

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**  
Санкт-Петербургский Политехнический университет Петра Великого  
Институт энергетики  
Высшая школа энергетического машиностроения

**Отчёт по практической работе №2**  
по дисциплине «Теория автоматического регулирования»  
«Определение приближённой математической модели элемента  
автоматической системы по виду переходной функции»

Выполнили:

Студент гр.3231303/21201 п/г 2 \_\_\_\_\_ А. К. Дмитриев

Студент гр.3231303/21201 п/г 2 \_\_\_\_\_ А. Д. Ярошевич

Принял:

Доцент ВШЭМ \_\_\_\_\_ В. А. Суханов

Санкт-Петербург  
2025

## **Реферат**

Отчет объемом 16 страниц содержит пять рисунков, три таблицы.

В данной практической работе проведено построение упрощённой математической модели системы автоматического регулирования (САР) паровой турбины с помощью одного колебательного звена. Цель работы состояла в поиске параметров этого звена.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** ПЕРЕХОДНЫЙ ПРОЦЕСС, КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ЗВЕНО, ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ, ПРИБЛИЖЕННАЯ МОДЕЛЬ.

## **СОДЕРЖАНИЕ**

Введение .....	3
1 Описание исследуемой САР и исходные данные .....	4
2 Система уравнений, описывающих переходные процессы в исследуемой САР и её перевод в программный вид .....	5
3 Методика исследования .....	8
4 Результаты численного моделирования .....	10
Заключение .....	14
Литература .....	15

## **Введение**

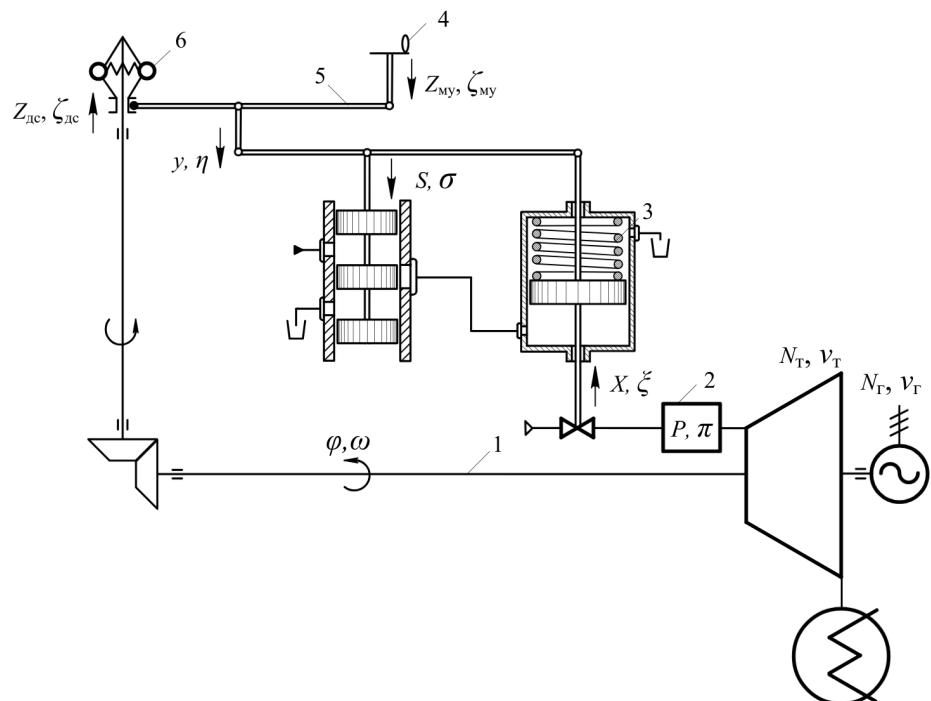
Цель работы состоит в редуцировании математической модели САР конденсационной паровой турбины без промежуточного перегрева и отбора пара до единичного колебательного звена. В ходе исследования использовались классические методы теории автоматического регулирования [1]. Работа проведена с помощью пакетов DifferentialEquations.jl [2] и Makie.jl [3] языка программирования Julia в среде Pluto.

Задача работы заключается в поиске значений параметров колебательного звена, при которых его переходная функция будет эквивалентна исходной переходной функции модели САР ПТУ.

Актуальность исследования заключается в упрощении математической модели, что позволит тратить меньше временных и вычислительных ресурсов на симуляцию.

## 1 Описание исследуемой САР и исходные данные

Объектами исследования являются система регулирования угловой скорости ротора паровой турбины без промежуточного перегрева пара, принципиальная схема которой изображена на рисунке 1.1, и колебательное звено.



1 — ротор турбогенератора; 2 — паровая ёмкость между регулирующим клапаном и соплами турбины; 3 — сервомотор; 4 — механизм управления; 5 — управляющий рычаг; 6 — датчик угловой скорости ротора;  $\varphi$  — относительное изменение угловой скорости ротора (величина, характеризующая ошибку регулирования);  $\pi$  — относительное изменение давление пара перед соплами турбины;  $\xi$  — относительное изменение положения регулирующего клапана (или поршня сервомотора);  $\eta$  — относительное изменение положения выходной координаты элемента сравнения;  $v_r$  — относительное изменение нагрузки на генераторе;  $\zeta_{my}$  — относительное изменение положения механизма управления

Рисунок 1.1 — Принципиальная схема САР ПТУ

Значения параметров САР указаны в таблице 1.1.

Таблица 1.1 — Значения параметров САР

$T_a$	$T_\pi$	$T_s$	$\delta_\omega$
7	0.4	0.7	0.12

## 2 Система уравнений, описывающих переходные процессы в исследуемой САР и её перевод в программный вид

В работе рассматривается представление САР в виде линейной математической модели в стандартной форме:

$$\begin{cases} T_a \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \pi - \nu_r \\ T_\pi \cdot \frac{d\pi}{dt} + \pi = \xi \\ T_s \cdot \frac{d\xi}{dt} + \xi = \eta \\ \eta = -\frac{\varphi}{\delta_\omega} + \zeta_{my} \end{cases} \quad (2.1)$$

где  $T_a$  — постоянная времени ротора;  
 $T_\pi$  — постоянная времени паровой ёмкости;  
 $T_s$  — постоянная времени сервомотора;  
 $\delta_\omega$  — величина, пропорциональная коэффициенту усиления разомкнутой системы;  
 $\eta$  — относительное изменение положения выходной координаты элемента сравнения;  
 $\varphi$  — относительное изменение угловой скорости ротора турбины и генератора. Характеризует ошибку регулирования;  
 $\pi$  — относительное изменение давления пара в паровой ёмкости;  
 $\xi$  — относительное изменение положения регулирующего органа;  
 $\zeta_{my}$  — относительное изменение положения механизма управления турбиной;  
 $\nu_r$  — относительное изменение нагрузки на генераторе.

Эта система уравнений, подготовленная для анализа средствами DifferentialEquations.jl, записана в функции, приведённой на листинге 2.1.

## Листинг 2.1 — Функция, описывающая исследуемую САР

```
1  function simulate_system();
2      Ta = 7,
3      Tπ = 0.4,
4      Ts = 0.7,
5      δω = 0.12,
6      νг = t -> t >= 0 ? -1 : 0.0,
7      u0 = [0.0, 0.0, 0.0],
8      tspan = (0.0, 30.0)
9  )
10     function system!(du, u, p, t)
11         φ, π, ξ = u
12         η = -φ / δω
13         du[1] = (π - νг(t)) / Ta
14         du[2] = (ξ - π) / Tπ
15         du[3] = (η - ξ) / Ts
16     end
17
18     prob = ODEProblem(system!, u0, tspan)
19     solve(prob, Tsit5(), reltol=1e-6, abstol=1e-6)
20 end
```

Рассмотрим листинг 2.1 построчно:

- На строчках 2-9 задаются значения параметров САР  $T_a, T_\pi, T_c, \delta_\omega$  согласно выданному варианту, а также закон зависимости внешнего воздействия от времени  $\nu_g(t)$ , начальные условия  $u_0$  и время симуляции;
- На строчках 10-16 описана собственно исследуемая система;
- На строчке 18 из уравнения, начальных условий и времени симуляции формулируется задача `prob` для решателя;
- На строчке 19 происходит решение системы уравнений с помощью выбранного решателя `Tsit5()` и выбранных коэффициентов точности для него; Результат представляет из себя численную зависимость  $\varphi(t)$  для одного режима САР.

Колебательное звено представлено его передаточной функцией:

$$W(\lambda) = \frac{K}{T^2\lambda^2 + 2\zeta T\lambda + 1}, \quad (2.2)$$

где  $K$  — коэффициент усиления;

$T$  — постоянная времени звена;

$\lambda$  — переменная Лапласа;

$\zeta$  — величина затухания.

Это уравнение, подготовленное для анализа средствами DifferentialEquations.jl, записана в функции, приведённой на листинге 2.2.

Листинг 2.2 — Функция, описывающая исследуемую САР

```
1  function simulate_oscillatory_link();
2      K, ζ, T,
3      vγ = t -> t >= 0 ? -1 : 0.0,
4      u₀ = [0,0],
5      tspan = (0.0, 20.0)
6  )
7      function oscillatory_link!(du, u, p, t)
8          φ, dφ = u
9          du[1] = dφ
10         du[2] = (-K*vγ(t) - 2ζ*T*dφ - φ) / T^2
11     end
12
13     prob = ODEProblem(oscillatory_link!, u₀, tspan)
14     solve(prob, Tsit5(), reltol=1e-6, abstol=1e-6)
15 end
```

### 3 Методика исследования

Для поиска приближённой математической модели автоматической системы регулирования для начала нужно определить характер звена, которым производится аппроксимация. Очевидно, таким звеном является позиционное колебательное звено.

Проведя симуляцию реакции системы САР на единичное ступенчатое воздействие (сигнал Хевисайда), необходимо построить график переходной функции, по которому можно определить характерные параметры для поиска параметров колебательного звена.

Выделим из уравнения колебательного звена 2.2 характеристический многочлен и найдем его корни:

$$\begin{aligned} T^2 \lambda^2 + 2\zeta T \lambda + 1 &\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-2\zeta T \pm \sqrt{4\zeta^2 T^2 - 4T^2}}{2T^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lambda = \frac{-\zeta + i\sqrt{1 - \zeta^2}}{T} = -a + i\omega \Rightarrow a = \frac{\zeta}{T}; \quad \omega = \frac{1}{T} \sqrt{1 - \zeta^2}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где  $a$  — декремент затухания;

$\omega$  — частота колебаний.

Так как мы рассматриваем затухающую экспоненту,

$$\frac{A_2}{A_1} = e^{-at} \Rightarrow \ln\left(\frac{A_2}{A_1}\right) = -a \cdot t \Rightarrow a = \frac{1}{t} \ln\left(\frac{A_1}{A_2}\right), \tag{3.2}$$

Возьмём  $t$  как полупериод колебаний, тогда  $A_1$  и  $A_2$  — амплитуды, отстоящие друг от друга на полупериод,  $t = \pi/\omega$ . Тогда

$$\alpha = \frac{\zeta}{T} = \frac{\omega}{\pi} \ln\left(\frac{A_1}{A_2}\right); \tag{3.3}$$

$$\omega = \frac{1}{T} \sqrt{1 - \zeta^2}; \tag{3.4}$$

Откуда параметры передаточной функции колебательного звена:

$$\zeta = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}; \quad (3.5)$$

$$T = \frac{1}{\omega} \sqrt{1 - \zeta^2}, \quad (3.6)$$

где  $\omega$  — частота,  $\omega = \pi/t_{\text{пп}}$ ;  
 $t_{\text{пп}}$  — время полупериода.

Время полупериода  $t_{\text{пп}}$ ,  $A_1$  и  $A_2$  определяется из графика переходной функции САР как половина времени между пиками, и разница высоты первых двух экстремумов с установившейся ошибкой регулирования.

## 4 Результаты численного моделирования

Проведение симуляции реакции САР позволяет получить график переходной функции, показанный на рисунке 4.1. Из него можно получить значения полупериода  $t_{\text{пп}}$  и амплитуд  $A_1$  и  $A_2$  относительно асимптоты (установившейся ошибки регулирования). Полученные значения приведены в таблице 4.1.

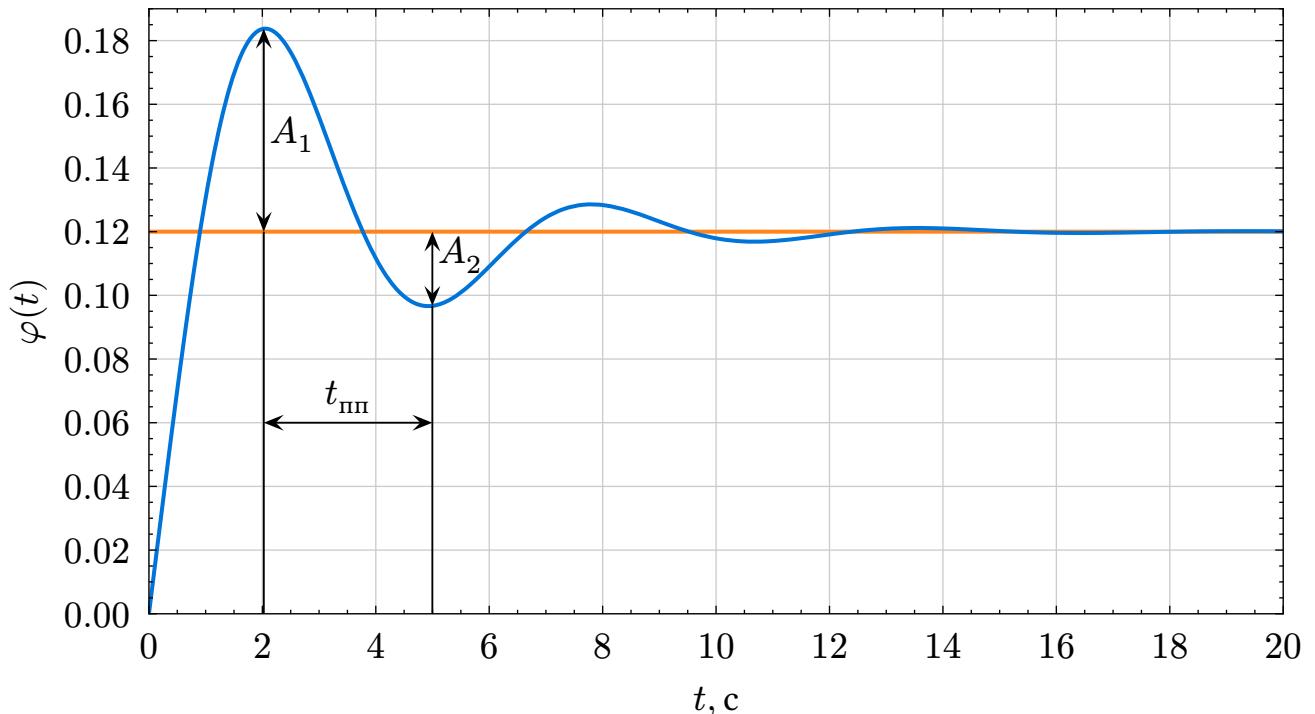


Рисунок 4.1 — График переходной функции исследуемой САР

Таблица 4.1 — Значения характерных параметров переходной функции САР

$t_{\text{пп}}, \text{с}$	$A_1$	$A_2$
2.972	0.064	0.023

Вычислим параметр  $a$ :

$$a = \frac{1}{t_{\text{пп}}} \ln \left( \frac{A_1}{A_2} \right) = \frac{1}{2.972} \cdot \ln \left( \frac{0.064}{0.023} \right) = 0.339 \text{ } 1/\text{с}; \quad (4.1)$$

Тогда параметры  $\zeta$  и  $T$  приближенной матмодели:

$$\zeta = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} = \frac{0.339}{\sqrt{0.339^2 + 1.057^2}} = 0.305; \quad (4.2)$$

$$T = \frac{1}{\omega} \sqrt{1 + \zeta^2} = \frac{1}{1.057} \sqrt{1 + 0.305^2} = 0.901 \text{ с}; \quad (4.3)$$

Полученный график переходной функции приближенной матмодели САР изображен на рисунке 4.2.

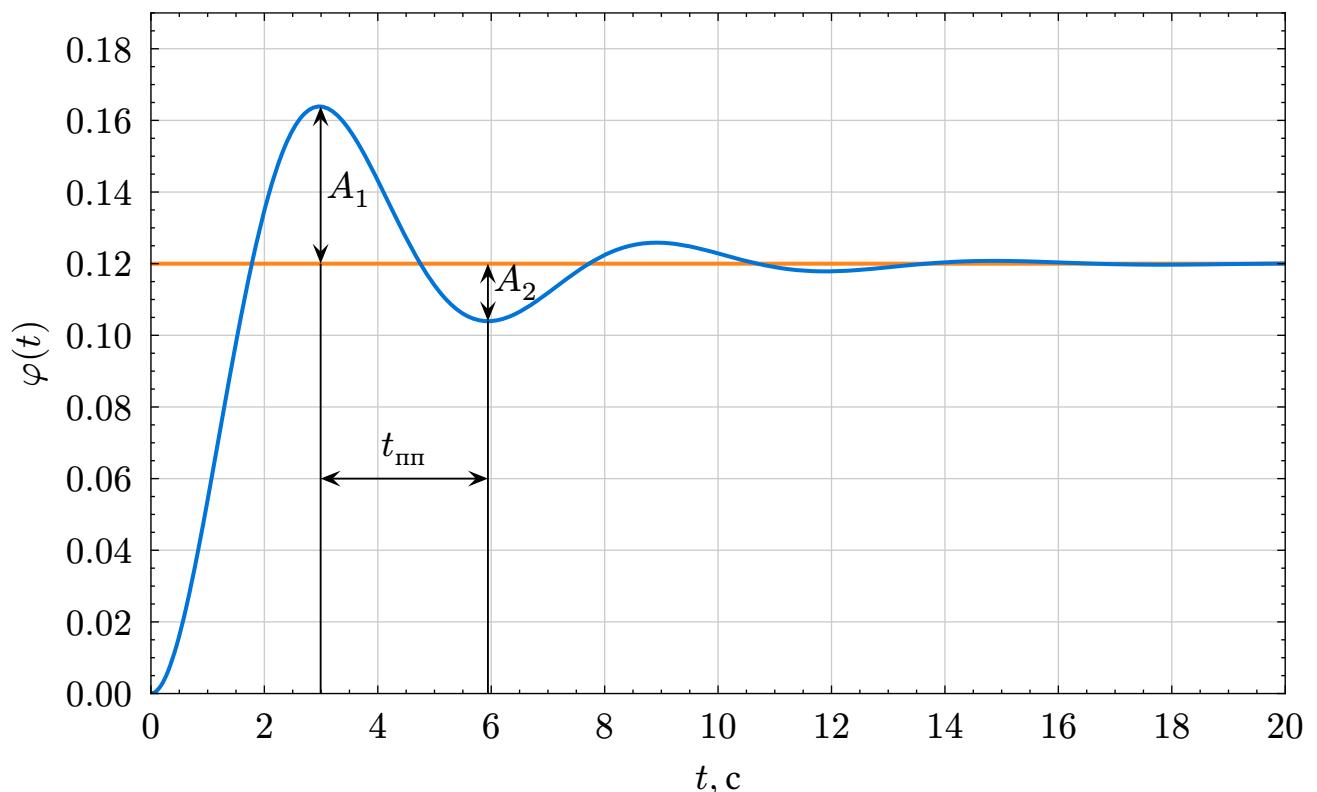


Рисунок 4.2 — График переходной функции приближенной матмодели САР (колебательное звено)

Таблица 4.2 — Значения характерных параметров переходной функции приближенной матмодели САР

$t_{\text{пп}}, \text{с}$	$A_1$	$A_2$
2.95	0.044	0.016

Из сравнения характерных параметров переходных функций в таблицах 4.1 и 4.2 видно значительное несовпадение  $A_1$  и  $A_2$ , причем значения параметров приближенной матмодели меньше, чем значения параметров САР. Причина этой разницы видна при сравнении графиков переходных функций на рисунке 4.3. В начальном этапе переходная функция приближенной матмодели «запаздывает» за переходной функцией САР: производная выходной координаты в ней в начале равна 0, тогда как такого условия для оригинальной матмодели нет.

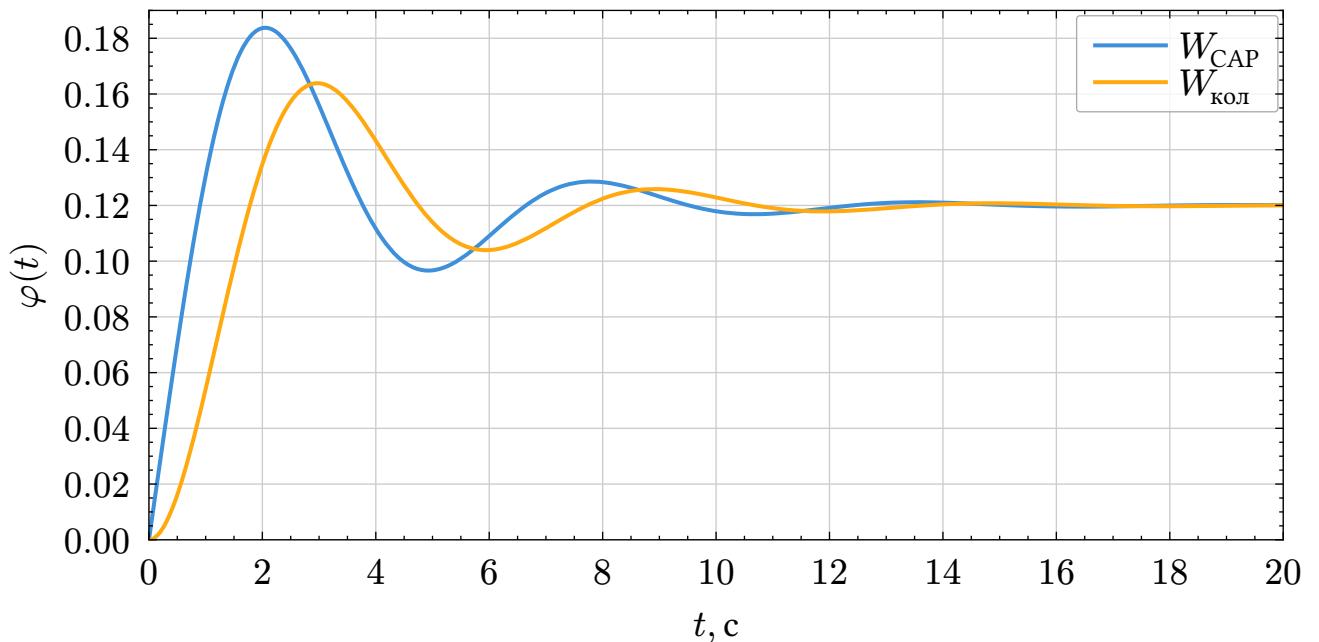


Рисунок 4.3 — Сравнение графиков переходных функций САР (голубым цветом) и её приближенной модели (желтым цветом)

От запаздывания можно избавиться, поменяв условие нулевой начальной производной на условие равенства начальной производной соответствующей производной переходной функции оригинальной матмодели САР. Однако этот график не будет считаться переходной функцией, так как не соответствует требованию нулевых начальных условий. Такой график показан на рисунке 4.4.

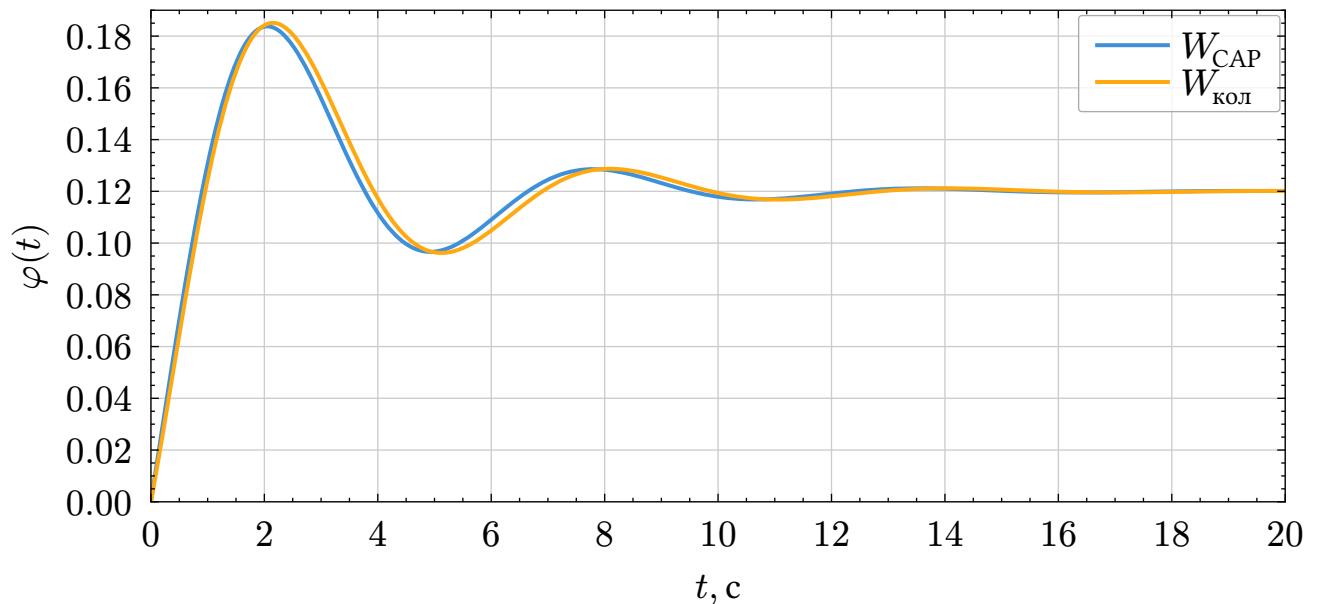


Рисунок 4.4 — Сравнение графиков переходной функции САР и модифицированной переходной функции приближенной модели

## **Заключение**

В результате выполнения работы была получена приближенная математическая модель системы автоматического регулирования конденсационной паровой турбины без промежуточного перегрева пара.

Вычислены параметры этого звена, произведено сравнение графиков переходной функции исходной модели САР с полученной упрощённой моделью. Обнаружено «запаздывание» упрощённый модели, предложен метод его ликвидации.

Полученные результаты демонстрируют возможность построения упрощённой математической модели САР.

## **Литература**

1. Егоршин В.П., Маспанов С.Н., Суханов В.А. Теория автоматического регулирования и автоматизация энергетических установок. учеб. пособие. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2021.
2. Rackauckas C., Nie Q. Differentialequations.jl—a performant and feature-rich ecosystem for solving differential equations in julia // Journal of Open Research Software. Ubiquity Press, 2017. Т. 5, № 1. С. 15.
3. Danisch S., Krumbiegel J. Makie.jl: Flexible high-performance data visualization for Julia // Journal of Open Source Software. The Open Journal, 2021. Т. 6, № 65. С. 3349.