# Дискретная математика

Харитонцев-Беглов Сергей

5 октября 2021 г.

## Содержание

# 1. Теория множеств

## 1.1. Базовые понятия

Есть официальный конспект, который будет Здесь.

***Определение* 1.1.** Множество — набор различимых между собой по какому-то признаку предметов.

***Определение* 1.2.** Предметы входящие в это множество называются его элементами.

Если мы хотим описать множество, то нужно просто описать предметы этого множества. Например, чтобы задать множество студентов необходимо задать просто студентов.

Есть конечные, счетные, несчетные и целый зоопарк множеств разных мощностей. Самое простое множество — $\varnothing$, множество ничего не содержащее — пустое.

***Определение* 1.3.** $X$ подмножество ($\subseteq$) $Y \Leftarrow \forall y \in Y: \ y \in X$.
$\varnothing$ и $X$ — тривиальные, остальные — нетривиальные. все подмножества, кроме $X$ — собственные.

## 1.2. Операции с множествами

| **Символ** | **Определение** | **Словами** |
|---|---|---|
| $\cap$ | $A \cap B = \dots$ | Пересечение множества |
| $\cup$ | $A \cup B = \dots$ | Объединение множеств |
| $\setminus$ | $A \setminus B =$ ... | Разность множеств |
| $\triangle$ | $A \triangle B = \dots$ | Симметрическая разность множеств |

***Определение* 1.4.** Алгебраическая структура — множество, на котором ввели какую-то операцию.

**Пример.** Пусть заданы несколько множеств:

1. $\exists e: \ a \cdot e = a \ \forall a \in G$
2. $\forall a \in G \ \exists a^{-1} \in G: \ a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$
3. $\forall a, b, c: \ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
4. $\forall a, b \in G a \cdot b = b \cdot a$

То это абелева группа и это к алгебре.

А дискретная математика не имеет аксиом, то есть мало чего можно использовать из алгебры / матана.

Если задать какое-то надмножество $X$ над $A$, то появится операция дополнения: $A' = X \setminus A$. Законы Де Моргана:

**Теорема 1.1.** $(A \cup B)' = A' \cap B'$

**Теорема 1.2.** $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Доказательство смотри в конспекте Омеля, тут мне лень это делать.

***Определение* 1.5.** Система иножеств — множество, элементами которого являются множества.

***Определение* 1.6.** Семейство множеств — упорядоченный набор неких множеств $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$. Причем множества в наборе могут повторяться.

***Определение* 1.7.** Некоторое покрытие множества $X$ системой множеств — система множеств, объединение элементов которого равняется $X$.

***Определение* 1.8.** Разбиение множества $X$ на блоки — система $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$, удовлетворяющая неким условиям:

1. $X = \bigcup_{i=1}^{k} X_i$
2. $\forall i: \ X_i \neq \varnothing$
3. $\forall i, j = 1..k: \ X_i \cap X_j = \varnothing$

***Определение* 1.9.** Пара элементов $(x, y)$ — упорядоченный набор из двух элементов. То есть для $x \neq y$: $(x, y) \neq (y, x)$

***Определение* 1.10** (Декартово произведение)**.** $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$

можно ввести понятие «$n$ки» — упорядоченный набор из $n$ элементов. Поэтому можно ввести $A \times B \times C \times \ldots$ и $A^2$, $A^n$

***Определение* 1.11.** Отношение между множествами — некое подмножество декартого произведения этих множеств

Пусть $\omega$ — отношение между $X$ и $Y$. Тогда их записывают $X \omega Y$, а отсутствие — $X \not\omega Y$.

***Определение* 1.12.** Отношение эквивалентности $(X, \sim)$:

1. $x \sim x \ \forall x \in X$
2. $x \sim, y \Rightarrow y \sim x \ \forall x, y \in X$
3. $x \sim y, y \sim z, \Rightarrow x \sim z \ \forall x, y, z \in X$

Пусть $\widetilde{x} = \{y \in X \mid y \sim x\}$.

***Свойство.*** пусть $y \in \widetilde{x} \Rightarrow \widetilde{y} = \widetilde{x}$

**Теорема 1.3.** Разбиение на блоки задает классы эквивалентности.

- $X = \bigcup_{x \in X} \widetilde{x}$
- $\widetilde{x} \neq \varnothing$, т.к. хотя бы $x \in \widetilde{x}$.
- Рассмотрим $\widetilde{x}, \widetilde{y}$. Пусть $\exists z: \ z \in \widetilde{x} \cap \widetilde{y}$. Тогда $\left.\begin{array}{c} \widetilde{z} = \widetilde{x} \\ \widetilde{z} = \widetilde{y} \end{array}\right\} \Rightarrow \widetilde{x} = \widetilde{y}$

***Определение* 1.13.** Мультимножество — $(x; \varphi): \ \varphi \to \mathbb{Z}_+$

Есть еще несколько базовых понятий: $k$-перестановки/сочетания из $n$ элементов с/без повторений.

$|A \cup B| = |A| + |B|$, если $A \cap B = \varnothing$. Поэтому, если есть разбиение на блоки, то $X = X_1 \cup \ldots \cup X_k \Rightarrow |X| = |X_1| + \ldots + |X_k|$

$X = X_1 \times \ldots \times X_k$, тогда $|X| = |X_1| \cdot \ldots \cdot |X_k|$

$|A' \cap B'| = |(A \cup B)'| = |X| - |A \cup B| = |X| - |A| - |B| + |A \cap B|$

# 2. Комбинаторика

## 2.1. Сшки

Есть два способа записи цэшек: $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$. Обычно формулы в комбинаторике используются не для подсчетов, а для определения асимптотики/верней оценки и так далее. Например если взять $n = 100$, то уже проблема: $100!$ — довольно большое число. Но там еще и деление!!! Короче, может получиться небольшое число при больших числах в подсчетах.

Давайте забудем эту дурацкую формулу и будем использовать рекурренты: легко считать, пишется в миг. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n}{k-1}, \binom{0}{0} = 1$.

**Доказательство**. Пусть есть множество из $n$ элементов. Разобьем все $k$-элементные подмножества на блоки: в одном все без последнего элемента, в другом все с последним.Тогда в первом блоке тогда есть $\binom{n-1}{k}$ элементов. В другом $\binom{n-1}{k-1}$ элементов. А значит $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ $\square$

Есть пара граничных случаев: $\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{k}(n < k) = 0$. После этого можно сделать треугольник Паскаля:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

Рассмотрим решетчатую плоскость (если вы это читаете это и здесь нет картиночки напишите `@doktorkrab`, чтобы я добавил картиночку). Какое здесь количество путей? Ну $An^k = A_{n-1}^k + A_{n-1}^{k-1}$. А это Сшки.

Теперь посмотрим на сумму на диагонали. Получаем гипотезу: $\sum m = 0^n \binom{m}{k} = \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \ldots + \binom{n-1}{k} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$.

**Доказательство**. По основному комбинаторному тождеству: $\binom{m+1}{k+1} = \binom{m}{k+1}\binom{m}{k} \Rightarrow \binom{m}{k} = \binom{m+1}{k+1} - \binom{m}{k+1}$. Тогда:

$$\sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} = \underbrace{\sum_{m=k}^{n} \binom{m+1}{k+1}}_{\binom{n+1}{k+1} + \sum_{m=k}^{n-1} \binom{m+1}{k+1}} - \underbrace{\sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k+1}}_{\sum_{m=k+1}^{n} \binom{m}{k+1}}.$$

Дальше, если, расписать сумму все получится.

Пусть хочу набрать $k+1$-элементное подмножество из $n+1$-элементного множества. Пусть мы выбрали последний элемент, тогда у нас есть $\binom{n}{k}$ способов, а если не выбрали, то $\binom{n}{k+1}$ способов. А по индукции $\binom{n}{k+1} = \binom{n-1}{k+1} + \binom{n-1}{k}$. И так далее. $\square$

Рассмотрим $\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot \binom{m}{k-i}$

**Доказательство**. Рассмотрим два множества: одно $n$-элементное ("мальчики"), другое $m$-элементное ("девушки"). Тогда пусть мы выбрали $i$ мальчиков, тогда нам нужно выбрать $k - i$ девушек. $\square$

Мы здесь применили принцип `double counting`: если мы посчитали что-то двумя способами, то результаты равны.

## 2.2. Биномиальные коэффициенты

Подробности на втором курсе.

Рассмотрим бином Ньютона: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k}$

**Доказательство**. Раскроем скобки в левой части: $(x+y)(x+y)(x+y)\ldots$. Когда у нас $x^k$? Когда мы ровно в $k$ скобках выбрали $x$. Сколько способов? Очевидно $\binom{n}{k}$. $\square$

Частные случаи:

- $x = y = 1$. Тогда $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

  Рассмотрим множество $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Каждому числу можно сопоставить $0/1$ — берем/не берем. Тогда количество подмножеств — количество бинарных строчек длины $n$. Такой метод называется биективным: когда мы доказываем, что один объект является биекцией другого, то их количества равны.

- $x = 1, y = -1$. Тогда $0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$ — количества способов выбрать подмножество четных длин и нечетных длин равны.

## 2.3. Мультимножество

Хотим посчитать $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ — количество $k$-элементных подмультимножеств.

Пусть $X = [n]$. По принципу биекции найдем сначала $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ для $X$, а потом найти для произвольного множества.

Пусть есть множество $A$, заменим его на множество $\{i + A_i\}$. $\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \binom{n+k-1}{k}$

## 2.4. $k$-перестановки

***Определение* 2.1.** Упорядоченные набор из $k$ элементов, где все элементы принадлежат множеству $X$.

Если мы считаем, что с повторениям, то ответ $n^k$, а если без то $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = (n)_k$. Перестановку можно записать как: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$. То есть $i$ перешло в $a_i$. После этого можно композировать перестановки: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Заметим, что:

1. Существует нейтральный элемент — тождественная перестановка $e = \{1, 2, \ldots, n-1, n\}$
2. Существует обратный элемент: $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = e$
3. Ассоциативность: $\sigma \cdot (\tau \cdot \pi) = (\sigma \cdot \tau) \cdot \pi$

Значит перестановки с операцией композиции — группа. Носит название $S_n$. Есть теорема о том, что любая конечная группа представима как подгруппа $S_n$.

Рассмотрим $(n)_k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \binom{n}{k} \cdot k!$. Тогда $\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}$. Тогда можно заменить $n$ на $q, q \in \mathbb{C}$. Тогда

$$\binom{q}{k} = \begin{cases} \frac{(q)_k}{k!} & k > 0 \\ 1 & k = 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}.$$

Пусть $(n)^k = n \cdot (n+1) \cdot \ldots \cdot (n+k-1)$. Тогда $\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \frac{(n)^k}{k!}$

## 2.5. Комбинаторика в схемах и мемах

Пусть есть $n$ различных предметов. Нужно выбрать $k$ предметов с различными ограничениям: с повторениями/без, упорядоченные/неупорядоченные.

| | с повторениями | без повторений |
|---|---|---|
| упорядоченные | $n^k$ | $(n)_k$ |
| неупорядоченные | $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ | $\binom{n}{k}$ |

Схема ящиков.

| | $\forall$ | $\leqslant 1$ | $1$ | $\geqslant 1$ |
|---|---|---|---|---|
| ящики+предметы различимы | $n^k$ | $(n)_k$ | $1/n!$ | $\widehat{S}(n,k)$ |
| ящики различимы, а предметы — нет | $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ | $\binom{n}{k}$ | $1/0$ | $\left(\!\binom{n}{k-n}\!\right)$ |
| ящики не различимы, а предметы различимы | | | | $S(n,k)$ |
| ящики+предметы неразличимы | | | | |

Последнюю строчку мы не сможем заполнить на первом курсе, нужны производящие функции. Эта строчка решает множество задач, например, разложение числа на слагаемые.

Отображение $f : X \to Y$ — такое правило, что $\forall x \in X\ \exists! y \in Y : y = f(x)$. Количество $k^n$ $(|X| = n, |Y| = k)$

***Определение* 2.2.** Отображение — тройка из $(x, y, \Gamma \subseteq X \times Y)$, причем каждый $x_i$ встречается в $\Gamma$ ровно один раз.

***Определение* 2.3.** Отображение называется иньективным, если $\forall x_1, x_2 \in X\ f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Их количество — $(k)_n$

***Определение* 2.4.** Отображение называется биективным, если $\forall y \in Y\ \exists! x \in X : y = f(x)$. Количество — $n!$.

***Определение* 2.5.** Отображение называется сурьективным, если $\forall y \in Y\ \exists x \in X : y = f(x)$.

Посчитаем количество сурьективных отображений. Пусть $\mathrm{Im}(f) = \{y \in Y \mid \exists x \in X : y = f(x)\}$. Тогда для любого отношения $f : X \to \mathrm{Im}(f)$ — сурьективно.

Пусть $|\mathrm{Im}(f)| = i$, а количество сурьективных отображений — $\widehat{S}(n,i)$. Тогда $\widehat{S}(n,i) \cdot \binom{k}{i}$ — количество суьективных подмножеств мощности $k$.

Тогда $k^n = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \widehat{S}(n,i)$

Пусть есть две числовые последовательности $f_0, f_1, \ldots, f_k, \ldots$ и $g_0, g_1, \ldots, g_k, \ldots$. Причем $g_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f_i$, тогда $f_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-1} \binom{k}{i} g_i$. Значит $\widehat{S}(n,k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-1} \binom{k}{i} \cdot i^n$

Рассмотрим отображение $\{\{x_1, x_2\}, \{x_3\}, \varnothing\}$. Получение разбиение на блоки. Предположим, что отображение сурьективно, значит получили разбиение $k$ предметов $n$ ящиков.

Предположим, что в первый ящик нужно положить $a_1$ предмет, во второй — $a_2$, и так далее. Тогда количество вариантов: $\sum \binom{n}{a_1}\binom{n-a_1}{a_2} \ldots$. Если взять $\sum_{a_i \geqslant 0, a_1 + \ldots + a_k = n} \binom{n}{a_1}\binom{n-a_1}{a_2} = k^n = \frac{n!}{a_1! a_2! \ldots a_k!}$. А если $\sum_{a_i > 0, a_1 + \ldots + a_k = n} \binom{n}{a_1}\binom{n-a_1}{a_2} = \widehat{S}(n,k)$

Хотим разбить на блоки вида $a_1$ предметов + $a_2$ предметов + $a_3$ предметов...Тогда заметим, что это $\sum_{a_i \geqslant 0, \sum a_i = n} \binom{n}{a_1}\binom{n-a_1}{a_2} \ldots \binom{n-a_1-a_{k-1}}{a_k}$. Заметим, что суммарно это $k^n$, а если строго больше нуля, то $\widehat{S}(n,k)$. Также можно раскрыть скобки и получить. $\frac{n!}{a_1! a_2! \ldots a_k!}$

Рассмотрим $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = P(n; k; n-k)$. Комбинаторно они равны через битовые строки.

Теперь посмотрим на $\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \frac{(n-1+k)!}{(n-1)! \cdot k!}$, через шары и перегородки.

Вернемся к $k^n$ — все отображения, $\widehat{S}(n,k)$ — все сюръективные отображение, $S(n,k)$ — количество разбиений $n$-множества на $k$-подмножества. (Числа Стирлинга второго рода).

Заметим, что $S(n,k) \cdot k! = \widehat{S}(n,k)$, так как в $S$ с крышечкой это про неупорядоченные. $S(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n$. $S(0,0) = 1$. $\forall S(n,0) = 0$. $S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k)$. Доказываем так: либо удаляем $x_n$, либо пихаем $x_n$ куда-то.

$$k^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} \widehat{S}(n,i) = \sum_{i=0}^{n} \frac{k!}{i!(k-i!)} S(n,i).$$

Откуда:

$$x^n = \sum_{i=0}^{n} (x)_i \cdot S(n,i) \iff (x)_n = \sum_{i=0}^{n} x^i s(n,i)..$$

Где $s(n,i)$ — числа Стирлинга первого рода.

Решим задачу, где мы хотим разбить $n$ различимых предметов в $k$ различимых ящиков $B(n,k) = \sum_{i=0}^{k} S(n,i)$. Причем $B(n,n) = B_n$ — числа Белла. Количество способов разбить $n$-множество на блоки.

# 3. Дискретная вероятность

Вероятностное событие — событие в какой-то вероятностной математической модели. (Результат трудно предсказать)

Множество исходов $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ — состоит из элементарных исходов. В дискретной вероятности $\Omega$ конечно или счетно.

Событие $A$ — подмножество $\Omega$.

Рассмотрим какой-то набор событий, добавим туда $\varnothing, \Omega$. Получим алгебру. Тогда вероятность это отображение $P : \Omega \mapsto [0, 1]$, такое что $\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$. Тогда $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$.

1. $P(\varnothing) = 0, P(\Omega) = 1$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

***Определение* 3.1.** Назовем события $A$ и $B$ несовместными, если $A \cap B = \varnothing$.

Некоторым очень хочется дать определение вида $P_r(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$. Это не работает, если события не равновероятны.

Пусть есть два события на кубике: $A$ — число $> 3$, $B$ — четное число. $P_r(A) = \frac{1}{2}, P_r(B) = \frac{1}{2}$.

Теперь пусть есть инсайд: событие $A$ произошло. Тогда $P_r(B \mid A) = \frac{2}{3}$. Тогда посмотрим на картинку и получим $P_r(B \mid A = \frac{|A \cap B|}{|A|})$. Но не забудем, про то, что мы смотрели на равновероятные события, тогда поделим на $|\Omega|$. Получим $P_r(B|A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P_r(A \cap B)}{P_r(A)}$.

Посмотрим на крайние случаи: $P_r(A|A) = 1$, $P_r(A|\Omega) = P_r(A)$, $P_r(B|A) = 1$, если $A \subseteq B$.

Тогда пусть $B_1 \cap B_2 = \varnothing$. Тогда $P_r((B_1 \cup B_2) \cap A) = P_r((B_1 \cap A) \cup (b_2 \cap A)) = P_r(B_1 \cap A) + P_r(B_2 \cap A)$. А $P_r(B_1 \cup B_2 \mid A) = P_r(B_1 \mid A) + P_r(B_2 \mid A)$.

Посмотрим на $P_r(B|\overline{A}) = \frac{1}{3}$. Докажем, что $P_r(B \mid A) \cdot P_r(A) + P_r(B \mid \overline{A}) \cdot P_2(\overline{A}) = 1$. Докажем формулу полной вероятности.

**Доказательство**. Пусть $\Omega$ разбита на блоки $\{A_1, \ldots, A_k\}$. Заметим, что $P_r(B) = P_r(B \cap \Omega) = P_r(B \cap (A_1 \cup \ldots \cup A_k)) = P_r((B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_k))$. Дальше заметим, что $\forall i, j : A_i \cap A_j = \varnothing$. Тогда получаем $P_r(B \cap A_1) + P_r(B \cap A_2) + \ldots + P_r(B \cap A_k)$. Применив формулу условной вероятности, получим формулу полной вероятности:

$$P_r(B) = P_r(B \mid A_1) \cdot P_r(A_1) + P_r(B \mid A_2) \cdot P_r(A_2) + \ldots + P_r(B|A_k) \cdot P_r(A_k).$$

□

Заметим, что $P_r(A \cap B) = P_r(B \mid A) \cdot P_r(A)$ и $P_r(B \cap A) = P_r(A \mid B) \cdot P_r(B) \Rightarrow P_r(A \mid B) = \frac{P_r(B|A) P_r(A)}{P_r(B)}$. Тогда, вспомнив формулу полной вероятности, получаем:

$$P_r(A_i \mid B) = \frac{P_r(B \mid A_i) \cdot P_r(A_i)}{\sum_{j=1}^{k} P_r(B \mid A_j) \cdot P_r(A_j)}.$$

Пусть у вас есть событие $P_r(B)$, причем $P_r(B) = P_r(B \mid A) = \frac{P_r(A \cap B)}{P_2(A)} P_r(A) \Rightarrow P_r(A \cap B) = P_r(A) \cdot P_r(B)$

***Определение* 3.2.** Два события называются независимыми, если вероятность их пересечения равна произведению вероятностей этих событий.

Схема Бернулли: есть $n$ независимых испытаний, где есть два исхода: $p > 0$ и $q > 0$, $p+q = 1$. Все элементарных исходов можно записать в виде бинарной строки длины $n$. Тогда для какого-то $\omega$ $P_r(\omega) = p^k \cdot q^{n-k}, k = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Заметим, что $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1^n = 1$.

***Определение* 3.3.** Независимые в совокупности события — события $A_1, \ldots, A_k$, такие что $P_r(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) = P_r(A_1) \cdot P_r(A_2) \cdot \ldots \cdot P_r(A_k)$,

$\Omega_1 = \{\text{успех}, \text{неудача}\}$, $P_{r_1}(\omega) = \begin{cases} p & \text{успех} \\ q & \text{неуспех} \end{cases}$, $A_1 = \{\varnothing, \text{успех}, \text{неудача}, \Omega\}$. Тогда $\Omega = \Omega_1 \times \ldots \Omega_n$, $A = A_1 \times \ldots \times A_n$.

Тогда рассмотрим $(\Omega_1, A_1, P_{r_1})$, $(\Omega_2, A_2, P_{r_2})$. Тогда $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $A = A_1 \times A_2$. Тогда события $A_1 \times \Omega_2$, $\Omega_1 \times A_2$.