 0$  на  $(x_0, x_0 + \delta)$ , то  $x_0$  — строгий максимум.

**Доказательство.** На  $[x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0]$   $f$  непрерывна, дифференцируема внутри и  $f' < 0 \xrightarrow{\text{сл. т. Лагранжа}} f$  строго убывает на  $[x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0] \implies f(x_0) < f(x) \forall x \in [x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0)$ .

На  $[x_0, x_0 + \frac{\delta}{2}]$   $f$  непрерывна, дифференцируема внутри и  $f' > 0 \implies f$  строго возрастает на  $[x_0, x_0 + \frac{\delta}{2}] \implies f(x_0) < f(x) \forall x \in (x_0, x_0 + \frac{\delta}{2}]$   $\square$

**Теорема 4.20** (достаточные условия экстремума в терминах второй производной).  $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ .  $x_0 \in (a, b)$ ,  $f$  дважды дифференцируема в  $x_0$  и  $f'(x_0) = 0$ . Тогда:

1.  $f''(x_0) > 0$ , то  $x_0$  — строгий минимум.
2.  $f''(x_0) < 0$ , то  $x_0$  — строгий максимум.

**Теорема 4.21** (Достаточные условия экстремума в терминах  $n$ -ой производной).  $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ .  $x_0 \in (a, b)$ ,  $f$   $n$  раз дифференцируема в  $x_0$  и  $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ . Тогда:

1.  $n$  — чётно и  $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$  — строгий минимум.
2.  $n$  — чётно и  $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$  — строгий максимум.
3.  $n$  — нечётно и  $f^{(n)}(x_0) \neq 0 \Rightarrow x_0$  не точка экстремума.

**Доказательство.** 
$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k}_{=0} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

Тогда  $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)^n \left( \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1) \right)$ .

Тогда в 1:  $(x - x_0)^n > 0$  при  $x \neq x_0$ .  $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} > 0 \implies$  по теореме о стабилизации знака скобка  $(\dots) > 0$  при  $x$  близких к  $x_0 \Rightarrow x_0$  — строгий минимум (разность  $f(x) - f(x_0) > 0$ ).

В 2 аналогично получим строгий максимум, поскольку правая скобка будет  $< 0$ .

В 3  $(x - x_0)^n$  меняет знак при прохождении  $x_0$ , поэтому с одной стороны разность будет одного знака, а с другой — другого, поэтому не экстремум.  $\square$

## 4.6. Выпуклые функции

**Определение 4.21.**  $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ .  $f$  — выпуклая, если  $\forall x, y \in \langle a, b \rangle \forall \lambda \in (0, 1): f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$ .

Понятно, что такое строго выпуклая, вогнутая (выпуклая вниз), строго вогнутая.

**Пример.**  $x^2$  — выпуклая функция.  $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) = \lambda x^2 + (1 - \lambda)y^2$ .

$$(\lambda x + (1 - \lambda)y)^2 = \lambda^2 x^2 + 2\lambda(1 - \lambda)xy + (1 - \lambda)^2 y^2.$$

Откуда получаем  $2xy \leq x^2 + y^2$ .

### Геометрический смысл определения

Возьмем  $z = \lambda x + (1 - \lambda)y < \lambda y + (1 - \lambda)y = y$  и  $z > \lambda x + (1 - \lambda)x = x$ . Тогда получаем, что  $\lambda(x - y) = z - y \Rightarrow \frac{y-z}{y-x} > 0$ . Теперь посмотрим на прямую через точки  $x, y$ . Тогда получаем, что точка  $(s, t)$  на прямой удовлетворяет уравнению  $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}(s-x) + f(x) = t$ . Тогда подставим  $s = z$  и получим значение функции из определения.

А значит геом. смысл — любая хорда выше, чем точка.

**Определение 4.22.** Пусть  $u < v < w; u, v, w \in \langle a, b \rangle$   $\lambda = \frac{y-z}{y-x} = \frac{w-v}{w-u}$ , тогда  $1 - \lambda = \frac{v-u}{w-u}$ .

$$f(v) \leq \frac{w-v}{w-u}f(u) + \frac{v-u}{w-u}f(w).$$

$$\text{Тогда } (w-u)f(v) \leq (w-v)f(u) + (v-u)f(w)$$

**Свойства.** 1.  $f, g$  — выпуклые, то  $f + g$  — выпуклые.

2.  $f$  — выпуклая,  $\alpha > 0$ , то  $\alpha f$  — выпуклая.

3.  $f$  — выпуклая,  $-f$  — вогнутая.

**Лемма (О трех хордах).**  $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  выпуклая,  $u < v < w$ ,  $u, v, w \in \langle a, b \rangle$ .

$$\text{Тогда } \frac{f(v)-f(u)}{v-u} \leq \frac{f(w)-f(u)}{w-u} \leq \frac{f(w)-f(v)}{w-v}.$$

**Доказательство.** Докажем первое неравенство:  $\frac{f(v)-f(u)}{v-u} \leq \frac{f(w)-f(u)}{w-u} \iff (w-u)(f(v)-f(u)) \leq (v-u)(f(w)-f(u)) \iff (w-u)f(v) \leq \underbrace{((w-u)-(v-u))}_{=w-v}f(u) + (v-u)f(w)$ .

Второе аналогично, третье тоже можно аналогично, но, кажется, транзитивность всё ещё существует.  $\square$

**Теорема 4.22.**  $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  выпуклая. Тогда  $\forall x \in (a, b)$  существуют конечные  $f'_\pm(x)$ , а ещё  $f'_-(x) \leq f'_+(x)$

**Доказательство.** Возьмем три точки  $x < v < w$ .  $\frac{f(v)-f(x)}{v-x}$  возрастает по  $v$ .  $\frac{f(w)-f(x)}{w-x} \geq \frac{f(v)-f(x)}{v-x}$  из леммы о трех хордах. Значит дробь  $\frac{f(v)-f(x)}{v-x}$  возрастает по  $v$  и ограничена снизу  $\implies$  существует конечный  $\lim_{v \rightarrow x+} \frac{f(v)-f(x)}{v-x} \geq \frac{f(u)-f(x)}{u-x}$ .

$$\frac{f(u)-f(x)}{u-x} \text{ возрастает по } u \text{ и ограничена сверху } f'_+(x) \implies f'_-(x) = \lim_{u \rightarrow x-} \frac{f(u)-f(x)}{u-x} \leq f'_+(x) \quad \square$$

**Следствие.**  $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  выпуклая  $\implies f$  непрерывна на  $(a, b)$

**Доказательство.** Существует конечная  $f'_+(x) \implies f$  непрерывна в точке  $x$  справа +  $\exists f'_-(x) \implies f$  непрерывна в  $x$  слева  $\implies f$  непрерывна в  $x \in (a, b)$ .  $\square$

**Замечание.** Про концы ничего неизвестно.



**Теорема 4.23.**  $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируемая. Тогда  $f$  — выпуклая  $\iff f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \forall x, x_0 \in \langle a, b \rangle$

**Доказательство.** В сторону  $\Leftarrow$ :  $u < v < w, x_0 = v$ . Тогда  $f(u) \geq f(v) + f'(v)(v - u)$ ,  $f(w) \geq f(v) + f'(v)(w - v)$ . Первое домножаем на  $(w - v)$ , второе на  $(v - u)$

В сторону  $\Rightarrow$ . Пусть  $x > x_0$ . Надо доказать, что  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq f'(x_0) = \lim_{y \rightarrow x_0} \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0}$

Можно считать, что  $x_0 < y < x$ . Тогда  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} \rightarrow f'(x_0)$ .  $\square$

**Теорема 4.24** (Критерий выпуклости). 1.  $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна на  $\langle a, b \rangle$  и дифференцируема на  $(a, b)$ .  $f$  (строго) выпукла  $\iff f'$  (строго) монотонно возрастает на  $(a, b)$ .

2.  $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна на  $\langle a, b \rangle$  и дважды дифференцируема на  $(a, b)$ .  $f$  выпукла  $\iff f'' \geq 0$  на  $(a, b)$ .

**Доказательство.** 1.  $\Rightarrow$ .  $u < v$ :  $f'(u) \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq f'(v)$  по предыдущей теореме  $f'(x)$  возрастает.

$\Leftarrow$   $u < v < w$   $\frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq \frac{f(w) - f(v)}{w - v}$  по теореме Лагранжа левое равно  $f'(\xi)$ , правое —  $f'(\eta)$ . Поскольку  $f'$  возрастает, то все верно.

2.  $f$  — выпуклая  $\iff f'$  возрастает, т.е.  $(f')' \geq 0$ .  $\square$

**Пример.** 1.  $a^x$  выпуклая,  $a \neq 1$ .  $f(x) = a^x \implies f'(x) = a^x \ln a \implies f''(x) = a^x (\ln a)^2 \implies$  строго выпукла.

2.  $\ln x$  строго вогнута.

$f(x) \ln x \implies f'(x) = \frac{1}{x} \implies f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \implies$  строго вогнутая.

3.  $x^p$ , при  $x > 0$ .  $p > 1$  — строгая выпуклость,  $p < 0$  строгая выпуклость, если  $0 < p < 1$  строгая вогнутость.

**Теорема 4.25** (Неравенство Йенсена). Пусть  $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  выпуклая функция,  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \langle a, b \rangle$  и  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$ , причем их сумма равна 1. Тогда:

$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k).$$

**Замечание.** Если  $\lambda_k > 0$ ,  $x_k$  различны и  $f$  строго выпуклая, то знак строгий.

**Доказательство.** Индукция по  $n$ . База  $n = 2$ :  $f(\lambda_1 x_1 + \underbrace{\lambda_2}_{1-\lambda_1} x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \underbrace{\lambda_2}_{1-\lambda_1} f(x_2)$ . Это определение индукции.

Переход от  $n$  к  $n + 1$ :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1 - \lambda_{n+1} \Rightarrow \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} + \dots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} = 1.$$

Тогда по предположению:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{n+1}} f(x_k) \geq f\left(\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k x_k}{1 - \lambda_{n+1}}\right) = f(y).$$

$$y = \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k x_k}{1 - \lambda_{n+1}}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k) &\geq (1 - \lambda_{n+1})f(y) \implies \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k f(x_k) \geq (1 - \lambda_{n+1})f(y) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1}) \geq \\ &\geq f(\lambda_{n+1}x_{n+1} + (1 - \lambda_{n+1})y) = \\ &= f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right). \end{aligned}$$

Второе  $\geq$  после  $\implies$  следует из определения выпуклости. □

**Следствие.** У вогнутой функции все знаки в другую сторону.

**Теорема 4.26** (Неравенство о средних).  $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ . Тогда  $\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ .

Причем из равенства следует равенство чисел.

**Доказательство.**  $f(x) = \ln x$  и  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ . Если  $x_k = 0$ , то неравенство очевидно.

Надо доказать, что  $\frac{1}{n}(\ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n) \leq \ln(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ . А это неравенство Йенсена:

$$\ln\left(\frac{1}{n}x_1 + \frac{1}{n}x_2 + \dots + \frac{1}{n}x_n\right) \geq \frac{1}{n}\ln x_1 + \frac{1}{n}\ln x_2 + \dots + \frac{1}{n}\ln x_n.$$

□

**Определение 4.23.** Среднее степенное порядка  $p$   $M_p := \left(\frac{x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}$ .

**Определение 4.24.** Среднее арифметическое  $M_1 := \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ .

**Определение 4.25.** Среднее квадратическое  $M_2 := \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}$ .

**Определение 4.26.** Среднее гармоническое —  $M_{-1} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$ .

**Определение 4.27** (Доопределение).  $M_0$  — среднее геометрическое,  $M_{+\infty}$  — максимальное из чисел,  $M_{-\infty}$  — минимальное из чисел.

**Упражнение.** Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ . Доказать, что  $\lim_{p \rightarrow 0} M_p = M_0$ ,  $\lim_{p \rightarrow +\infty} M_p = M_{+\infty}$ ,  $\lim_{p \rightarrow -\infty} M_p = M_{-\infty}$ .

**Теорема 4.27** (Неравенство между средними степенными). Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$  и  $p < q$ . Тогда:

$$\left(\frac{x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{x_1^q + x_2^q + \dots + x_n^q}{n}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

**Доказательство.**

1. Случай 1.  $p = 1$ .  $f(x) = x^q$  — выпуклая функция,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ . Тогда просто подставляем в неравенство Йенсена:

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)^q = f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{x_1^q + x_2^q + \dots + x_n^q}{n}.$$

А дальше просто извлечь корень степени  $q$ .

2. Случай 2.  $0 < p < q$ . Возьмем  $r = \frac{q}{p} > 1$  и подставим  $x_k^p$  в случай 1 ( $p = 1, q = r$ ):

$$\frac{x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p}{n} \leq \left( \frac{(x_1^p)^r + (x_2^p)^r + \dots + (x_n^p)^r}{n} \right)^{\frac{1}{r}} = \left( \frac{x_1^q + x_2^q + \dots + x_n^q}{n} \right)^{\frac{p}{q}}.$$

3. Случай 3.  $p < q < 0$ . Возьмем  $\frac{p}{q} > 1$  и подставим  $x_k^q$  в случай 1.

4. Случай 4.  $p < 0 < q$ .  $\left( \frac{x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p}{n} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \sqrt[p]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \left( \frac{x_1^q + x_2^q + \dots + x_n^q}{n} \right)^{\frac{1}{q}}.$

Подставим  $x_1^q, x_2^q, \dots, x_n^q$  в неравенство о средних

$$\frac{x_1^q + x_2^q + \dots + x_n^q}{n} \geq \sqrt[q]{x_1^q x_2^q \dots x_n^q} = (\sqrt[q]{x_1 x_2 \dots x_n})^q.$$

и корень степени  $q > 0$ .

$$\frac{x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p}{n} \geq \sqrt[p]{x_1^p x_2^p \dots x_n^p} = (\sqrt[p]{x_1 x_2 \dots x_n})^p.$$

и корень степени  $p < 0$ , знак поменяется.

□

**Замечание.**  $M_p \leq M_q$ , если  $p \leq q$ .

**Теорема 4.28** (Неравенство Гёлдера).  $a_k, b_k \geq 0$ ,  $p, q > 1$  и  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Тогда:

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left( \sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

**Доказательство.** Берем  $f(x) = x^p$ . Пусть  $B := \sum_{k=1}^n b_k^q$ . Тогда возведем неравенство в степень  $p$ :  $\left( \sum_{k=1}^n a_k \frac{b_k^{\frac{1}{q}}}{B^{\frac{1}{q}}} \right)^p \leq \sum_{k=1}^n a_k^p$ .

Пытаемся подогнать под вид Йенсена, получаем систему  $\lambda_k x_k^p = a_k^p$  и  $\lambda_k x_k^k = \frac{a_k b_k}{B^{\frac{1}{q}}}$ .

Получаем, что  $x_k^{p-1} = \frac{a_k^{p-1} B^{\frac{1}{q}}}{b_k}$ .

Тогда  $x_k = \frac{a_k}{b_k^{\frac{1}{p-1}}} \cdot B^{\frac{1}{q(p-1)}} = \frac{a_k}{b_k^{\frac{p}{q}}} \cdot B^{\frac{1}{p}}$ . Откуда можно выразить  $\lambda$ .

□

**Следствие Неравенство Коши-Буняковского.**

$$\left( \sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left( \sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^n b_k^2 \right)$$

**Доказательство.** Давайте применим неравенство Гёлдера для чисел  $|a_k|$  и  $|b_k|$ , а  $p = q = 2$ .

Тогда  $(\sum_{k=1}^n |a_k|^2) \cdot (\sum_{k=1}^n |b_k|^2) \geq (\sum_{k=1}^n |a_k| \cdot |b_k|)^2$ .

Это почти то, что нужно с точностью до модулей.

Заметим, что в левой части модули можно отбросить, так как возводится в квадрат.

В правой же части можно заметить, что  $(\sum_{k=1}^n |a_k| \cdot |b_k|)^2 \geq (\sum_{k=1}^n a_k b_k)^2$ .

Значит по транзитивности получим то, что нужно.

□

**Следствие Неравенство Минковского.**  $p \geq 1, a_k, b_k \geq 0$ . Тогда

$$\left( \sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{k=1}^n b_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left( \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

**Доказательство.**  $p = 1$  очевидно.

$$\begin{aligned} C &:= \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p = \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)(a_k + b_k)^{p-1} = \sum_{k=1}^n a_k(a_k + b_k)^{p-1} + \sum_{k=1}^n b_k(a_k + b_k)^{p-1} \\ &\sum_{k=1}^n a_k(a_k + b_k)^{p-1} \leq \left( \sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{k=1}^n ((a_k + b_k)^{p-1})^q \right)^{\frac{1}{q}} = \left( \sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \right)^{\frac{p-1}{n}} \\ C &\leq \left( \sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot C^{\frac{p-1}{p}} + \left( \sum_{k=1}^n b_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot C^{\frac{p-1}{p}} \Rightarrow C^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{k=1}^n b_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

□

## 5. Интегральное исчисление функции одной переменной

### 5.1. Первообразная и неопределенный интеграл

**Определение 5.1.**  $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ . Функция  $F: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  — первообразная функции  $f$ , если  $F'(x) = f(x) \forall x \in \langle a, b \rangle$

**Теорема 5.1.** Непрерывная на промежутке функция имеет первообразную.

**Доказательство.** Позже. □

**Замечание.**  $\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 & \text{если } x > 0 \\ 0 & \text{если } x = 0. \\ -1 & \text{если } x < 0 \end{cases}$ . Не имеет первообразной.

**Доказательство.** От противного: пусть нашлась  $F: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  и  $F'(x) = \operatorname{sign}(x)$ .

Тогда воспользуемся теоремой Дарбу для  $F$  на отрезке  $[0; 1]$ .

Пусть  $k = \frac{1}{2} \in (\operatorname{sign}(0), \operatorname{sign}(1))$ . Значит  $\exists c \in (0, 1): F'(c) = k = \frac{1}{2}$ . Противоречие. □

**Теорема 5.2.**  $f, F: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  и  $F$  — первообразная для  $f$ . Тогда:

1.  $F + C$  — первообразная для  $f$ .
2. Если  $\Phi: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  — первообразная для  $f$ , то  $\Phi = F + C$ .

**Доказательство.** /

1.  $(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x)$
2.  $(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow (\Phi - F)' \equiv 0 \Rightarrow \Phi - F$  — константа.

□

**Определение 5.2.** Неопределённый интеграл — множество всех первообразных.

$\int f(x) dx = \{F: F \text{ — первообразная } f\}$ . Но мы будем записывать  $\int f(x) dx = F(x) + C$

**Табличка интегралов.**

1.  $\int 0 dx = C$ .
2.  $\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C$ , при  $p \neq -1$ .
3.  $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$ .
4.  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ , при  $a > 0, a \neq 1$ .
5.  $\int \sin x dx = -\cos x + C$ .
6.  $\int \cos x dx = \sin x + C$ .

7.  $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$
8.  $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
9.  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$
10.  $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$
11.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C.$
12.  $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C.$

**Доказательство.** Для 3. Если  $x > 0$   $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ . Если  $x < 0$   $\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C$ , то есть  $(\ln(-x))' = (\frac{1}{-x})(-x)' = \frac{-1}{x}$ .

$$\text{Для 11. } (\ln |x + \sqrt{x^2 \pm 1}|)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm 1}} (x + \sqrt{x^2 \pm 1})' = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm 1}}}{x + \sqrt{x^2}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2 \pm 1} + x}{\sqrt{x^2 \pm 1}}}{x + \sqrt{x^2 \pm 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}$$

$$\text{Для 13. } (\frac{1}{2}(\ln |1+x| - \ln |1-x|))' = \frac{1}{2}(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}) = \frac{1}{1-x^2}$$

□

**Замечание.**  $A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$ ,  $cA := \{ca : a \in A\}$ .

$$\int f(x) dx + \int g(x) dx = \{F + C\} + \{G + \tilde{C}\} = \{F + G + C\}.$$

**Теорема 5.3** (Арифметические действия с неопределенными интегралами). Пусть  $f, g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  имеют первообразные. Тогда:

1.  $f + g$  имеет первообразную и  $\int (f + g) dx = \int f dx + \int g dx$
2.  $\alpha f$  имеет первообразную и  $\int \alpha f dx = \alpha \int f dx$

**Доказательство.** Пусть  $F$  и  $G$  первообразные для  $f$  и  $g$ .

1. Тогда  $F + G$  — первообразная для  $f + g$ . Тогда  $\int (f + g) = F + G + C = \int f + \int g$ .
2. Тогда  $\alpha F$  — первообразная для  $\alpha f \implies \int \alpha f = \alpha F + C = \alpha(F + \frac{C}{\alpha}) = \alpha \int f$ .

□

**Следствие Линейность неопределенного интеграла.**  $f, g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  имеют первообразную  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $|\alpha| + |\beta| \neq 0$ . Тогда  $\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$ .

**Доказательство.** Прямое следствие из теоремы выше.

□

**Теорема 5.4** (Теорема о замене переменной в неопределенном интеграле).  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi : \langle c, d \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$ ,  $f$  имеет первообразную  $F$ .  $\varphi$  дифференцируемая. Тогда  $\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C$ .

**Доказательство.** Надо проверить, что  $F(\varphi(t))$  — первообразная для  $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ .

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

□

**Следствие.**  $\int f(\alpha x + \beta) dx = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x + \beta) + C$

**Доказательство.**  $\int \alpha f(\alpha x + \beta) dx = F(\alpha x + \beta) + C$ . И делим обе части на  $\alpha$ .

□

**Теорема 5.5** (Формула интегрирования по частям).  $f, g: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , дифференцируемые,  $f'g$  имеет первообразную.

Тогда  $fg'$  имеет первообразную и  $\int fg' = fg - \int f'g$

**Доказательство.**  $H$  — первообразная для  $f'g$ . Тогда  $H' = f'g$ .

Надо доказать, что  $fg - H$  — первообразная для  $fg'$ .

$$(fg - H)' = f'g + gh' - H' = f'g + fg' - f'g = fg'.$$

□